Aspekte Mehrkriterieller Optimierung $\mathcal{C}(T)$-wertiger Abbildungen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
(mathematisch-naturwissenschaftlicher Bereich) der
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

von Frau Dipl.-Math. Kristin Winkler
geb. am 23. April 1975 in Zittau

Gutachter:

1. Prof. Dr. Christiane Tammer, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
2. Prof. Dr. Johannes Jahn, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
3. Prof. Dr. Petra Weidner, Fachhochschule Hildesheim/Holzminden/Göttingen

Halle (Saale), 26.09.2003

urn:nbn:de:gbv:3-000005558
[http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=nbn%3Ade%3Agbv%3A3-000005558]

Dank.

Mein besonderer Dank gilt Frau Prof. Dr. Christiane Tammer für die allumfassende und vor allem geduldige Betreuung während der Anfertigung dieser Dissertation. Ihr verdanke ich es insbesondere, an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg eine neue wissenschaftliche Heimat gefunden zu haben.

Den Mitarbeiterinnen, Mitarbeitern und den Angehörigen des Institutes für Optimierung und Stochastik danke ich für die freundliche Aufnahme und das angenehme Arbeitsklima. Explizit nennen möchte ich Herrn Dr. Andreas Hamel und Herrn Dr. Frank Heyde, deren kritische Auseinandersetzung mit den vorliegenden Resultaten wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Ich danke dem Land Sachsen-Anhalt und der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg für die Gewährung eines Graduiertenstipendiums während der ersten knapp drei Jahre meiner Promotionszeit.

Danken möchte ich schließlich meinen Eltern, die mich in meinem Vorhaben stets uneingeschränkt unterstützt haben. – Dank natürlich auch Dir, Daniel!

Inhaltsverzeichnis

Verwendete Notationen

$\mathcal{C}(T)$	Raum der auf T stetigen reellwertigen Funktionen
$\mathcal{M}(T)$	Raum der Radon-Maße auf T
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{R}_+$	$= \{r \in \mathbb{R} :\ r \geq 0\}$ ... nichtnegative reelle Zahlen
$\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$	n-dimensionaler Euklidischer Raum
$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$	topologische Vektorräume
$\mathfrak{X}'$	topologischer Dualraum zu $\mathfrak{X}$
$A + B$	$= \{a + b : a \in A, b \in B\}$ ... Summe von Teilmengen A, B eines Vektoraumes
λA	$= \{\lambda a : a \in A\}$
$\operatorname{core} A$	algebraisch Inneres von A
$\operatorname{int} A$	topologisch Inneres von A
$\operatorname{cl} A$	topologischer Abschluß von A
$\operatorname{bd} A$	$= \operatorname{cl} A \backslash \operatorname{int} A$ ... topologischer Rand von A
$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B
$A \subset B$, $A \subsetneq B$	A ist echte Teilmenge von B
$\nexists$	es existiert kein (Negation von $\exists$)
Y	Teilmenge von $\mathfrak{Y}(= \mathcal{C}(T))$ ... i.a. Menge der zulässigen Alternativen
Y_z	$= Y \cap (z - K)$ ... Ausschnitt von Y im Punkt z bzgl. des Kegels K
f, g	Funktionen $\mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ oder $T \to \mathbb{R}$
$f \equiv g$	... $f(t) = g(t)$ für alle $t \in T$
$f \not\equiv g$	... $f(t) \neq g(t)$ für wenigstens ein $t \in T$
$\mathbb{1}$	$f(t) = 1$ für alle $t \in T$
$\operatorname{dom} f$	$= \{x \in \mathfrak{X} :\ f(x) < \infty\}$ ... effektiver Definitionsbereich von f
$\mathfrak{f}$	Abbildung $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$
$\mathcal{C}(T)^+$	$= \{y \in \mathcal{C}(T) :\ y(t) \geq 0 \ \ \forall\, t \in T\}$ ... natürlicher Ordnungskegel in $\mathcal{C}(T)$
$\mathcal{C}(T)^+_m$	$= \{y \in \mathcal{C}(T) :\ y(t) \geq 0,\ y$ monoton wachsend$\}$
$\mathcal{M}(T)^+$	$= \{\mu \in \mathcal{M}(T) :\ \int_T y \,\mathrm{d}\mu \geq 0 \ \ \forall\, y \in \mathcal{C}(T)^+\}$ ... Dualkegel zu $\mathcal{C}(T)^+$
$\operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$	$= \{\mu \in \mathcal{M}(T) :\ \int_T y \,\mathrm{d}\mu > 0 \ \ \forall\, y \in \mathcal{C}(T)^+\}$ ... Quasi-Inneres von $\mathcal{M}(T)^+$
D_μ	$= \{y \in \mathcal{C}(T) :\ \int_T y \,\mathrm{d}\mu \geq 0\}$
$D^{s,\delta}$	$= \{y \in \mathcal{C}(T) :\ y(s) > 0,\ y(s) + \delta\, y(t) > 0 \ \ \forall\, t \in T \backslash \{s\}\}$
D^δ	$= \bigcup_{s \in T} D^{s,\delta}$
$C_{\mu,m}$	$= \{y \in \mathcal{C}(T) :\ y(t) + m^{-1} \int_T y \,\mathrm{d}\mu \geq 0 \ \ \forall\, t \in T\}$

$\mathcal{E}(Y, K)$	minimale Elemente der Menge $Y \subset \mathfrak{Y}$ bzgl. des Kegels $K \subset \mathfrak{Y}$
$\mathcal{E}_w(Y, K)$	schwach minimale Elemente der Menge $Y \subset \mathfrak{Y}$ bzgl. des Kegels $K \subset \mathfrak{Y}$
$\mathcal{E}_{Bo}(Y, K)$	eigentlich minimale Elemente der Menge Y bzgl. K im Sinne von Borwein
$\mathcal{E}_{Be}(Y, K)$	eigentlich minimale Elemente der Menge Y bzgl. K im Sinne von Benson
$\mathcal{E}_l(Y)$	eigentlich minimale Elemente der Menge Y im Sinne der linearen Skalarisierung
$\mathcal{E}_G(Y)$	eigentlich minimale Elemente der Menge Y im Sinne von Geoffrion
$\mathrm{Eff}(\mathfrak{f}(X), K)$	$= \mathfrak{f}^{-1}(\mathcal{E}(\mathfrak{f}(X), K))$ ... effiziente Elemente
$\mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), K)$	$= \mathfrak{f}^{-1}(\mathcal{E}_w(\mathfrak{f}(X), K))$ ... schwach effiziente Elemente
$\mathrm{Eff}_l(\mathfrak{f}(X))$	$= \mathfrak{f}^{-1}(\mathcal{E}_l(\mathfrak{f}(X)))$ ... eigentlich effiziente Elemente im Sinne der linearen Skalarisierung
$\mathrm{Eff}_G(\mathfrak{f}(X))$	$= \mathfrak{f}^{-1}(\mathcal{E}_G(\mathfrak{f}(X)))$ ... eigentlich effiziente Elemente im Sinne von Geoffrion
$z^{C,k}(y)$	$= \inf \{\tau \in \mathbb{R} : \ y \in \tau k - \mathrm{cl}\, C\}$
$\mathrm{cone}\, X$	durch X aufgespannter Kegel
$T_B(X; \bar{x})$	Borweinscher Tangentialkegel an X in $\bar{x}$
$T(X; \bar{x})$	Clarkescher Tangentialkegel an X in $\bar{x}$
$B(X; \bar{x})$	Berührungskegel an X in $\bar{x}$
$N(X; \bar{x})$	Normalenkegel an X in $\bar{x}$
$\partial\varphi(\bar{x})$	Subdifferential einer Funktion $\varphi : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$
$\mathfrak{f}'(\bar{x})_{\vert t}$	Ableitung von $x \mapsto \mathfrak{f}(x)(t)$ in $\bar{x}$
$\mathfrak{f}^{\circ}(\bar{x}; d)(t)$	verallgemeinerte (rechtsseitige) Richtungsableitung von $x \mapsto \mathfrak{f}(x)(t)$ in $\bar{x}$ und Richtung d
$\mathcal{T}(a, k)$	$= \{\tau \in \mathbb{R} : \ a + \tau k \in Y + \mathrm{cl}\, C\}$
$m(a, k)$	$= \inf \mathcal{T}(a, k)$

1. Einführung

„Wer die Wahl hat, ...“ beginnt ein bekanntes und beinahe abgedroschenes Sprichwort, das in prägnanter Form von den Mühen berichtet, Entscheidungen zu treffen. Dabei tun wir es beinahe täglich: Beantworten wir etwa die Frage nach der richtigen Kleidung (unter Berücksichtigung von Wetter, Beruf, Terminen etc.) i. a. noch nach dem Gefühl, vergleichen die meisten Menschen bei der Abwägung der richtigen Geldanlage schon unzählige Daten in Prospekten und errechnete voraussichtliche Erlöse relativ zu möglichen Verlusten. All diesen Entscheidungen liegen persönliche oder auch vorgegebene Präferenzen (Präferenzrelationen) zu Grunde, mal nur vage formulierbar, mal als konkrete Nutzenfunktionen. Charakteristisch und zugleich das eigentliche Problem solcher Entscheidungen ist, dass sich einzelne Entscheidungskriterien möglicherweise widersprechen, d. h. dass z. B. eine Alternative bzgl. einer Nutzenfunktion (bzgl. eines Zweckes) als gut bewertet wird, jedoch bzgl. einer anderen Nutzenfunktion schlechter als andere Alternativen.

Die mathematische Optimierung mit mehreren, sich widersprechenden Nutzenfunktionen wird als Mehrkriterielle Optimierung oder auch als Vektoroptimierung bezeichnet. Grundlage sind stets mehr oder weniger abstrakte Präferenzrelationen bzw. Halbordnungen, mit deren Hilfe man die Entscheidungsalternativen sortieren kann. Es gelingt allerdings i. a. keine vollständige Ordnung nach „besser“ und „schlechter“, so dass man sich auch vom gewöhnlichen Begriff der Optimalität trennen muss. Statt dessen spricht man von Effizienz und meint damit in etwa Minimalität bis auf unvergleichbare Alternativen. Eine Alternative ist in diesem Sinne effizient, falls es keine andere zulässige Alternative gibt, die besser ist.

Die betrachteten Probleme in der Mehrkriteriellen Optimierung können in verschiedener Hinsicht kategorisiert werden, etwa nach dem zu Grunde liegenden Modell (linear, nichtlinear etc.) oder dem Prozess der Entscheidungsfindung (z. b. interaktiv oder vorherige Wichtung). Eine Klassifizierung beruht auf dem betrachteten Entscheidungsraum:

- Der Hauptanteil der Autoren beschäftigt sich mit Problemen, deren Zielfunktion endlich viele Komponenten enthält. Viele Fragestellungen aus Technik und Wirtschaft führen tatsächlich auf zwei, drei oder eben n $(< \infty)$ konkrete, einander widersprechende Zielfunktionen, etwa Profit versus Sicherheit oder die Präferenzen der n Entscheidungsträger. Entsprechend der Aufgabenstellung wird dann der natürliche Ordnungskegel in $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ oder ein anderer Kegel für die Präferenzrelation zu Grunde gelegt.

  Der Raum $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ mit dem natürlichen Ordnungskegel besitzt weitestgehend „gute“ Recheneigenschaften für die Optimierungstheorie, darüber hinaus erleichtert der Rückgriff auf die Komponenten eines Vektors $y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ die Behandlung der Probleme.

- Dem Streben nach Abstraktion folgend werden aber auch Aufgaben untersucht, bei denen $\mathfrak{Y}$ ein linearer topologischer Raum ist und seine Halbordnung durch einen spitzen, nichtleeren Kegel definiert wird. Konkrete Anwendungsbeispiele hierfür findet man in der Simultanen Optimalen Steuerung, vgl. etwa Lions, [52] und [53], oder auch in der Ökonomie (Marktgleichgewichte in unendlich-dimensionalen Güterräumen), vgl. z. B. Bewley, [3], und Majumdar, [58].

> Während man bei Untersuchungen in $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$ in vielen Fällen noch seiner Intuition folgen kann, bleiben in abstrakten Räumen nur wenige „natürliche“ Rechen- und Ordnungsgesetze erhalten: So müssen etwa für beschränkte Mengen keinesfalls mehr das Infimum bzw. Supremum existieren. „Natürlich vorhandene“ Recheneigenschaften müssen als abstrakte Eigenschaften formuliert und für jeden Raum einzeln geprüft werden.

Mit der vorliegenden Arbeit wagen wir eine Gratwanderung zwischen den beiden Linien: Wir untersuchen mehrkriterielle Optimierungsprobleme im Raum $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$ der stetigen Funktionen über einer kompakten Menge T. Wegen seiner weniger freundlichen ordnungstheoretischen Eigenschaften müssen für die Untersuchung solcher Probleme oft äußerst abstrakte Ergebnisse herangezogen werden. Andererseits erlaubt $\mathcal{C}(T)$ durch seine Struktur aber auch komponentenweises Rechnen (wenn man $y(t)$ für $t \in T$ als Komponente von y betrachtet). So behält manches Resultat, das für Optimierungsprobleme in $\mathbb{R}^n$ bekannt ist, in $\mathcal{C}(T)$ seine anschauliche geometrische Form, obgleich zum Teil für die Beweise ein längerer Weg gegangen werden muss.

Anliegen dieser Arbeit ist insbesondere die Untersuchung, ob und wie sich

- für $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$ bekannte Resultate auf den Raum $\mathcal{C}(T)$ verallgemeinern lassen;
- für abstrakte Räume $\mathfrak{Y}$ bekannte Ergebnisse unter Ausnutzung der speziellen Struktur des $\mathcal{C}(T)$ verfeinern bzw. spezialisieren lassen.

Wir bereiten Ergebnisse neu auf, die für Vektoroptimierungsprobleme in $\mathbb{R}^n$ oder in allgemeinen Vektorräumen bekannt sind, kombinieren sie mit anderen Resultaten und extrahieren jene Aussagen, die zur Lösung Mehrkriterieller Optimierungsprobleme in $\mathcal{C}(T)$ beitragen können. Auf diese Weise gewinnen wir Erkenntnisse, die speziell für den Raum $\mathcal{C}(T)$ zugeschnitten sind und über das Bekannte hinausgehen.

Ein besonders markantes Beispiel für diese Arbeitsweise stellt Kapitel 3.2 (eigentliche Effizienz im Sinne von Geoffrion) dar: Die dort verwendete Definition der Geoffrion-eigentlich minimalen Elemente ist in dieser Form nur für den Raum $\mathbb{R}^n$ bekannt, im Raum $\mathcal{C}(T)$ hingegen völlig neu. Anders als Borwein, der ebenfalls eine Verallgemeinerung der Geoffrionschen Definition auf unendlichdimensionale Räume vorlegte, orientieren wir uns aber streng an der Definition von Geoffrion. Auch die Resultate zur Darstellung der Geoffrion-eigentlichen Minimalität als Minimalität bzgl. Kegel findet man bisher nur für den Fall $\mathbb{R}^n$ – nicht jedoch für unendlichdimensionale Räume.

Die Ergebnisse zu Effizienzkriterien in Subdifferentialform (vgl. Kapitel 5) sind ebenfalls aus dieser Arbeitsweise entstanden. Stellen die Skalarisierungsergebnisse noch eine direkte Anwendung der Arbeiten von Tammer und Weidner dar, so ist die Idee der nachfolgenden Anwendung des Subdifferentialkalküls völlig neu.

Wir möchten dieses einführende Kapitel nicht gänzlich ohne ein Anwendungsbeispiel lassen, dessen Modellierung auf natürlichem Wege zu einem Mehrkriteriellen Optimierungsproblem mit $\mathcal{C}(T)$-wertigen Abbildungen führt: In der Standortoptimierung betrachtet man die Aufgabe, zu einer gewissen Zahl gegebener Lokalitäten (Wohnhäuser, Einkaufsmärkte der Konkurrenz etc.) einen weiteren derart hinzuzufügen, dass der Abstand – wie auch immer gemessen – zu allen vorhandenen Einrichtungen „gleichzeitig“ minimal wird. Man kann sich leicht vorstellen, dass diese Gleichzeitigkeit im eigentlichen Sinne nicht erfüllbar ist: Nähert man sich einem Standort, so entfernt man sich möglicherweise von einem anderen. Daher modelliert man den

Abstand des neuen Standortes zu jeder vorhandenen Einrichtungen als eine Komponente der Zielfunktion und erhält ein Mehrkriterielles Optimierungsproblem. Nun ist ein Standort genau dann optimal (effizient), wenn die Annäherung an eine gegebene Einrichtung die Entfernung von einer anderen impliziert – es also keinen anderen Standort gibt, der näher zu allen vorhandenen Einrichtungen liegt.

Handelt es sich bei den vorhandenen Lokalitäten z. B. um den Aufenthaltspunkt von Einwohnern bzw. um eine Verteilung von deren Aufenthaltsdauern an einem bestimmten Ort, können die vorhandenen Lokalitäten kaum mehr diskret modelliert werden. In solchen Fällen gelangt man direkt zu Mehrkriteriellen Optimierungsproblemen mit $\mathcal{C}(T)$-wertigen Abbildungen. Hierbei ist T das Gebiet, in dem sich die Menschen aufhalten, ein $y \in \mathcal{C}(T)$ gibt z. B. die Bevölkerungsverteilung bzw. die durchschnittliche Verweildauer an einem Ort an. Man findet in der Literatur kaum Arbeiten, die sich mit solchen Standortproblemen beschäftigen. Wir werden in Kapitel 8 darauf zurück kommen.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt: In Kapitel 2 werden wichtige Definitionen und Resultate der Theorie halbgeordneter topologischer Räume zusammengetragen. Ein besonderer Augenmerk liegt dabei auf der Herausstellung von Eigenschaften, die den Raum $\mathcal{C}(T)$ als halbgeordneten Raum prägen. Im Kapitel 3 widmen wir uns mehrkriteriellen Optimierungsproblemen im Raum $\mathcal{C}(T)$. Im Vordergrund stehen die Definition der Effizienzbegriffe und Aussagen zur Existenz minimaler Elemente. Nachfolgend beschäftigen wir uns mit der Skalarisierung der Optimierungsprobleme. In Kapitel 4 werden die Skalarisierungsmethode von Tammer und Weidner auf den Raum $\mathcal{C}(T)$ bzw. die betrachteten Kegel zugeschnitten und entsprechende Skalarisierungsaussagen abgeleitet. Diese Resultate entwickeln wir dann in Kapitel 5 zu Effizienzkriterien mittels (verallgemeinerter) Ableitungen weiter. In Kapitel 6 widmen wir uns allgemeinen skalaren Ersatzaufgaben, die ebenfalls auf die genannte Skalarisierungsmethode zurückführbar sind. Insbesondere untersuchen wir aus der Literatur bekannte Ersatzprobleme und verallgemeinern diese auf den Fall des unendlichdimensionalen Raumes $\mathcal{C}(T)$. In Kapitel 7 schließlich kehren wir zu den oben genannten Anwendungsfällen zurück und untersuchen diese mittels der gewonnenen Ergebnisse.

Sofern nicht explizit weitere Voraussetzungen an die Menge T getroffen werden, sei T die gesamte Arbeit über eine kompakte Teilmenge eines beliebigen separablen normierten Raumes. Weiter sei T nichttrivial, d. h. enthalte mindestens zwei verschiedene Punkte t_1, t_2. Viele Aussagen mögen unter allgemeineren Voraussetzungen an T gelten – eine Differenzierung der Resultate nach Eigenschaften der Menge T war allerdings von Anfang an nicht Anliegen der Untersuchungen. Wir haben daher den Grundraum der Menge T derart gewählt, dass wir unser gesamtes Augenmerk uneingeschränkt auf die Funktionen über T richten können.

2. Theorie halbgeordneter topologischer Räume am Beispiel $\mathcal{C}(T)$

Im Folgenden tragen wir wesentliche ordnungstheoretische Eigenschaften des Raumes $\mathcal{C}(T)$ der stetigen Funktionen zusammen. Immer wieder kehren wir hierzu in allgemeinere Räume zurück: Viele Definitionen können so in einheitlicher Weise getroffen werden, außerdem ermöglicht dies eine deutliche Abgrenzung des betrachteten Raumes von anderen abstrakten Räumen.

Wir erheben keinen Anspruch auf vollständige Behandlung der Theorie halbgeordneter Räume. Vielmehr versuchen wir, die für das Verständnis der nachfolgenden Kapitel notwendigen Aussagen herauszugreifen, möglichst kurz darzustellen und mit Beispielen zu belegen.

Die meisten Resultate sind weitestgehend bekannt und in einschlägiger Literatur zu finden. In diesem Zusammenhang sei vor allem auf die Monographien von Dunford und Schwartz, [16], Göpfert, Riahi, Tammer und Zalinescu, [25], Hirsch und Lacombe, [33], Jahn, [42], Peressini, [66], sowie Schaefer, [72] und [73], verwiesen.

2.1 Kegelhalbordnungen

Sei $\mathfrak{Y}$ ein topologischer linearer Raum.

Eine nichtleere Menge $A \subset \mathfrak{Y}$ heißt **konvex**, falls $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in A$ für alle $a_1, a_2 \in A$ und $0 \leq \lambda \leq 1$. Der Durchschnitt aller konvexen Teilmengen von $\mathfrak{Y}$, die A enthalten, heißt **konvexe Hülle** von A, in Symbolen: $\operatorname{conv} A$.

Eine nichtleere Menge $K \subset \mathfrak{Y}$ mit $\lambda k \in K$ für alle $\lambda \geq 0$, $k \in K$ wird **Kegel** genannt. K heißt **spitz**, falls $K \cap (-K) = \{0\}$, und **konvexer Kegel**, falls K als Menge konvex nach obiger Definition ist. Ein Kegel ist konvex genau dann, wenn $K + K \subseteq K$ gilt. Ein Kegel K wird **echt** genannt, wenn er mindestens zwei Elemente enthält und $K \neq \mathfrak{Y}$ gilt.

Ist K eine beliebige Menge in $\mathfrak{Y}$, so wird durch

$$y_1 \preceq y_2 \qquad :\Longleftrightarrow \qquad y_2 - y_1 \in K$$

eine binäre Relation $\preceq$ definiert. Diese Relation erweist sich als

- reflexiv, d. h. $y \preceq y \ \forall\ y \in \mathfrak{Y}$, falls $0 \in K$;
- transitiv, d. h. $y_1 \preceq y_2$, $y_2 \preceq y_3 \Rightarrow y_1 \preceq y_3$ für $y_i \in \mathfrak{Y}$, $i = 1, 2, 3$, falls K ein konvexer Kegel ist;
- antisymmetrisch, d. h. $y_1 \preceq y_2$, $y_2 \preceq y_1 \Rightarrow y_1 = y_2$ für $y_i \in \mathfrak{Y}$, $i = 1, 2,$, falls K spitz ist.

Eine reflexive, transitive, antisymmetrische binäre Relation wird **Halbordnung** genannt. Im Gegensatz zu einer totalen Ordnung gilt allerdings für zwei Elemente y_1, y_2 möglicherweise weder $y_1 \preceq y_2$ noch $y_2 \preceq y_1$. Erzeugt ein konvexer Kegel K eine Halbordnung $\preceq_K$, so heißt K auch **Ordnungskegel**. Es gilt dann $K = \{y \in \mathfrak{Y} : 0 \preceq_K y\}$.

Man sagt, die Halbordnung ist mit der linearen Struktur des Raumes verträglich, falls

$$
\begin{aligned}
y_1 \preceq y_2 &\Rightarrow y_1 + y_3 \preceq y_2 + y_3 \qquad \forall\, y_1, y_2, y_3 \in \mathfrak{Y} \\
y_1 \preceq y_2 &\Rightarrow \lambda y_1 \preceq \lambda y_2 \qquad \forall\, y_1, y_2 \in \mathfrak{Y},\ \lambda \geq 0
\end{aligned}
$$

gilt. Ein linearer Raum $\mathfrak{Y}$ mit einer verträglichen Halbordnung $\preceq_K$ wird **(halb-) geordneter Vektorraum** genannt und mit $(\mathfrak{Y}, K)$ bezeichnet. Ist ein halbgeordneter Vektorraum darüber hinaus mit einer Topologie versehen, so spricht man von einem **halbgeordneten topologischen Vektorraum**.

Eine gewisse Verträglichkeit zwischen Halbordnung und Topologie wird durch die so genannte Normalität des Ordnungskegels gesichert: Sei hierzu $A \subset \mathfrak{Y}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{Y}$. Dann heißt

$$
[A] := \{y \in \mathfrak{Y} :\ y_1 \preceq_K y \preceq_K y_2 \text{ für } y_1, y_2 \in A\} = (A + K) \cap (A - K)
$$

totale Hülle (engl. full hull) von A. Gilt $A = [A]$, so heißt A **total** (engl. full). Der Ordnungskegel K heißt **bzgl. der Topologie τ normal**, falls τ eine Nullumgebungsbasis aus totalen Mengen besitzt. Normalität impliziert u. a. das Dominanzkriterium bei der Untersuchung von Konvergenz (vgl. etwa Peressini, [66], Theorem 1.1.7):

> Für zwei Folgen $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\bar{y}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{Y}$ folgt aus $0 \preceq_K y_n \preceq_K \bar{y}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bar{y}_n \to 0$ die Konvergenz von $y_n \to 0$ (in der zu Grunde gelegten Topologie).

Sei T eine kompakte Teilmenge eines vollständigen normierten Raumes. Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}(T)$ den Raum der auf T stetigen reellwertigen Funktionen $y : T \to \mathbb{R}$. Der Raum $\mathcal{C}(T)$, versehen mit der Norm

$$
\|y\| := \sup_{t \in T} |y(t)| = \max_{t \in T} |y(t)|,
$$

und der durch diese Norm erzeugten Topologie ist ein vollständiger normierter Raum, also ein Banach-Raum. Die Vektorraumoperationen Addition und Produkt mit Skalaren sind durch

$$
\begin{aligned}
(y_1 + y_2)(t) &:= y_1(t) + y_2(t), \qquad \forall\, t \in T,\ y_1, y_2 \in \mathcal{C}(T) \\
(\lambda y)(t) &:= \lambda y(t), \qquad \forall\, t \in T,\ y \in \mathcal{C}(T),\ \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

erklärt. Der Raum $\mathcal{C}(T)$ ist separabel, die Konstruktion einer abzählbaren dichten Teilmenge findet man etwa als Proposition 1.1 bei Hirsch und Lacombe, [33]. $\mathcal{C}(T)$ ist i. a. nicht reflexiv.

Die Funktionen im Raum $\mathcal{C}(T)$ sind durch die Relation $\preceq_{\mathcal{C}}$,

$$
y_1 \preceq_{\mathcal{C}} y_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y_1(t) \leq y_2(t)\ \forall\, t \in T,
$$

auf natürliche Weise (halb-)geordnet. Die Relation $\preceq_{\mathcal{C}}$ ist mit der linearen Struktur von $\mathcal{C}(T)$ verträglich. Der zugehörige Ordnungskegel ist durch

$$
\mathcal{C}(T)^+ := \{y \in \mathcal{C}(T) : y(t) \geq 0\ \forall\, t \in T\}
$$

gegeben. Man verifiziert leicht, dass $\mathcal{C}(T)^+$ tatsächlich ein spitzer konvexer Kegel ist. $\mathcal{C}(T)^+$ ist bzgl. der Normtopologie normal. Außerdem ist $\mathcal{C}(T)^+$ abgeschlossen, und es gilt

$$\operatorname{int}\mathcal{C}(T)^+ = \{y \in \mathcal{C}(T) : y(t) > 0 \ \forall\ t \in T\} \neq \emptyset.$$

Sofern wir mit der natürlichen Ordnung auf $\mathcal{C}(T)$ arbeiten, werden wir nachfolgend meist einfach vom (halb-)geordneten Raum $\mathcal{C}(T)$ sprechen und auf die explizite Nennung des Kegels verzichten.

Bemerkung 2.1. Natürlich können in $\mathcal{C}(T)$ auch andere Ordnungskegel betrachtet werden, wie etwa der folgende:

Ist $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so kann der Raum $\mathcal{C}(T)$ auch durch den spitzen konvexen Kegel

$$\mathcal{C}(T)^+_m := \{y \in \mathcal{C}(T) : y(t) \geq 0 \ \forall\ t \in T,\ y \text{ monoton wachsend}\}$$

halbgeordnet werden. Die durch $\mathcal{C}(T)^+_m$ induzierte Halbordnung ist ebenfalls mit der linearen Struktur des Raumes verträglich. Allerdings existieren keine innere Punkte von $\mathcal{C}(T)^+_m$, da zu jedem $\bar{y} \in \mathcal{C}(T)^+_m$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $y_\varepsilon \in \mathcal{C}(T)$ mit $\|y_\varepsilon - \bar{y}\| \leq \varepsilon$ derart konstruiert werden kann, dass y_ε auf einer Umgebung eines beliebigen $t \in [a, b]$ monoton fallend ist.

2.2 Ordnungsvollständigkeit und Daniell-Eigenschaft

Sei wiederum $(\mathfrak{Y}, K)$ ein beliebiger halbgeordneter Raum. Eine Menge $A \subset \mathfrak{Y}$ heißt **von oben** (bzw. **von unten**) **beschränkt**, wenn ein $\bar{a} \in \mathfrak{Y}$ existiert, so dass $\bar{a} - a \in K$ (bzw. $a - \bar{a} \in K$) für alle $a \in A$ gilt; $\bar{a}$ ist dann eine **Majorante** oder **obere Schranke** (bzw. **Minorante** oder **untere Schranke**) von A. Minorisiert eine Majorante $\bar{a}$ alle anderen Majoranten von A, so heißt $\bar{a}$ **Supremum von** A, $\bar{a} = \sup A$. Analog erfolgt die Definition eines **Infimums** $\inf A$. Sofern $\sup A$ (bzw. $\inf A$) existiert, ist es eindeutig.

Es bezeichne $|y| := \sup\{y, -y\}$ den **Betrag** des Elements y.

Ein halbgeordneter Raum $(\mathfrak{Y}, K)$ heißt **Verband**, wenn für jede zweielementige Menge $\{y_1, y_2\}$ das Supremum bzw. das Infimum in $\mathfrak{Y}$ existieren. Ist $(\mathfrak{Y}, \|.\|)$ ein Banach-Raum und impliziert $|y_1| \preceq |y_2|$ stets $\|y_1\| \leq \|y_2\|$, so heißt $(\mathfrak{Y}, K)$ **Banach-Verband**.

Der Raum $(\mathcal{C}(T), \mathcal{C}(T)^+)$, ausgestattet mit der Maximumnorm, ist ein Banach-Verband: Problemlos verifiziert man

$$\begin{aligned} y = \sup\{y_1, y_2\} \quad &\Longleftrightarrow \quad y(t) = \max\{y_1(t), y_2(t)\},\ t \in T; \\ y = \inf\{y_1, y_2\} \quad &\Longleftrightarrow \quad y(t) = \min\{y_1(t), y_2(t)\},\ t \in T. \end{aligned}$$

(max und min bezeichnen das Maximum bzw. Minimum im Sinne der reellen Zahlen). Es gilt

$$|y|(t) = \max\{y(t), -y(t)\},\ t \in T,$$

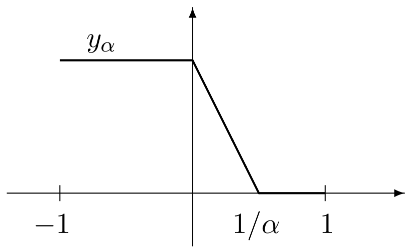
die Verträglichkeit zwischen Betrag und Norm ergibt sich durch einfaches Nachrechnen.

Definition 2.1. Ein Verband $(\mathfrak{Y}, K)$ heißt **(abzählbar) ordnungsvollständig**, falls für jede nach unten beschränkte (abzählbare) Teilmenge A von $\mathfrak{Y}$ ein Infimum existiert.

Wir untersuchen wir zunächst ein Beispiel:

Beispiel 2.1. Wir betrachten die Menge der Funktionen $y_\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $\alpha \in [1,+\infty)$,

$$y_\alpha(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } -1 \le t < 0 \\ 1-\alpha t & \text{für } 0 \le t \le 1/\alpha \\ 0 & \text{für } 1/\alpha < t \le 1 \end{array} \right\}.$$



Die Menge $A = \{y_\alpha \in \mathcal{C}[-1,1] : \alpha \in [1,+\infty)\}$ ist beschränkt: $y_1 \equiv 0$ ist eine untere Schranke, $y_2 \equiv 1$ eine obere Schranke. A besitzt aber kein Infimum: Sei y eine beliebige untere Schranke von A. Dann gilt $y(t) \le 0$ für $t \in [0,1]$, $y(t) \le 1$ für $t \in [-1,0)$ und wegen der Stetigkeit von y auch $y(0) \le 0 < 1$. Die Funktion $\bar{y}$, definiert durch

$$\bar{y}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \max\{y(t),0\} - t(1-\max\{y(t),0\}) & \text{für } -1 \le t \le 0 \\ y(t) - (1-t)y(t) & \text{für } 0 < t \le 1 \end{array} \right\}$$

ist ebenfalls eine untere Schranke für A in $\mathcal{C}[-1,1]$, und es gilt $\bar{y} \in y + K$, $\bar{y} \ne y$.

Die Überlegungen des Beispiels 2.1 gelten in gleicher Weise für die abzählbare Menge $A_0 = \{y_\alpha \in \mathcal{C}[-1,1] : \alpha \in \mathbb{N}\}$. Zumindest $\mathcal{C}[-1,1]$ ist somit weder ordnungsvollständig noch abzählbar ordnungsvollständig.

Die Ordnungsvollständigkeit von $\mathcal{C}(T)$ mit einer beliebigen kompakten Menge T ist vielfach untersucht worden. Das bekannteste Resultat stammt von Nakano, [61], der diese über topologische Eigenschaften der Trägermenge T charakterisierte. Hiernach heißt ein topologischer Raum bzw. eine Teilmenge **extrem nichtzusammenhängend (Stone'sch)**, falls die Abschließung jeder offenen Teilmenge offen ist.

Satz 2.1. *Sei T eine kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raumes. Dann gilt: $\mathcal{C}(T)$ ist ordnungsvollständig genau dann, wenn T extrem nichtzusammenhängend ist.*

Für den Beweis sei auf die Originalarbeit von Nakano, [61], oder die Version von Peressini, [66], Proposition 1.7, verwiesen. Beide Autoren führen den Beweis ohne Kompaktheit der Menge T unter der Voraussetzung der so genannten vollständigen Regularität. Gemäß dem Lemma von Urysohn über die Konstruktion stetiger separierender Funktionen auf normalen Mengen, vgl. Dunford und Schwartz, [16, I.5.2], in Verbindung mit [16, I.5.9], sind aber kompakte Mengen stets vollständig regulär. Ersetzt man vollständige Regularität durch σ-vollständige Regularität (d. h. die Abschließung jeder offenen Vereinigung höchstens abzählbar vieler abgeschlossenen Mengen ist offen), so findet man bei Nakano in [61] auch eine analoge Charakterisierung der abzählbaren Ordnungsvollständigkeit.

Aus dem Satz wird klar, dass $\mathcal{C}(T)$ im allgemeinen nicht ordnungsvollständig ist, auch nicht abzählbar ordnungsvollständig. Nur etwa im Falle der diskreten Topologie auf einer abzählbaren Menge T sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt und damit $\mathcal{C}(T)$ (abzählbar) ordnungsvollständig. Dann aber kann $\mathcal{C}(T)$ mit dem Raum $\mathbb{R}^n$ bzw. dem Raum der reellen Folgen identifiziert werden und verliert an Bedeutung für die vorliegende Arbeit.

Wir betrachten nun anstatt allgemeiner Mengen A speziell monotone Netze bzw. Folgen.

Definition 2.2. Man sagt, ein halbgeordneter Raum $(\mathfrak{Y}, K)$ besitze die **Daniell-Eigenschaft**, wenn jedes monoton fallende und von unten beschränkte Netz in $\mathfrak{Y}$ ein Infimum besitzt und gegen dieses Infimum konvergiert.

Die Daniell-Eigenschaft zerfällt in zwei unabhängige Eigenschaften:

- Ein halbgeordneter Raum $(\mathfrak{Y}, K)$ besitze die **Monotone-Netze-Eigenschaft** (engl. **monotone net property, MNP**), wenn jedes monoton fallende und von unten beschränkte Netz in $\mathfrak{Y}$ ein Infimum besitzt.

- Ein halbgeordneter Raum $(\mathfrak{Y}, K)$ besitze die **Dini-Eigenschaft**, wenn jedes monoton fallende Netz, das ein Infimum besitzt, zu diesem Infimum konvergiert.

Arbeitet man mit Folgen statt Netzen, so spricht man von der **abzählbaren Daniell-Eigenschaft**, der **Monotone-Folgen-Eigenschaft** bzw. der **abzählbaren Dini-Eigenschaft**.

Bemerkung 2.2. Der Begriff „Dini-Eigenschaft“ in obiger Form geht auf Borwein, Penot und Théra, vgl. etwa [5] und [64], zurück. In der Literatur weiter verbreitet ist allerdings die Konvention, die Gültigkeit des Dini-Theorems (über die Äquivalenz schwacher und starker Konvergenz bei monoton fallenden Folgen, vgl. Theorem 2.3) als Dini-Eigenschaft des Raumes zu bezeichnen.

In Beispiel 2.1 kann die Menge A bereits als Netz bzw. Folge dargestellt werden; auch für monoton fallende Netze oder Folgen kann also die Existenz eines Infimums nicht gesichert werden. Andererseits muß ein Infimum in $\mathcal{C}(T)$, sofern existent, nicht Grenzwert des Netzes oder der Folge sein, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2.2. Wir wandeln Beispiel 2.1 etwas ab und betrachten Funktionen $y_\alpha : [0,2] \to \mathbb{R}$, $\alpha \in [1, +\infty)$, definiert durch

$$y_\alpha(t) = \max\{1 - \alpha t, -1\} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \alpha t & \text{für } 0 \leq t \leq 2/\alpha \\ -1 & \text{für } 2/\alpha < t \leq 2 \end{array} \right\}, \qquad t \in [0,2].$$

Die Menge $A = \{y_\alpha \in \mathcal{C}[0,2] : \alpha \in [1, +\infty)\}$ besitzt mit der Funktion $y(t) \equiv -1$ zwar ein Infimum, doch ist dieses Infimum wegen $y_\alpha(0) = 1$ für alle $\alpha \in [1, +\infty)$ kein Berührungspunkt der Menge A.

Somit zeigen beide Beispiele die Gültigkeit von:

Satz 2.2. *Der Raum $(\mathcal{C}(T), \mathcal{C}(T)^+)$ besitzt weder die Monotone-Netze-Eigenschaft (bzw. Monotone-Folgen-Eigenschaft), noch die (abzählbare) Dini-Eigenschaft. $(\mathcal{C}(T), \mathcal{C}(T)^+)$ besitzt damit insbesondere nicht die (abzählbare) Daniell-Eigenschaft.*

Bemerkung 2.3. Ist T eine endliche Menge, so kann $\mathcal{C}(T)$ mit dem endlichdimensionalen Euklidischen Raum identifiziert werden, der die Daniell-Eigenschaft natürlich besitzt. Dieser Fall ist für unsere Betrachtungen allerdings uninteressant und daher bei obigen Betrachtungen vernachlässigt worden.

Das Fehlen der Ordnungsvollständigkeit und der Daniell-Eigenschaft erweist sich als gravierendes Handicap in der Arbeit mit dem Raum $\mathcal{C}(T)$. In der Tat entfällt die wichtigste Grundlage für Existenzaussagen in der Optimierungstheorie: Beschränkte Mengen und selbst monotone Folgen müssen nunmehr kein Infimum (bzw. Supremum) und damit auch kein Minimum und keinen Grenzwert besitzen.

Einen „Hoffnungsschimmer“ in Sachen Existenz von Minima bietet lediglich der Satz von Dini, der die Äquivalenz von schwacher und starker Konvergenz bei monoton fallenden Folgen postuliert:

Satz 2.3 (Dini). *Ist $\{y_n\}$ eine monotone Folge reellwertiger stetiger Funktionen über einem kompakten Hausdorff-Raum T, und gibt es eine stetige Funktion y_0, gegen die die Folge $\{y_n\}$ punktweise konvergiert, dann konvergiert $\{y_n\}$ auf T gleichmäßig gegen y_0.*

Den Beweis findet man etwa bei Hirsch und Lacombe, [33], Proposition 1.2. Die Monotonie der Folge ist dabei von besonderer Bedeutung, wie man leicht an Beispielen nachvollziehen kann.

2.3 Dualkegel und Kegelbasen

Sei $(\mathfrak{Y}, K)$ ein halbgeordneter topologischer Raum, und sei $\mathfrak{L}(\mathfrak{Y})$ der Raum der Linearformen auf $\mathfrak{Y}$, d. h. der algebraische Dualraum zu $\mathfrak{Y}$. Wir bezeichnen mit

$$K' := \{u \in \mathfrak{L}(\mathfrak{Y}) : u(y) \geq 0 \quad \forall\, y \in K\}$$

den **zu K dualen Kegel**. Offenbar ist K' konvex. Weiter bezeichne

$$\operatorname{qint} K' := \{u \in \mathfrak{L}(\mathfrak{Y}) : u(y) > 0 \quad \forall\, y \in K\backslash\{0\}\}$$

das **Quasi-Innere** von K'. Die Menge $\operatorname{qint} K'$ darf nicht mit dem Inneren des Dualkegels verwechselt werden, gleichwohl ist jeder innerer Punkt von K' auch quasi-innerer Punkt von K' (vgl. etwa Lemma 1.25 gemeinsam mit Lemma 1.32 bei Jahn, [42]). Die Elemente des Quasi-Inneren von K' werden häufig auch als **strikt positive Funktionale** auf K bezeichnet. Über deren Existenz gibt die folgende Aussage Aufschluß:

Lemma 2.1 (Krein/Rutman). *Ist K ein nichttrivialer, abgeschlossener, konvexer, spitzer Kegel in einem separablen normierten Raum $\mathfrak{Y}$, so gilt* $\operatorname{qint} K' \neq \emptyset$.

Einen Beweis findet man etwa bei Borwein, [5].

Lemma 2.2. *Ist $\mathfrak{Y}$ ein normierter Raum und $K \subset \mathfrak{Y}$ ein nichttrivialer, konvexer, spitzer Kegel mit nichtleerem Quasi-Inneren, so gilt* $\operatorname{cl} \operatorname{qint} K' = K'$.

Für den Beweis siehe etwa Jahn, [44], Lemma 2.1.

Die Existenz positiver Funktionale auf K steht im engen Zusammenhang mit der Existenz von Basen für den Ursprungskegel K.

Definition 2.3. Eine konvexe Menge $B \subset K$ heißt **Basis** des Kegels K, wenn es für jedes Element $k \in K\backslash\{0\}$ eine eindeutige Darstellung $k = \lambda y$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, und $y \in B$ gibt.

Offenbar gilt $0 \notin B$ für jede Basis B eines Kegels, da andernfalls die Eindeutigkeit der Darstellung verloren geht. Ist darüber hinaus $\mathfrak{Y}$ ein vollständiger, metrisierbarer topologischer Vektorraum und K ein abgeschlossener Kegel, der $\mathfrak{Y}$ generiert (d. h. $\mathfrak{Y} = K - K$), so ist jede Basis von K abgeschlossen, vgl. Satz 3.8.1 bei Jameson, [47].

Weiter gilt:

Lemma 2.3. *Sei $\mathfrak{Y}$ ein Banach-Raum und $K \subset \mathfrak{Y}$ ein nichttrivialer konvexer Kegel. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \operatorname{qint} K' \neq \emptyset \quad &\Longleftrightarrow \quad K \text{ besitzt eine Basis } B; \\ \operatorname{int} K' \neq \emptyset \quad &\Longleftrightarrow \quad K \text{ besitzt eine abgeschlossene und beschränkte Basis } B. \end{aligned}$$

Für die Beweise vgl. etwa Peressini, [66], Proposition 1.3.6, oder Jameson, [47], Kapitel 1.9 und Theorem 3.8.4. Als zentrale Aussage wird gezeigt, dass für ein $u \in \operatorname{qint} K'$ durch

$$B = \{y \in \mathfrak{Y} : u(y) = 1\} \tag{2.1}$$

eine Kegelbasis für K gegeben ist; umgekehrt gibt es wegen der Eindeutigkeit der Basisdarstellung eine eindeutige Abbildung $v : \mathfrak{Y} \to \mathbb{R}$, definiert durch $y \in v(y) \cdot B$, die zu einer linearen Abbildung erweitert werden kann.

Bemerkung 2.4. Die in der Definition einer Basis geforderte Eindeutigkeit wird nur dafür benötigt, um für eine gegebene Basis B ein Funktional u wie in (2.1) zu konstruieren. Ist umgekehrt eine Basis über die Darstellung (2.1) gegeben, so existiert für jedes Element des Kegels auf natürliche Weise nur eine einzige Darstellung als Vielfaches eines Basiselements. Viele Autoren benutzen daher den folgenden Begriff als Definition einer Basis:

Definition 2.4. Sei $K \subseteq \mathfrak{Y}$ ein Kegel. Wir nennen K **konvex erzeugt**, falls es eine konvexe Menge $B \subset K$ mit $0 \notin \operatorname{bd} B$ und $K = \operatorname{cone} B$ gibt. K heißt **beschränkt konvex erzeugt**, falls diese Menge B als beschränkt gewählt werden kann.

Besitzt ein abgeschlossener Kegel K in einem vollständigen metrisierbaren topologischen Vektorraum eine Basis B, so wird K durch B konvex erzeugt. Umkehrt muss allerdings eine Menge B, die den Kegel K konvex erzeugt, wegen der möglicherweise fehlenden Eindeutigkeit keine Basis von K sein.

Gemäß dem Riesz'schen Darstellungssatz (vgl. etwa Theorem IV.6.3 bei Dunford und Schwartz, [16]), kann der Dualraum $\mathcal{C}(T)'$ von $\mathcal{C}(T)$ mit dem Raum $\mathcal{M}(T)$ der endlichen signierten Radon-Maße identifiziert werden: Für jedes $u \in \mathcal{C}(T)'$ existiert eine (reguläre) σ-additive reellwertige Mengenfunktion μ auf der σ-Algebra der Borel-Mengen von T, so dass

$$\begin{aligned} u(y) &= \int_T y \, \mathrm{d}\mu, \qquad \forall\, y \in \mathcal{C}(T), \\ \|u\| &= |\mu|(T) \end{aligned}$$

gilt. $|\mu|$ bezeichnet hierbei die Totalvariation von μ. Für detailierte Ausführungen zu Definition und Eigenschaften von Maßen sei auf Lehrbücher der Maß- und Integrationstheorie, etwa Elstrodt, [17], verwiesen. Zum Verständnis der hier benötigten Aussagen, insbesondere der funktionalanalytischen Zusammenhänge, eignet sich die Monographie von Dunford und Schwartz, [16]. Wir beschränken uns im Weiteren auf die ordnungstheoretisch relevanten Aussagen.

Der Raum $\mathcal{M}(T)$ ist ebenfalls ein separabler Banach-Raum und ist mit der durch den natürlichen Ordnungskegel,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(T)^+ &:= \{\mu \in \mathcal{M}(T) : \int_T y \, \mathrm{d}\mu \geq 0 \ \forall\, y \in \mathcal{C}(T)^+\} \\ &= \{\mu \in \mathcal{M}(T) : \ \mu(S) \geq 0 \text{ für alle Borel-Mengen } S \subset T\}, \end{aligned}$$

induzierten Ordnung ein Banach-Verband. Alle positiven Linearformen auf $\mathcal{C}(T)$ sind stetig, der Beweis erfolgt analog dem von Heuser in [32], Kapitel 56, für $T = [a, b]$ angegebenen Beweis. Daher stimmt $\mathcal{M}(T)^+$ mit dem zu $\mathcal{C}(T)^+$ dualen Kegel überein. Das Innere von $\mathcal{M}(T)^+$ ist leer, das Quasi-Innere ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+ &:= \{\mu \in \mathcal{M}(T) : \int_T y \, \mathrm{d}\mu > 0 \ \forall\, y \in \mathcal{C}(T)^+ \backslash \{0\}\} \\ &= \{\mu \in \mathcal{M}(T) : \ \mu(S) > 0 \text{ für alle offenen Borel-Mengen } \emptyset \neq S \subset T\}. \end{aligned}$$

Nun kann gemäß Lemma 2.3 eine Basis für den Kegel $\mathcal{C}(T)^+$ angegeben werden:

$$B = \left\{ y \in \mathcal{C}(T)^+ : \int_T y \,\mathrm{d}\mu = 1 \right\}, \qquad \mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+.$$

Diese Basis ist gemäß dem Kommentar unter Definition 2.3 abgeschlossen. Speziell im Falle $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ist durch

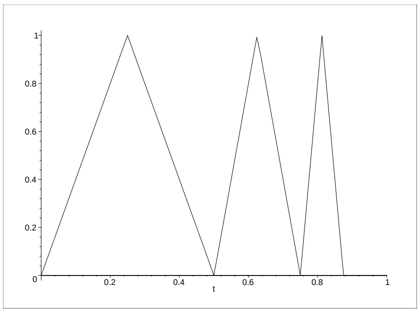
$$\left\{ y \in \mathcal{C}([a, b])^+ : \int_a^b y(t) \,\mathrm{d}t = 1 \right\}$$

eine solche Basis gegeben.

Lemma 2.4. *Der Kegel $\mathcal{C}([0, 1])^+$ ist nicht beschränkt konvex erzeugt, er besitzt insbesondere keine beschränkte Basis.*

Beweis. Sei $T = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Angenommen, es gäbe eine beschränkte konvexe Teilmenge $B \subset \mathcal{C}([0, 1])^+$ mit $0 \notin \operatorname{bd} B$ und $\mathcal{C}(T)^+ = \operatorname{cone} B$. Ohne Einschränkung können wir $\|b\| \leq 1$ für alle $b \in B$ annehmen. Wir betrachten für $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$ die Funktionen $y_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$y_i(t) = \max \left\{ 0, -2^i |t - \frac{2^i - 3}{2^i}| + 1 \right\}.$$



Das nebenstehende Bild zeigt exemplarisch die Funktionen y_2, y_3 und y_4 („Buckel“ von links nach rechts). Für alle $i \geq 2$ gilt $y_i \in \mathcal{C}([0, 1])^+$ und $\|y_i\| = 1$. Folglich gibt es zu jedem i ein Skalar $\lambda_i \subset (0, 1]$, so dass $\bar{y}_i := \lambda_i y_i \in B$. Wegen der Konvexität der Basis gilt dann auch

$$z_n := \frac{1}{n-1} \lambda_2 y_2 + \frac{1}{n-1} \lambda_3 y_3 + ... + \frac{1}{n-1} \lambda_n y_n = \frac{1}{n-1} (\bar{y}_2 + ... + \bar{y}_n) \in B.$$

Da die Funktionen $\lambda_i y_i$ untereinander paarweise deckungsfremde Supports besitzen, d. h.

$$\{t \in T : \lambda_i y_i(t) > 0\} \cap \{t \in T : \lambda_j y_j(t) > 0\} = \emptyset, \qquad i \neq j,$$

gilt $\|\bar{y}_2 + ... + \bar{y}_n\| = 1$ und daher $\|z_n\| = (n-1)^{-1} \to 0$ für $n \to \infty$. Wir erhalten $0 \in \operatorname{bd} B$, im Widerspruch zur Annahme. ■

Bemerkung 2.5. Dieser Beweis kann natürlich auf allgemeinere kompakte Mengen T übertragen werden. Man beachte aber: Wählt man etwa $T = \{t_1, ..., t_n\}$ endlich, so kann $\mathcal{C}(T)$ mit dem Raum $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{C}(T)^+$ mit $\mathbb{R}^n_+$ identifiziert werden, und $\mathbb{R}^n_+$ besitzt sehr wohl eine beschränkte Basis.

