



FAKULTÄT FÜR  
MASCHINENBAU

## **Schwingungsanalysen unter ganzheitlicher Berücksichtigung elektromagnetischer Lasten**

**Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktoringenieur  
(Dr.-Ing.)**

von Dipl.-Ing. Sebastian Wegner

geb. am 09.12.1986 in Schönebeck (Elbe)

genehmigt durch die Fakultät für Maschinenbau  
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Elmar Woschke  
Prof. Dr.-Ing. Roberto Leidhold

Promotionskolloquium am 16.03.2023



# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>XII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Grundlagen Elektromotoren . . . . .	3
1.2 Spezifikation des Versuchsmotors . . . . .	4
1.3 Kräfte aufgrund von Lageabweichungen . . . . .	10
1.3.1 Lageabweichungen zwischen Rotor und Stator . . . . .	10
1.3.2 Der Unbalanced Magnetic Pull (UMP) . . . . .	12
1.4 Akustische Untersuchung von Motoren . . . . .	14
<b>2 Elektrodynamische Untersuchung mittels Finite Elemente Methode</b>	<b>17</b>
2.1 Mathematische Grundlagen der Elektrodynamik . . . . .	17
2.1.1 Finite Elemente Methode zur Beschreibung der Elektrodynamik . . . . .	20
2.2 Hysterese . . . . .	24
2.3 Elektromagnetische Kräfte und Momente . . . . .	25
2.4 Höherwertige Finite Elemente . . . . .	29
2.5 Elektromagnetische Finite Elemente Analyse . . . . .	29
2.5.1 Verwendung von 3D-Modellen . . . . .	39
2.6 Relativbewegung von Stator und Rotor . . . . .	43
2.7 Methoden zur Steigerung der Rechenzeiteffizienz . . . . .	47
2.7.1 Partikulärer Matrixaufbau . . . . .	47
2.7.2 Substrukturtechnik . . . . .	49
2.7.3 Periodische Randbedingungen . . . . .	51
2.7.4 Antiperiodische Randbedingungen . . . . .	52
2.8 Drehzahlabhängiges Verhalten des Motors . . . . .	54
2.8.1 Einfluss von Wirbelströmen . . . . .	55
2.8.2 Einfluss verschiedener Fertigungsabweichungen . . . . .	57
2.8.3 Verifizierung der elektromagnetischen Kraftroutine der MKS . . . . .	64
<b>3 Experimentelle Untersuchung des Motors</b>	<b>67</b>
3.1 Grundlagen . . . . .	67
3.1.1 Gleichrichter . . . . .	67
3.1.2 Drehmomentenmessung mit DMS . . . . .	69
3.2 Versuchsaufbau . . . . .	69

3.3	Ergebnisse und Auswertung . . . . .	71
3.3.1	Bootsmotor im Generatorbetrieb . . . . .	71
3.3.2	Bootsmotor im Motorbetrieb . . . . .	74
3.4	Validierung der FE-Umsetzung . . . . .	80
3.4.1	Bootsmotor im Motorbetrieb . . . . .	81
3.4.2	Bootsmotor im Generatorprinzip . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Schwingungsuntersuchung mit ganzheitlicher Berücksichtigung der Elektrodynamik</b>	<b>84</b>
4.1	Mathematische Grundlagen der Mehrkörpersimulation . . . . .	84
4.2	Programmstruktur . . . . .	89
4.3	Anwendung der ganzheitlichen Methode . . . . .	91
4.3.1	Abschätzung relevanter Größen . . . . .	91
4.3.2	Struktur-Magnetfeld-Interaktion . . . . .	98
4.3.3	Einfluss elektrodynamischer Lasten auf die Akustik . . . . .	104
4.3.4	Designvariationen des Zylinders . . . . .	109
4.3.5	Designvariationen des Deckels . . . . .	114
4.3.6	Experimentelle Untersuchung des verbesserten Motors . . . . .	114
4.3.7	Bewertung des hinsichtlich der Schallleistung ausgewählten Motors	117
4.3.8	Schwingungsverhalten des Antriebsstrangs . . . . .	117
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>125</b>
	<b>Literatur</b>	<b>127</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>135</b>
A.1	B-H-Kennlinie des Stators . . . . .	136
A.2	Gauß-Integration . . . . .	137
A.3	Funktionsweise ausgewählter Bauteile . . . . .	138
A.3.1	Klauenkupplung mit Elastomer . . . . .	138
A.3.2	Stevenrohr (engl. stern tube) . . . . .	138