Für Teilkegel von $\mathcal{C}(T)^+$ können jedoch beschränkte Basen angegeben werden:

Bemerkung 2.6 (vgl. Bemerkung 2.1). Ist $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so kann der Raum $\mathcal{C}(T)$ auch durch den spitzen konvexen Kegel

$$\mathcal{C}(T)^+_m := \{y \in \mathcal{C}(T) : y(t) \geq 0 \;\forall\; t \in T,\; y \text{ monoton wachsend}\}$$

halbgeordnet werden. Die Menge $B := \{y \in \mathcal{C}([a, b])^+_m : \; y(b) = 1\}$ bildet eine beschränkte Basis für den Kegel $\mathcal{C}([a, b])^+_m$: Für alle $y \in B$ gilt $\|y\| = 1$, es folgt $0 \notin \operatorname{cl} B$. B ist auch konvex. Sei weiter $y \in \mathcal{C}(T)^+_m \backslash \{0\}$ beliebig. Dann gilt wegen der Monotonie $y(b) > 0$, und die Funktion $\bar{y}$, gegeben durch $\bar{y}(t) := y(t)/y(b)$, gehört zu B. Wir erhalten also eine Darstellung $y = \lambda \bar{y}$

mit $\lambda := y(b) > 0$ und $\bar{y} \in B$. Diese Darstellung ist darüber hinaus eindeutig: Angenommen, es gäbe zu $y \in \mathcal{C}(T)_m^+$ voneinander verschiedene $y_1, y_2 \in B$ und $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ mit $y = \lambda_1 y_1 = \lambda_2 y_2$. Dann gilt $y_1(\bar{t}) \neq y_2(\bar{t})$ für wenigstens ein $\bar{t} \in [a, b]$. Wegen $y(\bar{t}) = \lambda_1 y_1(\bar{t}) = \lambda_2 y_2(\bar{t})$ folgt $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Wir erhalten nun $\lambda_1 y_1(b) = \lambda_1 \neq \lambda_2 y_2(b) = \lambda_2$, im Widerspruch zu $y = \lambda_1 y_1 = \lambda_2 y_2$.

Eng im Zusammenhang mit der Frage, ob ein Kegel beschränkt konvex erzeugt wird, steht auch der Begriff der Supernormalität bzw. Nuklearität von Kegeln:

Definition 2.5. Ein Kegel $K \subset \mathfrak{Y}$ heißt **supernormal** (bzw. **nuklear**), wenn

$$K \subseteq \{y \in \mathfrak{Y} : \|y\| \leq u(y)\}$$

für ein $u \in \mathfrak{Y}'$ erfüllt ist.

Diese Definition geht auf den Arbeitskreis um Krasnoselskij in den 1950er Jahren zurück; Isac verallgemeinerte sie auf Hausdorffsche topologische Räume (vgl. etwa [37]); Isac und Postolica untersuchten zahlreiche klassische Funktional-Räume auf diese Eigenschaft und stellten die Bedeutung der Supernormalität für die Existenz minimaler Elemente heraus (vgl. etwa [38] und [67]).

Lemma 2.5. *Sei $\mathfrak{Y}$ ein Banach-Raum und $K \subset \mathfrak{Y}$, $K \neq \mathfrak{Y}$ ein konvexer Kegel. Dann ist K supernormal genau dann, wenn K beschränkt konvex erzeugt wird.*

Beweis. Ist K supernormal, so gibt es ein $u \in \mathfrak{Y}'$ mit $0 < \|y\| \leq u(y)$ für alle $y \in K \backslash \{0\}$. Dann ist $B = \{y \in K : u(y) = 1\}$ eine beschränkte, konvexe Menge mit $0 \notin \operatorname{bd} B$ und $K = \operatorname{cone} B$.

Es gelte umgekehrt $0 \notin \operatorname{bd} B$ und $K = \operatorname{cone} B$ für eine beschränkte, konvexe Menge B. Wegen $K \neq \mathfrak{Y}$ gilt auch $0 \notin \operatorname{int} B$, mit $0 \notin \operatorname{bd} B$ folgt sofort $0 < \|y\|$ für alle $y \in B$. Weiter existiert gemäß dem Hahn-Banach'schen Trennungssatz ein lineares stetiges Funktional $u \in \mathfrak{Y}'$, so dass $1 \leq u(y)$ für $y \in B$ gilt. B ist beschränkt, also gilt $\|y\| \leq \bar{\lambda}$ für alle $y \in B$ und ein $\bar{\lambda} > 0$. Es folgt für $y \in B$ die Abschätzung $\|y\| \leq \|y\| u(y) \leq \bar{\lambda} u(y) = (\bar{\lambda} u)(y)$. Wir setzen $\bar{u} := \bar{\lambda} u$. Sei nun $y \in K$ beliebig. Dann gibt es ein Skalar λ und ein $b \in B$ mit $y = \lambda b$. Aus $K = \operatorname{cone} B$ folgt nun

$$0 < \|y\| = \lambda \|b\| \leq \lambda \bar{u}(b) = \bar{u}(\lambda b) = \bar{u}(y),$$

also die Supernormalität des Kegels K. ■

Den Beweis findet man etwa im Buch von Göpfert, Riahi, Tammer und Zalinescu, [25].

Bemerkung 2.7. Die Menge B im Beweis von Lemma 2.5 kann so gewählt werden, dass B eine Basis des Kegels K ist, vgl. hierzu auch Bemerkung 2.4.

Folgerung 2.1. Der Kegel $\mathcal{C}([0,1])^+$ ist nicht supernormal: In Lemma 2.4 wurde bereits gezeigt, dass er nicht beschränkt konvex erzeugt werden kann. Gleiches gilt für die Kegel $\mathcal{C}(T)^+$ mit allgemeinen kompakten Teilmengen T eines Banach-Raumes.

Besteht T hingegen aus endlich vielen Elementen $t_1, ..., t_n$, so ist $\mathcal{C}(T)^+$ supernormal.

Folgerung 2.2. Gemäß Bemerkung 2.6 besitzt der Kegel $\mathcal{C}([a,b])_m^+$ der nichtnegativen monoton wachsenden Funktionen eine beschränkte Basis, er ist also supernormal.

3. Mehrkriterielle Optimierungsprobleme in $\mathcal{C}(T)$

Im Hauptteil dieser Arbeit beschäftigen wir uns nun mit Aspekten der mehrkriteriellen Optimierung unter Abbildungen, die ihre Werte im Raum $\mathcal{C}(T)$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf T annehmen. Zunächst diskutieren wir die vorliegende Aufgabenstellung und arbeiten einen auf unser Problem zugeschnittenen Minimalitätsbegriff heraus. Anschließend stellen wir die wichtigsten Aussagen zur Existenz solcher minimaler Elemente zusammen und prüfen anhand von Beispielen die Schärfe der Resultate.

3.1 Die Aufgabenstellung in der mehrkriteriellen Optimierung, Effizienzbegriffe

Den Mittelpunkt der reellwertigen Optimierung bilden Aufgaben der Form

$$f(x) \to \min, \qquad x \in X \subset \mathfrak{X}.$$

Hierbei bildet das Zielfunktional $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ von einem topologischen Vektorraum $\mathfrak{X}$ in die Menge der reellen Zahlen ab, gesucht werden minimale Elemente im Bild $f(X)$ der sogenannten Restriktionenmenge X. Die Minimalität eines Elementes $\bar{y} = f(\bar{x})$ ist gekennzeichnet durch die zwei äquivalenten Definitionen

a) für alle $y \in f(X)$ gilt $y \geq \bar{y}$ bzw.

b) es gibt kein $y \in f(X)$, so dass $y < \bar{y}$.

Die Restriktionenmenge X kann sowohl durch explizite Nebenbedingungen etwa in Gleichungs- oder Ungleichungsform, als auch in der allgemeinen Form einer Inklusion gegeben sein.

Von mehrkriterieller bzw. vektorwertiger Optimierung spricht man, wenn die Zielabbildung $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ nicht mehr in die Menge der reellen Zahlen, sondern in einen beliebigen linearen halbgeordneten Raum $(\mathfrak{Y}, \preceq)$ abbildet:

$$\mathfrak{f}(x) \to \min, \qquad x \in X \subset \mathfrak{X}.$$

Die im Bildraum vorliegende Halbordnung $\preceq$ sei wie in Kapitel 2 definiert und im allgemeinen durch den Kegel K der positiven Elemente charaktierisiert. Die Restriktionenmenge X kann hier wieder in verschiedenster Form gegeben sein – wesentlich für diesen Typ Aufgaben ist die Veränderung des Minimalitätbegriffes: In allgemeinen halbgeordneten Räumen fallen die beiden Charakterisierungen a) und b) der Minimalität auseinander, da $y \succeq \bar{y}$ nicht mehr äquivalent zu $y \not\prec \bar{y}$ ist. Offenbar stellt dann a) eine weit härtere Bedingung als b) dar. Ein $\bar{y}$ gemäß Variante a) wird meist als **striktes Minimum** bezeichnet, diese Definition ist aber in der Praxis ohne Bedeutung. Als passende Modellierung einer minimalen Lösung im mehrkriteriellen Fall erweist sich die Variante b): Wir fordern lediglich die Nichtexistenz eines Elementes $y \in \mathfrak{f}(X)$ mit $y \preceq \bar{y}$, $y \neq \bar{y}$, übertragen dies aber in die bekannte Schreibweise mit dem (Ordnungs-)Kegel K.

Definition 3.1. Sei $\mathfrak{Y}$ ein topologischer linearer Raum, $K \subset \mathfrak{Y}$ ein Kegel, und sei $Y \subset \mathfrak{Y}$. Ein $y \in Y$ heißt **minimales Element von Y bzgl. K**, falls

$$Y \cap (y - K \backslash \{0\}) = \emptyset.$$

Sei $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. Dann heißt $y \in Y$ **schwach minimal**, falls

$$Y \cap (y - \operatorname{int} K) = \emptyset.$$

Die Menge aller bzgl. Y und K (schwach) minimalen Punkte wird mit $\mathcal{E}(Y, K)$ bzw. $\mathcal{E}_w(Y, K)$ bezeichnet.

Offenbar gilt $\mathcal{E}(Y, K) \subseteq \mathcal{E}_w(Y, K) \equiv \mathcal{E}(Y, \operatorname{int} K \cup \{0\})$; allgemein können wir $\mathcal{E}(Y, K_1) \subseteq \mathcal{E}(Y, K_2)$ für Kegel $K_2 \subset K_1$ festhalten.

Für $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$ mit $K = \mathcal{C}(T)^+$ kann eine zu obiger Definition äquivalente punktweise Charakterisierung angegeben werden:

Lemma 3.1. *Es gilt:*

$$\begin{aligned}
\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+) &\iff \nexists\, y \in \mathcal{C}(T): \ y(t) \leq \bar{y}(t) \ \forall\, t \in T, \ y(t_0) < \bar{y}(t_0) \text{ für ein } t_0 \in T; \\
\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, \mathcal{C}(T)^+) &\iff \nexists\, y \in \mathcal{C}(T): \ y(t) < \bar{y}(t) \ \forall\, t \in T.
\end{aligned}$$

Beweis. Direkte (punktweise) Anwendung der Definition von $\mathcal{C}(T)^+$. ∎

In Lemma 3.1 zeigt sich eine Analogie unserer Effizienzdefinition zum vor allem in der Ökonomie weit verbreiteten Begriff der Pareto-Effizienz für $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$, nur eben auf einen unendlichdimensionalen Raum verallgemeinert.

Kehren wir kurz zu Definition 3.1 zurück: In vielen Fällen liegt Y als Bildmenge $\mathfrak{f}(X)$ einer Restriktionenmenge $X \subset \mathfrak{X}$ unter einer Zielabbildung $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ vor ($\mathfrak{X}$ sei ein topologischer Raum). Dann ist man neben den Minimalwerten von $\mathfrak{f}(X)$ auch an den Punkten $x \in X$ interessiert, in denen die Werte angenommen werden. Wir führen daher auch für diese Punkte eine Bezeichnung ein:

Definition 3.2. Seien $X \subset \mathfrak{X}$ und eine Zielabbildung $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ gegeben. Ein Element $x \in X$ heißt **effizient (bzgl. X, $\mathfrak{f}$ und K)**, falls $\mathfrak{f}(x) \in \mathcal{E}(\mathfrak{f}(X), K)$. Sei $\operatorname{int} K \neq \emptyset$; dann heißt x **schwach effizient**, falls $\mathfrak{f}(x) \in \mathcal{E}_w(\mathfrak{f}(X), K)$.

Die Menge aller bzgl. $\mathfrak{f}$, X und K effizienten Punkte bzw. schwach effizienten Elemente wird mit $\operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(X), K)$ bzw. $\operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), K)$ bezeichnet.

Es gilt $\mathcal{E}(\mathfrak{f}(X), K) = \mathfrak{f}(\operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(X), K))$ und $\mathcal{E}_w(\mathfrak{f}(X), K) = \mathfrak{f}(\operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), K))$. Wir unterscheiden also mit dieser Begriffsbildung zwischen Punkten im Urbildraum $\mathfrak{X}$ („effizient“) und Punkten im Bildraum $\mathfrak{Y}$ („minimal“).

In der Literatur gibt es keine einheitliche Handhabung, ob die minimalen Elemente oder ihre Urbilder als effizient bezeichnet werden. Oftmals ist es hilfreich, in ersten Untersuchungen die Bildmenge $\mathfrak{f}(X)$ zunächst einfach als Menge mit gewissen topologischen oder geometrischen Eigenschaften zu betrachten, in dieser Menge die minimalen Elemente zu charakterisieren und erst dann auf die effizienten Elemente zu schließen. Da wir genau diesen Weg gehen werden, haben wir Notationen für die entsprechenden Mengen im Bild- und im Urbildraum zur Verfügung gestellt. In den Erläuterungen im Text sprechen wir trotz allem gelegentlich einfach von „Effizienz“. Sofern klar ist, ob im Urbild- oder Bildraum gearbeitet wird, umfasse dieses Wort beide Notationen.

Neben den Begriffen der Effizienz und schwachen Effizienz gibt es noch eine Reihe so genannter eigentlicher Effizienzen. Wir beginnen mit den Begriffen von Borwein, [4], und Benson, [2].

Für eine Menge Y und ein Element $y \in Y$ bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} T_B(Y;\bar{y}) &:= \{d \in \mathfrak{Y} : \exists \{\tau_i\} \subset \mathbb{R}_+, \exists \{y_i\} \subset Y, y_i \to \bar{y}, d = \lim_{i\to\infty} \tau_i(y_i - \bar{y})\} \\ \operatorname{cone} Y &:= \{\lambda y : \lambda \geq 0, y \in Y\} \end{aligned}$$

den **Borweinschen Tangentialkegel** an Y in $\bar{y}$ bzw. den **Projektionskegel** (d. h. den durch Y aufgespannten Kegel). Für Eigenschaften dieser Kegel sei z. B. auf die Monographien von Clarke, [9], und Jahn, [42], bzw. den Artikel von Borwein, [4], verwiesen.

Definition 3.3. Sei $\mathfrak{Y}$ ein topologischer linearer Raum, geordnet durch den Kegel $K \subset \mathfrak{Y}$, und sei $Y \subset \mathfrak{Y}$. Ein $\bar{y} \in Y$ heißt **Borwein-eigentlich minimales Element von Y bzgl. K**, falls $\bar{y}$ minimal ist und

$$T_B(Y + K; \bar{y}) \cap -K = \{0\}$$

gilt. Ein $\bar{y} \in Y$ heißt **Benson-eigentlich minimales Element von Y bzgl. K**, falls $\bar{y}$ minimal ist und

$$\operatorname{cl}\operatorname{cone}(Y + K - \bar{y}) \cap -K = \{0\}$$

gilt. Die Menge der eigentlich minimalen Elemente im Sinne von Borwein bzw. Benson werden mit $\mathcal{E}_{Bo}(Y,K)$ bzw. $\mathcal{E}_{Be}(Y,K)$ bezeichnet.

Borwein führte seinen Effizienzbegriff für lokalkonvexe topologische Vektorräume $\mathfrak{Y}$ ein, Benson nur für $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$. Wegen $T_B(Y;\bar{y}) \subseteq \operatorname{cl}\operatorname{cone}(Y - \bar{y})$ ist jedes Benson-eigentlich minimale Element auch Borwein-eigentlich minimal.

Die nachfolgende Definition eigentlicher Effizienz geht auf Henig zurück, [31]. Er zeigte, dass seine Definition jene von Borwein und Benson (in $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$) verallgemeinert bzw. unter gewissen Voraussetzungen zu diesen äquivalent ist.

Definition 3.4. Sei $\mathfrak{Y}$ ein topologischer linearer Raum, geordnet durch den Kegel $K \subset \mathfrak{Y}$, und sei $Y \subset \mathfrak{Y}$. Ein $y \in Y$ heißt **eigentlich minimales Element von Y bzgl. K**, falls es einen Kegel $C \subset \mathfrak{Y}$ mit $K \backslash \{0\} \subset \operatorname{int} C$ und

$$Y \cap (y - C\backslash\{0\}) = \emptyset$$

gibt. Die Menge der eigentlich minimalen Elemente wird mit $\mathcal{E}_p(Y,K)$ bezeichnet.

Seien $X \subset \mathfrak{X}$ und eine Zielabbildung $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ gegeben. Ein Element $x \in X$ heißt **eigentlich effizient (bzgl. X, $\mathfrak{f}$ und K)**, falls $\mathfrak{f}(x) \in \mathcal{E}_p(\mathfrak{f}(X), K)$. Die Menge der eigentlich effizienten Elemente wird mit $\mathrm{Eff}_p(\mathfrak{f}(X), K)$ bezeichnet.

Ein ähnliches Konzept betrachteten Gerstewitz (Tammer) und Iwanow in [23], sie fordern von dem Kegel C in Definition 3.4 lediglich Offenheit und Konvexität, nicht jedoch die Kegeleigenschaften. In [24] wird dieses Konzept von Gerth (Tammer) und Weidner wieder aufgegriffen und die Verwendung der Menge C für die Skalarisierung mehrkriterieller Optimierungsprobleme verstärkt herausgearbeitet.

Die eigentliche Effizienz ist von besonderer numerischer Relevanz, da die entsprechenden Kegel C streng monotone Funktionale für die Skalarisierung liefern. Darüber hinaus ist jedes eigentlich minimale bzw. eigentlich effiziente Element auch minimal bzw. effizient.

Wir betrachten im Wesentlichen zwei Typen eigentlicher Effizienz: jene, die sich durch lineare Skalarisierung ergibt, und die eigentliche Effizienz im Sinne von Geoffrion. Da in beide Begriffe die Raumstruktur direkt einfließt, übergehen wir bei der Definition den allgemeinen Fall und beschränken uns sofort auf den Raum $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$. Wir erinnern kurz daran, dass wir in Kapitel 2.3 die Bezeichnung $\mathcal{M}(T)$ für den Raum der (regulären) endlichen signierten Radon-Maße (topologischer Dualraum von $\mathcal{C}(T)$) eingeführt hatten.

Definition 3.5. Sei $Y \subset \mathcal{C}(T)$ gegeben. Ein Element $\bar{y} \in Y$ heißt **eigentlich minimal im Sinne der linearen Skalarisierung**, falls es ein Element $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$ gibt mit

$$\int_T \bar{y} \, \mathrm{d}\mu \leq \int_T y \, \mathrm{d}\mu \qquad \forall \, y \in Y.$$

Die Menge dieser Elemente wird mit $\mathcal{E}_l(Y)$ bezeichnet.

Seien $X \subset \mathfrak{X}$ und eine Zielabbildung $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ gegeben. Ein Element $\bar{x} \in X$ wird **eigentlich effizient im Sinne der linearen Skalarisierung** genannt, falls $\mathfrak{f}(\bar{x}) \in \mathcal{E}_l(\mathfrak{f}(X))$; die Menge aller dieser $\bar{x}$ wird mit $\operatorname{Eff}_l(\mathfrak{f}(X))$ bezeichnet.

Wir betrachten zu einem beliebigen $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$ die Menge

$$D_\mu := \left\{ y \in \mathcal{C}(T) : \int_T y \, \mathrm{d}\mu \geq 0 \right\}. \tag{3.1}$$

Offenbar ist D_μ ein konvexer Kegel, sogar ein Halbraum. Ebenso sieht man

$$\operatorname{int} D_\mu := \left\{ y \in \mathcal{C}(T) : \int_T y \, \mathrm{d}\mu > 0 \right\}$$

und daher $\mathcal{C}(T)^+ \backslash \{0\} \subset \operatorname{int} D_\mu$ für jedes $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$. Ohne Mühe verifiziert man:

Satz 3.1. *Sei $Y \subset \mathfrak{Y}$ eine nichtleere Menge. Dann gilt $\bar{y} \in \mathcal{E}_l(Y)$ genau dann, wenn es ein $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$ gibt, so dass $\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, D_\mu)$.*

Beweis. Es gilt $\bar{y} \in \mathcal{E}_l(Y) \iff \exists \, \mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$: $\int_T (\bar{y} - y) \, \mathrm{d}\mu \leq 0 \iff \bar{y} - y \notin \operatorname{int} D_\mu \; \forall \, y \in Y$ $\iff Y \cap (\bar{y} - \operatorname{int} D_\mu) = \emptyset \iff \bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, D_\mu)$. ■

Folgerung 3.1. Sei $Y \subset \mathfrak{Y}$ eine nichtleere Menge. Dann gilt $\mathcal{E}_l(Y) \subseteq \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$.

Beweis. Folgt aus $\mathcal{C}(T)^+ \backslash \{0\} \subset \operatorname{int} D_\mu$. ■

Borwein untersuchte Beziehungen zwischen seiner Definition eigentlich minimaler Elemente und der eigentlichen Minimalität im Sinne der linearen Skalarisierung. Da er seine Resultate für allgemeine Räume bewies, können wir diese problemlos auf $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$ übertragen. Das folgende Resultat findet man z. B. als Theoreme 1 und 2 in [4].

Lemma 3.2. *Jedes Element $\bar{y} \in \mathcal{E}_l(Y)$ ist eigentlich minimal im Sinne von Borwein. Falls darüber hinaus $Y + K$ konvex ist, gilt auch die Umkehrung.*

3.2 Eigentliche Effizienz im Sinne von Geoffrion

Geoffrion stellte in [22] für den Fall $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$ eine weitere Art eigentlicher Effizienz vor. Wir verallgemeinern nachfolgend diese Definition auf den unendlich-dimensionalen Raum $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$ und untersuchen Eigenschaften der so definierten Minimalitätsmenge.

Wir erinnern kurz daran, dass die Menge T als kompakt vorausgesetzt ist – auch wenn dies in den Voraussetzungen nachfolgend nicht immer explizit erwähnt wird.

Definition 3.6. Sei Y eine nichtleere Teilmenge von $\mathcal{C}(T)$. Ein Element $\bar{y} \in Y$ heißt **eigentlich minimal im Sinne von Geoffrion**, wenn eine Konstante $\delta > 0$ existiert, so dass es für alle $y \in Y$ und jedes $t \in T$ mit $y(t) < \bar{y}(t)$ ein $t_0 \in T$ mit $y(t_0) > \bar{y}(t_0)$ und

$$\frac{\bar{y}(t) - y(t)}{y(t_0) - \bar{y}(t_0)} \leq \delta$$

gibt. Die Menge aller eigentlich minimalen Elemente in diesem Sinne wird mit $\mathcal{E}_G(Y)$ bezeichnet.

Seien $X \subset \mathfrak{X}$ eine nichtleere Menge und $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}(T)$ eine Abbildung. Ein Element $\bar{x} \in X$ wird **eigentlich effizient im Sinne von Geoffrion** genannt, falls $\mathfrak{f}(\bar{x}) \in \mathcal{E}_G(\mathfrak{f}(X))$; die Menge aller dieser $\bar{x}$ wird mit $\mathrm{Eff}_G(\mathfrak{f}(X))$ bezeichnet.

Wir möchten nun auch diese Art eigentlicher Effizienz in das Konzept von Henig einbetten. Hierfür benutzen wir einen Ansatz, wie wir ihn bei Weidner, [89], dort für $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$, gefunden haben. Es zeigt sich schnell, dass die wichtigsten Aussagen beim Übergang von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{C}(T)$ nicht verloren gehen.

Wir betrachten für ein $\delta > 0$ die Mengen

$$\begin{aligned} D^{s,\delta} &:= \{y \in \mathcal{C}(T) : \ y(s) > 0, \ y(s) + \delta y(t) > 0 \ \forall \ t \in T\backslash\{s\}\}, \qquad s \in T, \\ D^{\delta} &:= \bigcup_{s \in T} D^{s,\delta}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

Lemma 3.3. *Sei $\delta > 0$. Dann sind die Mengen $D^{s,\delta}$, D^{δ} offen und die Mengen $D^{s,\delta} \cup \{0\}$ konvexe, nichttriviale Kegel. Auch die Mengen $D^{\delta} \cup \{0\}$ sind Kegel, und es gilt $\mathcal{C}(T)^+\backslash\{0\} \subseteq D^{\delta}$.*

Beweis. $\mathcal{C}(T)^+\backslash\{0\} \subseteq D^{\delta}$ gilt offensichtlich.

Wir zeigen zunächst die behauptete Offenheit. Es seien hierzu $\delta > 0$, $s \in T$ fixiert und $\bar{y} \in D^{s,\delta}$. Aus der Stetigkeit von $\bar{y}$ und der Kompaktheit von T erhalten wir

$$\varepsilon := \frac{1}{3} \min \left\{ \bar{y}(s), \ \min_{t \in T} \{\bar{y}(s) + \delta \bar{y}(t)\}, \ \frac{1}{\delta} \min_{t \in T} \{\bar{y}(s) + \delta \bar{y}(t)\} \right\} > 0.$$

Bezeichne $\|.\|$ wieder die Supremumnorm in $\mathcal{C}(T)$. Dann gelten für alle $y \in \mathcal{C}(T)$ mit $\|\bar{y} - y\| \leq \varepsilon$ und alle $t \in T\backslash\{s\}$ unter Beachtung von $\bar{y} \in D^{s,\delta}$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} y(s) + \delta y(t) &\geq \bar{y}(s) - \varepsilon + \delta \cdot (\bar{y}(t) - \varepsilon) \\ &\geq \bar{y}(s) - \frac{1}{3} \left(\bar{y}(s) + \delta \bar{y}(t)\right) + \delta \bar{y}(t) - \delta \frac{1}{3\delta} \left(\bar{y}(s) + \delta \bar{y}(t)\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\bar{y}(s) + \delta \bar{y}(t)\right) > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(s) &\geq \bar{y}(s) - \varepsilon \\ &\geq \bar{y}(s) - \frac{1}{3} \bar{y}(s) = \frac{2}{3} \bar{y}(s) > 0. \end{aligned}$$

Daher gilt $y \in D^{s,\delta}$ für alle $y \in \mathcal{C}(T)$, $\|\bar{y} - y\| \leq \varepsilon$, d. h. $D^{s,\delta}$ ist offen. Als Vereinigung offener Mengen ist dann auch D^{δ} offen.

Die Mengen $D^{s,\delta}$ enthalten z. B. das Element $\bar{y} \in \mathcal{C}(T)$, $\bar{y}(t) := 1\ \forall\, t \in T$, sind also nichttrivial. Sei nun $y \in D^{s,\delta}$ und $\lambda > 0$ beliebig. Dann gilt mit $y(s) > 0$ auch $\lambda y(s) > 0$, und aus $y(s) + \delta y(t) > 0$ folgt $\lambda y(s) + \delta \lambda y(t) > 0$. Somit sind die Mengen $D^{s,\delta} \cup \{0\}$ Kegel. Als Vereinigung von Kegeln ist auch D^{δ} ein Kegel.

Seien nun $\delta > 0$, $s \in T$ fixiert und $y_1, y_2 \in D^{s,\delta}$ beliebig. Dann folgt aus $y_1(s) > 0$, $y_2(s) > 0$ stets $y_1(s) + y_2(s) > 0$, und $y_1(s) + \delta y_1(t) > 0$, $y_2(s) + \delta y_2(t) > 0$ impliziert

$$y_1(s) + y_2(s) + \delta \cdot (y_1(t) + y_2(t)) > 0.$$

Der Fall $y_1 \equiv 0$ oder $y_2 \equiv 0$ ist trivial. Folglich sind die Mengen $D^{s,\delta}$ sogar konvexe Kegel. ■

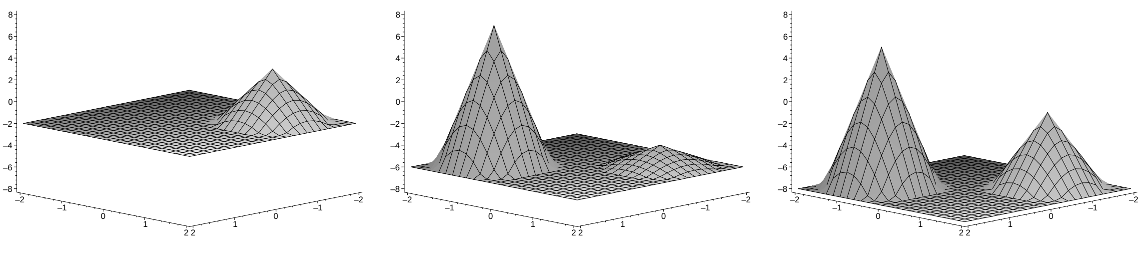
$D^{\delta} \cup \{0\}$ ist i. a. nicht konvex, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 3.1. Wir wählen zwei beliebige Punkte $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, und einen Radius $r > 0$ so, dass $\|t_1 - t_2\| > 2r$ und dass ein $t_3 \in T$ mit $\|t_1 - t_3\| > r$, $\|t_2 - t_3\| > r$ existiert. Weiter fixieren wir ein beliebiges $\delta > 0$. Wir definieren

$$y_1(t) \quad := \quad \begin{cases} 3\delta & \text{bei } t = t_1 \\ 3\delta - (3\delta + 2)\alpha & \text{bei } \|t - t_1\| = \alpha r,\ 0 < \alpha \leq 1,\ t \in T \\ -2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$y_2(t) \quad := \quad \begin{cases} -4 & \text{bei } t = t_1 \\ -4 - 2\alpha & \text{bei } \|t - t_1\| = \alpha r,\ 0 < \alpha \leq 1,\ t \in T \\ 7\delta & \text{bei } t = t_2 \\ 7\delta - (7\delta + 6)\alpha & \text{bei } \|t - t_2\| = \alpha r,\ 0 < \alpha \leq 1,\ t \in T \\ -6 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die nachfolgende Abbildung zeigt die Funktionen y_1, y_2 und $y_1 + y_2$ (von links nach rechts) für $T = [-2, 2]^2$, $t_1 = (-1, 1)$, $t_2 = (1, -1)$, $r = 1$ und $\delta = 1$.



Man findet $y_1 \in D^{t_1,\delta}$ und $y_2 \in D^{t_2,\delta}$. Andererseits erhält man mit dem oben gewählten t_3

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)(t_3) \quad &= \quad -8 \ < \ 0, \\ (y_1 + y_2)(t) + \delta(y_1 + y_2)(t_3) \quad &\leq \quad \max\{3\delta - 4, 7\delta - 2\} - 8\delta \ < \ 0 \qquad \forall\, t \in T \setminus \{t_3\}, \end{aligned}$$

also $y_1 + y_2 \notin D^{\delta}$.

Weidner gab in [89], Beweis zu Lemma 5.2.1, ein ähnliches Beispiel für den Fall $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$ an.

In späteren Betrachtungen werden wir meist eine andere Darstellung für D^{δ} benutzen:

Lemma 3.4. *Die Menge D^{δ} kann auch in der Form*

$$D^{\delta} = \left\{ y \in \mathcal{C}(T) : \ \max_{t \in T} y(t) + \delta \cdot \min_{t \in T} y(t) > 0 \right\}. \tag{3.2}$$

geschrieben werden.

Beweis. Unter Verwendung der Kompaktheit von T und der Stetigkeit der betrachteten Funktionen erhalten wir für beliebige $y \in D^\delta$ die folgenden äquivalenten Aussagen:

$$\begin{aligned}
&\exists\, s \in T:\ y(s) > 0,\ y(s) + \delta y(t) > 0\ \forall\, t \in T\backslash\{s\} \\
&\qquad \iff \exists\, s \in T:\ y(s) > 0,\ y(s) + \delta y(t) > 0\ \forall\, t \in T \\
&\qquad \iff \exists\, s \in T:\ y(s) + \delta \cdot \min_{t\in T} y(t) > 0 \\
&\qquad \iff \max_{t\in T} y(t) + \delta \cdot \min_{t\in T} y(t) > 0.
\end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. ■

Der Kegel $D^\delta \cup \{0\}$ charakterisiert die Geoffrion-eigentlich minimalen Elemente:

Satz 3.2. *Es gilt* $\mathcal{E}_G(Y) = \bigcup_{\delta>0} \mathcal{E}(Y, D^\delta \cup \{0\})$.

Beweis. Sei $\bar{y} \in Y$ eigentlich minimal im Sinne von Geoffrion. Per Definition ist dies äquivalent zur Existenz eines $\delta > 0$, so dass für jedes $y \in Y$ und jedes $t \in T$ mit $y(t) < \bar{y}(t)$ ein $t_0 \in T$ mit $y(t_0) > \bar{y}(t_0)$ und

$$\bar{y}(t) - y(t) \leq \delta \cdot (y(t_0) - \bar{y}(t_0))$$

existiert. Diese Ungleichung bedeutet $\bar{y} - y \notin D^\delta$, was äquivalent zu $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, D^\delta \cup \{0\})$ ist. ■

Folgerung 3.2. Es gilt $\mathcal{E}_G(Y) \subseteq \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.2 und $\mathcal{C}(T)^+ \subsetneq D^\delta \cup \{0\}$ (vgl. Lemma 3.3). ■

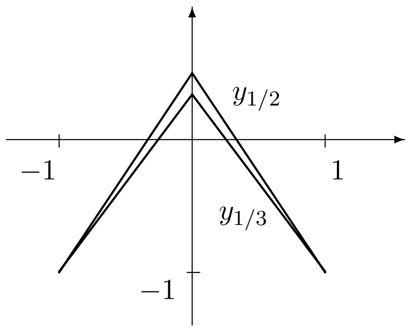
Diese Inklusion ist im allgemeinen scharf, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 3.2. Wir betrachten die Funktionen $y_\alpha : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$y_\alpha(t) = \alpha - (\alpha + 1)\,|t|$$

und die Menge

$$Y = \{y_\alpha : \alpha \in (0, 1]\} \cup \{0\}.$$



Offenbar gilt $\mathcal{E}(Y, \mathcal{C}([-1, 1])^+) = \{0\}$; allerdings $\mathcal{E}_G(Y) = \emptyset$.

$0 \notin \mathcal{E}_G(Y)$ heißt $0 \notin \mathcal{E}(Y, D^\delta \cup \{0\})$ für alle $\delta > 0$. Es genügt also zu zeigen, dass zu jedem $\delta > 0$ ein $\alpha \in (0, 1]$ mit $-y_\alpha \in D^\delta$, d. h. mit

$$\max_{t\in[-1,1]} -y_\alpha(t) + \delta \cdot \min_{t\in[-1,1]} -y_\alpha(t) > 0$$

existiert. Diese Ungleichung wird in der Tat für $\alpha := 1/(\delta + 1)$ erfüllt:

$$\max_{t\in[-1,1]} -y_\alpha(t) + \delta \cdot \min_{t\in[-1,1]} -y_\alpha(t) = 1 - \delta \cdot \frac{1}{\delta + 1} > 0,$$

folglich gilt $0 \notin \mathcal{E}_G(Y)$.

Bemerkung 3.1. Für $0 < \delta_1 < \delta_2$ gilt $D^{\delta_2} \subset D^{\delta_1}$ und damit $\mathcal{E}(Y, D^{\delta_1} \cup \{0\}) \subseteq \mathcal{E}(Y, D^{\delta_2} \cup \{0\})$.

Die eigentlich minimalen Elemente im Sinne von Geoffrion lassen sich auch als minimale Punkte bzgl. des konvexen Kegels

$$C_{\mu,m} := \left\{ y \in \mathcal{C}(T) : \; y(t) + \frac{1}{m} \int_T y \, \mathrm{d}\mu \geq 0 \quad \forall \, t \in T \right\} \tag{3.3}$$

mit $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$ und $m > 0$ darstellen. Helbig führte diesen Kegel im Raum $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$ ein, vgl. etwa [30]. Mit (3.3) legen wir eine mögliche Verallgemeinerung von Helbigs Kegel auf den unendlichdimensionalen Fall $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$ vor, die wir nun untersuchen werden.

Wir stellen zunächst Eigenschaften von $C_{\mu,m}$ zusammen:

Lemma 3.5. *Sei $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$. Dann ist $C_{\mu,m}$ für alle $m > 0$ ein konvexer Kegel mit*

$$\operatorname{int} C_{\mu,m} = \left\{ y \in \mathcal{C}(T) : \; y(t) + \frac{1}{m} \int_T y \, \mathrm{d}\mu > 0 \quad \forall \, t \in T \right\}.$$

Weiter gilt $\mathcal{C}(T)^+ \subset C_{\mu,m}$, $C_{\mu,m} \backslash \{0\} \subset \operatorname{int} D_\mu$ und $C_{\mu,m_1} \backslash \{0\} \subset \operatorname{int} C_{\mu,m_2}$ für $m_1 > m_2 > 0$. Hierbei ist D_μ der durch (3.1) gegebene Kegel.

Beweis. Die Kegeleigenschaften und die Konvexität von $C_{\mu,m}$ sowie die Formel für das Innere und $\mathcal{C}(T)^+ \subset C_{\mu,m}$ können durch Nachrechnen leicht verifiziert werden.

Sei $y \in C_{\mu,m_1} \backslash \{0\}$. Dann gilt $y(t) + m_1^{-1} \int_T y \, \mathrm{d}\mu \geq 0$. Wäre $\int_T y \, \mathrm{d}\mu \leq 0$, so folgte $y \in \mathcal{C}(T)^+ \backslash \{0\}$, im Widerspruch zu $\int_T y \, \mathrm{d}\mu \leq 0$. Somit gilt $\int_T y \, \mathrm{d}\mu > 0$, also $y \in \operatorname{int} D_\mu$. Weiter folgt

$$y(t) + \frac{1}{m_2} \int_T y \, \mathrm{d}\mu > y(t) + \frac{1}{m_1} \int_T y \, \mathrm{d}\mu \geq 0, \qquad t \in T,$$

also $y \in \operatorname{int} C_{\mu,m_2}$. ■

Aus dem obigen Lemma erhalten wir für Mengen $Y \subset \mathcal{C}(T)$ sofort $\mathcal{E}_l(Y) \subseteq \bigcup_{m>0} \mathcal{E}(Y, C_{\mu,m}) \subset \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$. Ebenso gilt:

Satz 3.3. *Sei $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$ und $Y \subset \mathcal{C}(T)$ nichtleer. Dann gilt $\mathcal{E}_G(Y) \subseteq \bigcup_{m>0} \mathcal{E}(Y, C_{\mu,m})$.*

Beweis. Wir zeigen $C_{\mu,m} \backslash \{0\} \subseteq D^\delta$ für die Wahl $\delta = \tilde{m} / (\int_T \mathbb{1} \, \mathrm{d}\mu)$, $0 < \tilde{m} < m$. Sei hierzu $y \in C_{\mu,m} \backslash \{0\}$. Gemäß Lemma 3.5 gilt dann $y \in \operatorname{int} C_{\mu,\tilde{m}}$, d. h. $y(t) + (\int_T y \, \mathrm{d}\mu)/\tilde{m} > 0$ für alle $t \in T$. Wegen

$$\frac{1}{\tilde{m}} \int_T y \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{\max_{t \in T} y(t)}{\tilde{m}} \int_T \mathbb{1} \, \mathrm{d}\mu$$

erhalten wir für alle $t \in T$

$$y(t) + \frac{\max_{t \in T} y(t)}{\tilde{m}} \int_T \mathbb{1} \, \mathrm{d}\mu \geq y(t) + \frac{1}{\tilde{m}} \int_T y \, \mathrm{d}\mu > 0.$$

Daher gilt

$$\max_{t \in T} y(t) + \frac{\tilde{m}}{\int_T \mathbb{1} \, \mathrm{d}\mu} y(t) = \max_{t \in T} y(t) + \delta \, y(t) > 0 \quad \forall \, t \in T,$$

also $y \in D^\delta$. Es folgt $C_{\mu,m} \backslash \{0\} \subseteq D^\delta$ und daher $\mathcal{E}(Y, D^\delta \cup \{0\}) \subseteq \mathcal{E}(Y, C_{\mu,m})$. Mit Satz 3.2 folgt die Behauptung. ■

Satz 3.3 findet man bei Weidner, [89], Satz 5.2.4, für den Fall $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$ als Gleichheit beider Mengen. Die im Gegensatz zu Satz 3.3 noch fehlende Inklusion führt Weidner auf das allgemeinere Resultat zurück, dass für einen konvexen Kegel $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \subset \operatorname{int} K$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $D^\delta \subseteq \operatorname{int} K$ gilt, vgl. [89], Satz 5.2.3, insbesondere Beweisteil (ii). Diese Aussage lässt sich für $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$ allerdings widerlegen, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3.3. Wir setzen $T = [0,1] \subset \mathbb{R}$, benutzen für die Integration das reelle Lebesgue-Maß auf $[0,1]$ (klar: $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$) und betrachten den konvexen Kegel $K = C_{\mu,m}$. Es gilt $\mathcal{C}(T)^+ \backslash \{0\} \subset \operatorname{int} C_{\mu,m}$ für alle $m > 0$: Aus $\bar{y} \in \mathcal{C}(T)^+$, $\bar{y} \neq 0$ und

$$r := \frac{\min_{t \in T} \bar{y}(t) + m^{-1} \int_T \bar{y} \,\mathrm{d}\mu}{1 + m^{-1} \int_T \mathbb{1} \,\mathrm{d}\mu} > 0$$

folgt $y \in C_{\mu,m}$ für alle $y \in \mathcal{C}(T)^+$, $\|y - \bar{y}\| \leq r/2$.

Wir zeigen, dass für jedes $\delta > 0$ ein $y_\delta \in D^\delta$ mit $y_\delta \notin C_{\mu,m}$ für alle $m > 0$ existiert. Hierzu fixieren wir $\delta > 0$, wählen wir ein t_δ mit

$$0 < t_\delta < \min \left\{ \frac{2}{1 + 2\delta}, 1 \right\}$$

und setzen

$$y_\delta(t) := \left\{ \begin{array}{ll} 1 - t \cdot (1 + 2\delta)/(2\delta t_\delta) & \text{für } 0 \leq t \leq t_\delta \\ -1/(2\delta) & \text{für } t_\delta < t \leq 1 \end{array} \right\}.$$

Es gilt $\max_{t \in T} y_\delta(t) + \delta \cdot \min_{t \in T} y_\delta(t) = 1/2 > 0$, also $y_\delta \in D^\delta$. Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_T y_\delta \,\mathrm{d}\mu = \int_0^1 y_\delta(t) \,\mathrm{d}t &= \int_0^{t_\delta} \left(1 - \frac{1 + 2\delta}{2\delta t_\delta} t \right) \mathrm{d}t + \int_{t_\delta}^1 -\frac{1}{2\delta} \,\mathrm{d}t \\ &= \left[t - \frac{1 + 2\delta}{4\delta t_\delta} t^2 \right]_0^{t_\delta} + \left[-\frac{1}{2\delta} t \right]_{t_\delta}^1 \\ &= t_\delta - \frac{1 + 2\delta}{4\delta} t_\delta - \frac{1}{2\delta} (1 - t_\delta) \\ &= \frac{t_\delta}{2} + \frac{t_\delta}{4\delta} - \frac{1}{2\delta} \\ &= \frac{t_\delta(2\delta + 1) - 2}{4\delta} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Damit folgt $y_\delta(1) + m^{-1} \int_T y_\delta \,\mathrm{d}\mu < 0$, d. h. $y_\delta \notin C_{\mu,m}$ für alle $m > 0$.

Der nächste Satz greift ein Resultat von Borwein auf, der zeigte, dass im Falle $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$ jedes Geoffrion-eigentlich minimale Element auch minimal im Sinne von Borwein ist.

Satz 3.4. *Ist $\bar{y} \in Y$ ein eigentlich minimales Element von Y im Sinne von Geoffrion, so gilt $T_B(Y + \mathcal{C}(T)^+; \bar{y}) \cap -\mathcal{C}(T)^+ = \{0\}$.*

Beweis. Angenommen, es existiert ein $k \in T_B(Y + \mathcal{C}(T)^+; \bar{y}) \cap -\mathcal{C}(T)^+$, $k \not\equiv 0$. Dann können wir $k(\bar{t}) < -1$ für ein $\bar{t} \in T$ und $k(t) \leq 0$ für alle $t \in T$ annehmen. Des Weiteren existieren Folgen $\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}_+$, $\{y_n\} \in Y$ und $\{c_n\} \subset \mathcal{C}(T)^+$ mit $y_n + c_n \to \bar{y}$, so dass $\tau_n(y_n + c_n - \bar{y}) \to k$ gilt. Sei $\delta > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\bar{n} \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq \bar{n}$ gilt:

$$\begin{aligned} \tau_n (y_n(\bar{t}) + c_n(\bar{t}) - \bar{y}(\bar{t})) &< -\frac{1}{2} \\ \tau_n (y_n(t) + c_n(t) - \bar{y}(t)) &\leq \frac{1}{2\delta}, \qquad t \in T. \end{aligned}$$

Geeignete Umstellung liefert

$$\begin{aligned} y_n(\bar{t}) - \bar{y}(\bar{t}) &< -\frac{1}{2\tau_n} \\ y_n(t) - \bar{y}(t) &\leq \frac{1}{2\delta\tau_n}, \qquad t \in T. \end{aligned}$$

Wegen der Minimalität von $\bar{y}$ und $y_n(\bar{t}) < \bar{y}(\bar{t})$ sind die Mengen

$$T_n := \{t \in T : \; y_n(t) > \bar{y}(t)\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

für hinreichend große n nichtleer. Für alle $t \in T_n$, $n \geq \bar{n}$ erhalten wir nun

$$0 < y_n(t) - \bar{y}(t) \leq \frac{1}{2\delta\tau_n}$$

und daher

$$\frac{\bar{y}(\bar{t}) - y_n(\bar{t})}{y_n(t) - \bar{y}(t)} > 2\delta\tau_n \frac{1}{2\tau_n} = \delta.$$

Damit kann $\bar{y}$ nicht eigentlich minimal im Sinne von Geoffrion sein, im Widerspruch zur Voraussetzung. ∎

Eine analoge Aussage gilt für eigentlich effiziente Elemente im Sinne von Benson:

Satz 3.5. *Ist $\bar{y} \in Y$ ein eigentlich minimales Element von Y im Sinne von Geoffrion, so gilt* $\operatorname{cl}\operatorname{cone}(Y + \mathcal{C}(T)^+ - \bar{y}) \cap -\mathcal{C}(T)^+ = \{0\}$.

Beweis. Angenommen, es existiert ein $k \in \operatorname{cl}\operatorname{cone}(Y + \mathcal{C}(T)^+ - \bar{y}) \cap -\mathcal{C}(T)^+$, $k \not\equiv 0$. Dann können wir $k(\bar{t}) < -1$ für ein $\bar{t} \in T$ und $k(t) \leq 0$ für alle $t \in T$ annehmen. Des Weiteren existieren Folgen $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$, $\{y_n\} \in Y$ und $\{c_n\} \subset \mathcal{C}(T)^+$, so dass $\lambda_n(y_n + c_n - \bar{y}) \to k$ gilt. Sei $\delta > 0$ beliebig. Nun können wir wie im Beweis zu Satz 3.4 fortfahren und erhalten den erwünschten Widerspruch zur Voraussetzung. ∎

Im Raum $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ist für lineare Vektoroptimierungsprobleme die eigentliche Minimalität im Sinne von Geoffrion äquivalent zur eigentlichen Minimalität im Sinne der linearen Skalarisierung, vgl. Geoffrion, [22], oder auch Jahn, [45]. Ein entsprechendes Resultat für $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$ konnte nicht bewiesen werden.

3.3 Dichtheit der Menge eigentlich minimaler Elemente in der Menge der minimalen Elemente

Interessant ist die Frage, welche minimalen Elemente nicht durch die lineare (oder eine andere) Skalarisierung ermittelt werden können. Die wohl wichtigsten Resultate betreffen den Fall konvexer Mengen Y; diese Aussagen nennen zusätzlich notwendige Bedingungen an Y und den Kegel K, unter denen $\mathcal{E}(Y, K)$ dicht in $\mathcal{E}_l(Y)$ liegt. Erste Ergebnisse hierzu wurden von Arrow, Barankin und Blackwell vorgelegt, allerdings nur für den Raum $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$, geordnet durch $\mathbb{R}^n_+$. Später erfolgte unter dem Namen „ABB-Theoreme“ eine sukzessive Erweiterung und Verallgemeinerung der Aussagen, zunächst stets mit dem Ziel der Charakterisierung von Eigenschaften des Ordnungskegels, unter denen möglichst allgemeine Dichtheitsaussagen gelten. Resultate hierzu findet man z. B. bei Ferro, [20], Jahn, [44] und Wantao, [85]. Auf die meisten unendlichdimensionalen Folgen- und Funktionenräume – so auch $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$ – können diese Resultate nicht angewendet werden, da die Ordnungskegel Voraussetzungen wie beschränkte bzw. schwach kompakte Basis oder die Bishop-Phelps-Eigenschaft nicht erfüllen. Erste Ansätze, auch diese Räume zu erfassen, findet man etwa bei Dauer und Gallagher, [13], Ferro, [19], Gallagher und Saleh, [21], und Henig, [31]. Einen Überblick über den derzeitigen Stand der Ergebnisse und einen allgemeinen Beweis für die Dichtheitsaussagen auf Basis der sogenannten „dilating cones“ gibt die Arbeit von Daniilidis, [12], aus der auch die nachfolgende Aussage stammt.

Satz 3.6 (ABB-Theorem). *Sei τ eine Topologie des Dualsystems $(\mathcal{C}(T), \mathcal{M}(T))$, und sei weiter Y eine nichtleere, konvexe, τ-kompakte Teilmenge des Raumes $\mathcal{C}(T)$. Dann gilt*

$$\mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+) \subseteq \operatorname{cl}_\tau \mathcal{E}_l(Y).$$

Beweis. Wir hatten bereits festgestellt, dass $\mathcal{C}(T)$ ein Banach-Raum ist und dass $\mathcal{C}(T)^+$ einen spitzen, abgeschlossenen, konvexen Kegel darstellt, für den eine Basis existiert. Somit kann das Theorem 2 von Daniilidis, [12], angewendet werden. ∎

Es fällt auf, dass dieses Resultat für Dichtheit bzgl. einer bestimmten Topologie die Kompaktheit von Y in derselben Topologie verlangt. Diese Kopplung der Topologien kann nur aufgelöst werden, indem stärkere Bedingungen an den Ordnungskegel, etwa das Vorliegen der Daniell-Eigenschaft oder die Existenz einer schwach kompakten Basis, gestellt werden. Wie wir in Kapitel 2 festgestellt haben, erfüllt der Kegel $\mathcal{C}(T)^+$ keine dieser Bedingungen. Daher bleibt Satz 3.6 das einzige hier genannte ABB-Theorem.

Sowohl Daniilidis, [12], als auch Ferro, [20], formulieren die Frage nach der Entkopplung der Topologien im Falle $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$ als offenes Problem. Bisher ist weder ein entsprechendes Resultat noch ein Gegenbeispiel bekannt. Das Problem liegt bereits darin, überhaupt konvexe, schwach kompakte Mengen zu finden, die nicht kompakt sind – solche Mengen könnten dann auf ihre minimalen Punkte untersucht werden.

3.4 Existenz minimaler Elemente

Wir beschäftigen uns nun mit Bedingungen, welche die Existenz minimaler Elemente in einer Menge $Y \subset \mathfrak{Y}(= \mathcal{C}(T))$, geordnet durch den Kegel $K(= \mathcal{C}(T)^+)$, sichern. Da minimale Elemente auch schwach minimal sind, garantieren jene Kriterien auch die Existenz schwach minimaler Elemente – wir beschränken uns allerdings bei den Untersuchungen auf die Existenz minimaler Elemente. Umgekehrt kann unter einem Teil der Voraussetzungen bzw. unter stärkeren Bedingungen die Existenz eigentlich minimaler Elemente gesichert werden – auch darauf gehen wir nicht weiter ein.

Die Untersuchung von Existenzkriterien wurde in der Vergangenheit im Wesentlichen in zwei Richtungen vorangetrieben: Der überwiegende Anteil der Autoren versuchte, auf Basis ordnungstheoretischer Eigenschaften der Kegel (bzw. der entsprechend geordneten Räume) auf die Existenz minimaler Elemente in beschränkten, abgeschlossenen und gegebenenfalls vollständigen Mengen Y zu schließen. So liegen zahlreiche Resultate vor, die verschiedene Abwandlungen der Daniell-Eigenschaft, der Ordnungsvollständigkeit, der Ordnungsbeschränktheit oder der Nuklearität voraussetzen – als Überblick seien der Artikel von Sonntag und Zalinescu, [75], oder der Band von Göpfert, Riahi, Tammer und Zalinescu, [25], empfohlen. Da der Raum $\mathcal{C}(T)$, halbgeordnet durch $\mathcal{C}(T)^+$, nicht ordnungsvollständig oder nuklear ist und nicht die Daniell-Eigenschaft besitzt, ist keines dieser Theoreme im Falle $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$ anwendbar. Nur wenige Autoren beschäftigten sich hingegen mit Existenzaussagen, die an bestimmte Eigenschaften der Menge Y gekoppelt werden; als Beispiel seien hier Borwein, [6], Corley, [10], Jahn, [41], und Sterna-Karwat, [78], genannt.

Luc stellte in [55] ein Konzept vor, in welches sich beide genannten Ansätze einbetten lassen. Sein Begriff der Kegel-Vollständigkeit verbindet die Eigenschaften der Menge Y mit denen des Ordnungskegels K und kann sowohl durch ordnungstheoretischen Eigenschaften von K als auch durch stärkere Forderungen an die Menge Y erfüllt werden. Wir nutzen daher anschließend seine Ergebnisse.

Lucs Ergebnisse gelten in topologischen Vektorräumen $\mathfrak{Y}$. Wir bleiben zunächst in diesen allgemeinen Räumen und spezialisieren die Aussagen anschließend für den Raum $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$.

Für die meisten Existenzaussagen ist es nicht notwendig, Voraussetzungen an die gesamte Menge Y zu treffen. Dann reicht die Betrachtung eines **Ausschnittes bzgl. des Kegels** K,

$$Y_z := Y \cap (z - K), \qquad z \in \mathfrak{Y}.$$

Für $z \in Y$ und einen beliebigen Kegel K ist Y_z stets nichtleer.

Definition 3.7. Sei $K \subset \mathfrak{Y}$ ein nichtleerer Kegel. Eine Menge $Y \subset \mathfrak{Y}$ heißt K**-vollständig** (bzw. **strikt** K**-vollständig**), wenn sie keine Überdeckung der Art $\{\mathfrak{Y} \backslash (y_i - \operatorname{cl} K) : i \in I\}$ (bzw. $\{\mathfrak{Y} \backslash (y_i - K) : i \in I\}$) mit einem fallenden Netz $\{y_i\}_{i \in I} \subset Y$ besitzt.

Für einen abgeschlossenen Kegel K stimmen K-Vollständigkeit und strikte K-Vollständigkeit überein.

K-Vollständigkeit heißt, dass für jedes monoton fallende Netz $\{y_i\}_{i \in I} \subset Y$ ein $\bar{y} \in Y$ existiert, so dass $\bar{y} \in y_i - \operatorname{cl} K$ für alle $i \in I$ gilt. $\bar{y}$ ist somit ein minimales Element der vollständig geordneten Teilmenge $\{y_i\}_{i \in I} \subset Y$. Bei Vorliegen von K-Vollständigkeit kann also durch das Lemma von Zorn direkt auf die Existenz minimaler Elemente geschlossenen werden. Daraus erhält Luc das folgende Resultat, vgl. [55]:

Satz 3.7. *Sei K ein konvexer Kegel in $\mathfrak{Y}$ und $Y \subset \mathfrak{Y}$ eine nichtleere Teilmenge.*

(i) $\mathcal{E}(Y, K) \neq \emptyset \iff Y$ hat einen nichtleeren strikt K-vollständigen Ausschnitt.

(ii) Sei K ein spitzer Kegel mit $\operatorname{cl} K + K \backslash \{0\} \subseteq K$. Dann gilt:

$$\mathcal{E}(Y, K) \neq \emptyset \iff Y \text{ hat einen nichtleeren } K\text{-vollständigen Ausschnitt.}$$

Die Beweise für diese Aussagen findet man etwa bei Luc, [55], Theoreme 3.3 und 3.4.

Für unsere spezielle Aufgabenstellung erhalten wir also:

Folgerung 3.3. $\mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+) \neq \emptyset \iff Y$ besitzt einen nichtleeren $\mathcal{C}(T)^+$-vollständigen Ausschnitt Y_z.

Da sich die K-Vollständigkeit nur schwer prüfen läßt, untersuchen wir nun Bedingungen, unter denen eine Menge K-vollständig ist. Die folgende Definition geht auf Corley (vgl. [10]) zurück:

Definition 3.8. Sei $K \subset \mathfrak{Y}$ ein nichtleerer Kegel. Eine Teilmenge $Y \subset \mathfrak{Y}$ heißt K**-halbkompakt**, wenn jede Überdeckung von $\mathfrak{Y}$ der Form $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{Y} \backslash (y_i - K)$, $y_i \in Y$, eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Weiter erinnern wir daran, dass eine Teilmenge eines linearen Raumes **Polyeder** genannt wird, falls sie die konvexe Hülle endlich vieler Punkte ist.

Lemma 3.6. *Jede der folgenden Bedingungen impliziert die (strikte) $\mathcal{C}(T)^+$-Vollständigkeit einer nichtleeren Menge $Y \subset \mathcal{C}(T)$:*

a) Y ist $\mathcal{C}(T)^+$-halbkompakt;

b) Y ist schwach kompakt;

c) Y ist ein Polyeder.

Die Aussagen findet man bei Luc, [55], Kapitel 2, Lemma 3.5 und Folgerung 3.14.

Luc gibt weitere Kriterien an, welche die K-Vollständigkeit implizieren. Allerdings stützen sich diese auf die Daniell-Eigenschaft oder Ordnungsvollständigkeit von K, bleiben also für den Fall $K = \mathcal{C}(T)^+$ ohne Bedeutung, vgl. Satz 2.2.

Aus Folgerung 3.3 und Lemma 3.6 erhalten wir direkt die folgenden Existenzkriterien:

Satz 3.8. *Die nichtleere Menge $Y \subset \mathcal{C}(T)$ erfülle wenigstens eine der folgenden Bedingungen:*

a) Y besitze einen K-halbkompakten Ausschnitt Y_z für einen Kegel $K \supset \mathcal{C}(T)^+$;

b) Y besitze einen schwach kompakten Ausschnitt Y_z;

c) Y ist ein Polyeder.

Dann gilt $\mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+) \neq \emptyset$.

Bemerkung 3.2. Teil b) umfaßt auch das Existenzkriterien von Borwein (vgl. Theorem 1 in [6]) und Jahn (vgl. Folgerung 2.1 in [41]), wonach jede Menge mit kompaktem bzw. schwach kompaktem Ausschnitt minimale Elemente enthält.

Das folgende Beispiel zeigt, dass eine Menge $Y \subset \mathcal{C}(T)$ sehr wohl einen kompakten (und damit $\mathcal{C}(T)^+$-vollständigen) Ausschnitt haben kann, ohne selbst kompakt zu sein:

Beispiel 3.4. Sei $T = [-1, 1]$.

a) Sei $Y = \{y_\alpha : y_\alpha(t) = \alpha t, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Dann ist Y unbeschränkt und daher nicht kompakt. Wir betrachten den Ausschnitt Y_z mit $z \equiv 0$: Ohne Mühe verifiziert man $Y_z = \{z\}$, d. h. Y_z ist kompakt, und $\mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+) \neq \emptyset$.

b) Sei $Y = \{y \in \mathcal{C}(T) : \ \|y\| \leq 1\}$. Dann ist Y zwar beschränkt, aber weder kompakt noch schwach kompakt. Wir betrachten den Ausschnitt Y_z mit $z \equiv -1$: Ohne Mühe verifiziert man $Y_z = \{z\}$, d. h. Y_z ist kompakt, und $\mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+) \neq \emptyset$.

Andererseits gilt:

Satz 3.9. *Für jede kompakte Menge $Y \subset \mathcal{C}(T)$ gilt $\mathcal{E}_l(Y) \neq \emptyset$.*

Beweis. Wir wählen ein beliebiges Funktional $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$. Dann beschreibt μ insbesondere ein auf $\mathcal{C}(T)$ stetiges Funktional $y \mapsto \int_T y \, \mathrm{d}\mu$. Die Menge $Y \subset \mathcal{C}(T)$ ist kompakt, also besitzt die Menge

$$\left\{ \int_T y \, \mathrm{d}\mu : \ y \in Y \right\}$$

gemäß dem Weierstrass-Theorem (für allgemeine Räume vgl. etwa Zeidler, [94], Theorem 38.B und Folgerung 38.10) eine Minimalstelle $y_0 \in Y$. Es gilt $y_0 \in \mathcal{E}_l(Y)$. ■

Aus Satz 3.9 ebenso wie aus Theorem 1 von Borwein, [6], folgt

Folgerung 3.4. $\mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+) \neq \emptyset$ für kompakte Mengen $Y \subset \mathcal{C}(T)$.

Man beachte, dass diese Aussage nicht für beliebige Kegel $K \subset \mathcal{C}(T)$ gelten muss, vgl. etwa Bemerkung 3.12 und Beispiel 3.13 bei Luc, [55], bzw. Beispiel 2.1 bei Sterna-Karwat, [78].

Weitere Existenzbedingungen für minimale Elemente findet man in Kapitel 6.4.

4. Skalarisierung gemäß Tammer und Weidner

In diesem Kapitel stellen wir ein allgemeines Skalarisierungskonzept für vektorwertige Optimierungsaufgaben vor. Als Skalarisierung bezeichnet man die Charakterisierung minimaler bzw. effizienter Elemente als Lösung reeller („skalarer") Optimierungsprobleme. Man betrachtet dann meist eine ganze Schar so genannter skalarer Ersatzaufgaben, deren Lösungen wesentlich von der Wahl gewisser Skalarisierungsparameter abhängen.

Das nachfolgend vorgestellte Skalarisierungskonzept beruht im Wesentlichen auf der Konstruktion trennender Funktionale auf dem Rand geeigneter Mengen. Weidner stellte in ihrer Habilitation [89] sehr detailliert die Eigenschaften der Funktionale und die sich ergebenenden Optimalitätskriterien zusammen – wir stützen uns daher nachfolgend meist auf diese Arbeit, obwohl viele Ergebnisse bereits in früheren Arbeiten veröffentlicht wurden, siehe etwa Gerstewitz (Tammer) und Iwanow, [23], Gerth (Tammer) und Weidner, [24] bzw. die bei Weidner, [89], genannten Quellen.

Die Wahl geeigneter Skalarisierungsverfahren hat in der Literatur zu einer Vielzahl verschiedener Typen eigentlicher Effizienz geführt. Die Stärke des hier genannten Verfahrens liegt darin, dass es viele dieser Skalarisierungsverfahren als Spezialfall enthält.

Wir wiederholen zunächst kurz die wesentlichen Aspekte des Konzeptes in allgemeiner Fassung und spezialisieren anschließend die Aussagen auf den von uns betrachteten Fall des Raumes $\mathcal{C}(T)$ der stetigen Funktionen. Hierbei bereiten wir insbesondere Kriterien für die in Kapitel 3 genannten verschiedenen Typen der Minimalität vor.

4.1 Konstruktion trennender Funktionale

Die Konstruktion trennender Funktionale ist traditionell eine Methode der Linearen Funktionalanalysis, wo gemäß dem Satz von Hahn und Banach konvexe Mengen durch lineare Funktionale getrennt werden. Sind $A, B \subset \mathfrak{Y}$ z. B. abgeschlossene konvexe Mengen, so kann die Relation $A \cap B = \emptyset$ in ein (skalares) Ungleichungssystem $z(A) < \alpha < z(B)$ umgewandelt werden, wobei $z \in \mathfrak{Y}'$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten. Dieser Ansatz könnte auch in der mehrkriteriellen Optimierung benutzt werden, etwa um die laut Effizienzdefinition elementfremden Mengen Y und $\{y\} - K \backslash \{0\}$ zu trennen (vgl. etwa Definition 3.1). Da hierfür allerdings sowohl Y als auch $\{y\} - K \backslash \{0\}$ konvex sein müssen, kann dieser Ansatz in vielen allgemeinen Problemstellungen nicht verwendet werden. Wir benutzen daher das Trennungskonzept von Tammer und Weidner. Dieses Konzept kann auf die Konvexität der zu trennenden Mengen verzichten, als Konsequenz erweisen sich die trennenden Funktionale allerdings i. a. nicht mehr als linear, bleiben aber meist positiv homogen oder sogar sublinear.

Sei $\mathfrak{Y}$ ein linearer topologischer Raum. Wir nennen ein Funktional $z : \mathfrak{Y} \to \mathbb{R}$ **konvex**, falls für alle $y_1, y_2 \in \mathfrak{Y}$ und $\lambda \in [0, 1]$ die Ungleichung $z(\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2) \leq \lambda\, z(y_1) + (1 - \lambda)\, z(y_2)$ gilt. z heißt **positiv homogen**, falls $z(\lambda y) = \lambda z(y)$ für alle $y \in \mathfrak{Y}$, $\lambda \geq 0$ erfüllt ist. Das Funktional

z wird **sublinear** genannt, wenn es positiv homogen ist und $z(y_1 + y_2) \leq z(y_1) + z(y_2)$ für $y_1, y_2 \in \mathfrak{Y}$ gilt.

Sei $\mathfrak{Y}$ ein linearer topologischer Raum. Weiter seien eine nichtleere Menge $C \subset \mathfrak{Y}$, $C \neq \mathfrak{Y}$, sowie ein Vektor $k \in \mathfrak{Y}$ gegeben. Wir nehmen an, dass C und k die Voraussetzung

$$\textbf{(V1)} \qquad \emptyset \neq \operatorname{int} C = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha>0} (\operatorname{bd} C + \alpha k) \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{Y} = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} (\operatorname{bd} C - \alpha k)$$

erfüllen. Hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit von (V1) werden in Lemma 4.2 gegeben. Dann definieren wir ein Funktional $z^{C,k} : \mathfrak{Y} \to \mathbb{R}$ durch

$$z^{C,k}(y) := \min \{\tau \in \mathbb{R} : y \in \tau k - \operatorname{cl} C\}. \tag{4.1}$$

Ein Funktional dieser Art wurde von Gerth (Tammer) und Weidner in [24] und später von Weidner in [89] (vgl. auch [88]) eingehend untersucht. Sie zeigten u. a. folgende Eigenschaften von $z^{C,k}$:

Satz 4.1. *Sei $\mathfrak{Y}$ ein linearer topologischer Raum. Weiter seien $C \subset \mathfrak{Y}$, $C \neq \mathfrak{Y}$, und $k \in \mathfrak{Y}$ derart, dass Voraussetzung (V1) erfüllt ist. Dann gilt für $z = z^{C,k}$:*

(i) *z ist ein wohldefiniertes, stetiges Funktional von $\mathfrak{Y}$ auf $(-\infty, +\infty)$;*

(ii) $$\begin{aligned} z(y) = r &\iff y \in rk - \operatorname{bd} C, \\ z(y) < r &\iff y \in rk - \operatorname{int} C, \\ z(y) \leq r &\iff y \in rk - \operatorname{cl} C; \end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned} &z \text{ ist konvex} &&\iff \operatorname{cl} C \text{ ist konvex,} \\ &z \text{ ist positiv homogen} &&\iff \operatorname{bd} C \text{ ist ein Kegel,} \\ &z \text{ ist sublinear} &&\iff \operatorname{cl} C \text{ ist ein konvexer Kegel,} \\ &z \text{ ist linear} &&\iff \operatorname{bd} C \text{ ist ein linearer Unterraum von } \mathfrak{Y}. \end{aligned}$$

(iv) *Sei Y eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{Y}$. Dann gilt:*

$$Y \cap (-\operatorname{int} C) = \emptyset \iff z(Y) \geq 0.$$

Wir haben den Beweis – weil überwiegend technischer Natur und für unsere Arbeit von nur untergeordneter Bedeutung – in den Anhang ausgelagert. Die Kernaussagen des Satzes sind den Theoremen 2.1 und 2.2. aus Tammer und Weidner, [24], mit $-C$ anstelle C entnommen. Dort finden allerdings härtere Voraussetzungen als (V1) Anwendung, etwa $k \in \operatorname{int} K$ für einen Kegel K anstelle $k \in \mathfrak{Y}$, vgl. hierzu auch Lemma 4.2.

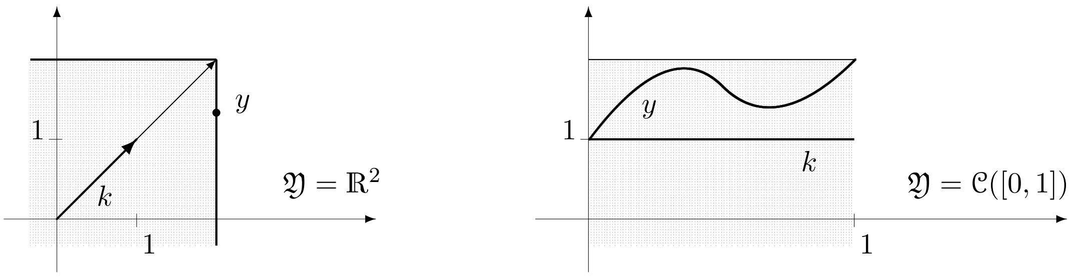
Bemerkung 4.1. Die Stetigkeit von $z = z^{C,k}$ liefert für eine Teilmenge Y von $\mathfrak{Y}$ mit $\operatorname{int} Y \neq \emptyset$ die Beziehung

$$Y \cap (-\operatorname{int} C) = \emptyset \implies z(\operatorname{int} Y) > 0.$$

Bemerkung 4.2. Im Gegensatz zu den klassischen Trennungssätzen muss die Menge Y in unseren Aussagen nicht konvex sein.

Die meisten Resultate zum hier vorgestellten Funktional z sind zuerst von Gerth (Tammer) und Iwanow, [23], sowie Gerth (Tammer) und Weidner, [24], veröffentlicht worden. Weidner hat in ihrer Habilitationsschrift, [89], alle relevanten Eigenschaften des Funktionals z und seine Verwendbarkeit für die Skalarisierung mehrkriterieller Optimierungsprobleme in Abhängigkeit von den Eigenschaften von C und k zusammengetragen. Darüber hinaus findet man dort einen Vergleich mit den Konzepten von Dauer und Saleh, [14], sowie Luc, [55], die ähnliche Skalarisierungsfunktionale wählten.

Die nachfolgenden Abbildungen sollen die Idee illustrieren, die hinter der Konstruktion der Funktionale $z^{C,k}$ steht. Wir stellen dabei die Räume $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^2$ mit $C = \mathbb{R}^2_+$, $k = (1, 1)$ und $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}([0, 1])$ mit $C = \mathcal{C}([0, 1])^+$, $k(t) = 1$ für alle $t \in T$ gegenüber. In beiden Fällen ist offensichtlich Voraussetzung (V1) erfüllt. Die punktierten Flächen stellen jeweils die Mengen $z(y)k - \operatorname{cl} C$ dar.



Wir halten weiter fest:

Satz 4.2. *Sei $\mathfrak{Y}$ ein linearer topologischer Raum. Weiter seien $C \subset \mathfrak{Y}$, $C \neq \mathfrak{Y}$, und $k \in \mathfrak{Y}$ derart, dass Voraussetzung (V1) erfüllt ist, sei $a \in \mathfrak{Y}$ beliebig. Dann ist auch das Funktional $z^{C-a,k}$ wohldefiniert, und es gilt*

$$z^{C,k}(y - a) = z^{C-a,k}(y).$$

Beweis. Wir verifizieren

$$\begin{aligned} z^{C,k}(y-a) &= \min\{\tau \in \mathbb{R} : \; y - a \in \tau k - \operatorname{cl} C\} \\ &= \min\{\tau \in \mathbb{R} : \; y \in \tau k - \operatorname{cl}(C - a)\} \\ &= z^{C-a,k}(y) \end{aligned}$$

und erhalten damit die Behauptung. ■

Neben den in den Sätzen 4.1 und 4.2 genannten Eigenschaften interessiert auch, inwieweit ein skalarisierendes Funktional die Halbordnung abbildet bzw. erhält. Hierzu dient der Begriff der Monotonie:

Definition 4.1. Sei B eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{Y}$. Ein Funktional $z : \mathfrak{Y} \to \mathbb{R}$ heißt **B-monoton**, wenn

$$y_1, y_2 \in \mathfrak{Y}, \; y_1 \in y_2 - B \implies z(y_1) \leq z(y_2).$$

z heißt **strikt B-monoton**, wenn

$$y_1, y_2 \in \mathfrak{Y}, \; y_1 \in y_2 - B \backslash \{0\} \implies z(y_1) < z(y_2).$$

Sofern klar ist, bzgl. welcher Menge B Monotonie vorliegt, sprechen wir auch kurz von Monotonie anstatt von B-Monotonie.

Für das Funktional $z^{C,k}$ können gewisse Monotonie-Eigenschaften festgehalten werden:

Satz 4.3. *Sei $\mathfrak{Y}$ ein linearer topologischer Raum. Weiter seien $C \subset \mathfrak{Y}$, $C \neq \mathfrak{Y}$, und $k \in \mathfrak{Y}$ derart, dass (V1) erfüllt ist. Sei B eine nichtleere Teilmenge des Raumes $\mathfrak{Y}$. Dann gilt für das Funktional $z = z^{C,k}$:*

$$\begin{aligned} &z \text{ ist } B\text{-monoton} &&\Longleftrightarrow \quad \operatorname{bd} C + B \subseteq \operatorname{cl} C, \\ &z \text{ ist strikt } B\text{-monoton} &&\Longleftrightarrow \quad \operatorname{bd} C + B\backslash\{0\} \subseteq \operatorname{int} C. \end{aligned}$$

Beweis. Sei z B-monoton, seien $y_1 \in \operatorname{bd} C$ und $y_2 \in B$ beliebig. Dann gilt $z(-y_1) = 0$ und $y_1 + y_2 \in y_1 + B$ bzw. $-y_1 - y_2 \in -y_1 - B$, also $z(-y_1 - y_2) \leq z(-y_1) = 0$. Aus Satz 4.1 (ii) folgt nun $-y_1 - y_2 \in -\operatorname{cl} C$ bzw. $y_1 + y_2 \in \operatorname{cl} C$.

Gelte umgekehrt $\operatorname{bd} C + B \subseteq \operatorname{cl} C$. Dann folgt für $y_1, y_2 \in \mathfrak{Y}$ und $y_2 \in y_1 - B$ die Inklusionskette $y_2 \in y_1 - B \subseteq z(y_1)k - \operatorname{bd} C - B \subseteq z(y_1)k - \operatorname{cl} C$, also mit Satz 4.1 (ii) $z(y_2) \leq z(y_1)$.

Der Beweis der Aussage für die strenge Monotonie erfolgt analog. ■

Der Beweis von Satz 4.3 ist der Arbeit von Weidner, [89], entnommen. Die dort bewiesene Aussage ist stärker als die entsprechende Aussage bei Gerth (Tammer) und Weidner, [24], wo jeweils nur die Hinlänglichkeit der Monotoniebedingungen bewiesen wurde.

Die rechte Seite der zweiten Äquivalenz in Satz 4.3 kann oft durch eine einfachere Inklusion geprüft werden:

Lemma 4.1. *Sei $\mathfrak{Y}$ ein linearer topologischer Raum. Weiter seien $C \subset \mathfrak{Y}$, $C \neq \mathfrak{Y}$, ein abgeschlossener, konvexer Kegel mit nichtleerem Inneren und $B \subseteq \mathfrak{Y}$ eine Menge. Dann gilt $\operatorname{cl} C + B\backslash\{0\} \subseteq \operatorname{int} C$ genau dann, wenn $B\backslash\{0\} \subset \operatorname{int} C$.*

Beweis. Wir wählen $c \in \operatorname{cl} C = C$ und $b \in B\backslash\{0\}$ beliebig. Dann gibt es wegen $B\backslash\{0\} \subset \operatorname{int} C$ eine offene Umgebung U von b mit $U \subset C$. Folglich ist $\{c\} + U$ eine offene Umgebung von $c + b$ mit $\{c\} + U \subset \operatorname{cl} C + C \subseteq C$. Wir erhalten $c + b \in \operatorname{int} C$.

Die Umkehrung folgt sofort aus $0 \in \operatorname{cl} C$. ■

Zum Schluss geben wir hinreichende Bedingungen an, unter denen C und k die Voraussetzung (V1) erfüllen. Das folgende Resultat findet man bei Weidner, [89], als Lemma 3.2.2.

Lemma 4.2. *Jede der folgenden Bedingungen impliziert die Gültigkeit der Voraussetzung (V1):*

a) $C \subsetneq \mathfrak{Y}$ *ist eine Menge mit nichtleerem Inneren, für die ein Kegel* $K \subset \mathfrak{Y}$ *mit* $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ *und* $\operatorname{cl} C + \operatorname{int} K \subseteq \operatorname{int} C$ *existiert, und es gilt* $k \in \operatorname{int} K$*;*

b) $C = a + K \subsetneq \mathfrak{Y}$*, wobei* $a \in \mathfrak{Y}$ *ein beliebiges Element,* $K \cup \{0\}$ *ein konvexer Kegel mit* $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ *und* $k \in \operatorname{int} K$ *ist.*

Den Beweis findet man wiederum im Anhang, siehe Lemma A.5.

Bemerkung 4.3. Fall a) in Lemma 4.2, gemeinsam mit Lemma A.4, umfasst auch die Möglichkeit, dass C selbst ein konvexer Kegel mit $\operatorname{int} C \neq \emptyset$ ist und $k \in \operatorname{int} C$ gilt.

Das Lemma 3.2.2 bei Weidner, [89], liefert bedeutend mehr Ergebnisse als oben angegeben. Wir haben uns hier auf die für die nachfolgenden Untersuchungen essentiellen Aussagen beschränkt.

4.2 Eigenschaften der Funktionale bei spezieller Wahl der erzeugenden Kegel

Im diesem Kapitel untersuchen wir die Funktionale $z^{C,k}$ für spezielle Mengen C und Vektoren k im Raum $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$, wobei T eine kompakte Teilmenge eines Banach-Raumes ist. Im Vordergrund sollen dabei als Mengen C genau die Kegel stehen, die wir schon beim Vergleich verschiedener Effizienzbegriffe näher betrachtet hatten.

4.2.1 Der natürliche Ordnungskegel

In diesem Abschnitt sei $C = \mathcal{C}(T)^+$.

Satz 4.4. *Sei $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$. Dann ist das Funktional $z = z^{\mathcal{C}(T)^+,k}$ wohldefiniert, stetig, sublinear, $\mathcal{C}(T)^+$-monoton und strikt $(\operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+)$-monoton.*

Beweis. $\mathcal{C}(T)^+$ ist ein abgeschlossener, konvexer Kegel mit nichtleerem Inneren. Gemäß Lemma 4.1 mit $C = \mathcal{C}(T)^+$ und $B = \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ gilt

$$\operatorname{cl} \mathcal{C}(T)^+ + \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+ \subseteq \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+. \tag{4.2}$$

Also ist Bedingung a) in Lemma 4.2 mit $C = K = \mathcal{C}(T)^+$ erfüllt, d. h. $\mathcal{C}(T)^+$ und k erfüllen die Voraussetzung (V1). Die Inklusion $\operatorname{bd} \mathcal{C}(T)^+ + \mathcal{C}(T)^+ \subseteq \operatorname{cl} \mathcal{C}(T)^+$ folgt direkt aus den Kegeleigenschaften von $\mathcal{C}(T)^+$, Inklusion (4.2) liefert $\operatorname{bd} \mathcal{C}(T)^+ + \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+ \subseteq \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$. Die angegebenen Eigenschaften von $z^{\mathcal{C}(T)^+,k}$ folgen nun aus den Sätzen 4.1 und 4.3. ∎

Der Wert $z^{\mathcal{C}(T)^+,k}(y)$ für ein beliebiges Elementes $y \in \mathfrak{Y}$ kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} z^{\mathcal{C}(T)^+,k}(y) &= \min \{\tau \in \mathbb{R} : \ y \in \tau k - \mathcal{C}(T)^+\} \\ &= \min \{\tau \in \mathbb{R} : \ y(t) \le \tau k(t) \quad \forall\, t \in T\} \\ &= \min \left\{\tau \in \mathbb{R} : \ \frac{y(t)}{k(t)} \le \tau \quad \forall\, t \in T\right\} \\ &= \sup_{t \in T} \frac{y(t)}{k(t)} \\ &= \max_{t \in T} \frac{y(t)}{k(t)} \ . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Die Quotientenbildung in den letzten drei Zeilen ist möglich, da $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$, also $k(t) > 0$ für alle $t \in T$, angenommen wurde. Als Quotient stetiger Funktionen mit $k(t) > 0$ für alle $t \in T$ ist auch y/k stetig, wegen der Kompaktheit von T kann somit das Supremum durch das Maximum ersetzt werden.

Bemerkung 4.4. Das Funktional z aus Satz 4.4 ist i. a. nicht strikt $\mathcal{C}(T)^+$-monoton. Dies kann etwa am Beispiel $T = [0,1]$, $k(t) = 1$, $y_1(t) = 1$ und $y_2(t) = t$ für $t \in [0,1]$ nachvollzogen werden: $y_1 \in y_2 - \mathcal{C}[0,1]^+ \backslash \{0\}$, aber $z(y_1) = z(y_2)$.

Das Funktional z ist nach Satz 4.3 allerdings strikt $(\operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+)$-monoton.

4.2.2 Der Kegel der linearen Skalarisierung

In Kapitel 3 hatten wir den Kegel

$$D_\mu = \left\{ y \in \mathcal{C}(T) : \int_T y \, \mathrm{d}\mu \geq 0 \right\}, \qquad \mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+,$$

eingeführt und durch ihn die eigentliche Effizienz im Sinne der linearen Skalarisierung charakterisiert. $\mathcal{M}(T)^+$ bezeichnet hierbei den Kegel der positiven Radon-Maße auf T.

Satz 4.5. *Sei $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ und $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$. Dann ist das Funktional $z = z^{D_\mu, k}$ wohldefiniert, stetig, linear und strikt $\mathcal{C}(T)^+$-monoton.*

Beweis. D_μ ist ein abgeschlossener, konvexer Kegel mit nichtleerem Inneren, und es gilt

$$\mathcal{C}(T)^+ \backslash \{0\} \subset \operatorname{int} D_\mu = \left\{ y \in \mathcal{C}(T) : \int_T y \, \mathrm{d}\mu > 0 \right\}.$$

Laut Lemma 4.1 gilt also $\operatorname{cl} D_\mu + \mathcal{C}(T)^+ \backslash \{0\} \subseteq \operatorname{int} D_\mu$. Es folgt $\operatorname{cl} D_\mu + \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+ \subseteq \operatorname{int} D_\mu$ und $\operatorname{bd} D_\mu + \mathcal{C}(T)^+ \backslash \{0\} \subseteq \operatorname{int} D_\mu$. Gemäß Lemma 4.2 a) erfüllen damit $C = D_\mu$ und $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ die Voraussetzung (V1). Die Aussagen des obigen Satzes sind nun direkte Folgerungen aus den Sätzen 4.1 und 4.3. ∎

Der Wert $z^{D_\mu, k}(y)$ für ein beliebiges Element $y \in \mathcal{C}(T)$ kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} z^{D_\mu, k}(y) &= \min \{ \tau \in \mathbb{R} : \ y \in \tau k - D_\mu \} \\ &= \min \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \ \int_T (y - \tau k) \, \mathrm{d}\mu \leq 0 \right\} \\ &= \min \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \ \int_T y \, \mathrm{d}\mu \leq \tau \int_T k \, \mathrm{d}\mu \right\} \\ &= \min \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \ \left(\int_T y \, \mathrm{d}\mu \right) / \left(\int_T k \, \mathrm{d}\mu \right) \leq \tau \right\} \\ &= \frac{1}{\int_T k \, \mathrm{d}\mu} \int_T y \, \mathrm{d}\mu \ . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Wegen $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$ und $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$, d. h. $k(t) > 0$ für alle $t \in T$, gilt $\int_T k \, \mathrm{d}\mu > 0$, die Quotientenbildung ist also wiederum möglich.

4.2.3 Der Kegel der Geoffrion-eigentlichen Effizienz

Als drittes Beispiel setzen wir $C = D^\delta$, $\delta > 0$, wobei D^δ als

$$\begin{aligned} D^\delta &= \bigcup_{s \in T} \{ y \in \mathcal{C}(T) : \ y(s) > 0, \ y(s) + \delta y(t) > 0 \ \forall \, t \in T \backslash \{s\} \} \\ &= \{ y \in \mathcal{C}(T) : \ \max_{t \in T} y(t) + \delta \cdot \min_{t \in T} y(t) > 0 \}, \end{aligned}$$

gegeben ist. In Kapitel 3 hatten wir festgestellt, dass diese Mengen die eigentliche Effizienz im Sinne von Geoffrion charakterisieren. Im Gegensatz zu $\mathcal{C}(T)^+$ und D_μ ist der Kegel $D^\delta \cup \{0\}$ nicht abgeschlossen, daher muß zunächst $\operatorname{cl} (D^\delta \cup \{0\})$ bestimmt werden:

Lemma 4.3. *Sei $\delta > 0$. Es gilt*

$$\operatorname{cl} D^\delta = \bigcup_{s\in T} \{y \in \mathcal{C}(T):\ y(s) \geq 0,\ y(s) + \delta y(t) \geq 0\ \forall\ t \in T\backslash\{s\}\}.$$

Beweis. Laut Definition gilt $D^\delta = \bigcup_{s\in T} D^{\delta,s}$ mit

$$D^{\delta,s} = \{y \in \mathcal{C}(T):\ y(s) > 0,\ y(s) + \delta y(t) > 0\ \forall\ t \in T\backslash\{s\}\}.$$

Wir erhalten als Abschließung

$$\operatorname{cl} D^{\delta,s} = \{y \in \mathcal{C}(T):\ y(s) \geq 0,\ y(s) + \delta y(t) \geq 0\ \forall\ t \in T\backslash\{s\}\}.$$

Die Behauptung kann folglich als $\operatorname{cl} \bigcup_{s\in T} D^{\delta,s} = \bigcup_{s\in T} \operatorname{cl} D^{\delta,s}$ geschrieben werden. Die Inklusion $\operatorname{cl} \bigcup_{s\in T} D^{\delta,s} \supseteq \bigcup_{s\in T} \operatorname{cl} D^{\delta,s}$ ist klar, ebenso $\bigcup_{s\in T} D^{\delta,s} \subseteq \bigcup_{s\in T} \operatorname{cl} D^{\delta,s}$. Es genügt also zu zeigen, dass $\bigcup_{s\in T} \operatorname{cl} D^{\delta,s}$ abgeschlossen ist.

Sei also $\bar{y} \notin \bigcup_{s\in T} \operatorname{cl} D^{\delta,s}$. Dann gilt für alle $s \in T$: $\bar{y}(s) < 0$, oder es gibt ein $t_s \in T\backslash\{s\}$ mit $\bar{y}(\bar{s}) + \delta\bar{y}(t_s) < 0$. Zu jedem $s \in T$ gibt es eine abgeschlossene Umgebung B_s von s, so dass $\bar{y}(t) < 0\ \forall\ t \in B_s \cap T$ oder $y(t) + \delta y(t_s) < 0\ \forall\ t \in B_s \cap T$ gilt. Da T kompakt ist, sind die Umgebungen B_s sogar kompakt. Daher existiert zu jedem B_s eine offene Umgebung V_s von $\bar{y}$, so dass für alle $y \in V_s$ gilt: $y(t) < 0\ \forall\ t \in B_s \cap T$ oder $\bar{y}(t) + \delta\bar{y}(t_s) < 0\ \forall\ t \in B_s \cap T$. Diese Aussage bleibt erhalten, wenn wir von den abgeschlossenen Umgebungen B_s auf offene Umgebungen U_s von s mit $U_s \subset B_s$ übergehen. Mit $\{U_s\}_{s\in T}$ liegt nun eine offene Überdeckung von T vor, die wegen der Kompaktheit von T eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{s_1}, ..., U_{s_n}\}$ enthält. Wir wählen die zu diesen $U_{s_1}, ..., U_{s_n}$ gehörigen offenen Umgebungen $V_{s_1}, ..., V_{s_n}$ und bilden $V := \bigcap_{i=1}^n V_{s_i}$. Offenbar ist V eine offene Umgebung von $\bar{y}$. Es gilt dann für alle $y \in V$ und alle $s \in T$: $y(s) < 0$ oder $y(s) + \delta y(t_s) < 0$. Somit erhalten wir $y \notin \bigcup_{s\in T} \operatorname{cl} D^{\delta,s}$ für alle $y \in V$. ■

Bemerkung 4.5. Als Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen ist $\bigcup_{s\in T} \operatorname{cl} D^{\delta,s}$ keinesfalls „automatisch" abgeschlossen. Der hier angegebene Beweis beruht auf einem Resultat von Nachbin, der in [60] zeigte, dass die Vereinigung einer Familie $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ (unendlich vieler) abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist, wenn Λ kompakt und der sogenannte Graph der Familie, nämlich $\{(x, \lambda) : x \in F_\lambda\}$, abgeschlossen ist.

Bemerkung 4.6. In Analogie zu Lemma 3.4 erhält man

$$\operatorname{cl} D^\delta = \{y \in \mathcal{C}(T):\ \max_{t\in T} y(t) + \delta \cdot \min_{t\in T} y(t) \geq 0\}$$

und wegen $\operatorname{bd} D^\delta = (\operatorname{cl} D^\delta)\backslash(\operatorname{int} D^\delta)$ schließlich

$$\operatorname{bd} D^\delta = \{y \in \mathcal{C}(T):\ \max_{t\in T} y(t) + \delta \cdot \min_{t\in T} y(t) = 0\}.$$

Wir können nun das Funktional $z^{D^\delta,k}$ untersuchen:

Satz 4.6. *Sei $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ und $\delta > 0$. Dann ist das Funktional $z = z^{D^\delta,k}$ wohldefiniert, stetig, positiv homogen, $\mathcal{C}(T)^+$-monoton und strikt $(\operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+)$-monoton.*

Beweis. Seien $\delta > 0$ und $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ gegeben. Gelte $y_1 \in \operatorname{cl} D^\delta$ und $y_2 \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$. Dann gilt

$$\max_{t\in T}(y_1(t) + y_2(t)) + \delta \cdot \min_{t\in T}(y_1(t) + y_2(t)) > \max_{t\in T} y_1(t) + \delta \cdot \min_{t\in T} y_1(t) \geq 0,$$

d. h. $\operatorname{cl} D^\delta + \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+ \subseteq \operatorname{int} D^\delta$. Weiter ist D^δ eine offene Menge. Gemäß Lemma 4.2 a) erfüllen also $C = D^\delta$ und $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ die Voraussetzung (V1). Man erhält weiter die Inklusionen $\operatorname{bd} D^\delta + \mathcal{C}(T)^+ \subseteq \operatorname{cl} D^\delta$ und $\operatorname{bd} D^\delta + \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+ \subseteq \operatorname{int} D^\delta$. Die Aussagen des Satzes folgen nun aus den Sätzen 4.1 und 4.3. ∎

Der Wert $z^{D^\delta,k}(y)$ für ein beliebiges Element $y \in \mathfrak{Y}$ kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
z^{D^\delta,k}(y) &= \min\,\{\tau \in \mathbb{R} :\; y \in \tau k - \operatorname{cl} D^\delta\} \\
&= \min\,\{\tau \in \mathbb{R} :\; \exists\, s \in T :\; y(s) - \tau k(s) \le 0, \\
&\qquad\qquad y(s) - \tau k(s) + \delta(y(t) - \tau k(t)) \le 0 \;\; \forall\, t \in T\backslash\{s\}\} \\
&= \min\,\{\tau \in \mathbb{R} :\; \exists\, s \in T :\; y(s) - \tau k(s) + \delta(y(t) - \tau k(t)) \le 0 \;\; \forall\, t \in T\} \\
&= \min_{s\in T}\, \min\,\{\tau \in \mathbb{R} :\; y(s) - \tau k(s) + \delta(y(t) - \tau k(t)) \le 0 \;\; \forall\, t \in T\} \\
&= \min_{s\in T}\, \min\,\{\tau \in \mathbb{R} :\; \frac{y(s) + \delta y(t)}{k(s) + \delta k(t)} \le \tau \;\; \forall\, t \in T\} \\
&= \min_{s\in T}\, \max_{t\in T}\, \frac{y(s) + \delta y(t)}{k(s) + \delta k(t)}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Wegen $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ gilt $k(s) > 0$ und $k(s) + \delta k(t) > 0$ für alle $s, t \in T$; die Quotientenbildung ist folglich möglich. Wir haben statt Infimum gleich Minimum und statt Supremum gleich Maximum geschrieben – dies ist wegen der Kompaktheit von T und der Stetigkeit der jeweiligen Funktionen möglich.

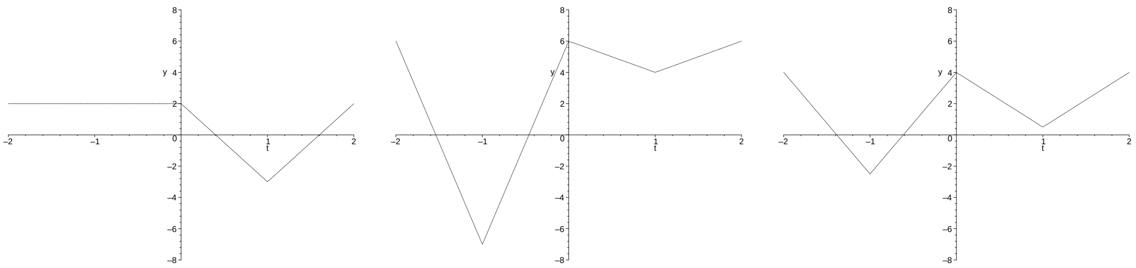
Bemerkung 4.7. Wir hatten in Beispiel 3.1 bereits festgestellt, dass D^δ i. a. nicht konvex ist. Außerdem gilt $\operatorname{bd} D^\delta + \mathcal{C}(T)^+\backslash\{0\} \not\subseteq \operatorname{int} D^\delta$. Das Funktional $z^{D^\delta,k}$ ist daher weder konvex noch strikt $\mathcal{C}(T)^+$-monoton. Die nachfolgenden zwei Beispiele sollen dies veranschaulichen.

Beispiel 4.1 (vgl. Beispiel 3.1, fehlende Konvexität). Sei $k(t) = 1$ für alle $t \in T$, $\delta = 1$ und $T = [-2, 2]$. Wir betrachten die Funktionen

$$y_1(t) := \begin{cases} -3 + 5\,|t-1| & \text{für } t \ge 0 \\ 2 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$y_2(t) := \begin{cases} 4 + 2\,|t-1| & \text{für } t \ge 0 \\ -7 + 13\,|t+1| & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Die nachfolgende Abbildung zeigt die Funktionen y_1, y_2 und $y_3 := (y_1 + y_2)/2$ (von links nach rechts).



Für die Berechnung der Funktionswerte $z^{D^1,1}(y_i)$ wenden wir Gleichung (4.5) an und erhalten

$$\begin{aligned}
z^{D^1,1}(y_1) &= \min_{s\in T}\, \max_{t\in T}\, \frac{y_1(s) + y_1(t)}{2} \\
&= \min_{s\in T}\, \frac{y_1(s) + 2}{2} \\
&= -1/2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^{D^1,1}(y_2) &= \min_{s\in T} \max_{t\in T} \frac{y_2(s)+y_2(t)}{2} \\ &= \min_{s\in T} \frac{y_2(s)+6}{2} \\ &= -1/2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^{D^1,1}(y_3) &= z^{D^1,1}(\frac{y_1+y_2}{2}) \\ &= \min_{s\in T} \max_{t\in T} \frac{y_1(s)+y_2(s)+y_1(t)+y_2(t)}{4} \\ &= \min_{s\in T} \frac{y_1(s)+y_2(s)+8}{4} \\ &= 3/4, \end{aligned}$$

Man erkennt nun leicht

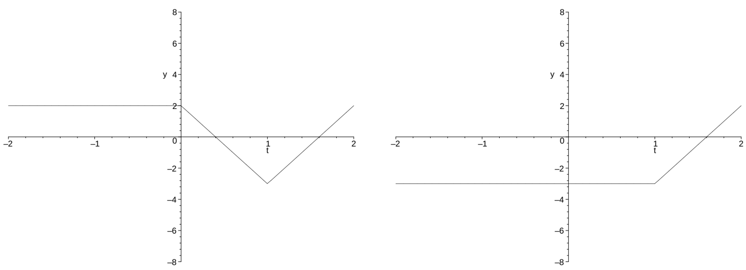
$$z^{D^1,1}(\frac{y_1+y_2}{2}) = \frac{3}{4} \geq -\frac{1}{2} = \frac{z^{D^1,1}(y_1)+z^{D^1,1}(y_2)}{2},$$

also ist zum Beispiel $z^{D^1,1}$ nicht konvex.

Beispiel 4.2 (fehlende strikte $\mathcal{C}(T)^+$-Monotonie). Sei $k(t)=1$ für alle $t\in T$, $\delta=1$ und $T=[-2,2]$. Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{aligned} y_1(t) &:= \begin{cases} -3+5\,|t-1| & \text{für } t\geq 0 \\ 2 & \text{für } t<0 \end{cases} \\ y_2(t) &:= \begin{cases} -3+5\,|t-1| & \text{für } t\geq 1 \\ -3 & \text{für } t<1 \end{cases} \end{aligned}$$

Die nachfolgende Abbildung zeigt die Funktionen y_1 und y_2 (von links nach rechts).



Offenbar gilt $y_2 \in y_1 - \mathcal{C}(T)^+$, aber $z^{D^1,k}(y_1) = z^{D^1,k}(y_2) = -1/2$.

4.2.4 Oberkegel des natürlichen Ordnungskegels

Nun betrachten wir beliebige Oberkegel $C \supset \mathcal{C}(T)^+$.

Satz 4.7. *Es sei $C \supset \mathcal{C}(T)^+$ ein Oberkegel von $\mathcal{C}(T)^+$ mit $\operatorname{cl} C + \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+ \subseteq \operatorname{int} C$, weiter sei $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$. Dann ist das Funktional $z = z^{C,k}$ wohldefiniert, stetig, positiv homogen, $\mathcal{C}(T)^+$-monoton und strikt $(\operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+)$-monoton.*

Beweis. C ist ein Kegel mit nichtleerem Inneren (da er insbesondere $\operatorname{int}\mathcal{C}(T)^+$ enthält), und es gilt $\operatorname{cl} C + \operatorname{int}\mathcal{C}(T)^+ \subseteq \operatorname{int} C$. Gemäß Lemma 4.2 a) erfüllen C und k also die Voraussetzung (V1). Weiter erhalten wir $\operatorname{bd} C + \operatorname{int}\mathcal{C}(T)^+ \subseteq \operatorname{int} C$ sowie $\operatorname{bd} C + \mathcal{C}(T)^+ \subseteq \operatorname{cl} C$. Die angegebenen Eigenschaften von $z^{\mathcal{C}(T)^+,k}$ sind nun direkte Folgerungen aus den Sätzen 4.1 und 4.3. ∎

Bemerkung 4.8. Ist C ein abgeschlossener konvexer Kegel, und gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes 4.7 die Beziehung $\mathcal{C}(T)^+\backslash\{0\} \subseteq \operatorname{int} C$, so ist das Funktional $z^{C,k}$ sogar strikt $\mathcal{C}(T)^+$-monoton. Dies folgt direkt aus Lemma 4.1.

4.3 Skalarisierungsaussagen

Wir verwenden nun die Trennungsaussage (iv) aus Satz 4.1, um mittels der beschriebenen Funktionale $z^{C,k}$ mehrkriterielle Optimierungsprobleme zu skalarisieren.

Von Beginn an war die Lösung mehrkriterieller Optimierungsprobleme an die Idee der Skalarisierung gebunden. Hierbei wird dem ursprünglichen Problem ein skalares Problem (bzw. eine Schar solcher Probleme) zugeordnet, dessen optimale Lösungen sich umgekehrt als optimale Lösungen des Ausgangsproblems erweisen. Die Zuordnung selbst wird durch sogenannte Skalarisierungsfunktionale z realisiert, welche die Ordnungsstruktur aus dem ursprünglichen Raum geeignet in die reellen Zahlen übersetzen.

Sei $\mathfrak{Y}$ zunächst ein linearer topologischer Raum. Der folgende Satz gibt die enge Verbindung zwischen minimalen Elementen und den Lösungen von skalaren Ersatzaufgaben wieder. Er geht im Kern auf Jahn, [40], Theorem 2.2, zurück, Teile davon finden sich auch bei Weidner, [89], Theorem 4.3.2 und Satz 4.3.5, und vielen anderen Autoren.

Lemma 4.4. *Sei $\mathfrak{Y}$ ein linearer topologischer Raum, $K \subset \mathfrak{Y}$ ein abgeschlossener konvexer Kegel mit nichtleerem Inneren. Es gelte $K\backslash\{0\} \subseteq \operatorname{int} C$ für einen konvexen Kegel $C \subsetneq \mathfrak{Y}$. Sei weiter Y eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{Y}$. Dann sind äquivalent:*

a) $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, K)$

b) Es gibt ein strikt K-monotones Funktional $z : \mathfrak{Y} \to \mathbb{R}$, so das $z(\bar{y}) \leq z(y)\ \forall\ y \in Y$ gilt.

c) Es gibt ein K-monotones Funktional $z : \mathfrak{Y} \to \mathbb{R}$, so das $z(\bar{y}) < z(y)\ \forall\ y \in Y\backslash\{\bar{y}\}$ gilt.

Außerdem ist $\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, K)$ äquivalent zur Existenz eines strikt $(\operatorname{int} K)$-monotonen Funktionals $z : \mathfrak{Y} \to \mathbb{R}$ mit $z(\bar{y}) \leq z(y)$ für alle $y \in Y$.

Wir zeigen nun, dass die Funktionale z in Lemma 4.4 gemäß der Konstruktionsvorschrift aus Kapitel 4.1 gewählt werden können. Hierzu kehren wir in den Raum $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$ der stetigen Funktionen zurück. Alle in Kapitel 4.2 betrachteten Kegel erfüllen die Bedingung a) in Lemma 4.2.

Satz 4.8. *Sei $Y \subsetneq \mathcal{C}(T)$ eine nichtleere Teilmenge, $K \subsetneq \mathcal{C}(T)$ ein spitzer Kegel mit nichtleerem Inneren und $\operatorname{cl} K + \operatorname{int}\mathcal{C}(T)^+ \subseteq \operatorname{int} K$, sei $k \in \operatorname{int}\mathcal{C}(T)^+$ beliebig. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, K) &\iff z^{K,k}(y - \bar{y}) \geq z^{K,k}(\bar{y} - \bar{y}) = 0 \quad \forall\ y \in Y,\\
&\iff z^{K-\bar{y},k}(y) \geq z^{K-\bar{y},k}(\bar{y}) = 0 \quad \forall\ y \in Y.\\
\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \operatorname{cl} K) &\iff z^{K,k}(y - \bar{y}) > z^{K,k}(\bar{y} - \bar{y}) = 0 \quad \forall\ y \in Y\backslash\{\bar{y}\},\\
&\iff z^{K-\bar{y},k}(y) > z^{K-\bar{y},k}(\bar{y}) = 0 \quad \forall\ y \in Y\backslash\{\bar{y}\}.
\end{aligned}$$

Beweis. Gemäß Lemma 4.2 a) erfüllen K und k die Voraussetzung (V1) aus Abschnitt 4.1; das Funktional $z^{K,k}$ ist also wohldefiniert, stetig und positiv homogen. Ebenso ist wegen Satz 4.2 das Funktional $z^{K-\bar{y},k}$ wohldefiniert und stetig, und es gilt $z^{K,k}(y-\bar{y}) = z^{K-\bar{y},k}(y)$.

$\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y,K)$ ist gleichbedeutend mit $Y \cap (\bar{y} - \operatorname{int} K) = \emptyset$ bzw. $(Y-\bar{y}) \cap (-\operatorname{int} K) = \emptyset$. Gemäß Teil (iv) des Satzes 4.1 ist dies äquivalent zu $z^{K,k}(y-\bar{y}) \geq z^{K,k}(\bar{y}-\bar{y}) = 0$ für alle $y \in Y$. $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \operatorname{cl} K)$ heißt $(Y-\bar{y}) \cap -\operatorname{cl} K = \{\bar{y}\}$ bzw. $y - \bar{y} \notin -\operatorname{cl} K$ für alle $y \in Y \backslash \{\bar{y}\}$. Wiederum laut Satz 4.1 (ii) ist dies äquivalent zu $z^{K,k}(y-\bar{y}) > 0$ für alle $y \in Y\backslash\{\bar{y}\}$. Aus $z^{K,k}(y-\bar{y}) = z^{K-\bar{y},k}(y)$ erhalten wir die beiden verbleibenden Äquivalenzen. ■

Bemerkung 4.9. Mit $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \operatorname{cl} K)$ gilt insbesondere $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y,K)$.

Wir setzen zunächst $K = \mathcal{C}(T)^+$.

Satz 4.9. *Sei $Y \subset \mathcal{C}(T)$ eine nichtleere Teilmenge und $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ beliebig.*

$$\begin{aligned} \bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, \mathcal{C}(T)^+) &\iff z^{\mathcal{C}(T)^+,k}(y-\bar{y}) \geq z^{\mathcal{C}(T)^+,k}(\bar{y}-\bar{y}) = 0 \quad \forall\, y \in Y, \\ &\iff z^{\mathcal{C}(T)^+-\bar{y},k}(y) \geq z^{\mathcal{C}(T)^+-\bar{y},k}(\bar{y}) = 0 \quad \forall\, y \in Y. \\ \bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+) &\iff z^{\mathcal{C}(T)^+,k}(y-\bar{y}) > z^{\mathcal{C}(T)^+,k}(\bar{y}-\bar{y}) = 0 \quad \forall\, y \in Y\backslash\{\bar{y}\}, \\ &\iff z^{\mathcal{C}(T)^+-\bar{y},k}(y) > z^{\mathcal{C}(T)^+-\bar{y},k}(\bar{y}) = 0 \quad \forall\, y \in Y\backslash\{\bar{y}\}. \end{aligned}$$

Beweis. Der Kegel $\mathcal{C}(T)^+$ ist abgeschlossen, und es gilt $\mathcal{C}(T)^+ + \operatorname{int}\mathcal{C}(T)^+ \subseteq \operatorname{int}\mathcal{C}(T)^+$. Die Aussagen folgen nun direkt aus Satz 4.8. ■

Wir wenden nun die Formel (4.3) für das Funktional $z = z^{\mathcal{C}(T)^+,k}$ an und erhalten:

Satz 4.10. *Sei $Y \subset \mathcal{C}(T)$ eine nichtleere Teilmenge und $k \in \operatorname{int}\mathcal{C}(T)^+$ beliebig. Dann gilt $\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, \mathcal{C}(T)^+)$ genau dann, wenn $\bar{y}$ Lösung des Problems*

$$\text{(P1)} \qquad \max_{t\in T} \frac{y(t)-\bar{y}(t)}{k(t)} \to \min \qquad \text{bei} \;\; y \in Y$$

ist. Weiter gilt $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$ genau dann, wenn $\bar{y}$ einzige Lösung von (P1) ist.

Beweis. Gemäß Satz 4.9 gilt $\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, \mathcal{C}(T)^+)$ genau dann, wenn

$$z^{\mathcal{C}(T)^+,k}(y-\bar{y}) \geq z^{\mathcal{C}(T)^+,k}(\bar{y}-\bar{y}) = 0 \qquad \forall\, y \in Y$$

erfüllt ist. Mit Formel (4.3) ist dies äquivalent zu

$$\max_{t\in T} \frac{y(t)-\bar{y}(t)}{k(t)} \geq \max_{t\in T} \frac{\bar{y}(t)-\bar{y}(t)}{k(t)} = 0 \qquad \forall\, y \in Y,$$

d. h. $\bar{y}$ löst Problem (P1). Die schärfere Aussage bei eindeutiger Lösung folgt analog ebenfalls aus Satz 4.9. ■

In Kapitel 5 werden wir die Aussagen des Satzes 4.10 nochmals aufgreifen und daraus Effizienzkriterien in Subdifferentialform entwickeln. In der Tat liegt mit den Aussagen aus dem Satz 4.10 ein skalares Optimierungsproblem vor, dessen Zielfunktion eine Maximumfunktion über unendlich viele stetige Funktionen ist. Für solche Funktionen existieren Formeln für das Subdifferential (z. B. nach Clarke), so dass die Effizienzkriterien die gewohnte Form „Null enthalten im Subdifferential“ annehmen.

Auch für die in Kapitel 3.1 untersuchten Typen eigentlicher Effizienz lassen sich entsprechende Skalarisierungsaussagen treffen. Wir untersuchen zuerst

$$K = D_\mu = \left\{ y \in \mathcal{C}(T) : \int_T y \, \mathrm{d}\mu \geq 0 \right\}, \qquad \mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+,$$

(Kegel der linearen Skalarisierung, vgl. Satz 3.1).

Satz 4.11. *Sei $Y \subset \mathcal{C}(T)$ eine nichtleere Teilmenge und $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ beliebig. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \bar{y} \in \mathcal{E}_l(Y) &\iff \exists\, \mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+ : \ z^{D_\mu,k}(y - \bar{y}) \geq z^{D_\mu,k}(\bar{y} - \bar{y}) = 0 \ \ \forall\, y \in Y, \\ &\iff \exists\, \mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+ : \ z^{D_\mu - \bar{y},k}(y) \geq z^{D_\mu - \bar{y},k}(\bar{y}) = 0 \ \ \forall\, y \in Y. \end{aligned}$$

Jede dieser Bedingungen ist hinreichend für $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$.

Beweis. Laut Satz 4.5 ist $z^{D_\mu,k}$ wohldefiniert und stetig, und es gelten die Aussagen des Satzes 4.1. Gemäß Satz 3.1 ist $\bar{y} \in \mathcal{E}_l(Y)$ äquivalent zur Existenz eines $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$ mit $Y \cap (\bar{y} - \operatorname{int} D_\mu) = \emptyset$ bzw. $(Y - \bar{y}) \cap (-\operatorname{int} D_\mu) = \emptyset$. Aus der letzten Gleichung folgt mit Teil (iv) des Satzes 4.1 die erste Äquivalenz des obigen Satzes. Satz 4.2 liefert schließlich die zweite Äquivalenz. Die Hinlänglichkeit der angegebenen Bedingungen für die Minimalität folgt aus der Inklusion $\mathcal{E}_l(Y) \subseteq \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$. ■

Wir wenden nun die Formel (4.4) für das Funktional $z = z^{D_\mu,k}$ an und erhalten:

Satz 4.12. *Sei $Y \subset \mathcal{C}(T)$ eine nichtleere Teilmenge und $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ beliebig. Dann gilt $\bar{y} \in \mathcal{E}_l(Y)$ genau dann, wenn es ein $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$ gibt, so dass $\bar{y}$ Lösung des Problems*

$$\text{(P2)} \qquad \int_T (y - \bar{y}) \, \mathrm{d}\mu \ \to \min \qquad \text{bei } \ y \in Y$$

ist. Für jede Lösung $\bar{y}$ des Problems (P2) gilt $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$.

Beweis. Gemäß Satz 4.11 bedeutet $\bar{y} \in \mathcal{E}_l(Y)$ die Existenz eines $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$, so dass $z^{D_\mu,k}(y - \bar{y}) \geq z^{D_\mu,k}(\bar{y} - \bar{y}) = 0 \ \forall\, y \in Y$ gilt. Mit Formel (4.4) ist dies äquivalent zu

$$\frac{1}{\int_T k \, \mathrm{d}\mu} \int_T (y - \bar{y}) \, \mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{\int_T k \, \mathrm{d}\mu} \int_T (\bar{y} - \bar{y}) \, \mathrm{d}\mu = 0 \qquad \forall\, y \in Y.$$

Multipliziert man diese Ungleichung mit $\int_T k \, \mathrm{d}\mu$, erhält man, dass $\bar{y}$ Problem (P2) löst. Der letzte Teil der Aussage folgt wieder aus $\mathcal{E}_l(Y) \subseteq \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$. ■

Als weiteres Beispiel setzen wir $K = D^\delta$, $\delta > 0$, wobei D^δ als

$$\begin{aligned} D^\delta &= \bigcup_{s \in T} \{ y \in \mathcal{C}(T) : \ y(s) > 0, \ y(s) + \delta y(t) > 0 \ \forall\, t \in T \backslash \{s\} \} \\ &= \{ y \in \mathcal{C}(T) : \ \max_{t \in T} y(t) + \delta \cdot \min_{t \in T} y(t) > 0 \}, \end{aligned}$$

gegeben ist (vgl. Satz 3.2).

Satz 4.13. *Sei $Y \subset \mathcal{C}(T)$ eine nichtleere Teilmenge und $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ beliebig. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \bar{y} \in \mathcal{E}_G(Y) &\iff \exists\, \delta > 0 : \ z^{D^\delta,k}(y - \bar{y}) \geq z^{D^\delta,k}(\bar{y} - \bar{y}) = 0 \ \ \forall\, y \in Y, \\ &\iff \exists\, \delta > 0 : \ z^{D^\delta - \bar{y},k}(y) \geq z^{D^\delta - \bar{y},k}(\bar{y}) = 0 \ \ \forall\, y \in Y. \end{aligned}$$

Jede dieser Bedingungen ist hinreichend für $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$.

Beweis. Gemäß Satz 4.6 ist $z^{D^\delta,k}$ wohldefiniert und stetig, und es gelten die Aussagen des Satzes 4.1. Laut Satz 3.2 ist $\bar{y} \in \mathcal{E}_G(Y)$ äquivalent zur Existenz eines $\delta > 0$ mit $Y \cap (\bar{y} - D^\delta) = \emptyset$ bzw. $(Y - \bar{y}) \cap (-D^\delta) = \emptyset$, wobei D^δ offen ist. Aus der letzten Gleichung folgt nun mit Teil (iv) des Satzes 4.1 die erste Äquivalenz des obigen Satzes. Satz 4.2 liefert schließlich die zweite Äquivalenz. Die Hinlänglichkeit der angegebenen Bedingungen für die Minimalität folgt aus der Inklusion $\mathcal{E}_G(Y) \subseteq \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$. ∎

Wir wenden nun die Formel (4.5) für das Funktional $z = z^{D^\delta,k}$ an und erhalten:

Satz 4.14. *Sei $Y \subset \mathcal{C}(T)$ eine nichtleere Teilmenge und $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ beliebig. Dann gilt $\bar{y} \in \mathcal{E}_G(Y)$ genau dann, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\bar{y}$ Lösung des Problems*

$$\text{(P3)} \qquad \min_{s \in T} \max_{t \in T} \frac{y(s) - \bar{y}(s) + \delta(y(t) - \bar{y}(t))}{k(s) + \delta k(t)} \to \min \qquad \text{bei} \;\; y \in Y$$

ist. Für jede Lösung $\bar{y}$ des Problems (P3) gilt $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$.

Beweis. Gemäß Satz 4.13 bedeutet $\bar{y} \in \mathcal{E}_G(Y)$ die Existenz eines Skalars $\delta > 0$, so dass $z^{D^\delta,k}(y - \bar{y}) \geq z^{D^\delta,k}(\bar{y} - \bar{y}) = 0 \;\forall\, y \in Y$ gilt. Mit Formel (4.5) ist dies äquivalent zu

$$\min_{s \in T} \max_{t \in T} \frac{y(s) - \bar{y}(s) + \delta(y(t) - \bar{y}(t))}{k(s) + \delta k(t)} \geq \min_{s \in T} \max_{t \in T} \frac{\bar{y}(s) - \bar{y}(s) + \delta(\bar{y}(t) - \bar{y}(t))}{k(s) + \delta k(t)} = 0$$

für alle $y \in Y$, d. h. $\bar{y}$ löst das Problem (P3). Der letzte Teil der Aussage folgt wieder aus $\mathcal{E}_G(Y) \subseteq \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$. ∎

Bemerkung 4.10. In den Sätzen 4.9-4.13 kann $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ jeweils frei gewählt werden. In der Tat sind die betrachteten Ungleichungen $z(y - \bar{y}) \geq 0$ unabhängig von der Wahl von k für die gleichen $y \in Y$ gültig oder nicht.

5. Effizienzkriterien mittels verallgemeinerter Ableitungen

Es gibt mehrere Möglichkeiten, Effizienzkriterien für mehrkriterielle Optimierungsprobleme auf Basis (verallgemeinerter) Ableitungen zu zeigen. In der Literatur findet man hierzu im Wesentlichen zwei Konzepte:

a) Am weitesten verbreitet ist der Ansatz, nach erfolgter Skalarisierung für das skalare Ersatzproblem Optimalitätsbedingungen mittels (verallgemeinerter) Ableitungen anzugeben. Im Mittelpunkt steht dabei oftmals der Nachweis einer geeigneten Kettenregel, so dass die Skalarisierung formal nicht ausgeführt werden muss, sondern im Effizienzkriterium direkt enthalten ist.

b) Seltener und bisher kaum entwickelt sind Effizienzkriterien, bei denen das Subdifferentialkalkül auf die Abbildungen mit Werten in halbgeordneten Räumen zugeschnitten wird. Man erhält dann eine Variationsungleichung der verallgemeinerten Richtungsableitung auf Basis der zu Grunde liegenden Kegelhalbordnung.

Einen Vergleich beider Konzepte bzw. Zusammenhänge zwischen beiden findet man etwa bei Staib, [76] und [77].

Wir wollen nun beide Ansätze in Hinblick auf $\mathcal{C}(T)$-wertige Abbildungen etwas näher beleuchten. Beim Weg a) beschränken wir uns allerdings auf die Skalarisierung durch das Funktional $z^{\mathcal{C}(T)^+,k}$ (vgl. Kapitel 4.2.1). In diesem Fall erhalten die Effizienzbedingungen eine sehr klassische geometrische Form.

Für dieses Kapitel kehren wir zur Betrachtung unseres mehrkriteriellen Ausgangsproblems

$$\mathfrak{f}(x) \to \min \qquad x \in X \subset \mathfrak{X}$$

mit $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}(T)$ zurück. $\mathfrak{X}$ sei hierbei ein reeller Banach-Raum, X eine Teilmenge von $\mathfrak{X}$. D. h., wir untersuchen nun die Effizienzmenge $\mathrm{Eff}\,(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$ anstatt wie bisher die Minimalstellen $\mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$ (vgl. Definition 3.1 bzw. 3.2 ff.). Wir erinnern dabei insbesondere an $\mathfrak{f}(\mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)) = \mathcal{E}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$ und $\mathfrak{f}(\mathrm{Eff}\,(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)) = \mathcal{E}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$, was eine problemlose Übertragung aller bisherigen Minimalitätsbedingungen ermöglicht.

Wir halten uns nachfolgend im Wesentlichen an die Schreibweisen und Begriffsbildungen in Clarke, [9], bzw. Rockafellar, [71]. Von Bedeutung sind dabei insbesondere der Tangential- bzw. Berührungskegel, die eine lokale Approximation einer Menge in einem gegebenen Punkt darstellen. So bezeichnet für eine nichtleere Menge $X \subset \mathfrak{X}$

$$\begin{array}{rcl} T(X;\bar{x}) & := & \{d \in \mathfrak{X} : \ \forall \ \{x_i\} \subset X, x_i \to \bar{x}, \ \forall \ \tau_i \downarrow 0 \ \ \exists \ \{d_i\} \subset \mathfrak{X}, \ d_i \to d, \ x_i + \tau_i d_i \in X\} \\ B(X;\bar{x}) & := & \{d \in \mathfrak{X} : \ \exists \ \tau_i \downarrow 0 \ \ \exists \ \{d_i\} \subset \mathfrak{X}, \ d_i \to d, \ \bar{x} + \tau_i d_i \in X\} \end{array}$$

den **Tangentialkegel** bzw. den **Berührungskegel an** X **in** $\bar{x}$ und

$$N(X;\bar{x}) := \{u \in \mathfrak{X}' : \ u(d) \leq 0 \ \ \forall \ d \in T(X;\bar{x})\}$$

den **Normalenkegel an** X **in** $\bar{x}$.

Eine Funktion $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ heißt **von oben halbstetig in** $\bar{x}$, falls $\limsup_{x \to \bar{x}} f(x) \leq f(\bar{x})$ gilt, oder – äquivalent – die Mengen $\{x \in \mathfrak{X} : \ f(x) \geq \alpha\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ abgeschlossen sind. Die Funktion f heißt **von unten halbstetig in** $\bar{x}$, falls $\liminf_{x \to \bar{x}} f(x) \geq f(\bar{x})$ gilt, bzw. falls die Mengen $\{x \in \mathfrak{X} : \ f(x) \leq \alpha\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ abgeschlossen sind.

Man sagt, eine mengenwertige Abbildung $F : \mathfrak{X} \to 2^{\mathfrak{Y}}$ ist **oberhalbstetig in** $\bar{x}$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $F(x) \subseteq F(\bar{x}) + \{y \in \mathfrak{Y} : \ \|y\|_{\mathfrak{Y}} \leq \varepsilon\}$ für alle $x \in \mathfrak{X}$, $\|x - \bar{x}\|_{\mathfrak{X}} \leq \delta$ gilt. Es sei angemerkt, dass Halbstetigkeit von oben und Oberhalbstetigkeit – obwohl beide Begriffe ähnlich klingen – nicht zusammenhängen.

5.1 Zwei Wege – Unterschiede und Gemeinsamkeiten

Sei $\bar{y} \in \mathcal{C}(T)$, bezeichne $(P_{\bar{y}})$ das Problem

$$(P_{\bar{y}}) \qquad \max_{t \in T} (y(t) - \bar{y}(t)) \ \to \min \qquad \text{bei} \ \ y \in Y.$$

Den Ausgangspunkt unserer Untersuchungen bildet das folgende Effizienzkriterium:

Lemma 5.1. *Es gilt:*

$$\begin{aligned} \bar{x} \in \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}^+(T)) \quad &\Longleftrightarrow \quad \bar{y} = \mathfrak{f}(\bar{x}) \ \textit{löst} \ (P_{\bar{y}}). \\ \bar{x} \in \mathrm{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}^+(T)) \quad &\Longleftrightarrow \quad \bar{y} = \mathfrak{f}(\bar{x}) \ \textit{löst} \ (P_{\bar{y}}) \ \textit{eindeutig}. \end{aligned}$$

Beweis. Direkte Folgerung aus Satz 4.10 mit $k \equiv 1$. ∎

Auf das skalare Problem $(P_{\bar{y}})$ wird nun das Subdifferentialkalkül von Clarke, vgl. etwa [9], angewendet. Im Mittelpunkt stehen dabei Formeln für die verallgemeinerten Ableitungen von Funktionen, die sich als punktweises Maximum unendlich vieler Funktionen berechnen. Man findet solche Formeln etwa bei Clarke, [9], Kapitel 2.8. Allerdings geht bei Clarkes Resultaten im Subdifferential die komponentenweise Struktur der betrachteten Abbildung verloren. Wir nutzen daher Resultate von Luu und Oettli, die in [56] ebenfalls notwendige Kriterien für die Optimalität punktweiser Maxima angegeben haben. Diese verlangen zwar härtere Voraussetzungen als dies bei Clarke der Fall ist, besitzen aber eine weit praktikablere und vor allem anschauliche geometrische Form. Eine genauere Untersuchung des Spezialfalles konvexer Funktionen findet man auch bei Solovev, [74].

Luu und Oettli präsentieren ihre Optimalitätsbedingungen für Funktionen der Form $g(x) := \max_{t \in T} g_t(x)$, $x \in \mathfrak{X}$, zunächst in abstrakter Form und spezialisieren diese im Nachhinein für verschiedene Typen von verallgemeinerter Differenzierbarkeit. Hierbei übernimmt eine konvexe Funktion $\varphi : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ die Rolle der verallgemeinerten Richtungsableitung, deren Subdifferential im Nullpunkt,

$$\partial\varphi(0) := \{u \in \mathfrak{X}' : \ u(x) \leq \varphi(x) \ \ \forall \ x \in \mathfrak{X}\},$$

genau dem verallgemeinerten Subdifferential der Ausgangsfunktion g im betrachteten Punkt $\bar{x}$ entspricht. Man erhält:

Satz 5.1. *Sei $\mathfrak{X}$ ein reeller Banach-Raum, $X \subset \mathfrak{X}$ eine abgeschlossene, konvexe Menge, $\bar{x} \in X$; sei $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}(T)$. Weiter sei eine Familie $\{\varphi_t\}_{t\in T}$ von Funktionen $\varphi_t : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:*

(i) Die Funktionen φ_t sind sublinear und stetig.

(ii) Die Abbildungen $t \mapsto \varphi_t(d)$ sind für jedes $d \in B(X;\bar{x})$ von oben halbstetig auf T.

(iii) Für alle Richtungen $d \in B(X;\bar{x})$ und für alle Folgen $\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}$, $\{d_n\} \subset X$ mit $\tau_n \downarrow 0$, $d_n \to d$, $\bar{x} + \tau_n d_n \in X$ gelten die Ungleichungen

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{f}(\bar{x} + \tau_n d_n)(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t)}{\tau_n} \leq \varphi_t(d)$$

gleichmäßig auf T – d. h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\bar{n} \in \mathbb{N}$ (unabhängig von t), so dass

$$\frac{\mathfrak{f}(\bar{x} + \tau_n d_n)(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t)}{\tau_n} \leq \varphi_t(d) + \varepsilon \qquad \forall\, n \geq \bar{n},\ \forall\, t \in T.$$

Dann ist folgendes Kriterium notwendig für $\bar{x} \in \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$:

$$\sup_{t\in T} \varphi_t(d) \geq 0 \qquad \forall\, d \in B(X;\bar{x}). \tag{5.1}$$

Beweis. Sei $\bar{x} \in \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$. Aus Lemma 5.1 folgt, dass $\bar{x}$ Minimalstelle der Funktion $g(x) = \max_{t\in T} (\mathfrak{f}(x)(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t))$ ist. Insbesondere gilt

$$g(\bar{x}) = \mathfrak{f}(\bar{x})(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t) \qquad \forall\, t \in T,$$

d. h. der Wert von g wird im Punkt $\bar{x}$ in jedem $t \in T$ angenommen. Wir können nun Theorem 2.2 von Luu und Oettli, [56], vgl. auch Satz A.2, anwenden und erhalten die behauptete Abschätzung (5.1). ■

Bemerkung 5.1. Satz 5.1 benutzt stärkere Voraussetzungen an φ als von Luu und Oettli gefordert werden: Dort wird statt (i) verlangt, dass φ_t konvex entlang Strahlen ist und $\varphi_t(0) \leq 0$ für alle $t \in T$ gilt. In den von uns nachher betrachteten Fällen sind diese stärkeren Voraussetzungen stets erfüllt. Darüber hinaus vereinfachen sie die Voraussetzungen im nachfolgenden Satz.

Satz 5.2. *Sei $\mathfrak{X}$ ein reeller Banach-Raum, $X \subset \mathfrak{X}$ eine abgeschlossene, konvexe Menge, $\bar{x} \in X$; sei $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}(T)$. Weiter sei eine Familie $\{\varphi_t\}_{t\in T}$ von Funktionen $\varphi_t : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mit den Eigenschaften (i)-(iii) aus Satz 5.1 gegeben. Ferner gelte*

(iv) Die Abbildung $t \mapsto \partial\varphi_t(0)$ sei oberhalbstetig.

Dann ist folgendes Kriterium notwendig für $\bar{x} \in \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$:

$$0 \in \operatorname{cl}\operatorname{conv} \bigcup_{t\in T} \partial\varphi_t(0) + N(X;\bar{x}), \tag{5.2}$$

wobei der Abschluss in der schwach-Topologie des Dualraumes $\mathfrak{X}'$ von $\mathfrak{X}$ gebildet wird.*

Beweis. Wir verfahren wie im Beweis zu Satz 5.1, wenden nun aber Folgerung 3.4 von Luu und Oettli, [56], vgl. auch Satz A.4, an. Dabei setzen wir $M := T(X;\bar{x})$, was tatsächlich ein konvexer, abgeschlossener Teilkegel von $B(X;\bar{x})$ ist, vgl. Kapitel 2.4 bei Clarke, [9], und erhalten $M^* = -N(X;\bar{x})$. Das behauptete Kriterium ergibt sich nun direkt. ■

Versucht man, die Sätze 5.1 und 5.2 auf konkrete Funktionen anzuwenden, so erweisen sich die Voraussetzungen als sehr hart. Die Untersuchung einiger klassischer Funktionentypen im nächsten Kapitel zeigt, dass sich Bedingung (iii) zwar noch relativ gut in eine Art gleichmäßige Differenzierbarkeit übersetzen lässt, dass jedoch Bedingung (iv) nur selten erfüllbar ist.

In 5.3 beschreiben wir einen Ansatz, wie die eben beschriebenen Ergebnisse direkt erhalten werden können. „Direkt“ heißt in diesem Fall, dass die Subdifferentialform der Effizienzkriterien sofort aus dem Maximumkriterium hergeleitet werden. Auf diese Weise erhalten wir zu den bisher nur notwendigen Optimalitätsbedingungen auch hinreichende Bedingungen.

Verallgemeinerungen des reellwertigen Clarke'schen Subdifferentialkalküls auf Abbildungen mit Werten in halbgeordneten Räumen und entsprechende Effizienzkriterien sind in der Literatur eher selten behandelt worden. Arbeiten zur Subdifferenzierbarkeit konvexer Abbildungen mit Werten in in beliebigen halbgeordneten Räumen bzw. speziell im Raum $\mathcal{C}(T)$ findet man bei Penot und Théra, [65], Raffin sowie Valadier, [83]. Konzepte für die Definition einer verallgemeinerten Ableitung Lipschitz-stetiger Abbildungen sind Gegenstand von Arbeiten etwa von Borwein, [5], Papageorgiou, [62], Penot, [64], Reiland, [69] und [70], Staib, [77], sowie Thibault, [81] und [82]. Die Ansätze im nichtkonvexen Fall variieren vor allem in der verschiedenen Interpretation von Lipschitz-Stetigkeit, die zu unterschiedlichen Existenzkriterien für die Richtungsableitungen führen. Alle hier genannten Autoren legen ihren Untersuchungen allerdings die Ordnungsvollständigkeit, die Monotone-Folgen-Eigenschaft oder die Daniell-Eigenschaft des Zielraumes der Abbildungen zu Grunde.

Was können wir als Effizienzkriterien erwarten? Bei Pühl und Tammer, [68], Penot, [64], sowie Staib, [76] und [77], findet man ein notwendiges Kriterium für schwache Effizienz auf Basis der Richtungsableitung, wenn $\mathfrak{f}$ in einen halbgeordneten (ordnungsvollständigen und Daniell'schen) Raum $(\mathfrak{Y}, K)$ abbildet:

$$\mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d) \notin -\operatorname{int} K \qquad \forall\ d \in T(X;\bar{x}). \tag{5.3}$$

Üblicherweise führt man den Beweis indirekt, nimmt also zunächst $\mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d) \in -\operatorname{int} K$ für eine Richtung $d \in T(X;\bar{x})$ an. Dann kann auf $\tau^{-1}[\mathfrak{f}(x+\tau d) - \mathfrak{f}(x)] \in -\operatorname{int} K$ für alle x aus einer Umgebung U von $\bar{x}$ geschlossen werden, was zu einer Verletzung der Effizienz führt.

Es bleibt also das Problem, einen Ersatz für die Daniell-Eigenschaft bzw. die Ordnungsvollständigkeit zu finden. Erste Ansätze hierzu, allerdings nur für den Fall konvexer Abbildungen, findet man bei Penot und Théra, [65], sowie Valadier, [83]. Sie erhalten bei ihren Untersuchungen unter der Vorraussetzung einer gewissen gleichmäßigen Stetigkeit Aussagen zur Existenz von Subgradienten und damit von Richtungsableitungen. Satz 5.1 enthält ebenfalls Voraussetzungen dieser Art, und in der Tat lässt sich ein entsprechendes Effizienzkriterium leicht ableiten:

Satz 5.3. *Sei $\mathfrak{X}$ ein reeller Banach-Raum, $X \subset \mathfrak{X}$ eine abgeschlossene, konvexe Menge, sei $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}(T)$, $\bar{x} \in X$. Weiter sei eine Familie $\{\varphi_t\}_{t\in T}$ von Funktionen $\varphi_t : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mit den Eigenschaften (i) und (iii) aus Satz 5.1 gegeben. Sei außerdem $\Phi(d) : t \mapsto \varphi_t(d)$ für alle $d \in B(X;\bar{x})$ stetig auf T. Dann ist folgendes Kriterium notwendig für $\bar{x} \in \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$:*

$$\Phi(d) \notin -\operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+ \qquad \forall\ \ d \in B(X;\bar{x}).$$

Beweis. Sei $\bar{x} \in \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$. Aus Satz 5.1 erhalten wir $\sup_{t\in T} \varphi_t(d) \geq 0$ für alle $d \in B(X; \bar{x})$. Wegen der Stetigkeit von $\Phi(d)$ kann das Supremum durch das Maximum ersetzt werden, d. h. zu jedem d gibt es ein $t \in T$, so dass $\phi_t(d) \geq 0$ gilt. Da $\Phi(d) \in \mathcal{C}(T)$ gilt, heißt dies $\Phi(d) \notin \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ für alle $d \in B(X; \bar{x})$. ∎

Die Stetigkeit von $t \mapsto \varphi_t(d)$ kann für bestimmte Funktionentypen unter den Voraussetzungen des Satzes 5.1 verifiziert werden. Somit gelingt in diesen Fällen der Brückenschlag zwischen dem Weg ohne Skalarisierung und jenem mit Skalarisierung: Ohne die in Bedingung (iii) von Satz 5.1 beschriebene gleichmäßige Abschätzung kann oft überhaupt kein Effizienzkriterium in Subdifferentialform angegeben werden, mit Bedingung (iii) können sowohl die skalaren als auch die $\mathcal{C}(T)$-wertigen Kriterien auf gleichem Wege erhalten werden.

Wir untersuchen nun, wie sich die Sätze 5.1-5.3 auf spezielle Funktionenklassen anwenden lassen. Wir beschränken uns im Rahmen der vorliegenden Arbeit auf drei Typen von Funktionen: differenzierbare, Lipschitz-stetige bzw. konvexe Funktionen.

5.2 Notwendige Effizienzkriterien

5.2.1 Differenzierbare Abbildungen

Definition 5.1. Sei $\mathfrak{X}$ ein reeller Banach-Raum. Eine Abbildung $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}(T)$ heiße **gleichmäßig differenzierbar** in $\bar{x}$, falls für alle Folgen $\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}$, $\{d_n\} \subset X$ mit $\tau_n \downarrow 0$, $d_n \to d$ die Grenzwerte

$$\mathfrak{f}'(\bar{x})_{|t}(d) := \lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{f}(\bar{x} + \tau_n d_n)(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t)}{\tau_n}$$

existieren und gleichmäßig auf T angenommen werden – d. h. falls für jede Wahl der Folgen $\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}$, $\{d_n\} \subset X$ mit $\tau_n \downarrow 0$, $d_n \to d$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\bar{n} \in \mathbb{N}$ (unabhängig von t) existiert, so dass gilt:

$$\left| \frac{\mathfrak{f}(\bar{x} + \tau_n d_n)(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t)}{\tau_n} - \mathfrak{f}'(\bar{x})_{|t}(d) \right| \leq \varepsilon \qquad \forall\, n \geq \bar{n},\ \forall\, t \in T.$$

Die Terme $\mathfrak{f}'(\bar{x})_{|t}$ bilden hierbei die Ableitungen in $\bar{x}$ der Funktionen $x \mapsto \mathfrak{f}(x)(t)$, $t \in T$.

Um die Sätze 5.1-5.3 anwenden zu können, untersuchen wir die Funktionen φ_t, definiert durch

$$\varphi_t(d) := \mathfrak{f}'(\bar{x})_{|t}(d). \tag{5.4}$$

Lemma 5.2. *Ist $\mathfrak{f}$ gleichmäßig differenzierbar in $\bar{x}$ und φ_t gemäß (5.4) definiert, so gilt:*

(i) Die Funktionen φ_t sind linear und stetig für alle $t \in T$. Sie erfüllen Voraussetzung (iii) in Satz 5.1.

(ii) Die Abbildung $t \mapsto \varphi_t(d)$ ist stetig für jedes $d \in B(X; \bar{x})$.

Beweis. Die Definition der Ableitung liefert die Linearität und Stetigkeit der Funktionen φ_t. Zudem sind die Konvergenzforderungen in der Definition der gleichmäßigen Differenzierbarkeit stärker als Bedingung (iii) in Satz 5.1. Es bleibt also, (ii) zu zeigen. Hierzu wählen wir Folgen $\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}$, $\{d_n\} \subset X$ gemäß Voraussetzung. Wegen $\mathfrak{f} \in \mathcal{C}(T)$ sind die Differenzenquotienten

$$\frac{\mathfrak{f}(\bar{x} + \tau_n d_n)(.) - \mathfrak{f}(\bar{x})(.)}{\tau_n}$$

auf T stetige Funktionen. Wegen der gleichmäßigen Differenzierbarkeit von $\mathfrak{f}$ konvergiert die Folge der Differenzenquotienten gleichmäßig gegen die Funktion $t \mapsto \mathfrak{f}'(\bar{x})_{|t}(d)$. Die Funktion $t \mapsto \mathfrak{f}'(\bar{x})_{|t}(d)$ ist demnach stetig. ■

Für die Anwendung von Satz 5.2 benötigen wir noch die Oberhalbstetigkeit der Abbildung $t \mapsto \partial\varphi_t(0)$. Wegen $\partial\varphi_t(0) = \mathfrak{f}'(\bar{x})_{|t}$ ist diese gleichbedeutend mit der Stetigkeit von $t \mapsto \mathfrak{f}'(\bar{x})_{|t}$. Diese Eigenschaft kann allerdings nicht aus der gleichmäßigen Differenzierbarkeit abgeleitet werden und muss daher im nachfolgenden Effizienzkriterium explizit vorausgesetzt werden.

Satz 5.4. *Sei $\mathfrak{X}$ ein reeller Banach-Raum, $X \subset \mathfrak{X}$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, sei $\bar{x} \in \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$. Die Abbildung $\mathfrak{f}$ sei in $\bar{x}$ gleichmäßig differenzierbar. Dann gilt*

$$\max_{t \in T} \mathfrak{f}'(\bar{x})_{|t}(d) \geq 0 \qquad \forall\, d \in B(X;\bar{x}). \tag{5.5}$$

Ist darüber hinaus die Abbildung $t \mapsto \mathfrak{f}'(\bar{x})_{|t}$ stetig, so gilt

$$0 \in \mathrm{cl}\,\mathrm{conv} \bigcup_{t \in T} \mathfrak{f}'(\bar{x})_{|t} + N(X;\bar{x}), \tag{5.6}$$

wobei der Abschluss über die konvexe Hülle in (5.6) in der schwach-Topologie des Dualraumes $\mathfrak{X}'$, also in $(\mathfrak{X}', \sigma(\mathfrak{X}', \mathfrak{X}))$ gebildet wird.*

Beweis. Folgt mit der Definition der gleichmäßigen Differenzierbarkeit und Lemma 5.2 aus den Sätzen 5.1 und 5.2. Da die Abbildung $t \mapsto \varphi_t(d)$ stetig ist, kann das Supremum in (5.1) durch das Maximum ersetzt werden. ■

Das nachfolgende Beispiel demonstriert, dass die gleichmäßige Differenzierbarkeit für obigen Satz von grundlegender Bedeutung ist.

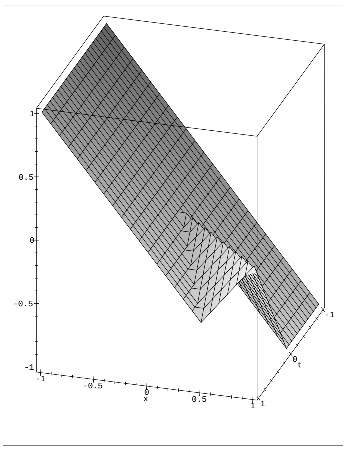
Beispiel 5.1. Sei $X = T = [-1,1] \subset \mathbb{R}$. Wir betrachten $\mathfrak{f} : \mathbb{R} \to \mathcal{C}(T)$, definiert durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(x)(t) &:= \max\{-x, -|x-t|\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} -|x-t| & \text{für } 0 \leq x,\ 0 \leq t \leq 2x \\ -x & \text{sonst} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graph der Abbildung $\mathfrak{f}$ für $x \in X$. Ohne Mühe verifiziert man

$$\mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) = \mathrm{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) = [0,1].$$

Die Funktionen $x \mapsto \mathfrak{f}(x)(t)$, $t \in T$, sind in $\bar{x} = 0$ differenzierbar: Für $t < 0$ erhalten wir $\mathfrak{f}'(0)_{|t} = -1$. Für $t \geq 0$, $\tau d < t/2$ gilt $\mathfrak{f}(\bar{x} + \tau d)(t) = -\bar{x} - \tau d$, es folgt $\mathfrak{f}(0)_{|t} = -1$. Die Konvergenz der Differentialquotienten erfolgt für $t \geq 0$ aber nicht gleichmäßig: Für die Wahl $t_n := \tau_n d_n \geq 0$ erhält man $\mathfrak{f}(\bar{x} + \tau_n d_n)(t_n) = 0$ und somit



$$\left| \frac{\mathfrak{f}(\bar{x} + \tau_n d_n)(t_n) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t_n)}{\tau_n} - \mathfrak{f}'(\bar{x})_{|t_n}(d) \right| = -1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Satz 5.4 ist daher nicht anwendbar. In der Tat gilt $\max_{t \in T} \mathfrak{f}'(0)_{|t}(d) = -d < 0$ für $d > 0$ und trotz Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto \mathfrak{f}'(0)_{|t} = -1$ schließlich $0 \notin \mathrm{cl}\,\mathrm{conv} \bigcup_{t \in T} \mathfrak{f}'(0)_{|t}$. (Wegen $0 \in \mathrm{int}\, X$ gilt $T(X;0) = \mathbb{R}$ und $N(X;0) = \{0\}$.)

Da im Falle gleichmäßiger Differenzierbarkeit die Abbildung $t \mapsto \varphi_t(d)$ stetig ist, kann auch Satz 5.3 angewendet werden:

Satz 5.5. *Sei $\mathfrak{X}$ ein reeller Banach-Raum, $X \subset \mathfrak{X}$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, sei $\bar{x} \in \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$. Die Abbildung $\mathfrak{f}$ sei in $\bar{x}$ gleichmäßig differenzierbar. Dann ist für beliebige $d \in B(X;\bar{x})$ durch*

$$\mathfrak{f}'(\bar{x})(d) := \lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{f}(\bar{x}+\tau_n d_n) - \mathfrak{f}(\bar{x})}{\tau_n}$$

eine Abbildung $\mathfrak{f}'(\bar{x})(d) \in \mathcal{C}(T)$ wohldefiniert, und es gilt

$$\mathfrak{f}'(\bar{x})(d) \notin -\mathrm{int}\,\mathcal{C}(T)^+ \qquad \forall\ d \in B(X;\bar{x}).$$

Beweis. Folgt wegen Lemma 5.2 direkt aus Satz 5.3. ■

Bemerkung 5.2. Die gleichmäßige Konvergenz in Definition 5.1 bedeutet, dass die Folge stetiger Funktionen, gegeben durch

$$\left\{ \frac{\mathfrak{f}(\bar{x}+\tau_n d) - \mathfrak{f}(\bar{x})}{\tau_n} :\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

in der $\mathcal{C}(T)$-Norm gegen die stetige Funktion $\mathfrak{f}'(\bar{x})(d)$, gegeben durch $t \mapsto \mathfrak{f}'(\bar{x})_{|t}(d)$, konvergiert. Da $\mathfrak{f}(\bar{x})_{|t}$ zudem eine lineare Funktion von $\mathfrak{X}$ nach $\mathbb{R}$ ist, stellt $\mathfrak{f}'(\bar{x})$ eine lineare Abbildung von $\mathfrak{X}$ in $\mathcal{C}(T)$ dar. Somit stimmt $\mathfrak{f}'(\bar{x})$ mit der Ableitung von $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}(T)$ überein (für die Definition vgl. Ioffe und Tichomirov, [36], Abschnitt 0.2.1).

5.2.2 Lipschitz-stetige Abbildungen

Definition 5.2. Sei $(\mathfrak{X}, \|.\|_{\mathfrak{X}})$ ein reeller Banach-Raum, $\bar{x} \in \mathfrak{X}$. Eine Abbildung $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}(T)$ heiße **in $\bar{x}$ Lipschitz-stetig**, falls eine Umgebung U von $\bar{x}$ in $\mathfrak{X}$ und eine Konstante $l > 0$ existieren, so dass

$$\|\mathfrak{f}(x) - \mathfrak{f}(\bar{x})\|_{\mathcal{C}(T)} \leq l\,\|x - \bar{x}\|_{\mathfrak{X}}$$

für alle $x \in U$ erfüllt ist. $\mathfrak{f}$ heiße **lokal Lipschitz-stetig**, falls $\mathfrak{f}$ in jedem Punkt $\bar{x} \in \mathfrak{X}$ Lipschitz-stetig ist.

Offenbar ist $\mathfrak{f}$ in $\bar{x}$ Lipschitz-stetig genau dann, wenn die Abbildungen $x \mapsto \mathfrak{f}(x)(t)$ für jedes $t \in T$ mit der gleichen Konstante l Lipschitz-stetig (im klassischen Sinne) sind.

Bemerkung 5.3. Man findet in der Literatur verschiedene Definitionen für die Lipschitz-Stetigkeit von Abbildungen, die ihre Werte in halbgeordneten Räumen annehmen. Exemplarisch seien die Intervall-Lipschitz-Stetigkeit von Reiland, [69], die o-Lipschitz-Stetigkeit, vgl. Papageorgiou, [62], und Reiland, [69], die $\mathcal{U}$-Lipschitz-Stetigkeit von Staib, [77], sowie die Kompakt-Lipschitz-Stetigkeit von Thibault, [81] und [82], genannt. In den genannten Arbeiten findet man auch Hinweise auf Beziehungen zwischen den einzelnen Stetigkeitsbegriffen.

Definition 5.3. Sei $\mathfrak{X}$ ein reeller Banach-Raum, $\bar{x} \in \mathfrak{X}$. Eine Abbildung $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}(T)$ heiße **gleichmäßig verallgemeinert richtungsdifferenzierbar** in $\bar{x}$, falls die Häufungspunkte

$$\mathfrak{f}^\circ(\bar{x};d)(t) := \limsup_{x\to\bar{x},\ \tau\downarrow 0} \frac{\mathfrak{f}(x+\tau d)(t) - \mathfrak{f}(x)(t)}{\tau}$$

existieren und falls für jedes $\varepsilon > 0$ Schranken $\delta_1, \delta_2 > 0$ (unabhängig von t) existieren, so dass

$$\frac{\mathfrak{f}(x+\tau d)(t) - \mathfrak{f}(x)(t)}{\tau} \leq \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d)(t) + \varepsilon \qquad \forall\, x \in \mathfrak{X} : \|x - \bar{x}\| \leq \delta_1,\ \forall\, \tau \leq \delta_2,\ \forall\, t \in T$$

erfüllt ist.

$\mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d)(t)$ entspricht der punktweisen verallgemeinerten Richtungsableitung im Sinne von Clarke, das zugehörige Subdifferential ist gegeben durch

$$\partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t) := \{u \in \mathfrak{X}' :\ u(d) \leq \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d)(t)\ \ \forall\, d \in B(X; \bar{x})\}.$$

Wir untersuchen die Funktionen φ_t, definiert durch

$$\varphi_t(d) := \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d)(t).$$

Die Lipschitz-Stetigkeit sichert deren Wohldefiniertheit. Weiter erhalten wir:

Lemma 5.3. *Ist $\mathfrak{f}$ gleichmäßig verallgemeinert richtungsdifferenzierbar in $\bar{x}$, so sind die Funktionen φ_t sublinear und stetig für alle $t \in T$ und erfüllen Bedingung (iii) aus Satz 5.1.*

Beweis. Die Sublinearität und Stetigkeit der Funktionen φ_t folgt direkt aus der Definition der verallgemeinerten Richtungsableitungen für Lipschitz-stetige Funktionen, vgl. etwa Clarke, [9], Proposition 2.1.1. Dass auch die Forderung (iii) aus Satz 5.1 gilt, verifiziert man durch einfaches Nachrechnen, vgl. etwa Luu und Oettli, [56], Beispiel 3 in Kapitel 2. ■

Satz 5.6. *Sei $\mathfrak{X}$ ein reeller Banach-Raum, $X \subset \mathfrak{X}$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, sei $\bar{x} \in \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$. Die Abbildung $\mathfrak{f}$ sei in $\bar{x}$ gleichmäßig verallgemeinert richtungsdifferenzierbar, wobei $t \mapsto \mathfrak{f}^\circ(\bar{x})(t)$ von oben halbstetig sei. Dann gilt*

$$\sup_{t\in T} \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d)(t) \geq 0 \qquad \forall\, d \in B(X; \bar{x}). \tag{5.7}$$

Ist darüber hinaus die Abbildung $t \mapsto \partial f(\bar{x})(t)$ oberhalbstetig, so gilt

$$0 \in \operatorname{cl}\operatorname{conv} \bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t) + N(X; \bar{x}), \tag{5.8}$$

wobei der Abschluss über die konvexe Hülle in (5.8) in der schwach-Topologie des Dualraumes $\mathfrak{X}'$, also in $(\mathfrak{X}', \sigma(\mathfrak{X}', \mathfrak{X}))$ gebildet wird.*

Beweis. Folgt mit der Definition der gleichmäßigen verallgemeinerten Richtungsdifferenzierbarkeit und Lemma 5.3 aus den Sätzen 5.1 und 5.2. ■

Auch für Satz 5.6 ist die Gleichmäßigkeit der verallgemeinerten Richtungsdifferenzierbarkeit von entscheidender Bedeutung. Zur Verdeutlichung könnte erneut Beispiel 5.1 herangezogen werden (Differenzierbarkeit als Spezialfall verallgemeinerter Differenzierbarkeit).

Anders als bei differenzierbaren Abbildungen können wir nicht die Halbstetigkeit von oben der Abbildung $t \mapsto \varphi_t(d)$ für beliebige $d \in B(X; \bar{x})$ folgern. Auch die Oberhalbstetigkeit von $t \mapsto \partial\varphi_t(0)$ muss explizit vorausgesetzt werden.

5.2.3 Konvexe Abbildungen

Eine Funktion $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}(T)$ heiße $\mathcal{C}(T)^+$**-konvex** (oder kurz **konvex**), falls für alle $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}$ und alle $\lambda \in [0,1]$

$$\mathfrak{f}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in \lambda \mathfrak{f}(x_1) + (1-\lambda)\mathfrak{f}(x_2) - \mathcal{C}(T)^+$$

gilt. Die Funktion $\mathfrak{f}$ ist genau dann $\mathcal{C}(T)^+$-konvex, wenn $x \mapsto \mathfrak{f}(x)(t)$ konvex für alle $t \in T$ ist.

Wir setzen weiter voraus, dass die Funktionen $\mathfrak{f}(.)(t)$ für alle $t \in T$ in einem Punkt $x_t \in X$ stetig sind. Es sei angemerkt, dass solche konvexe Funktionen im Inneren ihres effektiven Definitionsbereiches sogar Lipschitz-stetig sind. Daher lassen sich die Ergebnisse aus Kapitel 5.2.2 auf diese Funktionen direkt anwenden. Aufgrund der besonderen Struktur der Funktionen bzw. Abbildungen erhalten die verallgemeinerten Ableitungen allerdings eine spezielle Form, die es lohnt, gesondert betrachtet zu werden.

Definition 5.4. Sei $\mathfrak{X}$ ein reeller Banach-Raum, $\bar{x} \in \mathfrak{X}$. Eine $\mathcal{C}(T)^+$-konvexe Abbildung $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}(T)$ heiße **gleichmäßig richtungsdifferenzierbar** in $\bar{x}$, falls die Grenzwerte

$$\mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d)(t) := \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{\mathfrak{f}(\bar{x} + \tau d)(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t)}{\tau} \tag{5.9}$$

existieren und gleichmäßig auf T angenommen werden – d. h. falls für jede Wahl der Folge $\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}$ mit $\tau_n \downarrow 0$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\bar{n} \in \mathbb{N}$ (unabhängig von t) existiert, so dass

$$\left| \frac{\mathfrak{f}(\bar{x} + \tau_n d)(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t)}{\tau_n} - \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d)(t) \right| \leq \varepsilon \qquad \forall\, n \geq \bar{n},\ \forall\, t \in T$$

erfüllt ist.

$\mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d)(t)$ entspricht der punktweisen (rechtsseitigen) Richtungsableitung im Sinne der konvexen Analysis. Das zugehörige Subdifferential ist gegeben durch

$$\partial \mathfrak{f}(\bar{x})(t) := \left\{ u \in \mathfrak{X}' :\ u(d) \leq \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d)(t) \ \ \forall\, d \in B(X; \bar{x}) \right\}. \tag{5.10}$$

Wir untersuchen die Funktionen φ_t, definiert durch

$$\varphi_t(d) := \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d)(t). \tag{5.11}$$

Die Konvexität und Stetigkeit sichert deren Wohldefiniertheit. Weiter erhalten wir:

Lemma 5.4. *Ist $\mathfrak{f}$ gleichmäßig richtungsdifferenzierbar in $\bar{x}$, so gilt:*

(i) Die Funktionen φ_t, definiert durch (5.11), sind sublinear und stetig für alle $t \in T$. Sie erfüllen Bedingung (iii) aus Satz 5.1.

(ii) Die Abbildung $t \mapsto \varphi_t(d)$ ist stetig für jedes $d \in B(X; \bar{x})$.

Beweis. Die Sublinearität und Stetigkeit der Funktionen φ_t folgt direkt aus der Definition der verallgemeinerten Richtungsableitungen für konvexe Funktionen. Zudem sind die Konvergenzforderungen in der Definition der gleichmäßigen Richtungsdifferenzierbarkeit stärker als Bedingung (iii) in Satz 5.1. Aussage (ii) beweist man wie bei Lemma 5.2. ■

Erneut kann die Oberhalbstetigkeit der Abbildung $t \mapsto \partial \varphi_t(0)$ nicht aus der gleichmäßigen Richtungsdifferenzierbarkeit abgeleitet werden.

Satz 5.7. *Sei $\mathfrak{X}$ ein reeller Banach-Raum, $X \subset \mathfrak{X}$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, sei $\bar{x} \in \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$. Die Abbildung $\mathfrak{f}$ sei in $\bar{x}$ gleichmäßig richtungsdifferenzierbar. Dann gilt*

$$\max_{t\in T} \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d)(t) \geq 0 \qquad \forall\ d \in B(X; \bar{x}). \tag{5.12}$$

Ist darüber hinaus die Abbildung $t \mapsto \partial f(\bar{x})(t)$ oberhalbstetig, so gilt

$$0 \in \mathrm{cl}\,\mathrm{conv} \bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t) + N(X; \bar{x}), \tag{5.13}$$

wobei der Abschluss über die konvexe Hülle in (5.13) in der schwach-Topologie des Dualraumes $\mathfrak{X}'$, also in $(\mathfrak{X}', \sigma(\mathfrak{X}', \mathfrak{X}))$ gebildet wird.*

Beweis. Folgt mit der Definition der gleichmäßigen Richtungsdifferenzierbarkeit und Lemma 5.4 aus den Sätzen 5.1 und 5.2. Wegen Lemma 5.4 (ii) kann das Supremum in Satz 5.1 durch das Maximum ersetzt werden. ■

Aus dem Teil (ii) des Lemmas folgt nun, dass $\mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d) \in \mathcal{C}(T)$ existiert. Außerdem gilt:

Satz 5.8. *Sei $\mathfrak{X}$ ein reeller Banach-Raum, $X \subset \mathfrak{X}$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, sei $\bar{x} \in \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$. Die Abbildung $\mathfrak{f}$ sei in $\bar{x}$ gleichmäßig richtungsdifferenzierbar. Dann gilt*

$$\mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d) \notin -\mathrm{int}\,\mathcal{C}(T)^+ \qquad \forall\ d \in B(X; \bar{x}).$$

Beweis. Folgt wegen Lemma 5.4 aus Satz 5.3. ■

Bemerkung 5.4. Bei den in den Abschnitten 5.2.1-5.2.3 angegebenen Kritierien handelt es sich lediglich um notwendige Optimalitätsbedingungen. Außer im Fall konvexer Funktionen ist bisher kein Beweis für die Hinlänglichkeit dieser Kriterien für Effizienz bekannt.

5.3 Hinreichende Effizienzbedingungen im Falle konvexer Abbildungen

In Winkler, [92], haben wir eine Charakterisierung schwach effizienter Elemente auf Basis des Subdifferentialkalküls der konvexen Analysis angegeben, die den Ergebnissen des vorigen Abschnittes ähneln. Diese sollen nun diskutiert und erweitert werden. Wir erhalten notwendige und hinreichende Kriterien für schwache Effizienz sowie hinreichende Kriterien für Effizienz.

Satz 5.9. *Sei $\mathfrak{X}$ ein reeller Banach-Raum, $X \subset \mathfrak{X}$ konvex und T eine kompakte Teilmenge eines vollständigen topologischen Vektorraumes. Sei $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}(T)$ eine $\mathcal{C}(T)^+$-konvexe Abbildung, seien die Funktionen $\mathfrak{f}(.)(t)$ für jedes $t \in T$ auf einer offenen Umgebung von einem $x_t \in X$ beschränkt von oben. Dann gilt für $\bar{x} \in X$*

$$\sup_{t\in T} \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; x - \bar{x})(t) \geq 0 \ \ \forall\ x \in X \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{x} \in \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+),$$

wobei $\mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d)(t)$ die in Formel (5.9) definierte Richtungsableitung der Funktion $x \mapsto \mathfrak{f}(x)(t)$ in $\bar{x}$ in Richtung d ist.

Bemerkung 5.5. Gemäß den Voraussetzungen von Satz 5.9 gilt $\mathrm{dom}\,\mathfrak{f}(.)(t) = \mathfrak{X}$, $t \in T$. Da die Funktionen $x \mapsto \mathfrak{f}(x)(t)$, $t \in T$, konvex sind, ist die Beschränktheit von oben auf einer Umgebung eines $x_t \in X$ daher äquivalent zur Stetigkeit auf einer offenen Umgebung von X, vgl. etwa Ioffe und Tichomirov, [36], Abschnitt 3.2.3.

Beweis von Satz 5.9. Der Beweis erfolgt für beide Richtungen der Äquivalenz getrennt:

a) Wir zeigen zunächst

$$\bar{x} \notin \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \iff \exists\, x \in X,\ \exists\, M < 0: \quad \mathfrak{f}(x)(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t) \leq M \quad \forall\, t \in T. \tag{5.14}$$

Sei hierfür $\bar{x} \notin \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$. Dann existiert ein $x \in X$, so dass $\mathfrak{f}(x)(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t) < 0$ für alle $t \in T$. Aus $\mathfrak{f}(x) \in \mathcal{C}(T)$ für alle x und der Kompaktheit von T folgt

$$\sup_{t \in T} \{\mathfrak{f}(x)(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t)\} = \max_{t \in T} \{\mathfrak{f}(x)(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t)\} =: M < 0.$$

Existieren umgekehrt ein $x \in X$ und ein $M < 0$ mit $\mathfrak{f}(x)(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t) \leq M \quad \forall\, t \in T$, so kann $\bar{x}$ offensichtlich nicht schwach minimal sein. Folglich gilt (5.14).

Die Äquivalenz (5.14) kann auch in der Form

$$\bar{x} \notin \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \iff \exists\, x \in X,\ \exists\, M < 0: \quad \mathfrak{f}(\bar{x} + (x - \bar{x}))(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t) \leq M \quad \forall\, t \in T.$$

geschrieben werden. Den zweiten Teil der Äquivalenz erweitern wir zu einem Differenzenquotienten: Mit $\tau = 1$ gilt

$$\bar{x} \notin \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \iff \exists\, x \in X,\ \exists\, M < 0: \quad \frac{\mathfrak{f}(\bar{x} + \tau(x - \bar{x}))(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t)}{\tau} \leq M \quad \forall\, t \in T$$

Aus der Konvexität von X folgt $\bar{x} + \tau(x - \bar{x}) \in X$ für $0 < \tau \leq 1$. Da die Differenzenquotienten als Funktion von τ für $\tau \downarrow 0$ mononton fallend sind (man beachte die Konvexität von $\mathfrak{f}(.)(t)$), folgt schließlich

$$\begin{aligned} \bar{x} \notin \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) &\implies \exists\, x \in X,\ \exists\, M < 0: \quad \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}, x - \bar{x})(t) \leq M \quad \forall\, t \in T \\ &\implies \exists\, x \in X: \quad \sup_{t \in T} \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; x - \bar{x})(t) < 0. \end{aligned}$$

Die Negation liefert schließlich

$$\bar{x} \in \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \impliedby \sup_{t \in T} \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; x - \bar{x}) \geq 0 \quad \forall\, x \in X,$$

und damit die erste Aussage des Satzes.

b) Angenommen, es gilt $\sup_{t \in T} \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; x - \bar{x}) < 0$ für ein $x \in X$. Dann folgt für dieses $x \in X$

$$\mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; x - \bar{x})(t) < 0 \qquad \forall\, t \in T.$$

Damit gibt es zu jedem $t \in T$ ein $\varepsilon(t) > 0$, so dass

$$\mathfrak{f}(\bar{x} + \tau(x - \bar{x}))(t) < \mathfrak{f}(\bar{x})(t) \qquad \forall\, \tau,\ 0 < \tau < \varepsilon(t),\ \forall\, t \in T$$

gilt. Wir betrachten für jedes $\tau > 0$ mit $\bar{x} + \tau(x - \bar{x}) \in X$ die Mengen

$$U_\tau := \{t \in T: \ \mathfrak{f}(\bar{x} + \tau(x - \bar{x}))(t) < \mathfrak{f}(\bar{x})(t)\}.$$

Wegen der Stetigkeit der Abbildungen sind die Mengen U_τ offen in der relativen Topologie. Des Weiteren folgt aus $t \in U_\tau$ stets $t \in U_\alpha$ für alle $0 < \alpha < \tau$. Somit ist $\bigcup_{\{\tau > 0:\ \bar{x} + \tau(x - \bar{x}) \in X\}} U_\tau$ eine offene Überdeckung von T. Da T kompakt ist, existieren endlich viele $\tau_1, ..., \tau_n > 0$, $\bar{x} + \tau_i(x - \bar{x}) \in X$, so dass $T = \bigcup_{i=1}^n U_{\tau_i}$. Sei $\bar{\tau} := \min\{\tau_1, ..., \tau_n\}$. Es folgt $\bar{x} + \bar{\tau}(x - \bar{x}) \in X$ und $\mathfrak{f}(\bar{x} + \bar{\tau}(x - \bar{x}))(t) < \mathfrak{f}(\bar{x})(t)$ für alle $t \in T$. Somit gilt $\bar{x} \notin \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$. ■

Die Idee zum Beweisteil b) stammt aus der Arbeit von Carrizosa und Plastria, [7]. Für eine Diskussion dort angegebenen Resultate vgl. Bemerkung 5.7.

Satz 5.10. *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.9 gilt*

$$\sup_{t\in T} \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; x-\bar{x})(t) > 0 \quad \forall\, x \in X,\ \mathfrak{f}(x) \neq \mathfrak{f}(\bar{x}) \quad \Longrightarrow \quad \bar{x} \in \operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+),$$

wobei $\mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d)(t)$ *die in Formel (5.9) definierte Richtungsableitung der Funktion* $x \mapsto \mathfrak{f}(x)(t)$ *in* $\bar{x}$ *in Richtung* d *ist.*

Beweis. Laut den Definitionen 3.1 und 3.2 gilt

$$\begin{aligned} &\bar{x} \notin \operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \iff \\ &\qquad \exists\, x \in X,\ \mathfrak{f}(x) \neq \mathfrak{f}(\bar{x}): \quad \mathfrak{f}(x)(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t) \leq 0 \quad \forall\, t \in T. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Diese Äquivalenz kann auch in der Form

$$\begin{aligned} &\bar{x} \notin \operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \iff \\ &\qquad \exists\, x \in X,\ \mathfrak{f}(x) \neq \mathfrak{f}(\bar{x}): \quad \mathfrak{f}(\bar{x} + (x-\bar{x}))(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t) \leq 0 \quad \forall\, t \in T. \end{aligned}$$

geschrieben werden. Wir fahren nun wie im Teil a) des Beweises von Satz 5.9 fort und erhalten

$$\begin{aligned} \bar{x} \notin \operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) &\Longrightarrow \exists\, x \in X,\ \mathfrak{f}(x) \neq \mathfrak{f}(\bar{x}): \quad \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}, x-\bar{x})(t) \leq 0 \quad \forall\, t \in T \\ &\Longrightarrow \exists\, x \in X,\ \mathfrak{f}(x) \neq \mathfrak{f}(\bar{x}): \quad \sup_{t\in T} \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; x-\bar{x})(t) \leq 0. \end{aligned}$$

Ist also $\bar{x} \in X$ und gilt für alle $x \in X$ entweder $\mathfrak{f}(x) = \mathfrak{f}(\bar{x})$ oder $\sup_{t\in T} \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; x-\bar{x}) > 0$, so folgt $\bar{x} \in \operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$. ∎

Bemerkung 5.6. Im Gegensatz zu Satz 5.10 ist die angegebene Bedingung für schwach effiziente Elemente sowohl hinreichend als auch notwendig. Dies entspricht in der Tat der Struktur von Optimalitätsbedingungen mit Richtungsableitungen, wie wir sie aus der reellwertigen konvexen Analysis kennen. Die strikte Ungleichung aus Satz 5.10 kann hingegen nicht notwendig für Effizienz sein – man betrachte etwa das Beispiel $\mathfrak{f}(x)(t) = x^2$, $t \in T$.

Analog kann eine Aussage auf Basis der Subdifferentiale bewiesen werden. Wir erinnern daran, dass das **algebraisch Innere** einer Menge $M \subset \mathfrak{X}$ gegeben ist durch

$$\operatorname{core} M := \{x \in M : \ \forall\, y \in \mathfrak{X} \ \ \exists\, \lambda > 0,\ x + \lambda y \in M\}.$$

Satz 5.11. *Sei* $\mathfrak{X}$ *ein reeller Banach-Raum,* $X \subset \mathfrak{X}$ *offen und konvex,* T *eine kompakte Teilmenge eines vollständigen topologischen Vektorraumes. Sei* $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}(T)$ *eine* $\mathcal{C}(T)^+$*-konvexe Abbildung, seien die Funktionen* $\mathfrak{f}(.)(t)$ *für jedes* $t \in T$ *auf einer offenen Umgebung von einem* $x_t \in X$ *beschränkt von oben. Dann gilt für* $\bar{x} \in X$

$$0 \in \operatorname{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})} \operatorname{conv} \left(\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t) \right) \iff \bar{x} \in \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+),$$

$$0 \in \operatorname{core} \operatorname{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})} \operatorname{conv} \left(\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t) \right) \Longrightarrow \bar{x} \in \operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+).$$

Hierbei entspricht $\partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t)$ *dem Subdifferential der Funktion* $x \mapsto \mathfrak{f}(x)(t)$ *in* $\bar{x}$ *für festes* $t \in T$*, vgl. Formel (5.10).*

Beweis. Wir nutzen die Definition des Subdifferentials $\partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t)$ in $\bar{x}$ für die konvexen Funktionen $x \mapsto \mathfrak{f}(x)(t)$, $t \in T$. So gelten für jedes Element $p_t \in \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t)$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} p_t(x-\bar{x}) &\leq \mathfrak{f}(x)(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t) \qquad \forall\, x \in X,\ t \in T; & (5.16)\\ \mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; x-\bar{x})(t) &= \max\{p_t(x-\bar{x}):\ p_t \in \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t)\}. & (5.17)\end{aligned}$$

a) Aus Satz 5.9 und Gleichung (5.17) erhalten wir

$$\begin{aligned}&\bar{x} \notin \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \iff \\ &\qquad \exists\, x \in X,\ \exists\, M:\quad p(x-\bar{x}) \leq M < 0 \ \ \forall\, p \in \bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t). \qquad (5.18)\end{aligned}$$

Wegen der Linearität des Funktionals p bleibt die Äquivalenz in (5.18) erhalten, wenn die Ungleichung auf der rechten Seite für alle p im $\sigma(\mathfrak{X}', \mathfrak{X})$-Abschluss der konvexen Hülle von $\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t)$ gelten muss. Da X außerdem offen ist, können wir $\mathfrak{X}$ statt X schreiben. Mit der Transformation $x - \bar{x} \mapsto x$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}&\bar{x} \notin \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \iff \\ &\qquad \exists\, x \in \mathfrak{X}:\quad p(x) \leq M < 0 \ \ \forall\, p \in \mathrm{cl}_{\,\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}\mathrm{conv}\left(\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t)\right).\end{aligned}$$

Nun wenden wir in $(\mathfrak{X}', \sigma(\mathfrak{X}', \mathfrak{X}))$ mit Dualraum $\mathfrak{X}$ den Trennungssatz für einen Punkt und eine abgeschlossene konvexe Menge an (vgl. etwa Jahn, [42], Theorem 3.18) und erhalten

$$\bar{x} \notin \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \iff 0 \notin \mathrm{cl}_{\,\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}\mathrm{conv}\left(\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t)\right)$$

und nach Negation die zu beweisende Aussage.

b) Eingesetzt in (5.15) liefert die Abschätzung (5.16)

$$\begin{aligned}&\bar{x} \notin \mathrm{Eff}\,(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \implies \\ &\qquad \exists\, x \in X\backslash\{\bar{x}\}:\quad p(x-\bar{x}) \leq 0 \ \ \forall\, p \in \bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t). \qquad (5.19)\end{aligned}$$

Wegen der Linearität des Funktionals p bleibt die Implikation in (5.19) erhalten, wenn die Ungleichung auf der rechten Seite für alle p aus der schwach*-abgeschlossenen konvexen Hülle von $\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t)$ gilt. Beschränken wir uns auf das algebraisch Innere von $\mathrm{cl}_{\,\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}\mathrm{conv} \bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t)$, falls nichtleer, so kann die Ungleichung sogar zu einer strikten Ungleichung verschärft werden:

$$\begin{aligned}&\bar{x} \notin \mathrm{Eff}\,(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \implies \\ &\qquad \exists\, x \in X\backslash\{\bar{x}\}:\quad p(x-\bar{x}) < 0 \ \ \forall\, p \in \mathrm{core}\,\mathrm{cl}_{\,\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}\mathrm{conv}\left(\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t)\right).\end{aligned}$$

Da X außerdem offen ist, können wir $\mathfrak{X}$ statt X schreiben; mit der Transformation $x - \bar{x} \mapsto x$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}&\bar{x} \notin \mathrm{Eff}\,(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \implies \\ &\qquad \exists\, x \in \mathfrak{X}\backslash\{0\}:\quad p(x) < 0 \ \ \forall\, p \in \mathrm{core}\,\mathrm{cl}_{\,\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}\mathrm{conv}\left(\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t)\right).\end{aligned}$$

Damit kann die Null nicht in der zuletzt genannten konvexen Hülle der Subdifferentiale enthalten sein. Nach Negation erhält man schließlich mit

$$0 \in \operatorname{core} \operatorname{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})} \operatorname{conv}\left(\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t)\right) \implies \bar{x} \in \operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^{+}).$$

die gewünschte Aussage. ∎

Allgemeiner gilt:

Satz 5.12. *Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes gilt für jede konvexe (nicht notwendig offene) Menge $X \subset \mathfrak{X}$ und $\bar{x} \in X$*

$$0 \in \operatorname{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})} \operatorname{conv}\left(\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t)\right) + N(X;\bar{x}) \iff \bar{x} \in \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^{+}),$$

$$0 \in \operatorname{core}\left(\operatorname{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})} \operatorname{conv}\left(\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t)\right) + N(X;\bar{x})\right) \implies \bar{x} \in \operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^{+}),$$

wobei $\partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t)$ das in (5.10) definierte Subdifferential der Funktion $x \mapsto \mathfrak{f}(x)(t)$ in $\bar{x}$ für festes $t \in T$ ist und $N(X;\bar{x})$ den Normalenkegel an X in $\bar{x}$ bezeichnet.

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir zwei technische Resultate.

Lemma 5.5. *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.11 ist die Menge $\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(x)(t)$ beschränkt in $\mathfrak{X}'$ für alle $x \in X$.*

Beweis. Für jedes $h \in \mathfrak{X}$ mit $x + h \in X$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sup\{p(h) :\ p \in \bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(x)(t)\} &= \sup_{t\in T} \{p(h) :\ p \in \partial\mathfrak{f}(x)(t)\} \\
&\leq \sup_{t\in T} [\mathfrak{f}(x+h)(t) - \mathfrak{f}(x)(t)] \\
&= \max_{t\in T} [\mathfrak{f}(x+h)(t) - \mathfrak{f}(x)(t)] \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Wegen $\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(x)(t) \subset \mathfrak{X}'$ ist die Funktion

$$q : h \mapsto \sup\ \{p(h) :\ p \in \bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(x)(t)\}$$

endlich für $h \in \mathfrak{X}$ und konvex (da Supremum von linearen Funktionalen, vgl. Clarke, [9], Korollar 1 in Kapitel 2.8), daher ist p stetig. Folglich existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ mit

$$\sup\ \{q(h) : \|h\|_{\mathfrak{X}} \leq 1\} \leq L.$$

Nun erhalten wir für alle $p \in \bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(x)(t)$

$$\|p\|_{\mathfrak{X}'} = \sup\ \{p(h) : \|h\|_{\mathfrak{X}} \leq 1\} \leq \sup\ \{q(h) : \|h\|_{\mathfrak{X}} \leq 1\} \leq L,$$

also Beschränktheit. ∎

Die Idee für diesen Beweis stammt aus einem Artikel von Carrizosa und Plastria, vgl. [7].

Lemma 5.6. *Seien M_1, M_2 zwei Teilmengen des Dualraumes $\mathfrak{X}'$ eines Banach-Raumes $\mathfrak{X}$, sei M_1 beschränkt. Dann gilt* $\mathrm{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}(M_1 + M_2) = \mathrm{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}M_1 + \mathrm{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}M_2$.

Beweis. Es genügt, $\mathrm{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}(M_1 + M_2) \subset \mathrm{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}M_1 + \mathrm{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}M_2$ zu zeigen. Sei hierfür $\{c_i\}_{i\in I} \subset M_1 + M_2$ ein Netz mit $c_i \to_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})} c \in \mathrm{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}(M_1 + M_2)$. Dann existieren Netze $\{a_i\}_{i\in I}$ in M_1 und $\{b_i\}_{i\in I}$ in M_2 mit $a_i + b_i = c_i \quad \forall\, i \in I$. Wegen der Beschränktheit von M_1 enthält $\{a_i\}_{i\in I}$ ein $\sigma(\mathfrak{X}', \mathfrak{X})$-konvergentes Teilnetz $\{a_j\}_{j\in I}$, $a_j \to_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})} a$, wobei $a \in \mathrm{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}M_1$. Deshalb konvergiert $b_j = c_j - a_j$ schwach* gegen $b = c - a$, und b liegt in $\mathrm{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}M_2$. ■

Beweis von Satz 5.12 Wir zeigen Hinlänglichkeit und Notwendigkeit der Kriterien getrennt.

a) Für die Hinlänglichkeit wenden wir den Beweis von Satz 5.11 auf die erweitert reellwertigen Funktionen
$$\hat{\mathfrak{f}}(x)(t) := \mathfrak{f}(x)(t) + \chi_X(x), \qquad t \in T,$$
an, wobei $\chi_X(.)$ die charakteristische Funktion der Menge X bezeichnet,
$$\chi_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{bei } x \in X \\ +\infty & \text{sonst,} \end{cases}$$
Es gilt
$$\partial\hat{\mathfrak{f}}(x)(t) = \partial\mathfrak{f}(x)(t) + N(X; x), \qquad t \in T,$$
vgl. etwa Ioffe und Tichomirov, [36], Abschnitte 0.3.2 und 0.3.3. Mit den selben Ansätzen wie im Beweis von Satz 5.11 können wir zeigen:
$$\bar{x} \notin \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \implies 0 \notin \mathrm{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}\mathrm{conv}\left(\bigcup_{t\in T} \partial\hat{\mathfrak{f}}(\bar{x})(t)\right),$$
$$\bar{x} \notin \mathrm{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \implies 0 \notin \mathrm{core}\,\mathrm{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}\mathrm{conv}\left(\bigcup_{t\in T} \partial\hat{\mathfrak{f}}(\bar{x})(t)\right).$$
Mit den zwei obigen Lemmata folgt
$$\bar{x} \notin \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \implies 0 \notin \mathrm{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}\mathrm{conv}\left(\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(x)(t)\right) + N(X; x),$$
$$\bar{x} \notin \mathrm{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \implies 0 \notin \mathrm{core}\left(\mathrm{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}\mathrm{conv}\left(\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(x)(t)\right) + N(X; x)\right).$$
Die Negation dieser Implikationen liefert die zu beweisenden Aussagen.

b) Gelte $0 \notin \mathrm{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}\mathrm{conv}\left(\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(x)(t)\right) + N(X; x)$. Dann existiert nach dem Satz zur starken Trennung einer konvexen abgeschlossenen Menge von einem Punkt (vgl. Jahn, [42], Theorem 3.18) ein $d \in \mathfrak{X}$ und ein $M < 0$, so dass
$$(p_1 + p_2)(d) \leq M < 0 \quad \forall\, p_1 \in \mathrm{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}\mathrm{conv} \bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(x)(t),\ \forall\, p_2 \in N(X; \bar{x}).$$
Da $N(X; \bar{x})$ ein Kegel ist, folgt
$$\begin{aligned} p_2(d) &\leq 0 \qquad \forall\, p_2 \in N(X; \bar{x}), \\ p_1(d) &\leq M < 0 \quad \forall\, p_1 \in \mathrm{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})}\mathrm{conv} \bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(x)(t). \end{aligned}$$

Daher gilt $d \in T(X;\bar{x}) = \operatorname{cl} \bigcup_{\tau>0} \tau(X-\bar{x})$, die letzte Gleichung gilt, da X als konvex vorausgesetzt ist. Die Menge $\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(x)(t)$ ist gemäß Lemma 5.5 beschränkt; folglich existiert für jedes $\tilde{d} \in \mathfrak{X}$ ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$p_1(d+\varepsilon\tilde{d}) \leq M/2 < 0 \quad \forall\, p_1 \in \bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(x)(t).$$

Somit existiert insbesondere ein $\bar{d} \in \bigcup_{\tau>0} \tau(X-\bar{x})$, so dass $p_1(\bar{d}) \leq M/2 < 0$ für alle $p_1 \in \bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(x)(t)$. Es folgt $\mathfrak{f}^\circ(\bar{x};d)(t) \leq M/2 < 0$ für alle $t \in T$ und $\bar{x} + \tau\bar{d} \in X$ für hinreichend kleine $\tau > 0$. Laut Satz 5.9 widerspricht dies der schwachen Effizienz von $\bar{x}$. Die Negation der Gesamtaussage liefert nun das gewünschte Resultat. ∎

Bemerkung 5.7. Carrizosa und Plastria geben in [7] für den Fall $\mathcal{C}(T)^+$-konvexer Abbildungen $\mathfrak{f}$ das Effizienzkriterium

$$\bar{x} \in \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \in \operatorname{cl}\operatorname{conv}\left(\bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(x)(t)\right) + N(X;x)$$

an. Sie wählen einen etwas anderen Ansatz für ihren Beweis: Sie skalarisieren das Problem durch das Funktional

$$F(x) := \sup_{t\in T}\, [\mathfrak{f}(x)(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t)] = \max_{t\in T}\, [\mathfrak{f}(x)(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})(t)]$$

($\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ fest) und zeigen

$$\partial F(x) = \operatorname{conv} \bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(x)(t).$$

Teile des Beweises dieser Aussage flossen in unsere Beweise ein. Wir hätten auch auf die Arbeit von Solovev, [74], zurückgreifen können, dort findet man die erforderliche Formel für das Subdifferential punktweiser Maxima konvexer Funktionen (unter schwächeren Voraussetzungen). Diese Wege ermöglichen allerdings im Gegensatz zu unseren Resultaten keine Unterscheidung zwischen effizienten und schwach effizienten Elementen.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts weisen zwei wesentliche Verbesserungen gegenüber jenen aus Abschnitt 5.2.3 auf:

- Unter Konvexitätsvoraussetzungen kann sowohl die Hinlänglichkeit als auch die Notwendigkeit eines Teils der Effizienzkriterien bewiesen werden. Die Ergebnisse von Luu und Oettli geben nur notwendige Kriterien her.

  Damit setzt sich das aus der reellen Optimierung bekannte Muster fort, wonach die Optimalitätskriterien (Variationsungleichungen und -inklusionen) für konvexe Probleme notwendig und hinreichend und für nichtkonvexe Probleme nur notwendig sind.

- Es muss keine gleichmäßige Konvergenz der verallgemeinerten Differenzenquotienten bzw. keine Oberhalbstetigkeit der Subdifferentialabbildung gefordert werden.

- Es gelingt, Kriterien zu beweisen, die eine Unterscheidung zwischen effizienten Elementen und schwach effizienten Elementen ermöglicht.

Da der Zugang über die Skalarisierung im Falle konvexer Abbildungen ohne die gleichmäßige Richtungsdifferenzierbarkeit auskommt, könnte man auch die Existenz der $\mathcal{C}(T)$-wertigen Richtungsableitung bzw. entsprechende Effizienzkriterien erwarten. Diese Hoffnung wird allerdings enttäuscht.

Definition 5.5. Sei $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}(T)$ eine $\mathcal{C}(T)^+$-konvexe, stetige Abbildung, $\bar{x} \in \mathfrak{X}$.

$$\mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d) := \inf_{\tau > 0} \frac{\mathfrak{f}(\bar{x} + \tau d) - \mathfrak{f}(\bar{x})}{\tau}$$

bezeichnet die (rechtsseitige) **Richtungsableitung** von $\mathfrak{f}$ in $\bar{x}$ in Richtung d.

Die Abbildung

$$\tau \mapsto \triangle_{d,\tau}\mathfrak{f}(\bar{x}) := \frac{\mathfrak{f}(\bar{x} + \tau d) - \mathfrak{f}(\bar{x})}{\tau}$$

ist auf $(0, \infty) \cap \{\tau :\ \bar{x} + \tau d \in \operatorname{dom} \mathfrak{f}\}$ monoton wachsend. In der Tat ist die behauptete Monotonie äquivalent zur Monotonie der Funktionen $\tau \mapsto \triangle_{d,\tau}\mathfrak{f}(\bar{x})(t)$ für alle $t \in T$, was wiederum aus der reellen Optimierung bekannt ist, man vergleiche etwa Rockafellar, [71], Theorem 23.1. Wie in der reellwertigen konvexen Analysis wird daher bei der Definition der Richtungsableitung mit dem Infimum statt mit dem Grenzwert gearbeitet. Trotz der ebenfalls geltenden Monotonie stimmen Infimum und Grenzwert in diesem Falle aber möglicherweise nicht überein:

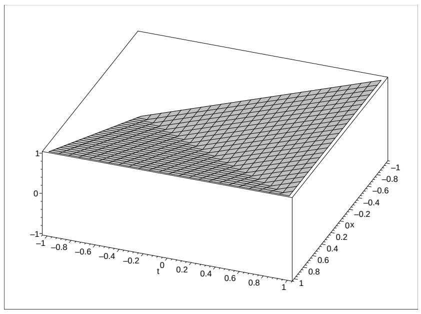
Beispiel 5.2. Wir betrachten die Abbildung $\mathfrak{f} : [-1, 1] \to \mathcal{C}([-1, 1])$, gegeben durch

$$\mathfrak{f}(x)(t) := \max\{x,\ t\}, \qquad t \in T = [-1, 1].$$

Die Abbildung zeigt den Graphen von $\mathfrak{f}$ für $x \in X := [-1, 1]$. Die Abbildung $\mathfrak{f}$ ist $\mathcal{C}(T)^+$-konvex, da $\mathfrak{f}(.)(t)$ für festes $t \in T$ konvex ist. Uns interessiert die Richtungsableitung von $\mathfrak{f}$ im Punkt $\bar{x} = 0$ in Richtung $d = 1$.

Die Richtungsdifferentialquotienten $\triangle_{d,\tau}\mathfrak{f}(\bar{x})$ berechnen sich punktweise als

$$\begin{aligned}
\triangle_{d,\tau}\mathfrak{f}(\bar{x})(t) &= \frac{\max\{\bar{x} + \tau d,\ t\} - \max\{\bar{x}, t\}}{\tau} \\
&= \frac{\max\{\tau,\ t\} - \max\{0, t\}}{\tau} \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } -1 \le t < 0 \\ 1 - t/\tau & \text{für } 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{für } \tau < t \le 1 \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$



Mit $\alpha := 1/\tau$ ergibt sich die gleiche Struktur der Funktionen wie in Beispiel 2.1. Dort hatten wir bereits gezeigt, dass die Menge $\{\triangle_{d,\tau}\mathfrak{f}(\bar{x})(t) :\ \tau > 0\}$ kein Infimum besitzt.

Prüfen wir noch die eben bewiesenen Effizienzkriterien. Es gilt $\operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) = \{-1\}$ und $\operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) = [-1, 1]$, also $0 \notin \operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$, aber $0 \in \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$. In der Tat erhalten wir

$$\sup_{t \in T} \mathfrak{f}^\circ(0; x)(t) \ge 0 \qquad \forall\, x \in X,$$

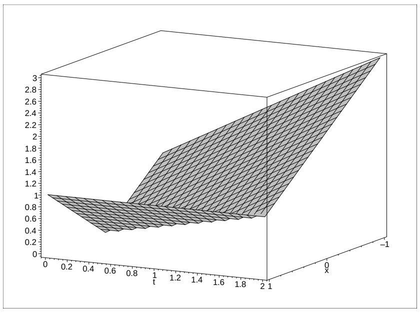
und damit die Bestätigung der schwachen Effizienz.

Selbst wenn das Infimum existiert, muss es kein Häufungspunkt des Netzes der Richtungsdifferentialquotienten sein:

Beispiel 5.3. Wir betrachten nun die Abbildung $\mathfrak{f} : [-1, 1] \to \mathcal{C}([0, 2])$, gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}(x)(t) &:= \max\{2x,\ t\} - x, \qquad t \in T = [0, 2] \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} t - x & \text{für } -1 \le x \le t/2 \\ x & \text{für } t/2 < x \le 1 \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Das nebenstehende Bild zeigt den Graphen von $\mathfrak{f}$ für $x \in [-1, 1]$. Die Abbildung $\mathfrak{f}$ ist $\mathcal{C}(T)^+$-konvex, da $\mathfrak{f}(.)(\bar{t})$ für festes $\bar{t} \in T$ konvex ist.



Uns interessiert wiederum die verallgemeinerte Richtungsableitung von $\mathfrak{f}$ im Punkt $\bar{x} = 0$ in Richtung $d = 1$. Die Richtungsdifferentialquotienten $\triangle_{d,\tau}\mathfrak{f}(\bar{x})$ berechnen sich punktweise als

$$\begin{aligned} \triangle_{d,\tau}\mathfrak{f}(\bar{x})(t) &= \frac{\max\{2\bar{x} + 2\tau d,\ t\} - \bar{x} - \tau d - \max\{2\bar{x}, t\} + \bar{x}}{\tau} \\ &= \frac{\max\{2\tau,\ t\} - \tau - \max\{0, t\}}{\tau} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 1 - t/\tau & \text{für } 0 \le t \le 2\tau \\ -1 & \text{für } 2\tau < t \le 2 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Mit $\alpha := 1/\tau$ ergibt sich die gleiche Struktur der Funktionen wie in Beispiel 2.2. Somit existiert zwar die verallgemeinerte Richtungsableitung in $\bar{x} = 0$ in Richtung $d = 1$, $\mathfrak{f}^\circ(\bar{x}; d) \equiv -1$, aber das Netz der Richtungsdifferentialquotienten konvergiert nicht gegen sein Infimum.

5.4 Verbleibende Probleme und mögliche Auswege

Die Ergebnisse aus dem Kapitel 5.2 werfen verschiedene Fragen auf:

- Die Oberhalbstetigkeit der Abbildung $t \mapsto \partial\varphi(0)$ konnte für keine der betrachteten Abbildungstypen (differenzierbar, Lipschitz-stetig bzw. konvex) nachgewiesen werden. Allerdings ist uns auch kein Beispiel dafür bekannt, dass diese verletzt ist.
- Der direkte Weg (Abschnitt 5.3) liefert für konvexe Funktionen bessere Ergebnisse als der Ansatz über Luu und Oettli, allerdings gelang bisher keine Verallgemeinerung auf nichtkonvexe Abbildungen.

Ein Weg, die Voraussetzungen der Sätze 5.1-5.3 zu umgehen, könnte in der Verwendung verallgemeinerter Richtungsableitungen liegen, die ohne die sonst üblichen Grenzwerte oder Häufungspunkte definiert werden. Solche Konzepte findet man etwa bei Craven und Glover, [11], die sich an den Derivative Container von Warga (siehe etwa [86]) anlehnen, oder bei Reiland, [69], der am Rande seiner Untersuchungen ein Beispiel einer Abbildung $\mathfrak{f} : \mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(T)$ auf Basis sogenannter Fans (Ioffe, siehe etwa [34] oder [35]) rechnet. Eine detaillierte Untersuchung dieser Ansätze, insbesondere in Hinblick auf Abbildungen mit Werten in $\mathcal{C}(T)$, wäre sicher lohnenswert, würde aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Es gibt eine Reihe von Arbeiten, in denen Effizienzkriterien mittels verallgemeinerter Ableitungen ausschließlich auf Basis von Kettenregeln untersucht werden. Diese Autoren skalarisieren formal die Zielabbildung $\mathfrak{f}$ mittels linearer stetiger Funktionale z und wenden anschließend die aus der reellen Analysis bekannten Optimalitätskriterien in Subdifferentialform auf das skalarisierte Zielfunktional $z(\mathfrak{f}(.))$ an. Geeignete Kettenregeln ermöglichen schließlich eine weitere Aufspaltung des Terms $\partial\, z(f(.))$.

6. Verwendung allgemeiner skalarer Ersatzaufgaben

Die in Kapitel 4 betrachtete Skalarisierung führt zu skalaren Ersatzproblemen, in die allerdings noch das auf Minimalität zu untersuchende Element $\bar{y} \in \mathfrak{Y}$ einfließt. Die bisherigen Resultate wirken daher ein wenig, als würden wir bei unseren Berechnungen bereits beim Ergebnis (dem minimalen Element) starten, um nachher wieder dort zu landen: als würden wir uns im Kreise drehen. Wünschenswert wäre ein Ersatzproblem oder eine Schar von Ersatzproblemen, dessen Parameter ohne Kenntnis des zu bestimmenden minimalen Elementes gewählt werden können – diesem Ziel widmen wir dieses Kapitel.

Zunächst untersuchen wir eine Klasse skalarer Ersatzprobleme auf Lösbarkeit und Verhalten bzgl. der Parameter. Hierfür kehren wir wieder in den Bildraum, zunächst einen allgemeinen topologischen linearen Raum $\mathfrak{Y}$, später speziell in den Raum $\mathcal{C}(T)$ der stetigen Funktionen zurück. Anschließend zeigen wir, wie sich bekannte Effizienzkriterien als Spezialfall der betrachteten Ersatzprobleme ergeben.

Wir folgen in diesem Kapitel erneut der Herangehensweise von Weidner, vgl. [87], [90], [91], für eine Übersicht siehe [89], und übertragen einige ihrer Ergebnisse vom $\mathbb{R}^n$ auf den Raum $\mathcal{C}(T)$. Bei der Stabilitätsanalyse stützen wir uns auf Ergebnisse von Sterna-Karwat, [79], die spezialisiert werden können.

6.1 Die Ersatzaufgabe, Existenz von Lösungen

Sei $\mathfrak{Y}$ ein topologischer linearer Raum. Wir betrachten das skalare Problem

$$(P_{C,k,a}) \qquad \begin{array}{l} \tau \longrightarrow \min \\ \text{bei } y \in a + \tau k - \operatorname{cl} C, \quad (\tau, y) \in \mathbb{R} \times Y \end{array}$$

mit einer nichtleeren Menge $C \subsetneq \mathfrak{Y}$ und Vektoren $a, k \in \mathfrak{Y}$ als Parameter, $Y \subsetneq \mathfrak{Y}$ nichtleer. Prinzipiell könnten sowohl τ als auch y als Variablen des Problems angesehen werden; wir sprechen daher fortan gelegentlich von einer optimalen Lösung $(\bar{\tau}, \bar{y})$ anstatt einer optimalen Lösung $\bar{y}$ (mit Zielfunktionswert $\bar{\tau}$).

Probleme wie $(P_{C,k,a})$ als Zugang zur Vektoroptimierung wurden bereits von Pascoletti und Serafini, [63], und – weitaus detaillierter – von Weidner in ihrer Habilitationsschrift, [89], vgl. auch die Referenzen darin, behandelt. Das Problem $(P_{C,k,a})$ wurde von Weidner zunächst für allgemeine topologische Räume $\mathfrak{Y}$ untersucht; anschließend widmete sie ein ganzes Kapitel ihrer Habilitationsschrift einem Überblick, wie sich die meisten der bekannten Skalarisierungsmethoden (in $\mathbb{R}^n$) als Spezialfälle von Problem $(P_{C,k,a})$ darstellen lassen.

Wir diskutieren zunächst die Existenz von Lösungen des Ersatzproblems $(P_{C,k,a})$. Sei hierzu

$$\mathcal{D}_{C,k,a} := \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} (a + \tau k - \operatorname{cl} C).$$

Das folgende Lemma ist ein Spezialfall von Satz Satz 6.1.1 bei Weidner, [89].

Lemma 6.1. *Das Problem* $(P_{C,k,a})$ *hat eine optimale Lösung genau dann, wenn das Funktional* $z^{C-a,k}$ *gemäß (4.1),*

$$z^{C-a,k}(y) = \min\{\tau \in \mathbb{R} : y \in a + \tau k - \operatorname{cl} C\},$$

auf $Y \cap \mathcal{D}_{C,k,a}$ *wohldefiniert ist und* $\min\{z^{C-a,k}(y) : \ y \in Y \cap \mathcal{D}_{C,k,a}\}$ *existiert. In diesem Fall stimmen die Mengen der zulässigen Vektoren* y*, die Mengen der optimalen Vektoren* $\bar{y}$ *sowie die Optimalwerte* $\bar{\tau}$ *der Probleme* $(P_{C,k,a})$ *und* $\min\{z^{C-a,k}(y) : y \in Y \cap \mathcal{D}_{C,k,a}\}$ *überein.*

Beweis. Offenbar ist $Y \cap \mathcal{D}_{C,k,a}$ genau die Menge der zulässigen Vektoren y von $(P_{C,k,a})$. Daraus folgt unmittelbar eine Richtung der zu zeigenden Äquivalenz.

Besitzt umgekehrt $(P_{C,k,a})$ eine Optimallösung, so gibt es ein Paar $(\bar{\tau}, \bar{y}) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{Y}$, so dass

$$\begin{aligned} &\bar{y} \in a + \bar{\tau} k - \operatorname{cl} C, \\ &y \notin a + \tau k - \operatorname{cl} C \qquad \forall\, y \in Y,\ \forall\, \tau < \bar{\tau}. \end{aligned}$$

Somit ist die Menge $\{\tau \in \mathbb{R} : \ y \in a + \tau k - \operatorname{cl} C\}$ für alle $y \in Y \cap \mathcal{D}_{C,k,a}$ von unten beschränkt und abgeschlossen, d. h. $z^{C-a,k}(y)$ existiert auf $Y \cap \mathcal{D}_{C,k,a}$. Weiter nimmt die Funktion $z^{C-a,k}$ über $Y \cap \mathcal{D}_{C,k,a}$ in $\bar{y}$ ihr Minimum an.

Die Gleichheit der zulässigen Vektoren sowie der Optimallösung der Probleme $(P_{C,k,a})$ und $\min\{z^{C-a,k}(y) : y \in Y \cap \mathcal{D}_{C,k,a}\}$ ist offensichtlich. ■

In Kapitel 4.1 haben wir mit Bedingung (V1),

$$\textbf{(V1)} \qquad \emptyset \neq \operatorname{int} C = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0} (\operatorname{bd} C + \alpha k) \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{Y} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} (\operatorname{bd} C - \alpha k)$$

eine allgemeine Voraussetzung für $\mathcal{D}_{C,k,a} = \mathcal{C}(T)$ angegeben. Gemäß Lemma 4.2 ist (V1) z. B. dann erfüllt, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen gilt:

(V1a) $C \subsetneq \mathfrak{Y}$ ist eine Menge mit nichtleerem Inneren, für die ein Kegel $K \subset \mathfrak{Y}$ mit $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ und $\operatorname{cl} C + \operatorname{int} K \subseteq \operatorname{int} C$ existiert, und es gilt $k \in \operatorname{int} K$;

(V1b) $C = b + K \subsetneq \mathfrak{Y}$, wobei $b \in \mathfrak{Y}$ ein beliebiges Element, $K \cup \{0\}$ ein konvexer Kegel mit $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ und $k \in \operatorname{int} K$ ist.

Gilt eine dieser Bedingungen, so sagen wir fortan, dass der Kegel K bzw. der Kegel $K \cup \{0\}$ **zu C, k und (V1a) bzw. (V1b) gehört**.

Da (V1) in den meisten Anwendungen gilt, beschränken wir uns auf diesen Fall. Für viele Aussagen greifen wir sogar direkt auf die Bedingungen a) und b) zurück. Es bleibt dann, die Existenz von Lösungen von $\min\{z^{C-a,k}(y) : \ y \in Y \cap \mathcal{D}_{C,k,a}\}$ zu untersuchen. Ein erstes solches Kriterium ergibt sich direkt aus den Resultaten des Kapitels 4:

Satz 6.1. *Angenommen,* C *und* k *erfüllen die Voraussetzung (V1), es gelte* $0 \in \operatorname{bd} C$, $\operatorname{int} C \neq \emptyset$ *und* $\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, C)$*. Dann besitzt* $(P_{C,k,\bar{y}})$ *eine optimale Lösung.*

Beweis. Die Funktionale $z^{C,k}$ und $z^{C-\bar{y},k}$ sind gemäß Satz 4.1 bzw. 4.2 wohldefiniert und stetig; wegen Voraussetzung (V1) gilt $\mathcal{D}_{C,k,\bar{y}} = \mathfrak{Y}$. Es genügt also zu zeigen, dass das Minimum von $z^{C-\bar{y},k}$ über $y \in Y$ existiert. In der Tat gilt

$$\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, C) \quad \Longrightarrow \quad (Y - \bar{y}) \cap -\operatorname{int} C = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad z^{C,k}(y - \bar{y}) \geq 0 \ \ \forall\, y \in Y.$$

Wegen $0 \in \operatorname{bd} C$ folgt aus Satz 4.1 (ii) $z^{C,k}(\bar{y} - \bar{y}) = z^{C,k}(0) = 0$ und mit Satz 4.2 schließlich $z^{C-\bar{y},k}(y) \geq z^{C-\bar{y},k}(\bar{y})$ für alle $y \in Y$. Somit liegt in $\bar{y}$ ein Minimum von $z^{C-\bar{y},k}$ über Y vor. ■

Für ein allgemeineres Existenzkriterium untersuchen wir die mengenwertige Abbildung

$$\mathcal{T}(a,k) = \mathcal{T}_C(a,k) := \{\tau \in \mathbb{R}: \; a + \tau k \in Y + \operatorname{cl} C\}.$$

Die $\mathcal{T}(a,k)$ sind Teilmengen der reellen Zahlen, für deren Infima $\inf \mathcal{T}(a,k) = \inf \{z^{C-a,k}(y) : y \in Y \cap \mathcal{D}_{C,k,a}\}$ gilt. Zunächst zeigen wir:

Lemma 6.2. *Seien C und k derart, dass eine der Bedingungen (V1a), (V1b) erfüllt ist, sei K bzw. $K \cup \{0\}$ der zugehörige Kegel und $a \in \mathfrak{Y}$ beliebig. Dann sind die Werte $\mathcal{T}(a,k)$ von $\mathcal{T}$ nichtleere, konvexe Mengen; sie sind abgeschlossen, wenn $Y + \operatorname{cl} C$ abgeschlossen ist und beschränkt von unten, wenn $Y \subset \hat{a} + \operatorname{int} K$ für ein $\hat{a} \in \mathfrak{Y}$ gilt.*

Beweis. Seien C, k gemäß den Voraussetzungen, $a \in \mathfrak{Y}$. Die Voraussetzungen (V1a) und (V1b) implizieren jeweils die Bedingung (V1), folglich überdeckt die Menge $\{\tau k - \operatorname{cl} C: \; \tau \in \mathbb{R}\}$ den Raum $\mathfrak{Y}$, somit sind die Mengen $\mathcal{T}(a,k)$ nichtleer.

(1) Konvexität: Sind $\tau \in \mathcal{T}(a,k)$ und $\varepsilon > 0$, so gilt mit Teil (i) aus Lemma A.2

$$a + (\tau + \varepsilon)k \in Y + \operatorname{cl} C + \varepsilon k \subseteq Y + \operatorname{int} C \subseteq Y + \operatorname{cl} C,$$

also $\tau + \varepsilon \in \mathcal{T}(a,k)$ für beliebige $\tau \in \mathcal{T}(a,k)$, $\varepsilon > 0$. Damit umfasst $\mathcal{T}(a,k)$ entweder alle reellen Zahlen, oder $\mathcal{T}(a,k)$ ist ein nach $+\infty$ offenes Intervall. Folglich ist $\mathcal{T}(a,k)$ konvex.

(2) Abgeschlossenheit: $\mathcal{T}(a,k)$ ist das Urbild der Menge $Y + \operatorname{cl} C$ bzgl. der stetigen Abbildung $\tau \mapsto a + \tau k$, also abgeschlossen, falls $Y + \operatorname{cl} C$ abgeschlossen ist.

(3) Beschränktheit von unten: Wir zeigen, dass es ein $\tau \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a + \tau k \notin Y + \operatorname{cl} C$.

a) Angenommen, es gilt $a + \tau k \in Y + \operatorname{cl} C$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$a + \tau k \in \hat{a} + \operatorname{int} K + \operatorname{cl} C \subseteq \hat{a} + \operatorname{int} C \quad \forall \, \tau \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Wir fixieren $\bar{\tau}$. Dann gibt es wegen der Gültigkeit von (V1) ein $\alpha > 0$ und $c \in \operatorname{bd} C$ derart, dass $a + \bar{\tau} k - \hat{a} = c + \alpha k$. Somit gilt wegen (6.1)

$$c = a + (\bar{\tau} - \alpha)k - \hat{a} \in \operatorname{int} C + \hat{a} - \hat{a} = \operatorname{int} C,$$

im Widerspruch zu $c \in \operatorname{bd} C$.

b) Im Falle der Gültigkeit der Bedingung b) kann analog argumentiert werden, denn $Y + \operatorname{cl} C \in \hat{a} + \operatorname{int} K + b + \operatorname{cl} K \subseteq \hat{a} + b + \operatorname{int} K$, und der Kegel $(C =) K \cup \{0\}$ erfüllt Voraussetzung a).

Aus $a + \tau k \notin Y + \operatorname{cl} C$ folgt $a + (\tau - \varepsilon)k \notin Y + \operatorname{cl} C$ für alle $\varepsilon > 0$, also ist $\mathcal{T}(a,k)$ beschränkt von unten. ■

Es folgt:

Satz 6.2. *Seien C und k derart, dass eine der Bedingungen (V1a), (V1b) erfüllt ist, sei K bzw. $K \cup \{0\}$ der zugehörige Kegel und $a \in \mathfrak{Y}$ beliebig. Sei weiter $Y + \operatorname{cl} C$ abgeschlossen und $Y \subset \hat{a} + \operatorname{int} K$ für ein $\hat{a} \in \mathfrak{Y}$. Dann besitzt das Problem $(P_{C,k,a})$ eine optimale Lösung.*

Die Voraussetzung der Abgeschlossenheit von $Y + \operatorname{cl} C$ ist schwächer als jene bei Weidner, Satz 6.1.3 (i) in [89]: Weidner fordert Kompaktheit von Y, die in der Tat Abgeschlossenheit von $Y + \operatorname{cl} C$ impliziert. Bzgl. Bedingungen für die Abgeschlossenheit von $Y + \operatorname{cl} C$ vgl. auch Bemerkung 6.2.

Beweis von Satz 6.2. Gemäß Satz 4.1 ist das Funktional $z^{C,k}$ wohldefiniert und stetig; wegen Voraussetzung (V1) gilt $\mathcal{D}_{C,k,a} = \mathfrak{Y}$. Es genügt also zu zeigen, dass das Minimum von $z^{C-a,k}$ über $y \in Y$ existiert.

Gemäß Lemma 6.2 ist die Menge $\mathcal{T}(a,k) = \{\tau : \; a + \tau k \in Y + \operatorname{cl} C\}$ abgeschlossen und beschränkt von unten. Somit existiert $\min \mathcal{T}(a,k)$, d. h. ein Paar $(\bar\tau, \bar y) \in \mathbb{R} \times Y$, so dass

$$\begin{aligned} &a + \bar\tau k \in \bar y + \operatorname{cl} C \\ &a + \tau k \notin y + \operatorname{cl} C \quad \forall\, \tau < \bar\tau, \; \forall\, y \in Y. \end{aligned}$$

Gemeinsam mit Satz 4.1 (ii) erhalten wir daraus $z^{C-a,k}(\bar y) \le \bar\tau$ bzw. $z^{C-a,k}(y) > \tau$ für alle $\tau < \bar\tau$ und $y \in Y$. Die letzte Ungleichung liefert $z^{C-a,k}(y) \ge \bar\tau$ für alle $y \in Y$. Zusammenfassend erhalten wir

$$z^{C-a,k}(\bar y) \le \bar\tau \le z^{C-a,k}(y) \quad \forall\, y \in Y,$$

d. h. eine optimale Lösung für $(P_{C,k,a})$. ■

Der Beweis von Satz 6.2 basiert auf einer Idee von Sterna-Karwat, [79].

Folgerung 6.1. Sei $K \subsetneq \mathcal{C}(T)$ ein Kegel mit $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ und $\operatorname{cl} K + \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+ \subseteq \operatorname{int} K$, seien $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ und $a \in \mathcal{C}(T)$, $Y \subseteq \hat a + \operatorname{int} K$ für ein $\hat a \in \mathcal{C}(T)$, sei $Y + \operatorname{cl} K$ abgeschlossen. Dann besitzt $(P_{K,k,a})$ eine optimale Lösung.

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Satz 6.2, da K die Bedingung (V1a) erfüllt. ■

Bemerkung 6.1. Gilt $Y \subseteq \hat a + \operatorname{int} K$ für ein $\hat a \in \mathcal{C}(T)$ und ist $Y + \operatorname{cl} K$ abgeschlossen, so ist $(P_{K,k,a})$ insbesondere für jeden in Kapitel 4.2 betrachteten Kegel K lösbar.

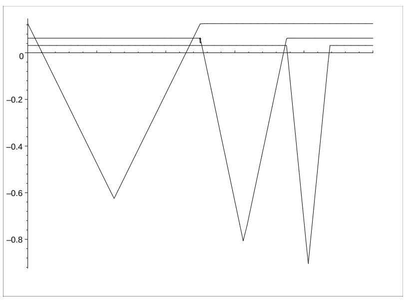
Bemerkung 6.2. Die wohl härteste Voraussetzung in Satz 6.2 ist die Abgeschlossenheit von $Y + \operatorname{cl} C$. Sie ist etwa erfüllt, falls Y kompakt und C abgeschlossen ist.

Allgemeinere Bedingungen anzugeben, unter denen (in nichtreflexiven Räumen) die Summe zweier abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen ist, entpuppt sich als äußerst schwierig. In der Literatur sind eine Reihe von Resultaten dazu bekannt, vgl. etwa Beaulieu und Zhou, [1], Dieudonne, [15], Fan, [18], Gwinner, [28] und [27], Jameson, [48], Luc, [54], sowie Majchrzak und Walczak, [57]. Bei allen Autoren wird allerdings gefordert, dass eine der beiden Mengen lokalkompakt oder Teilmenge eines endlichdimensionalen Unterraumes ist – beide Voraussetzungen können in unseren Fällen a priori nicht garantiert werden.

Dass die Aussagen von Satz 6.2 nicht gelten müssen, wenn zwar Y, nicht aber $Y + \mathcal{C}(T)^+$ abgeschlossen ist, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 6.1. Wir betrachten die Menge $Y := \{y_i \in \mathcal{C}([0,1]) : \; i \ge 2\}$ mit Funktionen

$$\begin{aligned} y_i(t) &:= -(1 - \frac{1}{2^i}) z_i(t) + \frac{1}{2^{i+1}}, \\ z_i(t) &:= \max\left\{0, -2^i |t - \frac{2^i - 3}{2^i}| + 1\right\}, \end{aligned}$$



vgl. Beispiel aus Beweis zu Lemma 2.4. Die nebenstehende Abbildung zeigt y_2, y_3 und y_4 („Kerbe“ von links nach rechts wandernd). Offenbar ist Y abgeschlossen.

$Y + \mathcal{C}(T)^+$ ist nicht abgeschlossen: Hierzu betrachten wir die Folge der Funktionen $y_i + z_i$,

$$y_i(t) + z_i(t) = -(1 - \frac{1}{2^i})z_i(t) + \frac{1}{2^{i+1}} + z_i(t) = \frac{1}{2^i} z_i(t) + \frac{1}{2^{i+1}}.$$

Da die z_i beschränkt sind, folgt $y_i + z_i \to 0$ für $i \to \infty$ und wegen $z_i \in \mathcal{C}(T)^+$ schließlich $0 \in \operatorname{cl}(Y + \mathcal{C}(T)^+)$. Aber $0 \notin Y + \mathcal{C}(T)^+$, denn für alle $i \geq 2$ gilt $-y_i \notin \mathcal{C}(T)^+$.

Das Problem $(P_{C,k,a})$ mit $C = \mathcal{C}(T)^+$, $k(t) = 1$ und $a(t) = 0$ für alle $t \in [0, 1]$ hat keine Lösung: Es gilt

$$\{\tau : \ y_i \in a + \tau k - \mathcal{C}(T)^+\} = [2^{i+1}, +\infty),$$

das Minimum über diese Mengen für $i \geq 2$ wird also nicht angenommen. Jedes der Probleme $(P_{C,k,a})$ mit $C = \mathcal{C}(T)^+$, $k(t) = 1$ und $a = y_i$ ist hingegen lösbar. Es gilt nämlich

$$\{\tau : \ y_i \in y_i + \tau k - \mathcal{C}(T)^+\} = [0, +\infty),$$

folglich ist $(0, y_i)$ eine Optimallösung von $(P_{\mathcal{C}(T)^+,k,y_i})$.

6.2 Minimalitätsbedingungen

Den nachfolgenden Satz findet man bei Weidner, [89], Satz 6.2.2, für den Fall topologischer Vektorräume $\mathfrak{Y}$.

Satz 6.3. *Angenommen, C und k erfüllen die Voraussetzung (V1), $0 \in \operatorname{bd} C$, $\operatorname{int} C \neq \emptyset$ und $\bar{y} \in Y$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, C) &\iff (0, \bar{y}) \text{ löst } (P_{C,k,\bar{y}}), \\ \bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \operatorname{cl} C) &\iff (0, \bar{y}) \text{ löst } (P_{C,k,\bar{y}}) \text{ eindeutig.} \end{aligned}$$

Beweis. Der Teil „$\Rightarrow$“ der ersten Aussage wurde bereits bei Satz 6.1 gezeigt. Die Rückrichtung folgt aus Lemma 6.1 und Satz 4.1 (iv).

$\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \operatorname{cl} C)$ bedeutet $(Y - \bar{y}) \cap -\operatorname{cl} C = \emptyset$ und ist daher gemäß Satz 4.1 (ii) äquivalent zu $z^{C-\bar{y},k}(y) = z^{C,k}(y - \bar{y}) > 0 = z^{C,k}(\bar{y} - \bar{y}) = z^{C-\bar{y},k}(\bar{y})$ für alle $y \in Y \backslash \{\bar{y}\}$. Diese Ungleichung bestimmt aber gerade die eindeutigen Lösungen des Problems $(P_{C,k,\bar{y}})$.

Der Optimalwert $\bar{\tau} = 0$ ergibt sich aus $0 \in \operatorname{bd} C$ und Satz 4.1 (ii). ∎

Wir erhalten als direkte Folgerung:

Satz 6.4. *Seien $K \subsetneq \mathcal{C}(T)$ ein Kegel mit nichtleerem Inneren, $\operatorname{cl} K + \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+ \subseteq \operatorname{int} K$ und $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$. Sei $Y \subsetneq \mathcal{C}(T)$ nichtleer und $\bar{y} \in Y$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, K) &\iff (0, \bar{y}) \text{ löst } (P_{K,k,\bar{y}}), \\ \bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \operatorname{cl} K) &\iff (0, \bar{y}) \text{ löst } (P_{K,k,\bar{y}}) \text{ eindeutig.} \end{aligned}$$

Beweis. Folgt aus Satz 6.3. ∎

Bemerkung 6.3. Die Aussagen des obigen Satzes gelten für alle in Kapitel 4.2 betrachteten Kegel K.

Es gilt $\mathrm{Eff}\,(Y, \mathrm{cl}\, K) \subseteq \mathrm{Eff}\,(Y, K) \subseteq \mathrm{Eff}_w(Y, K)$. Dass es sich hierbei durchaus um echte Inklusionen handeln kann und wie in solchen Fällen die Eindeutigkeit der Lösung des Problems $(P_{C,k,\bar{y}})$ wirkt, zeigt das nachfolgende Beispiel.

Beispiel 6.2. Sei $T = [-1, 1]$ und $Y \subset \mathcal{C}(T)$ gegeben durch $Y := \{y_0, y_1, y_2\}$ mit

$$y_0(t) = 0, \qquad y_1(t) = -t, \qquad y_2(t) = \min\{-t, -2t\}, \qquad t \in [-1, 1].$$

Wir untersuchen $\mathcal{E}(Y, \mathrm{cl}\, K)$, $\mathcal{E}(Y, K)$ und $\mathcal{E}_w(Y, K)$ bzgl.

$$K := \{y \in \mathcal{C}(T) :\ y(t) \geq 0 \text{ für } -1 \leq t \leq 0,\ y(t) > -t \text{ für } 0 < t \leq 1\}.$$

Es gilt $\mathrm{cl}\, K + \mathrm{int}\, \mathcal{C}(T)^+ \subseteq \mathrm{int}\, K$, wir wählen außerdem $k(t) = 1$, $t \in T$. Wir stellen fest:

a) $y_1, y_2 \notin y_0 - \mathrm{cl}\, K$, also $y_0 \in \mathcal{E}(Y, \mathrm{cl}\, K)$. In der Tat ist y_0 einzige Lösung des Problems (P_{K,k,y_0}).

b) $y_0, y_1 \notin y_2 - K$, aber $y_1 \in y_2 - \mathrm{cl}\, K$, also $y_2 \in \mathcal{E}(Y, K)$, $y_2 \notin \mathcal{E}(Y, \mathrm{cl}\, K)$. Sowohl y_2 als auch y_1 lösen das Problem (P_{K,k,y_2}).

c) $y_0, y_2 \notin y_1 - \mathrm{int}\, K$, aber $y_2 \in y_1 - K$, also $y_1 \in \mathcal{E}_w(Y, K)$, $y_1 \notin \mathcal{E}(Y, K)$. Sowohl y_1 als auch y_2 lösen das Problem (P_{K,k,y_1}).

Somit erhalten wir $\mathcal{E}(Y, \mathrm{cl}\, K) \subsetneq \mathcal{E}(Y, K) \subsetneq \mathcal{E}_w(Y, K)$.

Für eigentlich minimale Elemente im Sinne von Geoffrion kann folgende Charakterisierung bewiesen werden:

Satz 6.5. *Für jedes Element $\bar{y} \in \mathcal{E}_G(Y)$ existieren ein konvexer Kegel $C \subsetneq \mathcal{C}(T)$ mit $\mathrm{int}\, C \neq \emptyset$ und $\mathcal{C}(T)^+ \backslash \{0\} \subseteq \mathrm{int}\, C$ sowie ein $k \in \mathrm{int}\, \mathcal{C}(T)^+$, so dass $(0, \bar{y})$ eindeutige Lösung von $(P_{C,k,\bar{y}})$ ist.*

Beweis. Sei $\bar{y} \in \mathcal{E}_G(Y)$. Wegen Satz 3.3 existieren dann ein $\mu \in \mathrm{int}\, \mathcal{M}(T)^+$ und ein $m > 0$, so dass $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, C_{\mu,m})$. Wegen $\mathcal{C}(T)^+ \backslash \{0\} \subset C_{\mu,m}$ und Lemma 4.1 erfüllen $C = C_{\mu,m}$ und k die Voraussetzung (V1), außerdem ist $C_{\mu,m}$ abgeschlossen. Satz 6.3 liefert schließlich die zu beweisende Aussage. ■

Die Aussage von Satz 6.5 findet man bei Weidner für $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$ als Äquivalenz und mit „freiem“ Parameter a, vgl. [89], Satz 6.2.13. Da Weidner im Beweis explizit $a = \bar{y}$ wählt und wir die Aussage nur für $a = \bar{y}$ verifizieren können, haben wir uns für obige Form der Aussage entschieden. Der Beweis selbst stützt sich bei Weidner auf die Darstellung Geoffrion-eigentlich minimaler Elemente via Effizienz bzgl. konvexer Oberkegel von $\mathbb{R}^n_+$, vgl. [89], Satz 5.2.3, die wir bereits bei Satz 3.3 diskutiert haben. Die Äquivalenz gilt im Raum $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$ nicht, ebenso wie alle Folgeaussagen.

Die Sätze 6.3 und 6.4 geben bereits die Struktur wieder, die wir erwarten, enthalten allerdings noch das auf Minimalität zu prüfende Element $\bar{y}$. Mit dem nächsten Resultat lösen wir uns von $\bar{y}$ als Parameter.

Satz 6.6. *Sei $K \subsetneq \mathcal{C}(T)$ ein Kegel mit nichtleerem Inneren und $\mathrm{cl}\, K + \mathrm{int}\, \mathcal{C}(T)^+ \subseteq \mathrm{int}\, K$, $k \in \mathrm{int}\, \mathcal{C}(T)^+$, $Y \subsetneq \mathcal{C}(T)$ nichtleer, $a \in \mathcal{C}(T)^+$ beliebig und $\bar{y} \in Y$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, \mathcal{C}(T)^+) \quad &\Longleftarrow \quad (\bar{\tau}, \bar{y}) \text{ löst } (P_{K,k,a}), \\ \bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+) \quad &\Longleftarrow \quad (\bar{\tau}, \bar{y}) \text{ löst } (P_{K,k,a}) \text{ eindeutig.} \end{aligned}$$

Ist K darüber hinaus konvex, so gilt

$$\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y,K) \iff (\bar{\tau},\bar{y}) \text{ löst } (P_{K,k,a}),$$
$$\bar{y} \in \mathcal{E}(Y,K) \iff (\bar{\tau},\bar{y}) \text{ löst } (P_{K,k,a}) \text{ eindeutig.}$$

Beweis. $(\bar{\tau},\bar{y})$ löst das Problem $(P_{K,k,a})$ genau dann, wenn

$$\bar{y} \in a + \bar{\tau}k - \operatorname{cl} K,$$
$$\bar{\tau} \leq \min\{\tau \in \mathbb{R} : \ y \in a + \tau k - \operatorname{cl} K\} \quad \forall\, y \in Y.$$

Dies heißt wegen Satz 4.1

$$z^{K-a,k}(y) = z^{K,k}(y-a) \geq \bar{\tau} \geq z^{K,k}(\bar{y}-a) = z^{K-a,k}(\bar{y}) \quad \forall\, y \in Y.$$

Löst $(\bar{\tau},\bar{y})$ das Problem $(P_{K,k,a})$ eindeutig, so gilt diese Ungleichung strikt. Das Funktional $z^{K,k}$ (und damit auch $z^{K-a,k}$) ist gemäß Lemma 4.2 a) und Satz 4.1 wohldefiniert und stetig; außerdem ist es $\mathcal{C}(T)^+$-monoton und strikt $(\operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+)$-monoton, bei Konvexität von K sogar K-monoton und strikt $(\operatorname{int} K)$-monoton, vgl. auch Lemma A.4. Aus Lemma 4.4 folgt somit für jede Lösung $(\bar{\tau},\bar{y})$ von $(P_{K,k,a})$ $\bar{y} \in \operatorname{Eff}_w(Y,\mathcal{C}(T)^+)$ bzw. $\bar{y} \in \operatorname{Eff}_w(Y,K)$ und für jede eindeutige Lösung $(\bar{\tau},\bar{y})$ von $(P_{K,k,a})$ $\bar{y} \in \operatorname{Eff}(Y,\mathcal{C}(T)^+)$ bzw. $\bar{y} \in \operatorname{Eff}(Y,K)$. ∎

Bemerkung 6.4. Die Aussagen des Satzes 6.6 sind Spezialisierungen der Sätze 6.2.1 und 6.2.6 von Weidner, [89], bzw. eine Übertragung der Ergebnisse des Satzes 6.2.5 von Weidner, [89], in den Raum $\mathcal{C}(T)$.

Weidner formuliert die Effizienzkriterien des Satzes 6.6 als Äquivalenz:

$$\bar{y} \in \operatorname{Eff}_w(Y,K) \iff \exists\, \bar{\tau} \in \mathbb{R},\ \exists\, a \in \mathcal{C}(T) : \ (\bar{\tau},\bar{y}) \text{ löst } (P_{K,k,a}),$$

vgl. etwa [89], Satz 6.2.5. Für den Beweis der Aussage „$\Rightarrow$" verweist Weidner auf die Effizienzkriterien wie in Satz 6.4, lediglich für die Aussage „$\Leftarrow$" wird der Beweis tatsächlich ausgeführt. Weitere Untersuchungen haben gezeigt, dass sich in der Tat a priori kein $a \neq \bar{y}$ angeben läßt, für das $(P_{K,k,a})$ minimale bzw. schwach minimale Elemente liefert. Wir haben daher Satz 6.6 nur als hinreichendes Minimalitätskriterium formuliert.

Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass ohne Konvexität von K die Aussagen des zweiten Teils des Satzes 6.6 verloren gehen.

Beispiel 6.3. Wir untersuchen die Menge $Y = \operatorname{conv}\{y_1, y_2\} \subset \mathcal{C}([-2,2])$ mit

$$y_1(t) \ := \ \begin{cases} -3 + 5\,|t-1| & \text{für } t \geq 0 \\ 2 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$
$$y_0(t) \ := \ \begin{cases} 4 + 2\,|t-1| & \text{für } t \geq 0 \\ -7 + 13\,|t+1| & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

(vgl. Beispiel 4.1). D.h., wir betrachten die Menge $Y = \{y_\lambda = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_0 : \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$,

$$y_\lambda(t) = \begin{cases} 4 - 7\lambda + (3\lambda + 2)\,|t-1| & \text{für } t \geq 0 \\ -7 + 9\lambda + (13 - 13\lambda)\,|t+1| & \text{für } t < 0 \end{cases}.$$

Für $0 \leq \lambda < \mu \leq 1$ und $\tilde{y} = y_\lambda - y_\mu$ folgt

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} -7(\lambda-\mu) + 3(\lambda-\mu)\,|t-1| & \text{für } t \geq 0 \\ 9(\lambda-\mu) - 13(\lambda-\mu)\,|t+1| & \text{für } t < 0 \end{cases},$$

d. h. $y_\lambda(-1) < y_\mu(-1)$, $y_\lambda(1) > y_\mu(1)$ und $y_\lambda(t) \neq y_\mu(t)$ für alle $t \in [-2,2]$ und $0 \leq \lambda < \mu \leq 1$. Somit gilt $\mathcal{E}_w(Y, \mathcal{C}(T)^+) = \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+) = Y$. Weiter gilt für $\delta = 1$

$$\max_{-2\leq t\leq 2} \tilde{y}(t) + \delta \cdot \min_{-2\leq t\leq 2} \tilde{y}(t) = 9(\lambda - \mu) - 7\delta\,(\lambda - \mu) = 2(\lambda - \mu) < 0,$$

also $y_\lambda \in y_\mu - D^1$ für alle $0 \leq \lambda < \mu \leq 1$ mit D^δ als Kegel zur Geoffrion-eigentlichen Effizienz (vgl. etwa Kapitel 4.2.3). Wir erhalten $\mathcal{E}_w(Y, D^1) = \mathcal{E}(Y, D^1) = \{y_0\}$. Wir erinnern daran, dass D^1 i.a. nicht konvex und $D^1\backslash\{0\}$ offen ist.

Wir wählen $k \equiv 1$ und $a \equiv 0$. $\bar{y}$ löst $(P_{D^1,k,a})$ gemäß Lemma 6.1 genau dann, wenn $z^{D^1-a,k}(\bar{y}) \leq z^{D^1-a,k}(y)$ für alle $y \in Y$ gilt. Laut Formel (4.5) gilt

$$\begin{aligned} z^{D^1-a,k}(y_\lambda) = z^{D^1,k}(y_\lambda) &= \min_{s\in[-1,1]} \max_{t\in[-1,1]} \frac{y_\lambda(s) + y_\lambda(t)}{2} \\ &= \min_{s\in[-1,1]} \frac{y_\lambda(s) + 6 - 4\lambda}{2} \\ &= \frac{\min\{4 - 7\lambda, -7 + 9\lambda\} + 6 - 4\lambda}{2}, \end{aligned}$$

man erhält $z^{D^1-a,k}(y_0) = z^{D^1-a,k}(y_1) = -1/2 < z^{D^1-a,k}(y_\lambda)$ für alle $0 < \lambda < 1$. Sowohl y_0 als auch y_1 lösen also $(P_{D^1,k,a})$, aber $y_1 \notin \mathcal{E}_w(Y, D^1)$.

Schließlich geben wir eine Charakterisierung minimaler Elemente an, wenn eine untere Schranke für den zulässigen Bereich bekannt ist. Der nachfolgende Satz ist eine Spezialisierung von Satz 6.2.3 von Weidner, [89].

Satz 6.7. *Sei* $K \subsetneq \mathcal{C}(T)$ *ein konvexer Kegel mit* $\operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+ \subseteq \operatorname{int} K \neq \emptyset$, $Y \subsetneq \mathcal{C}(T)$ *nichtleer,* $a \in \mathcal{C}(T)$, $Y \subseteq a + \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ *und* $\bar{y} \in Y$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, K) &\iff (1, \bar{y}) \text{ löst } (P_{K,\bar{y}-a,a}), \\ \bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \operatorname{cl} K) &\iff (1, \bar{y}) \text{ löst } (P_{K,\bar{y}-a,a}) \text{ eindeutig.} \end{aligned}$$

Beweis. Wegen $Y \subseteq a + \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ gilt $\bar{y} - a \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$, also erfüllen K und $k := \bar{y} - a$ die Bedingung (V1b). Wir verfahren wie im Beweis zu Satz 6.3.

(⇒) Die Funktionale $z^{K,k}$ und $z^{K-a,k}$ sind gemäß Satz 4.1 wohldefiniert und stetig; wegen Voraussetzung (V1b) gilt $\mathcal{D}_{K,k,a} = \mathcal{D}_{K-a,k} = \mathcal{C}(T)$. Laut Satz 4.1 gilt: $\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, K) \Longrightarrow (Y - \bar{y}) \cap -\operatorname{int} K = \emptyset \Longrightarrow z^{K,\bar{y}-a}(y - \bar{y}) \geq 0$ für alle $y \in Y$. Da $K \subsetneq \mathcal{C}(T)$ ein konvexer Kegel ist, erhalten wir $z^{K,\bar{y}-a}(\bar{y} - \bar{y}) = z^{K,\bar{y}-a}(0) = 0$. Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} z^{K,\bar{y}-a}(y - \bar{y}) &= \min\{\tau \in \mathbb{R} :\ y - \bar{y} \in \tau(\bar{y} - a) - \operatorname{cl} K\} \\ &= \min\{\tau \in \mathbb{R} :\ y - \bar{y} \in (\tau - 1)(\bar{y} - a) + \bar{y} - a - \operatorname{cl} K - \bar{y} + a\} \\ &= -1 + \inf\{\tau \in \mathbb{R} :\ y - \bar{y} \in \tau(\bar{y} - a) - \operatorname{cl} K - \bar{y} + a\} \\ &= -1 + z^{K+\bar{y}-a,\bar{y}-a}(y - \bar{y}) \\ &= -1 + z^{K-a,\bar{y}-a}(y) \end{aligned}$$

(vgl. auch Satz 4.2). Somit folgt

$$z^{K-a,\bar{y}-a}(y) = 1 + z^{K,\bar{y}-a}(y - \bar{y}) \geq 1 + z^{K,\bar{y}-a}(\bar{y} - \bar{y}) = z^{K-a,\bar{y}-a}(\bar{y}) = 1$$

d. h. $\bar{y}$ ist Minimalstelle von $z^{K-a,\bar{y}-a}$ über Y mit Optimalwert $\bar{\tau} = 1$. Laut Lemma 6.1 ist $(\bar{\tau}, \bar{y})$ damit auch Lösung des Problems $(P_{K,\bar{y}-a,a})$.

Falls $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, K)$, so folgt aus Satz 4.1 die Ungleichung $z^{K,\bar{y}-a}(y - \bar{y}) > 0$ für alle $y \in Y \setminus \{\bar{y}\}$ und entsprechend dem eben aufgezeigten Muster schließlich, dass $(\bar{\tau}, \bar{y})$ einzige Lösung des Problems $(P_{K,\bar{y}-a,a})$ ist.

(⇐) $(1, \bar{y})$ löst das Problem $(P_{K,\bar{y}-a,a})$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} &\bar{y} \in a + (\bar{y} - a) - \operatorname{cl} K, \\ &1 \leq \min \{\tau \in \mathbb{R} : \; y \in a + \tau(\bar{y} - a) - \operatorname{cl} K\} \quad \forall \; y \in Y. \end{aligned}$$

Dies heißt wegen Satz 4.1 aber genau

$$z^{K-a,\bar{y}-a}(y) = z^{K,\bar{y}-a}(y - a) \geq 1 \geq z^{K,\bar{y}-a}(\bar{y} - a) = z^{K-a,\bar{y}-a}(\bar{y}) \quad \forall \; y \in Y.$$

Löst $(1, \bar{y})$ das Problem $(P_{K,\bar{y}-a,a})$ eindeutig, so gilt diese Ungleichung offenbar strikt. Wir erhalten analog dem Beweis von Satz 6.6 die benötigten Monotonie-Eigenschaften für das Funktional $z^{K,\bar{y}-a}$ (und damit $z^{K-a,\bar{y}-a}$), um aus Lemma 4.4 die gewünschten Aussagen zu folgern. ■

Die Sätze 6.3-6.7 geben nur jene Auswahl der möglichen Effizienzkriterien auf Basis des Problems $(P_{C,k,a})$ wieder, die wir für unsere Untersuchungen benötigen. Für eine größere Übersicht lese man etwa bei Weidner, [89], nach.

6.3 Stabilität der Lösungen

Wir bleiben im linearen topologischen Raum $\mathfrak{Y}$. Seien $C \subset \mathfrak{Y}$ eine Teilmenge und $a, k \in \mathfrak{Y}$ Vektoren. Sei $Y \subset \mathfrak{Y}$ eine nichtleere Menge. Wir assoziieren mit dem Problem $(P_{C,k,a})$ die mengenwertige Abbildung

$$\mathcal{T}(a, k) = \mathcal{T}_C(a, k) = \{\tau \in \mathbb{R} : \; a + \tau k \in Y + \operatorname{cl} C\}$$

und untersuchen deren Marginalfunktion $m : \; \mathcal{C}(T) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, gegeben durch

$$\begin{aligned} m(a, k) = m_C(a, k) \;\; &:= \;\; \inf \mathcal{T}(a, k) \\ &= \;\; \inf \{\tau \in \mathbb{R} : \; a + \tau k \in Y + \operatorname{cl} C\} \\ &= \;\; \inf \{\tau \in \mathbb{R} : \; a + \tau k \in y + \operatorname{cl} C, \; y \in Y\}. \end{aligned}$$

Wir setzen $m(a, k) = +\infty$, falls $\mathcal{T}(a, k) = \emptyset$. Mit $\operatorname{dom} m := \{(a, k) : \; -\infty < m(a, k) < +\infty\}$ bezeichnen wir den effektiven Definitionsbereich von m. Weiter definieren wir eine Funktion $g : \; \operatorname{dom} m \to \mathcal{C}(T)$ durch

$$g(a, k) = g_C(a, k) := m(a, k)k + a.$$

Aus Lemma 6.2 erhalten wir, dass $m(a, k)$ endlich ist, falls eine der Bedingungen

(V1a) $C \subsetneq \mathfrak{Y}$ ist eine Menge mit nichtleerem Inneren, für die ein Kegel $K \subset \mathfrak{Y}$ mit $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ und $\operatorname{cl} C + \operatorname{int} K \subseteq \operatorname{int} C$ existiert, und es gilt $k \in \operatorname{int} K$;

(V1b) $C = b + K \subsetneq \mathfrak{Y}$, wobei $b \in \mathfrak{Y}$ ein beliebiges Element, $K \cup \{0\}$ ein konvexer Kegel mit $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ und $k \in \operatorname{int} K$ ist;

erfüllt ist und $Y \subset \hat{a} + \operatorname{int} K$ für ein $\hat{a} \in \mathfrak{Y}$ und den Kegel K aus diesen Bedingungen gilt. Die Abgeschlossenheit der Menge $Y + \operatorname{cl} C$ impliziert $g(a, k) \in Y + \operatorname{cl} C$, in diesem Fall gilt $g(a, k) \in \mathcal{E}_w(Y, C)$.

Die Funktionswerte von g entsprechen genau den minimalen Elementen, die man per Skalarisierung mit den Paramentern a und k erhält, $m(a,k)$ ist der zugehörige Wert des Skalarisierungsfunktionals. Die Ergebnisse des vorigen Kapitels zeigen, dass umgekehrt auch zu jedem minimalen Element $\bar{y}$ ein Parameterpaar (a,k) gehört, so dass $\bar{y}$ per Skalarisierung mittels $z^{C-a,k}$ gewonnen werden kann. Dieser Zusammenhang begründet in $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$ eine Vielzahl interaktiver Methoden zur Bestimmung minimaler Elemente oder auch der gesamten Effizienzmenge. Für solche Verfahren ist es oft nützlich, dass die Funktion g bei kleiner Veränderung der Parameter auch nur eine kleine Veränderung der Funktionswerte aufweist. Wir untersuchen daher nun die Abbildungen m bzw. g auf Stetigkeit.

Satz 6.8. *Seien C und k derart, dass Bedingung (V1) erfüllt ist. Dann sind für jedes solche k bzw. für jedes $a \in \mathfrak{Y}$ die Funktionen $m(.,k)$ bzw. $m(a,.)$ halbstetig von oben. Ist darüber hinaus $Y + \operatorname{cl} C$ abgeschlossen, so sind diese Funktionen stetig.*

Beweis. Wir fixieren k gemäß den Voraussetzungen. Die Funktion $m(.,k)$ ist halbstetig von oben, falls die Mengen $\{a \in \mathfrak{Y} : \ m(a,k) \geq r\}$ für alle $r \in \mathbb{R}$ abgeschlossen, bzw. falls die Mengen $\{a \in \mathfrak{Y} : \ m(a,k) < r\}$ offen sind. Seien also $\bar{r} \in \mathbb{R}$ und $\bar{a} \in \mathfrak{Y}$ mit $m(\bar{a},k) < \bar{r}$ beliebig. Aus der Definition des Infimums folgt dann die Existenz eines $\tau < \bar{r}$ mit $\bar{a} + \tau k \in Y + \operatorname{cl} C$. Somit gilt

$$\bar{a} \in -\bar{r}k + (\bar{r} - \tau)k + Y + \operatorname{cl} C \subseteq -\bar{r}k + Y + \operatorname{int} C,$$

d. h. $U := -\bar{r}k + Y + \operatorname{int} C$ ist eine offene Umgebung von $\bar{a}$. Für jedes $a \in U$ existiert daher ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$a \in -\bar{r}k + \varepsilon k + Y + \operatorname{int} C \subseteq -(\bar{r} - \varepsilon)k + Y + \operatorname{int} C \subseteq -(\bar{r} - \varepsilon)k + Y + \operatorname{cl} C,$$

was $m(a,k) \leq \bar{r} - \varepsilon < \bar{r}$ impliziert.

Um die Halbstetigkeit von unten der Funktion $m(.,k)$ zu zeigen, wählen wir $\bar{r} \in \mathbb{R}$, $\bar{a} \in \mathfrak{Y}$ und verifizieren die Offenheit der Menge $\{a \in \mathfrak{Y} : \ m(\bar{a},k) > r\}$. $m(\bar{a},k) > \bar{r}$ impliziert in der Tat $\bar{a} \notin -\bar{r}k + Y + \operatorname{cl} C$. Die Abgeschlossenheit von $Y + \operatorname{cl} C$ liefert die Offenheit von $\mathfrak{Y} \backslash \{-\bar{r}k + Y + \operatorname{cl} C\}$ und damit die Offenheit von $\{a \in \mathfrak{Y} : \ m(\bar{a},k) > \bar{r}\}$.

Der Beweis der Halbstetigkeit der Funktion $m(a,.)$ für fixiertes $a \in \mathfrak{Y}$ läuft analog. ■

Es folgt sofort:

Satz 6.9. *Seien C und k derart, dass Bedingung (V1) erfüllt ist. Dann sind die Abbildungen $g(.,k)$ bzw. $g(a,.)$, $a \in \mathfrak{Y}$, halbstetig von oben. Ist darüber hinaus $Y + \operatorname{cl} C$ abgeschlossen, so sind diese Abbildungen stetig.*

Beweis. Die Abbildung g hängt linear von der Funktion m ab, die Stetigkeitseigenschaften übertragen sich daher. ■

In Satz 6.7 haben wir gezeigt, dass die Menge der minimalen Elemente durch eine weitere Parametervariation abgetastet wird: Sowohl k als auch a variieren, hängen aber linear voneinander ab. Auch hierfür erhalten wir entsprechende Stetigkeitsaussagen:

Satz 6.10. *Sei $y \in Y$ beliebig. Wir nehmen außerdem an, dass C und $k := y - a$ die Bedingung (V1) für alle $a \in A \subseteq \mathfrak{Y}$ erfüllen. Dann ist die Funktion $a \mapsto m(a, y-a)$ und die Abbildung $a \mapsto g(a, y-a)$ auf A von oben halbstetig. Ist darüber hinaus $Y + \operatorname{cl} C$ abgeschlossen, so sind diese Abbildungen auf A stetig.*

Beweis. Wir wählen $\bar{r} \in \mathbb{R}$, $\bar{y} \in Y$ und $\bar{a} \in \mathfrak{Y}$ derart, dass $m(\bar{a}, \bar{y} - \bar{a}) < \bar{r}$. Dann existiert ein $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau < \bar{r}$, mit $\bar{a} + \tau(\bar{y} - \bar{a}) \in Y + \operatorname{cl} C$. Wir wählen weiter ein $\lambda \in (0,1)$, so dass $\bar{\tau} := \tau + \lambda(\bar{r} - \tau) \neq 1$. Man erhält dann

$$\begin{aligned} \bar{a} &\in -\tau(\bar{y} - \bar{a}) + Y + \operatorname{cl} C \\ &\subseteq -\bar{\tau}(\bar{y} - \bar{a}) + \lambda(\bar{r} - \bar{\tau})(\bar{y} - \bar{a}) + Y + \operatorname{cl} C \\ &\subseteq -\bar{\tau}(\bar{y} - \bar{a}) + Y + \operatorname{int} C \end{aligned}$$

d. h. $U := (1 - \bar{\tau})^{-1}(-\bar{\tau}\bar{y} + Y + \operatorname{int} C) \cap (Y - \operatorname{int} C)$ ist eine offene Umgebung von $\bar{a}$. Für jedes $a \in U$ gilt somit

$$a \in -\bar{\tau}(\bar{y} - \bar{a}) + Y + \operatorname{int} C \subseteq -\bar{\tau}(\bar{y} - \bar{a}) + Y + \operatorname{cl} C,$$

was $m(a, \bar{y} - a) \leq \bar{\tau} < \bar{r}$ impliziert.

Um die Halbstetigkeit von unten zu zeigen, wählen wir $\bar{r} \in \mathbb{R}$, $\bar{a} \in \mathfrak{Y}$ sowie $\bar{y} \in Y$ und verifizieren die Offenheit von $\{a \in Y - \operatorname{cl} C : \ m(a, \bar{y} - a) > \bar{r}\}$. Aus $m(\bar{a}, \bar{y} - \bar{a}) > \bar{r}$ folgt in der Tat $\bar{a} \notin -\bar{r}(\bar{y} - \bar{a}) + Y + \operatorname{cl} C$. Die Abgeschlossenheit von $Y + \operatorname{cl} C$ liefert die Offenheit von $\mathfrak{Y} \backslash (-\bar{r}k + Y + \operatorname{cl} C)$ und daher die Offenheit der Menge $\{a \in Y - \operatorname{cl} C : \ m(a, \bar{y} - a) > \bar{r}\}$.

Die Halbstetigkeit der Abbildung $a \mapsto g(a, y - a)$ folgt direkt aus der Definition von g. ■

Sterna-Karwat untersuchte ebenfalls die Marginalfunktion des Problems $(P_{C,k,a})$, vgl. etwa [79]. Sie bewies Halbstetigkeit der Abbildungen m und g in gleichzeitiger Abhängigkeit von a und k unter stärkeren Voraussetzungen. Die Sätze 6.3-6.7 zeigen jedoch, dass eine eingeschränkte Variation von a und k zur Charakterisierung der minimalen Elemente genügt. Unter diesen Einschränkungen können – wie oben geschehen – stärkere Stetigkeitsaussagen bewiesen werden. Einige Resultate hierzu findet man auch in der Monographie von Göpfert, Riahi, Tammer und Zalinescu, [25].

6.4 Spezielle skalare Ersatzaufgaben

Im letzten Teil dieses Kapitels beschäftigen wir uns mit speziellen skalaren Ersatzaufgaben. Ihnen gemeinsam ist, dass sie durch geeignete Darstellung der Parameter auf das Ersatzproblem $(P_{C,k,a})$ zurückgeführt werden können.

In den Sektionen 6.4.1-6.4.4 greifen wir einige von Weidner in [89], Kapitel 7 analysierte Ersatzprobleme auf und verallgemeinern diese von $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$ auf $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$. Nach unserem Wissen sind diese Verallgemeinerungen in der Literatur bisher nicht behandelt worden. Abschnitt 6.4.5 behandelt Effizienzkriterien für $\mathcal{C}(T)$-wertige Zielfunktionen, die von Zubiri bewiesen wurden. Auch Zubiri behandelte das Optimierungsproblem zunächst mit einer Skalarisierung, entwickelte erste Resultate dann aber auf eine andere Weise weiter.

Erwartungsgemäß lassen sich keineswegs für alle bekannten endlich-dimensionalen Ersatzprobleme unendlich-dimensionale Entsprechungen finden: Bei der Hyperbeleffizienz etwa fließt in die Nebenbedingungen der Ersatzaufgabe ein Produkt über alle Komponenten von gewissen Vektoren im Bildraum $\mathbb{R}^n$ ein, für welches uns kein sinnvolles Äquivalent in $\mathcal{C}(T)$ bekannt ist. Bei bestimmten Erweiterungen der Tschebyscheff-Norm oder auch der Ersatzaufgabe von Dubov werden bei der gewichteten Summation über die Komponenten gewisse Komponenten ausgespart bzw. mit anderen Gewichten versehen, auch hier fanden wir keine sinnvolle Entsprechung.

6.4.1 Die gewichtete Tschebyscheff-Norm

Wir betrachten das Problem

$$\min_{y\in Y}\ \max_{t\in T}\ w(t)\,(y(t)-a(t)) \tag{6.2}$$

mit $w \in \operatorname{int}\mathcal{C}(T)^+$ und $a \in \mathcal{C}(T)$. Bezeichne L_Y die Menge der Optimallösungen von (6.2), d. h. die Menge derjenigen $\bar{y} \in \mathcal{C}(T)$, die (6.2) für eine Parameterkombination (w, a) lösen.

Das Problem (6.2) entspricht wegen Formel (4.3) dem Problem $(P_{\mathcal{C}(T)^+,k,a})$ mit $k(t) := 1/w(t)$, $t \in T$; offenbar gilt $k \in \operatorname{int}\mathcal{C}(T)^+$. Damit erhalten wir:

Satz 6.11. *Sei $Y \in \mathcal{C}(T)$ nichtleer.*

(i) Ist die Zielfunktion $\max_{t\in T} w(t)\,(y(t)-a(t))$ des Problems (6.2) über Y nicht nach unten beschränkt, so gilt $\mathcal{E}_w(Y, \mathcal{C}(T)^+) = \emptyset$.

(ii) Ist $Y + \mathcal{C}(T)^+$ abgeschlossen und $Y \subseteq \hat{a} + \operatorname{int}\mathcal{C}(T)^+$ mit einer Funktion $\hat{a} \in \mathcal{C}(T)$, so gilt $L_Y \cap \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+) \neq \emptyset$.

(iii) Für jede Lösung $\bar{y}$ von (6.2) gilt $\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, \mathcal{C}(T)^+)$. Für jede eindeutige Lösung $\bar{y}$ von (6.2) gilt $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$.

(iv) Für beliebiges $w \in \operatorname{int}\mathcal{C}(T)^+$ gilt:

$$\begin{aligned}\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, \mathcal{C}(T)^+) &\iff (0,\bar{y}) \text{ löst (6.2) mit } a = \bar{y},\\ \bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+) &\iff (0,\bar{y}) \text{ löst (6.2) mit } a = \bar{y} \text{ eindeutig.}\end{aligned}$$

(v) Ist $Y \subseteq a + \operatorname{int}\mathcal{C}(T)^+$, so gilt:

$$\begin{aligned}\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, \mathcal{C}(T)^+) &\iff (1,\bar{y}) \text{ löst (6.2) mit } w(t) = 1/(\bar{y}(t)-a(t)),\\ \bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+) &\iff (1,\bar{y}) \text{ löst (6.2) mit } w(t) = 1/(\bar{y}(t)-a(t)) \text{ eindeutig.}\end{aligned}$$

Beweis. Offenbar erfüllen $C = \mathcal{C}(T)^+$ und k mit $k(t) = 1/w(t)$ die Voraussetzung (V1a). Die Aussage (i) des Satzes folgt mit $z^{C-a,k}(y) = z^{C,k}(y-a)$ und Formel (4.3) aus Lemma 6.1. Die Sätze 6.2 und 6.6 mit $K = \mathcal{C}(T)^+$ liefern (ii). Teil (iii) entspricht der Aussage von Satz 6.6, Teil (iv) der Aussage von Satz 6.4, und Teil (v) haben wir bereits bei Satz 6.7 bewiesen. ∎

Satz 6.11 verallgemeinert Satz 7.7.1 in der Habilitationsschrift von Weidner, [89], und damit auch Folgerung 3.1 von Jahn, [43], auf den unendlich-dimensionalen Fall.

Für $w \equiv 1$ spezialisiert Satz 6.11 Resultate von Helbig, vgl. etwa [29], auf den Fall $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$. Helbig selbst untersuchte Ersatzaufgaben für Vektoroptimierungsprobleme in beliebigen lokalkonvexen, reellen, halbgeordneten Vektorräumen.

Bemerkung 6.5. Für $Y \subseteq a + \operatorname{int}\mathcal{C}(T)^+$ gilt

$$\|y-a\|_{\mathcal{C}(T)} = \max_{t\in T} |y(t)-a(t)| = \max_{t\in T} (y(t)-a(t)),$$

also stimmen die Lösungen von

$$\min_{y\in Y} \|y-a\|_{\mathcal{C}(T)}$$

mit denen des Problems (6.2) mit $w \equiv 1$ überein. Satz 6.11 ist somit eine unendlichdimensionale Verallgemeinerung der klassischen Skalarisierung mehrkriterieller Optimierungsprobleme in $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$ mittels der Tschebyscheff-Norm bzw. gewichteten Tschebyscheff-Norm. Für die entsprechenden Aussagen in $\mathbb{R}^n$ vgl. man etwa Weidner, [89], Satz 7.7.1.

In diesen Kontext müssen auch die Ergebnisse von Zubiri, [95], eingeordnet werden, der für $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$ das Ersatzproblem

$$\min_{y \in Y} \max_{t \in T} w(t)|y(t) - a(t)|$$

mit $w \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$, $Y \subset a + \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ betrachtet. Die Arbeiten von Zubiri werden in Kapitel 6.4.5 diskutiert.

Es existiert ein reicher Fundus numerischer und/oder interaktiver Verfahren zur Bestimmung minimaler Elemente von Mengen $Y \subset \mathbb{R}^n$, die auf der Skalarisierung mittels gewichteter Tschebyscheff-Normen basieren. Weidner, [89], etwa diskutiert in Kapitel 7.7 eine Reihe der bis ca. 1990 bekannten Ansätze und Verfahren diesen Typs. Eine Erweiterung dieser Verfahren auf den unendlichdimensionalen Fall sind bisher kaum untersucht worden, würden allerdings den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen.

6.4.2 Wichtungsfaktoren

Wir betrachten das Problem

$$\min_{y \in Y} \max_{1 \le i \le n} \left(\int_T y \, \mathrm{d}\mu_i - v_i \right) \tag{6.3}$$

mit Radon-Maßen $\mu_i \in \mathcal{M}(T)^+$, $M := \{\mu_1, ..., \mu_n\}$ derart, dass die Gleichungssysteme

$$\int_T k \, \mathrm{d}\mu_1 = 1, \ ..., \ \int_T k \, \mathrm{d}\mu_n = 1$$

Lösungen $k \in \mathcal{C}(T)$ besitzen, und $v_i \in \mathbb{R}$.

Lemma 6.3. *Das Problem (6.3) entspricht* $(P_{D_M,k,a})$ *mit*

$$D_M = D_{\mu_1,...,\mu_n} := \left\{ y \in \mathcal{C}(T) : \int_T y \, \mathrm{d}\mu_1 \ge 0, \ ..., \ \int_T y \, \mathrm{d}\mu_n \ge 0 \right\}$$

und k*,* a *als Lösungen der Integralgleichungen*

$$\int_T k \, \mathrm{d}\mu_i = 1 \quad \forall\, i = 1, ..., n; \qquad \int_T a \, \mathrm{d}\mu_i = v_i \quad \forall\, i = 1, ..., n.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} y \in a + \tau k - D_M \quad &\Longleftrightarrow \quad \int_T (-y + a + \tau k) \, \mathrm{d}\mu_i \ge 0 \quad \forall\, i = 1, ..., n \\ &\Longleftrightarrow \quad \int_T y \, \mathrm{d}\mu_i - \int_T a \, \mathrm{d}\mu_i \le \tau \int_T k \, \mathrm{d}\mu_i \quad \forall\, i = 1, ..., n \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{\int_T y \, \mathrm{d}\mu_i - \int_T a \, \mathrm{d}\mu_i}{\int_T k \, \mathrm{d}\mu_i} \le \tau \quad \forall\, i = 1, ..., n \end{aligned}$$

und damit die behauptete Beziehung zwischen Problem (6.3) und $(P_{D_M,k,a})$. ■

Die Bezeichnung des Kegels mit D_M wurde bewusst gewählt, offenbar gilt

$$D_M = D_{\mu_1,\dots,\mu_n} = \bigcap_{i=1,\dots,n} D_{\mu_i},$$

wobei D_{μ_i} den Kegel aus der Charakterisierung der eigentlichen Effizienz in Sinne der linearen Skalarisierung (vgl. Definition 3.5 ff) bezeichnet. Daraus folgt direkt:

Lemma 6.4. *D_M ist ein abgeschlossener, konvexer Kegel, und es gilt*

$$\operatorname{int} D_M = \left\{ y \in \mathcal{C}(T) : \int_T y \,\mathrm{d}\mu_1 > 0,\ \dots,\ \int_T y \,\mathrm{d}\mu_n > 0 \right\}.$$

Weiter gilt $\mathcal{C}(T)^+ \subset D_M \subseteq D_{\mu_i}\ \forall\, i = 1, \dots, n$, $D_M + \mathcal{C}(T)^+ \subseteq D_M$, sowie

$$D_M + \mathcal{C}(T)^+ \backslash \{0\} \subseteq \operatorname{int} D_M \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_i \in \operatorname{int} \mathcal{M}(T)^+ \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Wir erhalten:

Satz 6.12. *Sei $Y \subset \mathcal{C}(T)$ nichtleer, $\mu_i \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$ für $i = 1, \dots, n$.*

(i) Für jede Lösung $\bar{y}$ von (6.3) gilt $\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, D_M)$ und $\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, \mathcal{C}(T)^+)$.

(ii) Für jede eindeutige Lösung $\bar{y}$ von (6.3) gilt $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, D_M)$ und $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$.

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) folgen aus Lemma 6.4 und Satz 6.6. ■

Satz 6.12 verallgemeinert Satz 7.2.1 in Weidner, [89], auf den Fall $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$.

Bemerkung 6.6. Mit $n = 1$, $\mu = \mu_1 \in \mathcal{M}(T)^+$, $v_1 = 0$ umfasst Problem 6.3 den Sonderfall

$$\min_{y \in Y} \int_T y \,\mathrm{d}\mu. \tag{6.4}$$

Für $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$ liefert (6.4) die eigentlich minimalen Elemente im Sinne der linearen Skalarisierung, vgl. Definition 3.5.

Einen weiteren Spezielfall erhalten wir mit $v_i := \int_T \bar{y} \,\mathrm{d}\mu_i$. Das Problem (6.3) hat dann die Form

$$\min_{y \in Y} \max_{1 \le i \le n} \int_T (y - \bar{y}) \,\mathrm{d}\mu_i \tag{6.5}$$

mit $\bar{y} \in \mathcal{C}(T)$, $\mu_i \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$ für alle $i = 1, \dots, n$. Es gilt:

Satz 6.13. *Sei $Y \subset \mathcal{C}(T)$ nichtleer, $\mu_i \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, D_M) &\iff (0, \bar{y}) \text{ löst Problem } (6.5), \\ \bar{y} \in \mathcal{E}(Y, D_M) &\iff (0, \bar{y}) \text{ löst Problem } (6.5) \text{ eindeutig.} \end{aligned}$$

Beweis. Folgt direkt aus Satz 6.4.

Schließlich betrachten wir einen dritten Spezialfall: $v_i := \int_T a \,\mathrm{d}\mu_i$ mit $Y \subset a + \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$. Das Problem (6.3) hat dann die Form

$$\min_{y \in Y} \max_{1 \le i \le n} \int_T (y - a) \,\mathrm{d}\mu_i \tag{6.6}$$

mit $\mu_i \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$ für alle $i = 1, \dots, n$. Es gilt:

Satz 6.14. *Sei $Y \subset \mathcal{C}(T)$ nichtleer, $Y \subset a + \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ und $\mu_i \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$ für $i = 1, ..., n$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, D_M) &\iff (1, \bar{y}) \text{ löst Problem } (6.6), \\ \bar{y} \in \mathcal{E}(Y, D_M) &\iff (1, \bar{y}) \text{ löst Problem } (6.6) \text{ eindeutig.} \end{aligned}$$

Beweis. Folgt direkt aus Satz 6.7.

Die Aussage des Satzes 6.14 lässt sich wie folgt weiterentwickeln:

$$\begin{aligned} \bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, D_M) &\iff (1, \bar{y}) \text{ löst Problem } (6.6), \\ &\iff \max_{1 \le i \le n} \int_T (y - a)\, \mathrm{d}\mu_i \ge \max_{1 \le i \le n} \int_T (\bar{y} - a)\, \mathrm{d}\mu_i \quad \forall\, y \in Y \\ &\implies \forall\, y \in Y\ \exists\, \bar{i},\ 1 \le \bar{i} \le n : \int_T (y - a)\, \mathrm{d}\mu_{\bar{i}} \ge \max_{1 \le i \le n} \int_T (\bar{y} - a)\, \mathrm{d}\mu_i \\ &\implies \forall\, y \in Y\ \exists\, \bar{i},\ 1 \le \bar{i} \le n : \int_T (y - a)\, \mathrm{d}\mu_{\bar{i}} \ge \int_T (\bar{y} - a)\, \mathrm{d}\mu_{\bar{i}} \\ &\implies \forall\, y \in Y\ \exists\, \bar{i},\ 1 \le \bar{i} \le n : \frac{\int_T (y - a)\, \mathrm{d}\mu_{\bar{i}}}{\int_T (\bar{y} - a)\, \mathrm{d}\mu_{\bar{i}}} \ge 1. \end{aligned}$$

Folgerung 6.2. $\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, D_M)$ impliziert, dass das System

$$\frac{\int_T (y - a)\, \mathrm{d}\mu_i}{\int_T (\bar{y} - a)\, \mathrm{d}\mu_i} < 1 \quad \forall\, i = 1, ..., n$$

keine Lösung in Y besitzt.

Effizienzkriterien dieser Art findet man bei Kaliszewski, vgl. etwa Theorem 3.7 in [49]. Kaliszewski beweist dieses Resultat allerdings ausschließlich für den Fall polyhedraler Kegel in endlichdimensionalen Räumen. Auch der Kegel D_M kann als polyhedraler Kegel aufgefasst werden, denn jede seiner Integralungleichungen $\int_T y\, \mathrm{d}\mu_i \ge 0$ charakterisiert einen Halbraum in $\mathcal{C}(T)$, der Durchschnitt der durch $\mu_1, ..., \mu_n$ bestimmten Halbräume bildet D_M.

Bemerkung 6.7. Problem (6.3) bildet nur ein mögliches Analogon des endlichdimensionalen Problems

$$\min_{y \in Y} \max_{i=1,\dots,m} ((w^i)^T y - v_i)$$

mit $w^i \in \mathbb{R}^n_+$, $v = (v_1, ..., v_m) \in \mathbb{R}^m$. Da der endlichdimensionale Raum $\mathbb{R}^n$ mit seinem Dualraum übereinstimmt, können die Wichtungsfaktoren w^i zu Funktionen $w^i \in \mathcal{C}(T)^+$ (bei gleichem Integrationsmaß μ) oder zu Maßen $\mu_i \in \mathcal{M}(T)^+$ (ohne zusätzliche Verwendung von Gewichtsfunktionen unter dem Integral) verallgemeinert werden. Man beachte, dass zwar jeder Menge $\{w^1, ..., w^m\} \in \mathcal{C}(T)^+$ und jedem Maß $\mu \in \mathcal{M}(T)^+$ eine Menge $\{\mu_1, ..., \mu_m\} \in \mathcal{M}(T)^+$ mit $\int_T w^i y\, \mathrm{d}\mu = \int_T y\, \mathrm{d}\mu_i$ für alle $y \in \mathcal{C}(T)$ und $i = 1, ..., m$ zugeordnet werden kann, die Umkehrung allerdings keinesfalls gilt. Hierbei bezeichne $w^i y$ die Funktion $(w^i y)(t) = w^i(t) y(t)$.

6.4.3 Eine Ersatzaufgabe nach Helbig

Wir betrachten das Problem

$$\min_{y \in Y} \max_{t \in T} \left(y(t) + \frac{1}{m} \int_T y\, \mathrm{d}\mu - v(t) \right) \tag{6.7}$$

mit $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$, $m > 0$ und $v \in \mathcal{C}(T)$.

Ersatzprobleme diesen Typs wurden von Helbig, vgl. etwa [30], untersucht.

Lemma 6.5. *Das Problem (6.7) entspricht* $(P_{C_{\mu,m},k,a})$ *mit*

$$C_{\mu,m} := \left\{ y \in \mathcal{C}(T) : \; y(t) + \frac{1}{m} \int_T y \, \mathrm{d}\mu \geq 0 \;\; \forall \, t \in T \right\}$$

und k, a *als Lösungen der Gleichungen*

$$k(t) + \frac{1}{m} \int_T k \, \mathrm{d}\mu = 1, \qquad a(t) + \frac{1}{m} \int_T a \, \mathrm{d}\mu = v(t), \qquad t \in T.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} y \in a + \tau k - C_{\mu,m} \quad &\iff \quad a(t) + \tau k(t) - y(t) + \frac{1}{m} \int_T (a + \tau k - y) \, \mathrm{d}\mu \geq 0 \;\; \forall \, t \in T \\ &\iff \quad y(t) - a(t) + \frac{1}{m} \int_T (y - a) \, \mathrm{d}\mu \leq \tau \left(k(t) + \frac{1}{m} \int_T k \, \mathrm{d}\mu \right) \quad \forall \, t \in T \\ &\iff \quad \frac{y(t) + m^{-1} \int_T y \, \mathrm{d}\mu - a(t) - m^{-1} \int_T a \, \mathrm{d}\mu}{k(t) + m^{-1} \int_T k \, \mathrm{d}\mu} \leq \tau \;\; \forall \, t \in T \end{aligned}$$

und damit die behauptete Beziehung zwischen Problem (6.7) und Problem $(P_{C_{\mu,m},k,a})$. ■

In Kapitel 3.2 haben wir bereits mit dem Kegel $C_{\mu,m}$ Geoffrion-eigentlich minimale Elemente charakterisiert. Die Ergebnisse von dort greifen wir nun auf und erhalten:

Satz 6.15. *Sei* $Y \subset \mathcal{C}(T)$ *nichtleer.*

(i) Für jede Lösung $\bar{y}$ *von (6.7) gilt* $\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, \mathcal{C}(T)^+)$. *Für jede eindeutige Lösung* $\bar{y}$ *von (6.7) gilt* $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$.

(ii) Für jedes $\bar{y} \in \mathcal{E}_G(Y)$ *und jedes Maß* $\mu \in \operatorname{qint} \mathcal{M}(T)^+$ *existiert ein* $\bar{m} > 0$ *derart, dass* $\bar{y}$ *Optimallösung von Problem (6.7) mit* $v(t) = \bar{y}(t) + m^{-1} \int_T \bar{y} \, \mathrm{d}\mu$, $t \in T$, *bei beliebigem* $m > \bar{m}$ *ist.*

Beweis. Die Aussagen folgen aus den Sätzen 6.4, 6.6 und 3.3 sowie Lemma 3.5. ■

Bemerkung 6.8. Laut Weidner, [89], Satz 7.3.1 ist im Fall $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$ jede Lösung des Problems (6.7) Geoffrion-eigentliche minimal. Die Verallgemeinerung dieser Aussage auf $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$ scheitert erneut daran, dass die Charakterisierung $\mathcal{E}_G(Y) \subseteq \bigcup_{m>0} \mathcal{E}(Y, C_{\mu,m})$ lediglich als Inklusion, nicht aber als Gleichheit gilt, vgl. Abschnitt 3.2.

6.4.4 Eine Verallgemeinerung der Hurwitz-Regel

Wir betrachten das Problem

$$\min_{y \in Y} \left(h \cdot \max_{t \in T} y(t) + (1 - h) \cdot \min_{t \in T} y(t) \right) \tag{6.8}$$

mit $h \in [0, 1]$. Bezeichne L_Y die Menge der Optimallösungen von (6.8), d. h. all jene $y \in Y$, die das Problem (6.8) für ein $h \in [0, 1]$ lösen.

Weidner betrachtet in Kapitel 7.8 ihrer Habilitation, [89], ein solches Ersatzproblem (für $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$) und bezeichnet dies unter Berufung auf Chankong und Haimes, [8], als Hurwitz-Regel. Hiernach geht das Ersatzproblem auf eine als Hurwitz-Regel bekannte Strategie bei Entscheidungen zwischen unsicheren Alternativen zurück. Diese Strategie lässt dem Entscheidungsträger eine Gewichtung h zwischen einer optimistischen Strategie ($h = 1$) und pessimistischen Strategie ($h = 0$), welche er seinem eigenen Empfinden anpassen kann.

Für $h = 1$ enspricht Problem (6.8) der Aufgabe (6.2) mit $w \equiv 1$ und $a \equiv 0$.

Lemma 6.6. *Das Problem (6.8) entspricht* $(P_{C_h,k,a})$ *mit*

$$C_h := \left\{ y \in \mathcal{C}(T) : \ h \cdot \min_{t \in T} y(t) + (1-h) \cdot \max_{t \in T} y(t) \geq 0 \right\}$$

und $k(t) = 1$, $a(t) = 0$, $t \in T$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} y \in a + \tau k - C_h \quad &\iff \quad h \min_{t \in T} (-y(t)) + (1-h) \cdot \max_{t \in T} (-y(t)) + \tau \geq 0 \\ &\iff \quad h \cdot \max_{t \in T} y(t) + (1-h) \cdot \min_{t \in T} y(t) \leq \tau \end{aligned}$$

und damit die behauptete Beziehung zwischen Problem (6.8) und $(P_{C_h,k,a})$. ■

Offenbar ist C_h ein abgeschlossener Kegel. Für $h = 1$ erhalten wir $C_h = \mathcal{C}(T)^+$, für $0 < h < 1$ ergibt sich

$$C_h = \left\{ y \in \mathcal{C}(T) : \ \max_{t \in T} y(t) + \frac{h}{1-h} \cdot \min_{t \in T} y(t) \geq 0 \right\} = \operatorname{cl} D^\delta$$

mit $\delta = h/(1-h)$ und D^δ dem der Geoffrion-eigentlichen Effizienz zugeordneten Kegel (vgl. Definition 3.6 ff). Daher ist C_h im Allgemeinen nicht konvex, des Weiteren gilt $\operatorname{int} C_h = D^\delta$ mit $\delta = h/(1-h)$.

Wir erinnern daran, dass $\bar{y}$ genau dann eigentlich minimal im Sinne von Geoffrion ist (d. h. $\bar{y} \in \mathcal{E}_G(Y)$), wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, D^\delta)$ gilt. Entsprechend gilt $\bar{y} \in \mathcal{E}_G(Y)$ genau dann, wenn ein $h \in (0,1)$ existiert, so dass $\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, C_h)$ gilt.

Satz 6.16. *Sei* $0 < h < 1$ *und* $Y \in \mathcal{C}(T)$ *nichtleer.*

(i) Ist die Zielfunktion des Problems (6.8) über Y *nicht nach unten beschränkt, so gilt* $\mathcal{E}_G(Y) = \emptyset$.

(ii) Ist $Y + \mathcal{C}(T)^+$ *abgeschlossen und* $Y \subseteq \hat{a} + \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ *mit einer Funktion* $\hat{a} \in \mathcal{C}(T)$, *so gilt* $L_Y \cap \mathcal{E}_G(Y) \neq \emptyset$.

(iii) Für jede Lösung $\bar{y}$ *von (6.8) gilt* $\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, \mathcal{C}(T)^+)$. *Für jede eindeutige Lösung* $\bar{y}$ *von (6.8) gilt* $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$.

Beweis. Offenbar erfüllen $C = C_h$ und $k \equiv 1$ die Voraussetzung (V1a). Die Aussagen (i) und (ii) des Satzes folgen mit $z^{C-a,k}(y) = z^{C,k}(y-a)$ und Lemma 6.6 aus Lemma 6.1 und Satz 6.6. Teil (iii) entspricht exakt der Aussage von Satz 6.6. ■

Bemerkung 6.9. Weidner gibt in [89], Satz 7.8.1 ein Kriterium für $\bar{y} \in \mathcal{E}_G(Y)$ auf Basis des Ersatzproblems (6.8) an, welches allerdings auf $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^2$ und gewisse h beschränkt ist. Diese Aussage spiegelt die Voraussetzungen wider, unter denen C_h konvex ist. In der Tat benötigen alle Resultate aus Kapitel 6.2 der vorliegenden Arbeit entweder die Konvexität von C oder die Festlegung von a (was hier ebenfalls nicht möglich ist). Beispiel 6.3 behandelt ein Beispiel einer Lösung des Problems (6.8) mit $h = 1/2$.

6.4.5 Einige Bemerkungen zu Effizienzbedingungen von Zubiri

Zubiri präsentiert in [95] und [96] Kriterien für schwache Effizienz $\mathcal{C}(T)$-wertige Abbildungen. Er betrachtet hierzu das Ersatzproblem

$$\min_{y \in Y} \max_{t \in T} w(t)|y(t) - a(t)| \tag{6.9}$$

mit $w \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$, $Y \subset a + \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$.

Wie bereits in Bemerkung 6.5 dargelegt, gilt für $Y \subset a + \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ und $y \in Y$

$$w(t)|y(t) - a(t)| = w(t)(y(t) - a(t)),$$

also stimmt unter diesen Voraussetzungen das Problem (6.9) mit Problem (6.2) überein. Die Aussage von [95], Theorem 1, folgt daher direkt aus Satz 6.11 (v). Theorem 2 in [95] beinhaltet eine hinreichende Effizienzbedingung, die wir unter schwächeren Voraussetzungen als Zubiri in Satz 6.11 (iii) bewiesen haben.

In [96] entwickelt Zubiri seine Ergebnisse weiter:

Satz 6.17. *Sei $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}(T)$, $X \subset \mathfrak{X}$ eine nichtleere Menge, $\mathfrak{f}(X)$ sei $\mathcal{C}(T)$-konvex und erfülle $\mathfrak{f}(X) \subseteq a + \mathcal{C}(T)^+$ für ein $a \in \mathcal{C}(T)$. Sei $\bar{x} \in \operatorname{Eff}_w(X, \mathcal{C}(T)^+)$. Dann gibt es ein Radon-Maß μ und eine Funktion $w \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$, so dass*

$$\begin{aligned} \int_T \mathfrak{f}(\bar{x})\, \mathrm{d}\mu &= \min_{x \in X} \int_T \mathfrak{f}(x)\, \mathrm{d}\mu, && (6.10)\\ \int_T (a - \mathfrak{f}(\bar{x}))\, \mathrm{d}\mu &= \min_{t \in T} w(t)(a(t) - \mathfrak{f}(\bar{x})), && (6.11)\\ |\mu| &\leq \max_{t \in T} w(t) && (6.12) \end{aligned}$$

gilt, wobei $|\mu|$ die Totalvariation des Maßes μ angibt. Ist X kompakt, so sind diese Kriterien auch hinreichend für schwache Effizienz.

Für den Beweis der Notwendigkeit von (6.10)-(6.12) skalarisiert Zubiri das $\mathcal{C}(T)$-wertige Problem wieder mittels der Abbildung $\|.\|_w : \mathcal{C}(T) \to \mathbb{R}$,

$$\|y\|_w := \max_{t \in T} w(t)|y(t)|, \qquad y \in \mathcal{C}(T)$$

und wendet auf das so erhaltene skalare Problem die klassischen Optimalitätsbedingungen in Subdifferentialform an. Umgekehrt kann Zubiri die Bedingungen (6.10)-(6.12) direkt zur Optimaltitätsbedingung für das skalarisierte Problem zusammenfassen.

Gleichung (6.10) gleicht den Resultaten, die wir mit der linearen Skalarisierung erreicht haben, vgl. etwa Satz 4.11 mit $k \equiv 1$. Beim genauen Nachvollziehen der Beweise ergab sich allerdings ein wesentlicher Unterschied: Zubiri spricht zwar von regulären Borel-Maßen (was formal die Positivität der Maße bedeuten würde), führt im Beweis jedoch per Riesz'schem Darstellungssatz die verwendeten Maße als Radon-Maße ein (deshalb verwenden wir in unserer Darstellung seiner Resultate das Wort „Radon-Maß"). Auch aus den anderen beiden Bedingungen (6.11) und (6.12) konnten wir die Posititvität des Maßes nicht folgern. Umgekehrt implizieren unsere Ergebnisse, also Gleichung (6.10) zusammen mit der Positivität des Maßes, die Gleichung (6.11), und Ungleichung (6.12) kann durch eine geeignete Normierung erhalten werden. In dieser Hinsicht sind Zubiris Resultate als stärker als die entsprechenden Resultate in der vorliegenden Arbeit einzuschätzen. Allerdings dürften Zubiris Kriterien wegen des zusätzlichen Parameters w und des Systems aus zwei Gleichungen und einer Ungleichung, das erfüllt sein muss, numerisch schwerer umsetzbar sein als unsere Effizienzkriterien.

7. Anwendungsbeispiele

In diesem Kapitel widmen wir uns abschließend zwei verschiedenen Anwendungsbeispielen. Einerseits zeigen wir, wie Modellierungen realer Probleme auf Vektoroptimierungsaufgaben mit $\mathcal{C}(T)$-wertigen Abbildungen führen, andererseits sollen solche Probleme dann mit den Ergebnissen der vorangegangenen Kapitel untersucht werden.

7.1 Standortoptimierung

Wir haben in der Literatur keine Beispiele gefunden, bei denen die Modellierung von Standortproblemen auf ein $\mathcal{C}(T)$-wertiges Optimierungsproblem führt. Denkbar ist dennoch folgende Fragestellung:

Zu einem gegebenen Gebiet $T \subseteq \mathbb{R}^2$ (Stadtteil, Verwaltungsbezirk o. ä.) sei eine Verteilung w, $w(t) > 0$ für alle $t \in T$, gegeben, welche die durchschnittliche Aufenthaltsdauer von Einwohnern an einem bestimmten Ort $t \in T$ angibt. Wir gehen sinnvollerweise davon aus, dass w über T von oben beschränkt ist. Nun soll eine zentrale Versorgungseinrichtung oder etwa ein Rettungsstützpunkt errichtet werden, der für alle relevanten Personen gut (schnell) erreichbar sein soll. Durch äußere Gegebenheiten kann die Einrichtung außerdem nur an Orten im Gebiet $X \subset \mathbb{R}^2$ gebaut werden.

Für die Berechnung des Abstandes zweier Orte voneinander sind verschiedene Abstandsfunktionen vorstellbar. Praktische bzw. numerische Relevanz besitzen besonders:

a) die l_p-Norm, $\|x-t\|_p = (\sum_{i=1}^2 |x_i - t_i|^p)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$, mit dem Spezialfall $\|.\|_2$, der die Luftlinie zwischen zwei Punkten $x = (x_1, x_2)$ und $t = (t_1, t_2)$ angibt;

b) die Maximum- oder Manhattan-Norm, $\|x - t\|_{\max} = \max\{|x_1 - t_1|, |x_2 - t_2|\}$, die den maximalen Abstand entlang einer Richtung im Gelände charakterisiert.

Daneben können über die zu Grunde gelegte Norm ein vorhandenes Straßennetz oder auch Barrieren im Gelände (z. B. nicht überquerbare Straßenabschnitte) berücksichtigt werden. In solchen Fällen verlieren die Abstandsfunktionen dann möglicherweise ihre Konvexität.

Des Weiteren soll die Verteilung w der Einwohner berücksichtigt werden, so dass sich als Zielabbildung $\mathfrak{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{C}(T)$,

$$\mathfrak{f}(x)(t) := w(t)\,\|x - t\|$$

mit einer zunächst beliebigen Norm $\|.\|$ auf $\mathbb{R}^2$ ergibt. Wir betrachten nun das Vektoroptimierungsproblem

$$\mathfrak{f}(x) \to V - \min \qquad x \in X \subset \mathbb{R}^2,$$

möchten also die Effizienzmengen $\mathrm{Eff}\,(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$ bzw. $\mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$ bestimmen. Jeder Punkt in dieser Menge zeichnet sich dadurch aus, dass eine Annäherung der zu bauenden Einrichtung an einen Ort die Entfernung von einem anderen relevanten Ort vergrößert.

Als (ein) Kriterium für einen effizienten Standort erhalten wir:

Satz 7.1. *Es seien $T, X \subset \mathbb{R}^2$ nichtleere Mengen, T kompakt, $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ und*

$$\mathfrak{f}(x)(t) := w(t)\,\|x - t\|, \qquad x \in \mathbb{R}^2,$$

mit einer beliebigen Norm $\|.\|$ auf $\mathbb{R}^2$. Dann gilt $\bar{x} \in \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$ genau dann, wenn $\bar{x}$ das Problem

$$\max_{t\in T}\left(\frac{w(t)}{k(t)}\left(\|x - t\| - \|\bar{x} - t\|\right)\right) \to \min, \qquad x \in X, \tag{7.1}$$

löst. Gilt darüber hinaus für jede andere Lösung $\tilde{x}$ des Problems (7.1)

$$\max_{t\in T}\left(\frac{w(t)}{k(t)}\left(\|\tilde{x} - t\| - \|\bar{x} - t\|\right)\right) = 0,$$

so folgt sogar $\bar{x} \in \operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$.

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Satz 4.10. ∎

Die Menge der schwach effizienten Orte kann im Falle eines konvexen zulässigen Bereiches und der l_2-Norm nun näher spezifiziert werden:

Satz 7.2. *Sind $T, X \subset \mathbb{R}^2$ nichtleere Mengen, X konvex, T kompakt, $w : T \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $0 < \omega_1 \le w(t) \le \omega_2$ für alle $t \in T$, und ist $\mathfrak{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{C}(T)$ gegeben durch*

$$\mathfrak{f}(x)(t) := w(t)\,\|x - t\|_2 = w(t)\sqrt{|x_1 - t_1|^2 + |x_2 - t_2|^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^2,$$

so gilt $\bar{x} \in \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$ genau dann, wenn $\bar{x} \in X \cap (\operatorname{conv} T - N(X; \bar{x}))$.

Satz 7.2 schafft die Möglichkeit, die Effizienzmenge für das betrachtete Standortproblem relativ leicht geometrisch zu bestimmen: Mit den gegebenen Standorten $t \in T$ steht auch $\operatorname{conv} T$ fest, man braucht also nur noch diejenigen Elemente $x \in X$ zu bestimmen, die von $\operatorname{conv} T$ in Richtung des Negativen des Normalenkegels an X in $\bar{x}$ liegen.

Für den Beweis von Satz 7.2 benötigen wir folgendes Hilfsresultat:

Lemma 7.1. *Sei $y : T \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Funktion mit $0 < \|y(t)\| \le m$ für alle $t \in T$, ein $m > 0$ und eine beliebige Norm $\|.\|$ auf $\mathbb{R}^2$, sei $w \in \mathcal{C}(T)$ eine gegebene Gewichtsfunktion mit $0 < \omega_1 \le w(t) \le \omega_2$ für alle $t \in T$. Sei $K \in \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossener konvexer Kegel. Dann gilt*

$$0 \in \operatorname{conv}\left(\bigcup_{t\in T} w(t)\,\frac{y(t)}{\|y(t)\|}\right) + K \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \in \operatorname{conv}\left(\bigcup_{t\in T} y(t)\right) + K.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt per Negation und in zwei Schritten:

(i) Wir zeigen zunächst die Abgeschlossenheit von $\operatorname{conv} \bigcup_{t\in T} y(t) + K$: Wegen der Stetigkeit von y als Funktion ist $\bigcup_{t\in T} y(t)$ abgeschlossen und beschränkt, gemäß Theorem 17.2 bei Rockafellar, [71], damit auch $\operatorname{conv} \bigcup_{t\in T} y(t)$. Insbesondere ist die letztere Menge also kompakt. Als Summe einer kompakten und einer abgeschlossenen Menge ist schließlich $\operatorname{conv} \bigcup_{t\in T} y(t) + K$ abgeschlossen.

Analog kann man auch die Abgeschlossenheit der Menge $\operatorname{conv} \bigcup_{t\in T} w(t)\, y(t)/\|y(t)\| + K$ zeigen.

Die Konvexität von $\operatorname{conv} \bigcup_{t\in T} y(t) + K$ und $\operatorname{conv} \bigcup_{t\in T} w(t)\, y(t)/\|y(t)\| + K$ ist offensichtlich.

(ii) Wir nehmen nun an, es gilt $0 \notin \operatorname{conv} \bigcup_{t\in T} y(t) + K$. Gemäß dem starken Trennungssatz zur Separation eines Punktes von einer abgeschlossenen konvexen Menge (vgl. etwa Theorem 3.18 bei Jahn, [42]) existiert ein Funktional $u \in \mathbb{R}^2$ und ein Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass

$$u(z) > \alpha > u(0) = 0 \qquad \forall\, z \in \operatorname{cl}\operatorname{conv}\left(\bigcup_{t\in T} y(t)\right) + K.$$

Da dieses Ungleichungssystem insbesondere für alle $z = y(t) + k$ mit $t \in T$ und $k \in K$ gilt, folgt unter Beachtung der Schranken für $w(t)$ und $\|y(t)\|$ die Abschätzung

$$u(\frac{w(t)}{\|y(t)\|}\,(y(t)+k)) > w(t)\,\frac{\alpha}{\|y(t)\|} \geq \omega_1\,\frac{\alpha}{m} > 0 \qquad \forall\, t \in T,\ \forall\, k \in K.$$

Wegen $(w(t)/\|y(t)\|)\,k \in K$ impliziert dies

$$u(z) > \omega_1\,\frac{\alpha}{m} > 0 \qquad \forall\, z \in \bigcup_{t\in T} w(t)\,\frac{y(t)}{\|y(t)\|} + K,$$

und aufgrund der Linearität von u folgt

$$u(z) > \omega_1\,\frac{\alpha}{m} > 0 \qquad \forall\, z \in \operatorname{conv}\left(\bigcup_{t\in T} w(t)\,\frac{y(t)}{\|y(t)\|}\right) + K.$$

Wegen $u(0) = 0$ folgt $0 \notin \operatorname{conv}(\bigcup_{t\in T} w(t)y(t)/\|y(t)\|) + K$.

(iii) Gelte $0 \notin \operatorname{conv} \bigcup_{t\in T} w(t)\,y(t)/\|y(t)\| + K$. Wir wenden erneut den starken Trennungssatz (Theorem 3.18 bei Jahn, [42]) an und erhalten die Existenz eines Funktionals $u \in \mathbb{R}^2$ und eines Skalars $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass

$$u(z) < \alpha < u(0) = 0 \qquad \forall\, z \in \operatorname{conv}\left(\bigcup_{t\in T} w(t)\,\frac{y(t)}{\|y(t)\|}\right) + K.$$

Nun kann analog Beweisteil (ii) die Multiplikation mit $\|y(t)\|/w(t)$ und anschließend der Übergang zur konvexen Hülle vorgenommen werden. Man erhält die gewünschte Aussage $0 \notin \operatorname{conv}(\bigcup_{t\in T} y(t)) + K$. ■

Beweis von Satz 7.2. Ist $T \subset \mathbb{R}^2$ nichtleer, so gilt $\mathfrak{f}(x) \in \mathcal{C}(T)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Aus Satz 5.12 folgt

$$\bar{x} \in \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(\mathbb{R}), \mathcal{C}(T)^+) \iff 0 \in \operatorname{cl}\operatorname{conv} \bigcup_{t\in T} \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(t) + N(X;\bar{x}).$$

Für die Subdifferentiale $\partial\mathfrak{f}(x)(t)$ erhalten wir

$$\partial\mathfrak{f}(x)(t) = w(t)\cdot \left\{ \begin{array}{ll} \{(x-t)/\|x-t\|_2\} & \text{für } x \neq t \\ \{u_{|t} \in \mathbb{R}^2 :\ \|u_{|t}\|_2 \leq 1\} & \text{für } x = t \end{array} \right\}, \tag{7.2}$$

vgl. etwa Rockafellar, [71], Abschnitt 23. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

a) Gilt $\bar{x} \in X \cap T$, so gibt es ein $\bar{t} \in T$ mit $\bar{x} = \bar{t}$. Wir erhalten

$$0 \in \partial\mathfrak{f}(\bar{x})(\bar{t}) = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} :\ \|x\|_2 \leq w(t)\}.$$

Der Kegel $N(X;\bar{x})$ enthält ebenfalls die Null, also folgt $\bar{x} \subset \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+)$.

b) Für $\bar{x} \in X \cap (\mathbb{R}^2 \setminus T)$ gilt

$$\bar{x} \in \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) \iff 0 \in \operatorname{cl}\operatorname{conv}\left(\bigcup_{t\in T} w(t)\,\frac{\bar{x}-t}{\|\bar{x}-t\|_2}\right) + N(X;\bar{x}).$$

Wegen der Kompaktheit der Menge T und der Stetigkeit der Funktion w ist die Menge $\bigcup_{t\in T} w(t)(\bar{x}-t)/\|\bar{x}-t\|_2$ beschränkt und abgeschlossen. Daher genügt es, mit der konvexen Hülle statt der abgeschlossenen konvexen Hülle zu arbeiten, vgl. Theorem 17.2 bei Rockafellar, [71]. Die Abbildung $y(t) := \bar{x} - t$ und der Kegel $N(X;\bar{x})$ erfüllen des Weiteren die Voraussetzungen von Lemma 7.1, wir erhalten

$$\begin{aligned} \bar{x} \in \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) &\iff 0 \in \operatorname{conv}\bigcup_{t\in T}(\bar{x}-t) + N(X;\bar{x}) \\ &\iff \bar{x} \in \operatorname{conv} T - N(X;\bar{x}) \end{aligned}$$

Die Zusammenfassung von a) und b) liefert die Behauptung. ■

Folgerung 7.1 (unrestringiertes Problem). Im Falle $X = \mathbb{R}^2$ gilt unter den Voraussetzungen von Satz 7.2 die Gleichheit $\operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(\mathbb{R}^2), \mathcal{C}(T)^+) = \operatorname{conv} T$.

Bemerkung 7.1. Die Voraussetzung der Kompaktheit von T musste zur mathematischen Modellierung des Problems künstlich hinzu genommen werden, um es mit den hier dargestellten Methoden behandeln zu können. Betrachtet man reale Problemstellungen, so ist die Menge T der vorhandenen Stand- bzw. Aufenthaltsorte in der Regel von vornherein beschränkt (etwa durch den begrenzten geographischen Horizont), so dass diese Voraussetzung keine Einschränkung darstellt.

Satz 7.2 und Folgerung 7.1 verallgemeinern das bekannte Resultat von Kuhn aus den späten 60er Jahren für endliche Mengen T, vgl. [51], wonach die Menge der schwach effizienten Standorte genau mit der konvexen Hülle der vorhandenen Standorte übereinstimmt.

Man erhält ähnliche Ergebnisse auch aus der Arbeit von Carrizosa und Plastria, [7]. Dort wird ein Vektoroptimierungsproblem mit unendlich vielen Zielfunktionen betrachtet, welches sich als Vektoroptimierungsproblem in $\mathcal{C}(T)$ über $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$ darstellen lässt. Carrizosa und Plastria geben Effizienzkriterien in der von uns verwendeten Subdifferentialform an.

Bemerkung 7.2. Die Aussagen der Sätze 7.1 und 7.2 gelten auch für Teilmengen $T, X \subset \mathfrak{X}$ reflexiver Banach-Räume mit einer Norm, für deren Subdifferential die Gleichung (7.2) gilt. Dann muss allerdings in allen betreffenden Aussagen wieder mit der abgeschlossenen konvexen Hülle statt nur mit der konvexen Hülle gearbeitet werden.

7.2 Approximationstheorie

Die Aufgabenstellung in der Approximationtheorie lautet, eine gegebene Funktion $f \in \mathcal{C}(T)$ durch Funktionen einer bestimmten Funktionenklasse möglichst gut zu approximieren. Die zur Verfügung stehende Funktionenklasse ist üblicherweise durch eine Menge $G \subsetneq \mathcal{C}(T)$ charakterisiert. Meist wird G durch so genannte Ansatzfunktionen $g_i \in \mathcal{C}(T)$, $i = 1, ..., n$, erzeugt:

$$G = \{g \in \mathcal{C}(T) :\ g(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i(t),\ c_i \in \mathbb{R}\}.$$

In diesem Falle ist G ein linearer Unterraum von $\mathcal{C}(T)$, und viele Autoren sprechen dann von linearen Approximationsaufgaben. Die Approximation selbst kann bzgl. verschiedener Normen $\|.\|$, etwa der Maximumnorm oder der L_1-Norm durchgeführt werden. Das Optimierungsproblem lautet somit in der allgemeinen Fassung

$$\|g - f\| \to \min \qquad \text{bei } g \in G. \tag{7.3}$$

Solche Approximationsprobleme sind sowohl für verschiedene Normen als auch für verschiedene Funktionenklassen g eingehend untersucht worden; für Details sei auf einschlägige Monographien verwiesen, etwa Kosmol, [50], oder für eine Darstellung aktueller Ergebnisse, Wuytack und Wimp (Editoren), [93].

Darüber hinaus gibt es eine Reihe von Ergebnissen zu verschiedenen vektorwertigen Ansätzen in der Modellierung der Approximationsaufgabe. Exemplarisch seien hier die Arbeiten von Göpfert und Tammer, [26], zur Berücksichtigung verschiedener Normen, jene von Jahn, [39], und Jahn und Krabs, [46], zur simultanen Approximation der Funktion und ihrer Ableitungen sowie die Arbeit von Wanka, [84], über vektorielle Normen genannt. Still, [80], untersuchte die Approximation von Abbildungen f mit Werten in Banach-Räumen.

Wir wählen einen eigenen Zugang zur Approximation: Statt des maximalen Abstandes soll g die Funktion f punktweise möglichst gut nähern, d. h. wir untersuchen die Minimalmenge $\mathcal{E}(\mathfrak{f}(G), \mathcal{C}(T)^+)$ mit der Abbildung $\mathfrak{f} : \mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(T)$,

$$\mathfrak{f}(g)(t) := |g(t) - f(t)|.$$

Offenbar ist diese Abbildung $\mathcal{C}(T)^+$-konvex.

Die Vorzeichenfunktion sei nachfolgend als

$$\operatorname{sign}(\alpha) := \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha \geq 0 \\ -1 & \text{für } \alpha < 0 \end{cases}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

definiert.

Das folgende Resultat ist eine vektorwertige Version des aus der reellen Approximationstheorie bekannten Kolmogoroff-Kriteriums.

Satz 7.3. *Sei G konvex, $f \in \mathcal{C}(T)\backslash G$, T kompakt und $\mathfrak{f}(g)(t) = |f(t) - g(t)|$. Dann gilt*

(i) $\bar{g} \in \operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(G), \mathcal{C}(T)^+)$, falls es kein $g \in G$, $\mathfrak{f}(g) \neq \mathfrak{f}(\bar{g})$, gibt mit

$$(g(t) - \bar{g}(t))\,(f(t) - \bar{g}(t)) > 0 \qquad \forall\, t \in T.$$

(ii) $\bar{g} \in \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(G), \mathcal{C}(T)^+)$ genau dann, wenn es kein $g \in G$ gibt mit

$$(g(t) - \bar{g}(t))\,(f(t) - \bar{g}(t)) \geq 0 \qquad \forall\, t \in T.$$

Beweis. Wir nutzen die Charakterisierung effizienter Elemente aus den Sätzen 5.9 und 5.10,

$$\bar{g} \in \operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(G), \mathcal{C}(T)^+) \quad \Longleftarrow \quad \sup_{t \in T} \mathfrak{f}^\circ(\bar{g}; g - \bar{g})(t) > 0 \quad \forall\, g \in G,\ \mathfrak{f}(g) \neq \mathfrak{f}(\bar{g}), \tag{7.4}$$

$$\bar{g} \in \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(G), \mathcal{C}(T)^+) \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{t \in T} \mathfrak{f}^\circ(\bar{g}; g - \bar{g})(t) \geq 0 \quad \forall\, g \in G, \tag{7.5}$$

In unserem Fall erhalten wir als (rechtsseitige) Richtungsableitung

$$\mathfrak{f}^\circ(g;h)(t) = \begin{cases} h(t)\ \mathrm{sign}\,(g(t)-h(t)) & \text{bei } f(t) \neq g(t) \\ |h(t)| & \text{bei } f(t) = g(t) \end{cases}.$$

Somit gilt $\sup_{t\in T}\ \mathfrak{f}^\circ(\bar{g}; g-\bar{g})(t) > 0$ genau dann, wenn

$$\sup_{t\in T}\left((g(t)-\bar{g}(t))\,\mathrm{sign}\,(\bar{g}(t)-f(t))\right) = \max_{t\in T}\left((g(t)-\bar{g}(t))\,\mathrm{sign}\,(\bar{g}(t)-f(t))\right) > 0.$$

Da die Vorzeichenfunktion das gleiche Vorzeichen wie ihr Argument einbringt, ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\max_{t\in T}(g(t)-\bar{g}(t))\,(\bar{g}(t)-f(t)) > 0.$$

Die Aussage (7.4) bedeutet daher: Hinreichend für $\bar{g} \in \mathrm{Eff}\,(\mathfrak{f}(G), \mathcal{C}(T)^+)$ ist, dass die letzte Ungleichung für alle $g \in G$, $\mathfrak{f}(g) \neq \mathfrak{f}(\bar{g})$ gilt, bzw. dass kein $g \in G$, $\mathfrak{f}(g) \neq \mathfrak{f}(\bar{g})$ existiert, so dass

$$(g(t)-\bar{g}(t))\,(\bar{g}(t)-f(t)) \leq \max_{t\in T}(g(t)-\bar{g}(t))\,(\bar{g}(t)-f(t)) < 0 \quad \forall\ t \in T.$$

Die Multiplikation mit -1 liefert die gewünschte Aussage für die effizienten Elemente.

Gilt $\bar{g}(\bar{t}) = f(\bar{t})$ für ein $\bar{t} \in T$, so ist mit $h \equiv 0$ die Variationsungleichung in (7.5) trivialerweise erfüllt, und $\bar{g}$ ist ein Kandidat für die Menge der schwach effizienten Elemente. Gilt $\bar{g}(t) \neq f(t)$ für alle $t \in T$, so muss jedes schwach effiziente Element $\bar{g}$ die Variationsungleichung

$$\begin{aligned} \sup_{t\in T}\left((g(t)-\bar{g}(t))\,\mathrm{sign}\,(\bar{g}(t)-f(t))\right) &= \max_{t\in T}\left((g(t)-\bar{g}(t))\,\mathrm{sign}\,(\bar{g}(t)-f(t))\right) \\ &\geq 0 \qquad \forall\ g \in G \end{aligned}$$

erfüllen. Analog den obigen Betrachtungen erhält man nun auch die zu beweisende Aussage für die schwach effizienten Elemente. ■

Bemerkung 7.3. Ist G ein linearer Teilraum von $\mathcal{C}(T)$, so können die Effizienzkriterien in Satz 7.3 ersetzt werden durch

(i) $\bar{g} \in \mathrm{Eff}\,(\mathfrak{f}(G), \mathcal{C}(T)^+)$, falls es kein $g \in G$, $\mathfrak{f}(g) \neq \mathfrak{f}(\bar{g})$, gibt mit

$$g(t)\,(f(t)-\bar{g}(t)) > 0 \qquad \forall\ t \in T.$$

(ii) $\bar{g} \in \mathrm{Eff}_w(\mathfrak{f}(G), \mathcal{C}(T)^+)$ genau dann, wenn es kein $g \in G$ gibt mit

$$g(t)\,(f(t)-\bar{g}(t)) \geq 0 \qquad \forall\ t \in T.$$

Satz 7.3 ist ein $\mathcal{C}(T)$-wertiges Pendant zu einem wichtigen Charakterisierungssatz für Bestapproximationen, vgl. z. B. Kosmol, [50], Abschnitt 4.4.1. In der reellwertigen Approximationstheorie muss die Ungleichung in (7.4) jedoch nur für jene $t \in T_0$ gelten, die $|f(t)-\bar{g}(t)| = \|f-\bar{g}\|$ erfüllen. Damit liefert unser Kriterium mehr effiziente Elemente als Bestapproximationen existieren. Dies entspricht allerdings der Erwartung, da wir ja auch mehr Elemente als (multikriteriell) minimal identifizieren als dies im skalarwertigen Rahmen der Fall wäre.

8. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenenden Arbeit haben wir Mehrkriterielle Optimierungsprobleme mit $\mathcal{C}(T)$-wertigen (Ziel-)Abbildungen untersucht. Anwendungen solcher Problemstellungen findet man etwa in der Standortoptimierung oder Approximationstheorie. Zudem stellt der Raum $\mathcal{C}(T)$ der auf T stetigen reellwertigen Funktionen ein aus mathematischer Sicht interessanten Zwischenfall zwischen der endlichdimensionalen Mehrkriteriellen Optimierung und der abstrakten Vektoroptimierung dar und verdient daher eine eingehende Untersuchung.

Es zeigte sich zunächst schnell, dass dem Raum $\mathcal{C}(T)$, halbgeordnet durch den Kegel der punktweise positiven Funktionen, wichtige ordnungstheoretische Eigenschaften fehlen. Ein Teil dieses Mangels konnte allerdings durch punktweises Rechnen kompensiert werden. So stellen die klassischen Effizienzbegriffe lediglich eine Erweiterung der Pareto-Effizienz dar, und auch die Begriffe der eigentlichen Effizienz von Borwein, Benson, Henig und die eigentliche Effizienz auf Basis der linearen Skalarisierung lassen sich mühelos übertragen.

Einen wesentlichen Beitrag stellen die Ausführungen zur Geoffrion-eigentlichen Effizienz dar, vgl. Kapitel 3.2. Der Begriff der Geoffrion-eigentlichen Effizienz war bisher nur für endlichdimensionale Vektoroptimierungsprobleme eingehend untersucht worden, obgleich Abstraktionen auf andere Ordnungskegel bzw. für topologische Vektorräume existeren (vgl. Borwein und Benson). Weidner ordnete diesen Typ Effizienz in das Konzept eigentlicher Effizienz im Sinne von Henig ein, indem sie einen Kegel einführte, der die Geoffrion-eigentlich minimalen Elemente charakterisiert. Im Rahmen dieser Arbeit gaben wir eine Verallgemeinerung des Kegels auf den Fall $\mathfrak{Y} = \mathcal{C}(T)$ an, für welche die wesentlichen Eigenschaften aus $\mathbb{R}^n$ gültig bleiben. Darüber hinaus wurde mit (3.2) eine für Rechnungen praktikablere Darstellung gefunden.

Für die Skalarisierung unserer Optimierungsaufgaben verwendeten wir das Konzept von Tammer und Weidner. Dieses erfasst viele in der Literatur bekannte Skalarisierungsfunktionale und ermöglicht daher eine geschlossene Darstellung der sich ergebenden Skalarisierungsresultate. Das Konzept wurde für die von uns betrachteten Aufgaben adaptiert und anschließend mit verschiedenen Kegeln untersucht. Dabei war es uns ein besonderes Anliegen, den sich ergebenden Skalarisierungsfunktionalen eine praktikable numerische Form zu geben, was durch Umwandlung in Maximum- bzw. Minimax-Funktionen erreicht wurde.

Ebenfalls neu ist die Entwicklung von Effizienzbedingungen in Subdifferentialform auf Basis der Skalarisierung. Die Anwendung der klassischen (verallgemeinerten) Ableitungsbegriffe auf das ursprüngliche Problem bereitet erhebliche Schwierigkeiten, da wegen der fehlenden Ordnungsvollständigkeit von $\mathcal{C}(T)$ an Grenzwertübergänge harte Voraussetzungen geknüpft werden müssen. Unsere Ergebnisse basieren auf dem skalarisierten Problem und nutzen explizit die Struktur der Kegel bzw. des Raumes $\mathcal{C}(T)$. Dadurch gelang es, Effizienzbedingungen zu beweisen, die in ihrer Struktur entsprechenden Ergebnissen aus der endlichdimensionalen Vektoroptimierung gleichen und diese daher verallgemeinern.

Die untersuchte Skalarisierung führt zu einer ganzen Klasse von skalaren Ersatzproblemen, die wir anschließend näher untersuchten. Solche Ersatzprobleme sind in der Literatur bisher vor allem für die endlichdimensionale Vektoroptimierung bekannt. Es gelang, einige dieser Probleme auf den Fall der unendlichdimensionalen Vektoroptimierung zu verallgemeinern.

Im letzten Kapitel kehrten wir schließlich zu konkreten Anwendungsbeispielen zurück. Insbesondere in der Standortoptimierung zeigt sich erneut, dass sich die für die endlichdimensionalen Probleme seit langem bekannten Resultate auf den Fall des Entscheidungsraumes $\mathcal{C}(T)$ verallgemeinern lassen, d. h. ihre Struktur im Wesentlichen behalten.

Im Laufe unserer Untersuchungen mussten wir einige Fragen unbeantwortet lassen:

- Für Aussagen über die Dichtheit der Menge eigentlich minimaler Elemente in der Menge der minimalen Elemente konnten wir nur auf ein relativ allgemeines Resultat zurückgreifen. Bereits Daniilidis, [12], formulierte die Frage, ob für spezielle Funktionen- und Folgenräume genauere Aussagen gelten – eine bis heute offene Frage. Auch uns gelang es weder, ein spezielleres Dichtheitsresultat zu zeigen, noch, dessen Nichtexistenz durch ein Gegenbeispiel zu belegen. Das Hauptproblem besteht dabei bereits darin, überhaupt eine konvexe und schwach kompakte Menge Y zu finden, die nicht stark kompakt ist. Nur solche Mengen müssten auf Unterschiede zwischen $\operatorname{cl}\mathcal{E}_l(Y)$ und $\operatorname{cl}_{\sigma(\mathcal{C}(T),\mathcal{M}(T))}\mathcal{E}_l(Y)$ untersucht werden.

- Die in Abschnitt 5.2 betrachtete Abbildung $t \mapsto \partial\varphi_t(0)$ muss für die Anwendung der Resultate von Luu und Oettli als oberhalbstetig vorausgesetzt werden. Es ist nicht klar, ob diese Eigenschaft für die untersuchten Funktionenklassen bereits aus der gleichmäßigen (verallgemeinerten) Richtungsdifferenzierbarkeit folgen.

In Hinblick auf eine Weiterentwicklung und Komplettierung der Resultate scheint es erfolgversprechend, sich darüber hinaus folgenden Ideen bzw. Gebieten zu widmen:

- Es existiert eine Reihe verallgemeinerter Ableitungen, die ohne Grenzwertprozesse in den Richtungsdifferenzenquotienten definiert werden (etwa der Derivative Container von Warga und die sogenannten Fans von Ioffe). Bei Nutzung dieser Ableitungsbegriffe könnten die Probleme, welche sich in Kapitel 5 aus der fehlenden Ordnungsvollständigkeit von $(\mathcal{C}(T), \mathcal{C}(T)^+)$ ergaben, vermieden werden.

- Unter Verwendung der Struktur der betrachteten Mengen C können wir die Inklusion $y \in a + \tau k - \operatorname{cl} C$ als System unendlich vieler reeller Ungleichungen schreiben; die in Kapitel 6 betrachteten Ersatzprobleme besitzen daher semi-finite Struktur. Still, vgl. etwa [80], untersuchte verschiedene Ansätze, spezielle Typen solcher Probleme numerisch zu lösen. Es wäre daher lohnenswert zu prüfen, inwieweit diese Verfahren auch für die von uns betrachteten Mehrkriteriellen Optimierungsprobleme anwendbar sind.

- Völlig ohne Berücksichtigung blieben bisher Untersuchungen zur Dualität. Da es bereits zahlreiche Untersuchungen zur vektorwertigen Dualität in abstrakten Räumen gibt, sind auch hier analoge Ergebnisse zu erwarten.

Anhang A

Technische Hilfsresultate

A.1 Parametrisierung von Mengen; konvexe Kegel

Die Definitionen für Kegel und Konvexität wurden bereits in Kapitel 2 gegeben. Wir listen einige technische Resultate hierzu auf.

Lemma A.1 (vgl. Weidner, [89], Lemma 2.1.1). *Sei Y eine beliebige Teilmenge des topologischen linearen Raumes $\mathfrak{Y}$, seien $y_1 \in Y$ und $y_2 \notin \operatorname{cl} Y$ beliebig gegeben. Dann existiert ein $\bar{\lambda} \in (0, 1]$ mit $\bar{\lambda} y_1 + (1 - \bar{\lambda}) y_2 \in \operatorname{bd} Y$.*

Beweis. Wir setzen

$$\bar{\lambda} := \inf \{\lambda \in \mathbb{R} : \ \lambda \geq 0, \ \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 \in Y\}.$$

Wegen $y_1 \in Y$ gilt $\bar{\lambda} \leq 1$. Wäre $\bar{\lambda} = 0$, so gäbe es wegen $y_2 \notin Y$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\lambda > 0$, $\lambda \leq \varepsilon$, mit $\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 = y_2 + \lambda(y_1 - y_2) \in Y$. Es folgt $y_2 \in \operatorname{cl} Y$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit gilt $\bar{\lambda} > 0$. Wir betrachten nun $y_3 := \bar{\lambda} y_1 + (1 - \bar{\lambda}) y_2$ und eine beliebige Umgebung V von y_3. Da sich $\bar{\lambda}$ als Infimum berechnet, gibt es ein $\lambda > \bar{\lambda}$ mit $\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 \in Y \cap V$ und ein $\lambda < \bar{\lambda}$ mit $\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 \in V \backslash Y$. Es folgt $y_3 \in \operatorname{bd} Y$. ∎

Lemma A.2 (vgl. Weidner, [89], Satz 3.2.1). *Sei $\mathfrak{Y}$ ein topologischer linearer Raum, seien eine Menge $C \subset \mathfrak{Y}$, $C \neq \mathfrak{Y}$, und ein Vektor $k \in \mathfrak{Y}$ mit*

$$\emptyset \neq \operatorname{int} C = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha > 0} (\operatorname{bd} C + \alpha k) \tag{A.1}$$

(vgl. Voraussetzung (V1), Seite 30) gegeben. Dann gilt:

(i) $\alpha k + \operatorname{cl} C \subseteq \operatorname{int} C$ *für alle* $\alpha > 0$*;*

(ii) $\operatorname{int} \operatorname{cl} C = \operatorname{int} C$.

Beweis. Seien die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt.

(i) Sei $\alpha > 0$ und $y \in \alpha k + \operatorname{cl} C$. Dann existiert ein $c \in \operatorname{cl} C$ mit $y = \alpha k + c$. Gilt $c \in \operatorname{bd} C$, so folgt aus der Darstellung (A.1) $y \in \alpha k + \operatorname{bd} C \subset \operatorname{int} C$. Falls hingegen $c \in \operatorname{int} C$, so erhalten wir

$$\alpha k + c \in \alpha k + \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha > 0} (\operatorname{bd} C + \alpha k) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha > 0} (\operatorname{bd} C + \alpha k) = \operatorname{int} C.$$

(ii) Folgt aus der Formel (A.1) und $\operatorname{cl} C = (\operatorname{bd} C) \cup (\operatorname{int} C) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \geq 0} (\operatorname{bd} C + \alpha k)$. ∎

Lemma A.3 (vgl. Weidner, [89], Satz 2.1.13 und Folgerung 2.1.1). *Sei $\mathfrak{Y}$ ein topologischer linearer Raum, sei $C \subset \mathfrak{Y}$, $C \neq \mathfrak{Y}$, eine Menge mit* $\operatorname{int}\operatorname{cl} C = \operatorname{int} C$. *Dann gilt*

(i) $\operatorname{cl} C$ *ist ein Kegel* $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{bd} C$ *ist ein Kegel;*

(ii) $\operatorname{cl} C$ *ist ein konvexer Kegel* $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{bd} C$ *ist ein Kegel und* $\operatorname{bd} C + \operatorname{bd} C \subset \operatorname{cl} C$.

Beweis. Seien die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt.

(i) Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

(1) Angenommen, $\operatorname{bd} C$ ist ein Kegel, nicht aber $\operatorname{cl} C$. Dann existieren ein $y \in \operatorname{cl} C$ und ein $\lambda_1 > 0$ mit $\lambda_1 y \notin \operatorname{cl} C$. Da $\operatorname{bd} C$ ein Kegel sein soll, muss $y \in \operatorname{int} C$ gelten. Wegen Lemma A.1 existiert weiter ein $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $1 < \lambda_2 \leq \lambda_1$, so dass $\lambda_2 y \in \operatorname{bd} C$ gilt. Da $\operatorname{bd} C$ ein Kegel ist, folgt $y = (\lambda_2)^{-1}\lambda_2 y \in \operatorname{bd} C$, im Widerspruch zu $y \in \operatorname{int} C$. Also ist $\operatorname{cl} C$ doch ein Kegel.

(2) Behauptung: Ist $\operatorname{cl} C$ ein Kegel, so auch $(\operatorname{int} C) \cup \{0\}$.
Angenommen, es gibt ein $y \in \operatorname{int} C = \operatorname{int}\operatorname{cl} C$ und ein $\lambda > 0$ mit $\lambda y \notin \operatorname{int} C$. Sei U eine Umgebung von y mit $U \subseteq \operatorname{cl} C$. Da dann λU eine Umgebung von $\lambda y \notin \operatorname{int} C = \operatorname{int}\operatorname{cl} C$ ist, existiert ein $\bar{y} \in (\lambda U)\backslash(\operatorname{cl} C)$. Weiter folgt $\lambda^{-1}\bar{y} \in \lambda^{-1}\lambda U = U$, also $\lambda^{-1}\bar{y} \in \operatorname{cl} C$. Da $\operatorname{cl} C$ ein Kegel ist, folgt $\bar{y} \in \operatorname{cl} C$, im Widerspruch zu $\bar{y} \in (\lambda U)\backslash(\operatorname{cl} C)$. Daher ist die Annahme falsch, d. h. $\operatorname{int} C \cup \{0\}$ ist ein Kegel.

(3) Behauptung: Ist $\operatorname{cl} C$ ein Kegel, so auch $\operatorname{bd} C$.
Sei $y \in \operatorname{bd} C$. Für ein beliebiges $\lambda > 0$ gilt nun $\lambda y \in \operatorname{cl} C$, aber $\lambda y \notin \operatorname{int} C$: Wegen Beweisteil (i, 2) ist auch $(\operatorname{int} C) \cup \{0\}$ ein Kegel, so würde $\lambda^{-1}(\lambda y) = y \in \operatorname{int} C$ folgen, im Widerspruch zu $y \in \operatorname{bd} C$. Somit gilt $\lambda y \in \operatorname{bd} C$.

(ii) Ist $\operatorname{cl} C$ ein konvexer Kegel, so gilt $\operatorname{bd} C + \operatorname{bd} C \subset \operatorname{cl} C + \operatorname{cl} C \subseteq \operatorname{cl} C$, und wegen Teil (i) des Lemmas ist $\operatorname{bd} C$ ein Kegel.

Sei umgekehrt $\operatorname{bd} C$ ein Kegel, und gelte $\operatorname{bd} C + \operatorname{bd} C \subset \operatorname{cl} C$. Wegen Teil (i) des Lemmas ist dann auch $\operatorname{cl} C$ ein Kegel. Angenommen, es existiert ein $y \in \operatorname{cl} C + \operatorname{cl} C$ mit $y \notin \operatorname{cl} C$. Wegen $\operatorname{bd} C + \operatorname{bd} C \subset \operatorname{cl} C$ muß $y \in \operatorname{cl} C + \operatorname{int} C$ gelten, d. h. es gibt eine Darstellung $y = y_1 + y_2$ mit $y_1 \in \operatorname{int} C$ und $y_2 \in \operatorname{cl} C$. Aus Lemma A.1 folgt die Existenz eines $\lambda \in (0, 1]$ mit $y_3 := y_1 + \lambda(y - y_1) \in \operatorname{bd} C$. Es folgt $\lambda y_2 = \lambda(y - y_1) = y_3 - y_1$. Da $y_2 \in \operatorname{cl} C$ und $\operatorname{cl} C$ Kegel ist, folgt weiter $y_3 - y_1 \in \operatorname{cl} C$. Wir erhalten weiter

$$y = y - \lambda y_2 - y_1 + y_3 = (y_1 + y_2) - \lambda y_2 - y_1 + y_3 = y_3 + (1 - \lambda) y_2.$$

Es folgt $y_2 \in \operatorname{int} C$, da im Falle $y_2 \in \operatorname{bd} C$ aus $y_3 \in \operatorname{bd} C$, $\operatorname{bd} C + \operatorname{bd} C \subset \operatorname{cl} C$ und der Kegeleigenschaft von $\operatorname{bd} C$ dann $y \in \operatorname{cl} C$ folgen würde, im Widerspruch zu $y \notin \operatorname{cl} C$. Wegen Beweisteil (i, 2) ist $(\operatorname{int} C) \cup \{0\}$ ein Kegel, also $y_4 := (1 - \lambda) y_2 \in (\operatorname{int} C) \cup \{0\}$ (es gilt immer noch $\lambda \in (0, 1]$). y erhält so die Darstellung $y = y_3 + y_4$ mit $y_3 \in \operatorname{bd} C$ und $y_4 \in (\operatorname{int} C) \cup \{0\}$. $y_4 = 0$ kann wegen $y \notin \operatorname{cl} C$ und $y_3 \in \operatorname{bd} C$ ausgeschlossen werden. Wir wenden nun nochmals Lemma A.1 an und erhalten ein $\alpha \in (0, 1]$ mit $y_5 := y_4 + \alpha(y - y_4) \in \operatorname{bd} C$. Es folgt $\alpha y_3 = \alpha(y - y_4) = y_5 - y_4$ und schließlich

$$y = y + y_5 - y_4 - \alpha y_3 = (y_3 + y_4) + y_5 - y_4 - \alpha y_3 = y_5 + (1 - \alpha) y_3 \in \operatorname{bd} C + \operatorname{bd} C,$$

auf Grund $\operatorname{bd} C + \operatorname{bd} C \subset \operatorname{cl} C$ also $y \in \operatorname{cl} C$, im Widerspruch zur Annahme. Somit ist die Annahme falsch und $\operatorname{cl} C$ ein konvexer Kegel. ■

Wir erinnern daran, dass für konvexe Mengen K mit $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ stets $\operatorname{int} K = \operatorname{int} \operatorname{cl} K$ gilt, vgl. etwa Marti, [59], Kapitel II.1, Lemma 3.

Lemma A.4. *Sei $K \subseteq \mathfrak{Y}$ ein konvexer Kegel mit $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. Dann gilt $\operatorname{cl} K + \operatorname{int} K \subseteq \operatorname{int} K$.*

Beweis. Mit K ist auch $\operatorname{cl} K$ ein konvexer Kegel. Somit gilt $\operatorname{cl} K + \operatorname{int} K \subseteq \operatorname{cl} K + \operatorname{cl} K \subseteq \operatorname{cl} K$. Sei nun $y_1 \in \operatorname{cl} K$, $y_2 \in \operatorname{int} K = \operatorname{int} \operatorname{cl} K$. Dann existiert eine offene Umgebung U von y_2, so dass $U \subseteq \operatorname{cl} K$. Somit gilt $y_1 + U \subseteq \operatorname{cl} K$, wobei $y_1 + U$ eine offene Umgebung von $y_1 + y_2$ ist; wir erhalten $y_1 + y_2 \in \operatorname{int} \operatorname{cl} K = \operatorname{int} K$. ■

A.2 Konstruktion trennender Funktionale nach Tammer und Weidner

Wir wiederholen an dieser Stelle die wichtigsten Eigenschaften der durch Tammer und Weidner untersuchten Skalarisierungsfunktionale. Wir nutzen in unserer Arbeit nicht die volle Breite der Resultate von Weidner, [89], benötigen aber schwächere Voraussetzungen als Tammer und Weidner in [24].

Sei $\mathfrak{Y}$ ein topologischer linearer Raum. Weiter seien eine nichtleere Menge $C \subset \mathfrak{Y}$, $C \neq \mathfrak{Y}$, sowie ein Vektor $k \in \mathfrak{Y}$ gegeben. Wir nehmen an, dass C und k die Voraussetzung

$$\textbf{(V1)} \qquad \emptyset \neq \operatorname{int} C = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0} (\operatorname{bd} C + \alpha k) \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{Y} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} (\operatorname{bd} C - \alpha k)$$

erfüllen. Weiter definieren wir ein Funktional $z^{C,k} : \mathfrak{Y} \to \mathbb{R}$ durch

$$z^{C,k}(y) := \min \{\tau \in \mathbb{R} : y \in \tau k - \operatorname{cl} C\}.$$

Dann gilt:

Satz A.1 (vgl. Satz 4.1). *Seien $C \subset \mathfrak{Y}$, $C \neq \mathfrak{Y}$, und $k \in \mathfrak{Y}$ derart, dass Voraussetzung (V1) erfüllt ist. Dann gilt für $z = z^{C,k}$:*

(i) *z ist ein wohldefiniertes, stetiges Funktional von $\mathfrak{Y}$ auf $(-\infty, +\infty)$;*

(ii)
$$\begin{aligned} z(y) = r &\iff y \in rk - \operatorname{bd} C, \\ z(y) < r &\iff y \in rk - \operatorname{int} C, \\ z(y) \leq r &\iff y \in rk - \operatorname{cl} C; \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} &z \text{ ist konvex} &&\iff \operatorname{cl} C \text{ konvex}, \\ &z \text{ ist positiv homogen} &&\iff \operatorname{bd} C \text{ ist ein Kegel}, \\ &z \text{ ist sublinear} &&\iff \operatorname{cl} C \text{ ist ein konvexer Kegel}, \\ &z \text{ ist linear} &&\iff \operatorname{bd} C \text{ ist ein linearer Unterraum von } \mathfrak{Y}; \end{aligned}$$

(iv) *Sei Y eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{Y}$. Dann gilt:*

$$Y \cap (-\operatorname{int} C) = \emptyset \iff z(Y) \geq 0.$$

Beim nachfolgend angegebenen Beweis stützen wir uns auf Ergebnisse aus der Habilitationsschrift von Weidner, [89], vgl. Theorem 3.2.1 ff.

Beweis. Seien $C \subsetneq \mathfrak{Y}$ und $k \in \mathfrak{Y}$ derart, dass (V1) erfüllt ist.

(1) Wohldefiniertheit von z: Wir betrachten die Mengen $S_\tau := \tau k - \operatorname{cl} C$, $\tau \in \mathbb{R}$. Es gilt:

a) Für jedes $y \in \mathfrak{Y}$ gibt es ein $\tau \in \mathbb{R}$ mit $y \in S_\tau$. Dies folgt aus dem zweiten Teil der Voraussetzung (V1).

b) Für $y \in S_\tau$ und $\alpha > \tau$ gilt $y \in \operatorname{int} S_\alpha$. Dies folgt mit Lemma A.2 (i) aus $\tau k - \operatorname{cl} C = \alpha k - (\alpha - \tau)k - \operatorname{cl} C \subseteq \alpha k - \operatorname{int} C$.

c) Für jedes $y \in \mathfrak{Y}$ gibt es ein $\tau \in \mathbb{R}$, so dass $y \notin S_\tau$. Gäbe es nämlich ein $\bar{y} \in \mathfrak{Y}$ mit $\bar{y} \in \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}} S_\tau$, so gälte nach dem eben Gezeigten $\bar{y} \in \tau k - \operatorname{int} C$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$ und damit $\{\tau k - \bar{y} : \ \tau \in \mathbb{R}\} \subseteq \operatorname{int} C$. Wir wählen ein beliebiges $\bar{\tau} \in \mathbb{R}$. Wegen Voraussetzung (V1) gibt es dann ein $\bar{\alpha} > 0$ und $c \in \operatorname{bd} C$ mit $\bar{\tau}k - \bar{y} = c + \bar{\alpha}k$. Es folgt $(\bar{\tau} - \bar{\alpha})k - \bar{y} = c$ mit $(\bar{\tau} - \bar{\alpha})k - \bar{y} \in \operatorname{int} C$, im Widerspruch zu $c \in \operatorname{bd} C$.

d) Aus $y \notin S_\tau$ und $\alpha < \tau$ folgt wegen b) $y \notin S_\alpha$.

Somit ist für jedes $y \in \mathfrak{Y}$ die Menge $\{\tau \in \mathbb{R} : y \in S_\tau\}$ von unten beschränkt, und es existiert das Infimum dieser Menge. Man prüft leicht, dass das Infimim mit dem Minimum dieser Menge übereinstimmt.

(2) Wertebereich: Sei $z(y) < r$. Dann gilt $y \in S_\tau$ für wenigstens ein $\tau < r$, und aus Teil (1) des Beweises folgt $y \in rk - \operatorname{int} C$. Aus $y \in rk - \operatorname{int} C$ folgt umgekehrt $y \in (r + \varepsilon)k - C$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, also $y \in S_{r+\varepsilon}$ und daher $z(y) < r$.

Die Äquivalenz $z(y) \leq r \iff y \in rk - \operatorname{cl} C$ folgt analog, $z(y) = r \iff y \in rk - \operatorname{bd} C$ ergibt sich aus $\operatorname{bd} C = \operatorname{cl} C \backslash \operatorname{int} C$.

(3) Stetigkeit: $z(y) \leq r \iff y \in rk - \operatorname{cl} C$ liefert die Abgeschlossenheit der (Niveau-)Mengen $\{y \in \mathfrak{Y} : \ z(y) \leq r\}$ für beliebiges $r \in \mathbb{R}$. Die Abgeschlossenheit von $\{y \in \mathfrak{Y} : \ z(y) \geq r\}$ folgt entsprechend aus $z(y) \not< r \iff y \notin rk - \operatorname{int} C$.

(4) Konvexität: Seien $y_1, y_2 \in \operatorname{cl} C$ und $\lambda \in [0,1]$ beliebig. Dann gilt wegen Teil (2) des Beweises $z(-y_1) \leq 0$ und $z(-y_2) \leq 0$. Ist nun z konvex, so folgt

$$z(-\lambda y_1 - (1-\lambda)y_2) \leq \lambda z(-y_1) + (1-\lambda)z(-y_2) \leq 0$$

und daher $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in \operatorname{cl} C$. Folglich ist $\operatorname{cl} C$ konvex.

Sei umgekehrt $\operatorname{cl} C$ konvex, und seien $y_1, y_2 \in \mathfrak{Y}$, $\lambda \in [0,1]$ beliebig. Dann gilt wegen Teil (2) des Beweises $y_1 \in z(y_1)k - \operatorname{cl} C$ und $y_2 \in z(y_2)k - \operatorname{cl} C$, also

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in \lambda z(y_1)k + (1-\lambda)z(y_2)k - \lambda \operatorname{cl} C - (1-\lambda)\operatorname{cl} C.$$

Wegen der Konvexität von $\operatorname{cl} C$ gilt $\lambda \operatorname{cl} C + (1-\lambda)\operatorname{cl} C \subseteq \operatorname{cl} C$, also mit Teil (2) schließlich $z(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leq \lambda z(y_1) + (1-\lambda)z(y_2)$.

(5) Homogenität: Sei z positiv homogen, $y \in \operatorname{bd} C$ und $\lambda \geq 0$ beliebig. Dann gilt $z(-y) = 0$. Es folgt $\lambda z(-y) = z(-\lambda y) = 0$, also $\lambda y \in \operatorname{bd} C$.

Seien umgekehrt $\operatorname{bd} C$ ein Kegel und $y \in \mathfrak{Y}$ beliebig. Aus Teil (2) des Beweises folgt dann $y \in z(y)k - \operatorname{bd} C$, also $\lambda y \in \lambda z(y)k - \operatorname{bd} C$, d. h. $z(\lambda y) = \lambda z(y)$.

(6) Wir zeigen: z subadditiv $\iff \operatorname{bd} C + \operatorname{bd} C \subseteq \operatorname{cl} C$. Seien zunächst $y_1, y_2 \in \operatorname{bd} C$ beliebig. Dann gilt $z(-y_1) = 0$ und $z(-y_2) = 0$. Ist nun z subadditiv, so folgt $z(-y_1 - y_2) \leq 0$ bzw. $y_1 + y_2 \in \operatorname{cl} C$. Wir erhalten $\operatorname{bd} C + \operatorname{bd} C \subseteq \operatorname{cl} C$.

Gelte umgekehrt $\operatorname{bd} C + \operatorname{bd} C \subseteq \operatorname{cl} C$, und seien $y_1, y_2 \in \mathfrak{Y}$ beliebig. Dann folgt

$$y_1 + y_2 \in z(y_1)k + z(y_2)k - \operatorname{bd} C - \operatorname{bd} C \subseteq z(y_1)k + z(y_2)k - \operatorname{cl} C,$$

also $z(y_1 + y_2) \leq z(y_1) + z(y_2)$.

(7) Sublinearität: z ist sublinear, wenn es positiv homogen und subadditiv ist, d. h. genau dann, wenn $\operatorname{bd} C$ ein Kegel ist und $\operatorname{bd} C + \operatorname{bd} C \subseteq \operatorname{cl} C$ gilt; wegen Lemma A.3 ist dies wiederum äquivalent dazu, dass $\operatorname{cl} C$ ein konvexer Kegel ist.

(8) Linearität: Sei zunächst z linear. Für $y_1, y_2 \in \operatorname{bd} C$ gilt dann $z(-y_1) = z(-y_2) = 0$ und weiter $z(-y_1 - y_2) = z(-y_1) + z(-y_2) = 0$. Es folgt $y_1 + y_2 \in \operatorname{bd} C$. Ebenso erhalten wir für $y \in \operatorname{bd} C$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die Gleichung $0 = \lambda z(-y) = z(-\lambda y)$, also $\lambda y \in \operatorname{bd} C$. Somit gilt $\operatorname{bd} C + \operatorname{bd} C \subseteq \operatorname{bd} C$ und $\lambda \operatorname{bd} C \subseteq \operatorname{bd} C$, d. h. $\operatorname{bd} C$ ist ein linearer Unterraum von $\mathfrak{Y}$.

Sei nun umgekehrt $\operatorname{bd} C$ ein linearer Unterraum von $\mathfrak{Y}$, seien $y_1, y_2 \in \mathfrak{Y}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann folgt aus Beweisteil (2) $y_1 \in z(y_1)k - \operatorname{bd} C$, $y_2 \in z(y_2)k - \operatorname{bd} C$. Da $\operatorname{bd} C$ linearer Unterraum ist, erhalten wir weiter $\lambda_1(y_1 - z(y_1)k) + \lambda_2(y_2 - z(y_2)k) \in \operatorname{bd} C$ und schließlich $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in (\lambda_1 z(y_1) + \lambda_2 z(y_2))k - \operatorname{bd} C$, d. h. $z(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 z(y_1) + \lambda_2 z(y_2)$. Somit ist z linear.

(9) Trennungseigenschaft: Aus Beweisteil (2) folgt $z(y) \geq 0 \iff z(y) \not< 0 \iff y \notin -\operatorname{int} C$ und damit die behauptete Trennungsaussage. ■

Die Gültigkeit von (V1) kann durch folgendes Resultat geprüft werden:

Lemma A.5 (vgl. Lemma 4.2). *Jede der folgenden Bedingungen impliziert die Gültigkeit von (V1):*

a) $C \subsetneq \mathfrak{Y}$ *ist eine Menge mit nichtleerem Inneren, für die ein Kegel* $K \subset \mathfrak{Y}$ *mit* $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ *und* $\operatorname{cl} C + \operatorname{int} K \subseteq \operatorname{int} C$ *existiert, und es gilt* $k \in \operatorname{int} K$*;*

b) $C = a + K \subsetneq \mathfrak{Y}$*, wobei* $a \in \mathfrak{Y}$ *ein beliebiges Element,* $K \cup \{0\}$ *ein konvexer Kegel mit* $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ *und* $k \in \operatorname{int} K$ *ist.*

Beweis. Wir stützen uns auf folgende Aussage: Ist $K \subset \mathfrak{Y}$ ein Kegel in $\mathfrak{Y}$ mit $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, so gilt für jeden Vektor $k \in \operatorname{int} K$ die Darstellung

$$\mathfrak{Y} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0} (\operatorname{int} K - \alpha k). \tag{A.2}$$

Dies findet man etwa als Lemma 2.1 bei Gerth (Tammer) und Weidner, [24].

a) Es sei $C \subsetneq \mathfrak{Y}$ eine Menge mit nichtleerem Inneren, für die ein Kegel $K \subset \mathfrak{Y}$ mit $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ und $\operatorname{cl} C + \operatorname{int} K \subset \operatorname{int} C$ existiert, und gelte $k \in \operatorname{int} K$.

(1) Wir zeigen zunächst, dass für alle $y \in \mathfrak{Y}$ ein $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$ mit $y - \bar{\alpha} k \notin \operatorname{cl} C$ existiert. Hierfür nehmen wir an, dass es ein $\bar{y} \in \mathfrak{Y}$ mit $\bar{y} - \alpha k \in \operatorname{cl} C$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt. Dann folgt mit $\operatorname{cl} C + \operatorname{int} K \subset \operatorname{int} C$ nämlich

$$\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} (\bar{y} - \alpha k) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} (\bar{y} - \alpha k + k) \subset \operatorname{cl} C + \operatorname{int} K \subseteq \operatorname{int} C$$

Wegen Gleichung (A.2) gibt es zu jedem $y \in \mathfrak{Y}$ ein $\bar{k} \in \operatorname{int} K$ und ein $\bar{\alpha} > 0$ mit

$$y = \bar{k} - \bar{\alpha} k = (\bar{y} - \alpha k) + \bar{k} - \bar{y} \in \operatorname{int} C + \operatorname{int} K - \bar{y} \subseteq C - \bar{y},$$

also $\mathfrak{Y} \subseteq C - \bar{y}$, im Widerspruch zu $C \neq \mathfrak{Y}$. Somit ist die Annahme falsch, d. h. für alle $y \in \mathfrak{Y}$ existiert ein $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ mit $y - \bar{\alpha} k \notin \operatorname{cl} C$.

(2) Es seien $y \in \mathfrak{Y}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ derart gewählt, dass $y \in \operatorname{int} C$ und $y - \alpha k \notin \operatorname{cl} C$ gilt. Wir verwenden erneut Lemma A.1: Hiernach existiert ein $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$, $0 < \bar{\alpha} \leq \alpha$ mit $y - \bar{\alpha} k \in \operatorname{bd} C$. Es folgt

$$y = y - \bar{\alpha}k + \bar{\alpha}k \in \operatorname{bd} C + \bar{\alpha}k.$$

(3) Da k im Inneren des Kegels K liegt, gilt für $\alpha > 0$ die Inklusion $\operatorname{bd} C + \alpha k \subset \operatorname{bd} C + \operatorname{int} K \subseteq \operatorname{int} C$. Gemeinsam mit Teil (2) folgt

$$\operatorname{int} C = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0} (\operatorname{bd} C + \alpha k).$$

(4) Aus (A.2) folgt

$$\begin{aligned}\mathfrak{Y} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0} (\operatorname{int} K - \alpha k) &= \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0} \left(\bigcup_{\tau \in R,\ \tau > 0} (\operatorname{bd} C + \tau k) - \alpha k \right) \\ &= \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} (\operatorname{bd} C + \alpha k)\end{aligned}$$

b) Aus Teil a) folgt mit $C = K \cup \{0\}$ und Lemma A.4

$$\operatorname{int} K = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0} (\operatorname{bd} K + \alpha k) \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{Y} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} (\operatorname{bd} K - \alpha k)$$

Es sei nun $C = \{a\} + K \subsetneq \mathfrak{Y}$, wobei $a \in \mathfrak{Y}$ als ein beliebiges Element, $K \cup \{0\}$ als ein konvexer Kegel mit $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ und $k \in \operatorname{int} K$ angenommen wird. Dann gilt $\operatorname{int} C = \{a\} + \operatorname{int} K$ und $\operatorname{bd} C = \{a\} + \operatorname{bd} K$. Es folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{int} C &= \{a\} + \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0} (\operatorname{bd} K + \alpha k) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0} (\{a\} + \operatorname{bd} K + \alpha k), \\ \mathfrak{Y} &= \{a\} + \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} (\operatorname{bd} K - \alpha k) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} (\{a\} + \operatorname{bd} K - \alpha k),\end{aligned}$$

und damit die Gültigkeit der Voraussetzung (V1). ■

A.3 Optimalitätsbedingungen nach Luu und Oettli

Wir stellen nachfolgend kurz die notwendigen Optimalitätsbedingungen für Minimax-Probleme von Luu und Oettli, [56] zusammen. Im Sinne der Konsistenz der vorliegenden Arbeit nutzen wir weitestgehend unsere Notationen. Für die Beweise sei auf die Originalarbeit verwiesen.

Luu und Oettli betrachten das Problem

$$\min \{g(x) := \max_{t \in T} g_t(x) : \ x \in X\}, \tag{A.3}$$

wobei T eine kompakte Menge und $X \subset \mathfrak{X}$ nichtleere Teilmenge eines normierten Raumes $\mathfrak{X}$ seien. Sie definieren $T_0 = T_0(x) := \{t \in T : \ g_t(x) = g(x)\}$. Weiter sei für jedes $t \in T$ eine erweitert reellwertige Funktion $\varphi_t : \mathfrak{X} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ gegeben, die folgende Bedingungen erfüllt:

(i) Jede der Funktionen φ_t ist konvex entlang Strahlen vom Nullpunkt aus, und $\varphi_t(0) \leq 0$.

(ii) Für jede Richtung $d \in B(X; \bar{x})$ ist $t \mapsto \varphi_t(d)$ von oben halbstetig auf T und endlich auf $T \backslash T_0$.

(iii) Für jede Richtung $d \in B(X;\bar{x})$, alle Folgen $\{d_n\} \subset \mathfrak{X}$, $\{\tau_n\} \in \mathbb{R}$ mit $d_n \to d$, $\tau_n \downarrow 0$ und $\bar{x} + \tau_n d_n \in X$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi_t(d) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{g_t(\bar{x} + \tau_n d_n) - g_t(\bar{x})}{\tau_n}$$

gleichmäßig auf T.

Die Funktion φ_t heißt **eigentlich**, falls $\{x \in \mathfrak{X} : \ \varphi_t(x) < \infty\} \neq \emptyset$.

Satz A.2 (Luu und Oettli, [56], Theorem 2.2). *Seien die Voraussetzungen (i)-(iii) erfüllt. Ist $\bar{x} \in X$ eine lokale Minimalstelle von Problem (A.3), so gilt*

$$\sup_{t\in T_0} \varphi_t(d) \geq 0 \qquad \forall\ d \in B(X;\bar{x}) \tag{A.4}$$

Sei $\mathfrak{X}'$ der topologische Dualraum zu $\mathfrak{X}$. Weiter sei

$$\partial\varphi_t(0) := \{u \in \mathfrak{X}' : \ u(d) \leq \varphi_t(d) \ \ \forall\ d \in \mathfrak{X}\}.$$

Satz A.3 (Luu und Oettli, [56], Theorem 3.1). *Seien die Voraussetzungen (i)-(iii) erfüllt, gelte $\partial\varphi_t(0) \neq \emptyset$ und $\varphi_t(d) = \sup_{u\in\partial\varphi_t(0)} u(d)$. Ist $\bar{x} \in X$ eine lokale Minimalstelle von Problem (A.3), so gilt*

$$0 \in \mathrm{cl}\left(\mathrm{conv}\,(\bigcup_{t\in T_0} \partial\varphi_t(0)) + N(X;\bar{x})\right), \tag{A.5}$$

wobei der Abschluss in der schwachen Topologie $\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})$ gebildet wird.*

Es folgt direkt:

Satz A.4 (Luu und Oettli, [56], Folgerung 3.4). *Seien die Voraussetzungen (i)-(iii) erfüllt, für alle $t \in T_0$ seien die Funktionen φ_t von unten halbstetig, eigentlich und in einer Umgebung von Null beschränkt von oben, die Abbildung $t \mapsto \partial\varphi_t(0)$ sei oberhalbstetig von T nach $(\mathfrak{X}', \sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X}))$. Ist $\bar{x} \in X$ eine lokale Minimalstelle von Problem (A.3), so gilt*

$$0 \in \mathrm{cl}\left(\mathrm{conv}\,(\bigcup_{t\in T_0} \partial\varphi_t(0))\right) + N(X;\bar{x}), \tag{A.6}$$

wobei der Abschluss wieder in der schwachen Topologie $\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})$ gebildet wird.*

Literaturverzeichnis

[1] Beaulieu, A. ; Zhou, F.: A closedness criterion for the difference of two closed convex sets in general Banach spaces. *Chin. Ann. Math.* 20 B (1999), S. 337–340.

[2] Benson, H. P.: An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones. *J. Math. Anal. Appl.* 71 (1979), Nr. 1, S. 232–241.

[3] Bewley, T. F.: Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities. *J. Econ. Theory* 4 (1972), S. 514–540.

[4] Borwein, L. M.: Proper efficient points for maximization with respect to cones. *SIAM J. Control Optim.* 15 (1977), Nr. 1, S. 57–63.

[5] Borwein, L. M.: Continuity and differentiability properties of convex operators. *Proc. London Math. Soc., III. Ser.* 44 (1982), S. 420–444.

[6] Borwein, L. M.: On the existence of Pareto efficient points. *Math. Meth. Oper. Res.* 8 (1983), Nr. 1, S. 64–73.

[7] Carrizosa, E. ; Plastria, F.: Geometrical characterization of weakly efficient points. *J. Optim. Theory Appl.* 90 (1996), Nr. 1, S. 217–223.

[8] Chankong, V. ; Haimes, Y. Y.: *Multiobjective Decision Making. Theory and Methodology.* North Holland, 1983 (North Holland Series in System Science and Engineering, 8).

[9] Clarke, F. H.: *Optimization and Nonsmooth Analysis.* Reprint. SIAM, 1990 (Classics in Applied Mathematics, 5).

[10] Corley, H. W.: An existence result for maximation with respect to cones. *J. Optim. Theory Appl.* 31 (1980), S. 277–281.

[11] Craven, B. D. ; Glover, B. M.: An approach to vector subdifferentials. *Optimization* 38 (1996), S. 237–251.

[12] Daniilidis, A.: Arrow-Barankin-Blackwell theorems and related results in cone duality: a survey. In: Nguyen, V. H.; Strodiot, J.-J.; Tossings, P. (Hrsg.): *Optimization. Proc. 9th Belgian-French-German Conf. Optimization (Namur, 1998)*, 2000, S. 119–131.

[13] Dauer, J. P. ; Gallagher, R. J.: Positive proper efficient points and related cone results in vector optimization theory. *SIAM J. Control Optim.* 28 (1990), Nr. 1, S. 158–172.

[14] Dauer, J. P. ; Saleh, O. A.: A characterization of proper minimal points as solutions of sublinear optimization problems. *J. Math. Anal. Appl.* 178 (1993), Nr. 1, S. 227–246.

[15] Dieudonne, J.: Sur la separation des ensembles convexes. *Math. Ann.* 163 (1966), S. 1–3.

[16] Dunford, N. ; Schwartz, J. T.: *Linear Operators. Part I: General Theory.* John Wiley & Sons, 1988 (Wiley Classics Library Edition).

[17] Elstrodt, J.: *Maß- und Integrationstheorie.* Springer-Verlag, 1996.

[18] Fan, K.: A generalization of the Alaoglu-Bourbaki theorem and its applications. *Math. Zeitschr.* 88 (1965), S. 48–60.

[19] Ferro, F.: General form of the Arrow-Barankin-Blackwell theorem in normed spaces and the l^∞-case. *J. Optim. Theory Appl.* 79 (1993), Nr. 1, S. 127–138.

[20] Ferro, F.: A new ABB theorem in Banach spaces. *Optimization* 46 (1999), S. 353–362.

[21] Gallagher, R. J. ; Saleh, O. A.: Two generalizations of the theorem of Arrow, Barankin and Blackwell. *SIAM J. Control Optim.* 31 (1993), Nr. 1, S. 247–256.

[22] Geoffrion, A. M.: Proper efficiency and the theory of vector maximization. *J. Math. Anal. Appl.* 22 (1968), S. 618–630.

[23] Gerstewitz (Tammer), Chr. ; Iwanow, E.: Dualität für nichtkonvexe Vektoroptimierungsprobleme. *Wiss. Z. TH Ilmenau* 31 (1985), Nr. 2, S. 61–81.

[24] Gerth (Tammer), Chr. ; Weidner, P.: Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization. *J. Optim. Theory Appl.* 67 (1990), Nr. 2, S. 297–320.

[25] Göpfert, A. ; Riahi, H. ; Tammer, Chr. ; Zalinescu, C.: *Variational Methods in Partially Ordered Spaces.* Springer-Verlag, vorauss. 2003 (Canadian Mathematical Society, Series of Monographs and Advanced Texts).

[26] Göpfert, A. ; Tammer, Chr.: Maximal point theorems in product spaces and applications for multicriteria approximation theory. *Reports of the Institute of Optimization and Stochastics, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg* 1998-26 (1998).

[27] Gwinner, J.: Closed images of convex multivalued mappings in linear topological spaces with applications. *J. Math. Anal. Appl.* 60 (1977), S. 75–86.

[28] Gwinner, J.: Some applications of a closedness criterion in convex optimization. In: *Operations Research Verfahren XXV, Symp. Heidelberg, 1976, Teil 1*, 1977, S. 40–49.

[29] Helbig, S.: A scalarization for vector optimization problems in locally convex spaces. *ZAAM - Z. Angew. Math. Mech.* 69 (1989), Nr. 4, S. T89–T91.

[30] Helbig, S.: Approximation of the efficient point set by pertubation of the ordering cone. *ZOR - Meth. Mod. Operations Res.* 35 (1991), S. 197–220.

[31] Henig, M. I.: Proper efficiency with respect to cones. *J. Optim. Theory Appl.* 36 (1982), Nr. 3, S. 387–407.

[32] Heuser, H.: *Funktionalanalysis. Theorie und Anwendung.* 3., durchges. Auflage. B. G. Teubner, Stuttgart, 1992 (Mathematische Leitfäden).

[33] Hirsch, F. ; Lacombe, G.: *Elements of Functional Analysis.* Springer, 1999 (Graduate Texts in Mathematics, 192).

[34] Ioffe, A.: Nonsmooth analysis: Differential calculus of nondifferentiable mappings. *Trans. Amer. Math. Soc.* 266 (1981), Nr. 1, S. 1–56.

[35] Ioffe, A.: Non-smooth analysis and the theory of fans. In: *Convex analysis and optimization*, 1982 (Research Notes in Mathematics, 57), S. 93–117.

[36] Ioffe, A. D. ; Tichomirov, V. M.: *Theorie der Extremalaufgaben*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.

[37] Isac, G.: Sur l'existence de l'optimum de Pareto. *Riv. Mat. Univ. Parma* 9 (1983), S. 303–325.

[38] Isac, G.: Pareto optimization in infinite-dimensional spaces: the importance of nuclear cones. *J. Math. Anal. Appl.* 182 (1994), Nr. 2, S. 393–404.

[39] Jahn, J.: Zur vektoriellen linearen Tschebyscheff-Approximation. *Math. Operationsforsch. Statistik, Ser. Optimization* 14 (1983), Nr. 4, S. 577–591.

[40] Jahn, J.: Scalarization in vector optimization. *Math. Program.* 29 (1984), S. 203–218.

[41] Jahn, J.: Existence theorems in vector optimization. *J. Optim. Theory Appl.* 50 (1986), Nr. 3, S. 397–406.

[42] Jahn, J.: *Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Linear Spaces*. Verlag Peter Lang, Frankfurt am Main, 1986 (Methoden und Verfahren der mathemaischen Physik, Band 31).

[43] Jahn, J.: Parametric approximation problems arising in vector optimization. *J. Optim. Theory Appl.* 54 (1987), Nr. 3, S. 503–516.

[44] Jahn, J.: A generalization of a theorem of Arrow, Barankin, and Blackwell. *SIAM J. Control Optim.* 26 (1988), Nr. 5, S. 999–1005.

[45] Jahn, J.: Theory of vector maximization: various concepts of efficient solutions. In: *Multicriteria Decision Making: Advances in MCDM models, algorithms, theory, and applications*, 1999 (Int. Series in Operations Research & Management Science, 21), S. 2.1–2.32.

[46] Jahn, J. ; Krabs, W.: Applications of multicriteria optimization in approximation theory. In: *Multicriteria optimization in engineering and in the sciences*, Plenum, New York, 1988 (Math. Concepts Methods Sci. Engrg., 37), S. 49–75.

[47] Jameson, G.: *Ordered linear spaces*. Springer, 1970 (Lect. Notes Math. 141).

[48] Jameson, G.: The duality of pairs of wedges. *Proc. London Math. Soc.* II 24 (1972), S. 531–547.

[49] Kaliszewski, I.: *Quantitative Pareto Analysis by Cone Separation Technique*. Kluwer Academic Publishers, 1984.

[50] Kosmol, P.: *Optimierung und Approximation*. Walter de Gruyter, Berlin, 1991.

[51] Kuhn, H. W.: On a pair of dual nonlinear programs. In: Abadie, J. (Hrsg.): *Nonlinear Programming*, North-Holland, Amsterdam, 1967, S. 37–54.

[52] Lions, J.-L.: Contrôle de Pareto de systèmes distribés. Le cas d'evolution. *C. R. Acad. Sci. Paris, Serié I* 302 (1986), Nr. 11, S. 413–417.

[53] Lions, J.-L.: Contrôle de Pareto de systèmes distribés. Le cas stationaire. *C. R. Acad. Sci. Paris, Serié I* 302 (1986), Nr. 6, S. 223–227.

[54] Luc, D. T.: A closedness theorem for nonconvex sets. In: *Essays on nonlinear analysis and optimization problems*, National Center for Scientific Research, Inst. Math, Hanoi, 1987, S. 29–35.

[55] Luc, D. T.: *Theory of Vector Optimization.* Springer, 1989.

[56] Luu, D. V. ; Oettli, W.: Necessary optimality conditions for non-smooth minimax problems. *Z. Analysis Anwend.* 12 (1993), S. 709–721.

[57] Majchrzak, K. ; Walczak, B.: Sur certaine propriété de la somme algébrique des ensembles dans l'espace linéaire-topologique. *Acta Univ. Lodz., Folia Math.* 4 (1991), S. 67–72.

[58] Majumdar, M: Some general theorems on efficiency prices with an infinite-dimensional commodity space. *J. Econ. Theory* 5 (1972), S. 1–13.

[59] Marti, J. T.: *Konvexe Analysis.* Birkhäuser, 1977 (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften: Math. Reihe, Bd. 54).

[60] Nachbin, L.: Compact unions of closed subsets are closed and compact intersections of open subsets are open. *Port. Math.* 49 (1992), Nr. 4, S. 403–409.

[61] Nakano, H.: Über das System aller stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum. *Proc. Imper. Acad. Japan Tokyo* 17 (1941), S. 308–310.

[62] Papageorgiou, N. S.: Nonsmooth analysis on partially ordered vector spaces: The subdifferential theory. *Nonlinear Anal., Theory Meth. Appl.* 10 (1986), Nr. 7, S. 615–637.

[63] Pascoletti, A. ; Serafini, P.: Scalarizing vector optimization problems. *J. Optim. Theory Appl.* 42 (1984), Nr. 4, S. 499–524.

[64] Penot, J.-P.: Calcul sous-differentiel et optimization. *J. Funct. Anal.* 27 (1978), S. 248–276.

[65] Penot, J.-P. ; Théra, M.: Applications sous-linéaires à valeurs dans une espace de fonctions continues. *Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser.* 136 (1984), S. 133–151.

[66] Peressini, A. L.: *Ordered Topological Vector Spaces.* Harper & Row, 1967.

[67] Postolica, V.: New existence results for efficient points in locally convex spaces ordered by supernormal cones. *J. Global Optimization* 3 (1993), S. 233–242.

[68] Pühl, H. ; Tammer, Chr.: Approximative duality theorems. *Unveröffentlichtes Manuskript* .

[69] Reiland, T. W.: Generalized differentiability for a class of nondifferentiable operators with applications to nonsmooth optimization. *J. Austr. Math. Soc., Serie A,* 47 (1989), Nr. 1, S. 114–132.

[70] Reiland, T. W.: Nonsmooth analysis and optimization on partially ordered vector spaces. *Internat. J. Math. & Math. Sci.* 15 (1992), Nr. 1, S. 65–82.

[71] Rockafellar, R. T.: *Convex Analysis.* 10. Auflage. Princeton University Press, 1997 (Princeton Landmarks in Mathematics).

[72] Schaefer, H. H.: *Banach Lattices and Positive Operators.* Springer, 1974.

[73] Schaefer, H. H.: *Topological Vector Spaces.* 5. Auflage. Springer, 1986.

[74] Solovev, V. N.: The subdifferential and the directional derivatives of the maximum of a family of convex functions. *Izv. Math.* 62 (1998), S. 807–832. – Übersetzung aus *Izv. Ross. Akad. Nauk., Ser. Mat.* 62 (1998), S. 173-200.

[75] Sonntag, Y. ; Zalinescu, C.: Comparison of existence results for efficient points. *J. Optim. Theory Appl.* 105 (2000), Nr. 1, S. 161–188.

[76] Staib, T.: *Notwendige Optimalitätsbedingungen in der mehrkriteriellen Optimierung mit Anwendung auf Steuerprobleme.* Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 1989 (Dissertation).

[77] Staib, T.: Necessary optimality conditions for nonsmooth multicriterial optimization problems. *SIAM J. Optimization* 2 (1992), Nr. 1, S. 153–171.

[78] Sterna-Karwat, A.: On existence of cone-maximal points in real topological linear spaces. *Israel J. Math.* 54 (1986), Nr. 1, S. 33–41.

[79] Sterna-Karwat, A.: Continuous dependence of solutions on a parameter in a scalarization method. *J. Optim. Theory Appl.* 55 (1987), Nr. 3, S. 417–434.

[80] Still, G. J.: Solving vector-valued approximation problems by semi-infinite optimization: numerical and genericity aspects. In: Bank, B. et al. (Hrsg.): *Proc. 3rd Int. Conf. on Approximation and Optimization in the Caribbean, Puebla 1995*, Ben. Univ. Auton. Puebla, Puebla, 1997 (digitale Version).

[81] Thibault, L.: Subdifferentials of compactly Lipschitzian vector-valued functions. *Ann. Mat. Pura Appl.* 125 (1980), S. 157–192.

[82] Thibault, L.: Subdifferentials of nonconvex vector-valued functions. *J. Math. Anal. Appl.* 86 (1982), S. 319–344.

[83] Valadier, M.: Sous-différentiabilité de fonctions convexes à valeurs dans un espace vectoriel ordonné. *Math. Scandinav.* 30 (1972), S. 65–74.

[84] Wanka, G.: Properly efficient solutions for vectorial norm approximation. *OR Spektrum* 16 (1994), S. 261–265.

[85] Wantao, F.: On the density of proper efficient points. *Proc. Amer. Math. Soc.* 124 (1996), Nr. 4, S. 1213–1217.

[86] Warga, J.: Derivative containers, inverse functions, and controllability. In: *Calculus of variations and control theory (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1975)*, Academic Press, New York, 1976, S. 13–46.

[87] Weidner, P.: An approach to different scalarizations in vector optimization. *Wiss. Z. TH Ilmenau* 36 (1990), Nr. 3, S. 103–110.

[88] Weidner, P.: Comparison of six types of separating functionals. In: *System modelling and optimization (Leipzig, 1989)*, Springer, Berlin, 1990 (Lect. Notes Control Inform. Sci., 143), S. 234–243.

[89] Weidner, P.: *Ein Trennungskonzept und seine Anwendung auf Vektoroptimierungsverfahren.* Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, 1990 (Dissertation B).

[90] Weidner, P.: Verallgemeinerte Tschebyscheff-Normen in der Vektoroptimierung. *Wiss. Z. TH Ilmenau* 37 (1991), Nr. 3, S. 101–114.

[91] Weidner, P.: The influence of proper efficiency on optimal solutions of scalarizing problems in multicriteria optimization. *OR Spektrum* 16 (1994), S. 255–260.

[92] Winkler, K.: Characterizations of efficient points in convex vector optimization problems. *Math. Meth. Oper. Res.* 53 (2001), Nr. 2, S. 205–214.

[93] Wuytack, L. ; Wimp, J. (Editoren): *Approximation Theory.* North-Holland, Amsterdam, 2000 (Numerical Analysis 2000, Volume 1).

[94] Zeidler, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. III: Variational Methods and Optimization.* Springer-Verlag, 1985.

[95] Zubiri, J.: Scalarization of vector optimization problems via generalized Chebyshev norm. *Math. Anal. Syst. Theory, Dep. Math., Karl-Marx-Univ. Budapest,* V (1988), S. 39–42.

[96] Zubiri, J.: Conditions for optimality of C(S)-valued functions. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 11 (1991), S. 193–200.

Thesen

zur Dissertation von Dipl.-Math. Kristin Winkler

1. In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit Aufgabenstellungen der Mehrkriteriellen Optimierung, wobei die Zielabbildungen Werte im Raum $\mathcal{C}(T)$ der auf einer kompakten Menge T stetigen reellwertigen Funktionen annehmen.

2. Anwendungen $\mathcal{C}(T)$-wertiger Mehrkriterieller Optimierungsprobleme findet man etwa in der Mehrkriteriellen Standortoptimierung, der Approximationstheorie und in der Preistheorie.

3. Der Raum $\mathcal{C}(T)$ stellt bei Fragestellungen der mehrkriteriellen Optimierung eine wichtige Markierung zwischen dem endlichdimensionen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ und abstrakten topologischen halbgeordneten Vektorräumen dar. $\mathcal{C}(T)$, halbgeordnet durch den natürlichen Ordnungskegel $\mathcal{C}(T)^+$ ist nicht ordnungsvollständig, $\mathcal{C}(T)^+$ besitzt nicht die Daniell-Eigenschaft und ist nicht nuklear. Damit fehlen dem Raum $\mathcal{C}(T)$ wesentliche funktionalanalytische und ordnungstheoretische Eigenschaften. Andererseits ermöglicht punktweises Rechnen mit den Realisierungen $y(t)$, $t \in T$, einer Funktion $y \in \mathcal{C}(T)$ die Übertragung vieler Definitionen und Ansätze vom $\mathbb{R}^n$.

4. Anliegen der vorliegenden Arbeit ist insbesondere die Untersuchung, ob und wie sich

   - für $\mathfrak{Y} = \mathbb{R}^n$ bekannte Resultate auf den Raum $\mathcal{C}(T)$ verallgemeinern lassen;
   - für abstrakte Räume $\mathfrak{Y}$ bekannte Ergebnisse unter Ausnutzung der speziellen Struktur des $\mathcal{C}(T)$ verfeinern bzw. spezialisieren lassen.

   Wir bereiten Ergebnisse neu auf, die für Vektoroptimierungsprobleme in $\mathbb{R}^n$ oder in allgemeinen Vektorräumen bekannt sind, kombinieren sie mit anderen Resultaten und extrahieren jene Aussagen, die zur Lösung Mehrkriterieller Optimierungsprobleme in $\mathcal{C}(T)$ beitragen können.

5. Die in der vorliegenden Arbeit verallgemeinerte Definition der Geoffrion-eigentlich minimalen Elemente (Definition 3.6) ist in der hier betrachteten Struktur bisher nur für den Raum $\mathbb{R}^n$ bekannt, im Raum $\mathcal{C}(T)$ hingegen völlig neu. Es gelingt zu zeigen, dass die Aussagen von Borwein und Benson bzgl. ihrer Verallgemeinerungen der Geoffrion-Definition vom Raum $\mathbb{R}^n$ auf den Raum $\mathcal{C}(T)$ übertragen werden können (Sätze 3.4 und 3.5).

   Im Mittelpunkt steht die Untersuchung des Kegels D^δ, $\delta > 0$, gegeben durch

$$\begin{aligned} D^{s,\delta} &:= \{y \in \mathcal{C}(T) : \ y(s) > 0, \ y(s) + \delta y(t) > 0 \ \forall \ t \in T \backslash \{s\}\}, \qquad s \in T, \\ D^\delta &:= \bigcup_{s \in T} D^{s,\delta}. \end{aligned}$$

   Dieser charakterisiert die Geoffrion-eigentliche Minimalität als Minimalität bzgl. Kegel (Satz 3.2). Daraus ergeben sich wiederum notwendige und hinreichende Minimalitätsbedingungen (z. B. Satz 4.14).

6. In Anlehnung an das Konzept von Tammer und Weidner nutzen wir zur Skalarisierung das Funktional
$$z^{C,k}(y) = \min\{\tau \in \mathbb{R}: \ y \in \tau k - \operatorname{cl} C\}$$
mit einem Kegel $C \subset \mathcal{C}(T)$ und einem $k \in \mathcal{C}(T)^+$. Setzen wir z. B. $C = \mathcal{C}(T)^+$, erhalten wir daraus Minimalitätbedingung der Art
$$\begin{aligned} \bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, \mathcal{C}(T)^+) &\iff z^{\mathcal{C}(T)^+,k}(y - \bar{y}) \geq z^{\mathcal{C}(T)^+,k}(\bar{y} - \bar{y}) = 0 \ \ \forall\, y \in Y, \\ &\iff z^{\mathcal{C}(T)^+ - \bar{y},k}(y) \geq z^{\mathcal{C}(T)^+ - \bar{y},k}(\bar{y}) = 0 \ \ \forall\, y \in Y. \\ \bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+) &\iff z^{\mathcal{C}(T)^+,k}(y - \bar{y}) > z^{\mathcal{C}(T)^+,k}(\bar{y} - \bar{y}) = 0 \ \ \forall\, y \in Y \backslash \{\bar{y}\}, \\ &\iff z^{\mathcal{C}(T)^+ - \bar{y},k}(y) > z^{\mathcal{C}(T)^+ - \bar{y},k}(\bar{y}) = 0 \ \ \forall\, y \in Y \backslash \{\bar{y}\}. \end{aligned}$$
Explizites Ausrechnen des Funktionals $z^{\mathcal{C}(T)^+,k}$ liefert:

   $k \in \operatorname{int} \mathcal{C}(T)^+$ beliebig. $\bar{y} \in \mathcal{E}_w(Y, \mathcal{C}(T)^+)$ genau dann, wenn $\bar{y}$ Lösung des Problems
$$\text{(P1)} \qquad \max_{t \in T} \frac{y(t) - \bar{y}(t)}{k(t)} \to \min \qquad \text{bei} \ \ y \in Y$$
   ist. Es gilt $\bar{y} \in \mathcal{E}(Y, \mathcal{C}(T)^+)$ genau dann, wenn $\bar{y}$ einzige Lösung von (P1) ist.

7. Eine weiterführende Untersuchung der Skalarisierungsergebnisse ermöglicht es, Bedingungen für Effizienz in Subdifferentialform zu beweisen (Sätze 5.4, 5.6 und 5.7). Hierzu werden ausgewählte Skalarisierungsaussagen in Optimierungsprobleme mit Maximumfunktionen als Zielfunktionen umformuliert. Auf diese Optimierungsprobleme wenden wir notwendige Optimalitätskriterien in Subdifferentialform von Luu und Oettli an. Die vorgelegten Ergebnisse besitzen dieselbe geometrische Struktur, wie sie bereits von den entsprechenden Resultaten in $\mathbb{R}^n$ bekannt sind.

   Ein direkter Beweis führt schließlich zu stärkeren Minimalitätsbedingungen im Falle konvexer Abbildungen (Sätze 5.9, 5.10 und 5.11). Diese besitzen die Form
$$\begin{aligned} \bar{x} \in \operatorname{Eff}_w(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) &\iff 0 \in \operatorname{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})} \operatorname{conv}\left(\bigcup_{t \in T} \partial \mathfrak{f}(\bar{x})(t)\right) + N(X; \bar{x}), \\ \bar{x} \in \operatorname{Eff}(\mathfrak{f}(X), \mathcal{C}(T)^+) &\Longleftarrow 0 \in \operatorname{core}\left(\operatorname{cl}_{\sigma(\mathfrak{X}',\mathfrak{X})} \operatorname{conv}\left(\bigcup_{t \in T} \partial \mathfrak{f}(\bar{x})(t)\right) + N(X; \bar{x})\right), \end{aligned}$$
   wobei $\partial \mathfrak{f}(\bar{x})(t)$ das Subdifferential von $\mathfrak{f}(.)(t)$ in $\bar{x}$ im Sinne der konvexen Analysis und $N(X; \bar{x})$ den Normalenkegel an X in $\bar{x}$ bezeichnet. Bemerkenswert ist, dass man sowohl Kriterien für effiziente Elemente als auch Kriterien für schwach effiziente Elemente erhält. In der Literatur findet man bisher i. a. nur Kriterien für schwach effiziente Elemente.

8. Die erhaltenen Effizienzkriterien werden schließlich auf Probleme aus der Mehrkriteriellen Standortoptimierung und der Approximationstheorie angewendet. Hier gelingt die Übertragung einiger bekannter Kriterien – z. B. das Resultat von Kuhn zum optimalen Standort bei n bereits existierenden Einrichtungen und das Kolmogoroff-Kriterium der Approximationstheorie – auf den Raum $\mathcal{C}(T)$ unter Beibehaltung der geometrischen und analytischen Struktur dieser Resultate (Satz 7.2 mit Folgerung 7.1 sowie Satz 7.3).

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe angefertigt zu haben. Ich habe keine anderen als die im Schriftenverzeichnis angeführten Quellen benutzt und sämtliche Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen wurden, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, als solche kenntlich gemacht. Alle von anderen Personen bereitgestellten Materialien oder erbrachten Dienstleistungen sind als solche gekennzeichnet.

Halle (Saale), 30. April 2003

Lebenslauf

	Kristin Winkler
	geb. am 23. April 1975 in Zittau
09/1981-07/1989	Polytechnische Oberschule Großschönau
09/1989-06/1993	Spezialschule math.-naturwiss.-techn. Richtungen Riesa bzw. Werner-Heisenberg-Gymnasium Riesa
06/1993	Abitur
10/1993-01/1999	Studium der Mathematik an der TU Dresden
09/1997-02/1998	Gaststudium an der Université Paris IX Dauphine unter Betreuung von Frau H. Frankowska
01/1999	Diplom in Mathematik
seit 04/1999	Promotionsstudium der Mathematik an der MLU Halle-Wittenberg
04/1999-12/2001	Graduiertenstipendium des Landes Sachsen-Anhalt
seit 01/2002	Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Optimierung und Stochastik der MLU Halle-Wittenberg

Liste der Publikationen

Winkler, K.: Characterizations of efficient points in convex vector optimization problems. *Math. Meth. Oper. Res. 53*, 205-214, 2001.

Winkler, K.: Skalarisierung mehrkriterieller Optimierungsprobleme mittels schiefer Normen. *In: Habenicht, W., Scheubrein, B. und Scheubrein, R., Multi-Criteria- und Fuzzy-Systeme in Theorie und Praxis.* Gabler Edition Wissenschaft, 2003.

Tammer, Chr., Winkler, K.: A new scalarization approach and applications in multicriteria d.c. optimization. *Erscheint in: Nonlinear Analysis and Convex Analysis.*