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Klassifizierung von Motoren nach [11] . . . . .	5
1.2	Längsschnitt des untersuchten permanenterregten Außenläufers mit Beschriftung der elektromagnetisch relevanten Komponenten. Modell von Dr. Andreas Zörnig, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg. . . . .	6
1.3	E-Gleitboot, in dem der untersuchte Motor zweimal verwendet wird. Modell von WTZ Roßlau. . . . .	6
1.4	2D-Modell eines Polpaars des Motors, mit Radien. . . . .	7
1.5	Querschnitt eines Leiters mit Bemaßung in mm nach [15]. . . . .	8
1.6	Schematischer Verlauf eines Leiters [14]. . . . .	8
1.7	B-H-Kennlinie des No20-Metalls [18] . . . . .	11
1.8	Experimentell ermittelte Drehzahl-Strom-Drehmomentenverlauf [18]. . . .	11
1.9	Links: Zentrische Lage des Rotors; Mitte: Statische Exzentrizität des Rotors; Rechts: Dynamische Exzentrizität des Rotors; Der grüne Punkt zeigt die Mitte des Stators, der rote die Mitte des Rotors und der Blaue zeigt einen Punkt auf dem Rotor. Die Kreise zeigen den Orbit des zugehörigen Punktes im nicht rotierenden Koordinatensystem. . . . .	12
1.10	UMP in Abhängigkeit der Exzentrizität bei einem einseitig gekippten Rotor [35]. . . . .	14
1.11	UMP bei elastischen Wellen durch abschnittsweise zweidimensionale Modelle [37]. . . . .	15
2.1	Beschreibung der Hysterese mit linearen Materialmodellen, mit den links dargestellten weichmagnetischen und rechts hartmagnetischen Materialien nach [58]. . . . .	25
2.2	Magnetisches Feld $\underline{H}$ an der Elementfläche für die Bestimmung der resultierenden Kraft. . . . .	27
2.3	Konvergenzraten der h, p und hp-Version der FEM für ein zweidimensionales lineares elastisches Problem mit Singularitäten [62] . . . . .	30
2.4	Vierecks-Serendipity Elemente bis zum Polynomgrad 3, mit Ansatzfunktionen nach [63]. . . . .	31
2.5	Ein Segment des untersuchten Motors mit einem beispielhaften FE-Netz, sowie den mit rotem Punkt gekennzeichneten Knoten, an dem das Vektorpotential bei verschiedenen Netzen verglichen wird. . . . .	33
2.6	Drehmoment in Abhängigkeit des Nullphasenwinkels $\varphi_0$ . . . . .	34

2.7	Konvergenzverhalten des Vektorpotentials $A$ bei der magnetostatischen Untersuchung des untersuchten Motors an einem ausgewählten Punkt (siehe Kapitel 2.5). . . . .	34
2.8	Konvergenzverhalten des Rotordrehmoments $M_{Rot}$ bei der magnetostatischen Untersuchung des untersuchten Motors mit nichtlinearem Materialverhalten des Stators. . . . .	35
2.9	Konvergenzverhalten der Kraft $F_y$ , welche in Richtung der Exzentrizität wirkt, bei einer Exzentrizität von 250 $\mu\text{m}$ . . . . .	35
2.10	Konvergenzverhalten der Kraft $F_x$ , welche senkrecht zur Exzentrizität wirkt, bei einer Exzentrizität von 250 $\mu\text{m}$ . . . . .	36
2.11	Für den untersuchten Motor resultierender UMP in Abhängigkeit der Exzentrizität. . . . .	36
2.12	Relativer Fehler des Drehmoments in Abhängigkeit einer konstanten Permeabilität des Stators, unter Verwendung verschiedener Ansatzfunktionen. . . . .	37
2.13	Vektorpotential $A$ eines Segments des untersuchten Motors, unter Berücksichtigung der umgebenden Luft und des Aluminiumzylinders. . . . .	38
2.14	Ausschnitt des Motormodells mit runden Leitern aus je einem Element mit quadratischen Ansatzfunktionen. links: für die Darstellung werden die Punkte des Elements verwendet; rechts: für die Darstellung wird die Ansatzfunktion verwendet. . . . .	39
2.15	Konvergenzverhalten des Motormoments für das dreidimensionale Modell mit quadratischen Elementen. Ober- und unterhalb des elektromagnetisch wirksamen Bereichs befinden sich jeweils zwei Elementschichten Luft mit einer jeweiligen Höhe von 0,03 m. . . . .	40
2.16	Rotor mit Schiefstellung, in Anlehnung an [32]. . . . .	41
2.17	links: Motor mit Schiefstellung des Rotors; rechts: Rotor mit der aus der Schiefstellung resultierenden Streckenlast des UMP. . . . .	42
2.18	Relativer Fehler des berechneten resultierenden Kippmoments in Abhängigkeit der genutzten Anzahl an gleichgroßen 2D-Motorsegmenten mit mittiger Kraftbestimmung. . . . .	43
2.19	Motor mit hervorgehobenem Bandbereich, der für die translatorische und rotatorische Relativbewegung von Rotor und Stator eine wichtige Rolle spielt. . . . .	44
2.20	Ausschnitt des Motormodells mit blau hervorgehobenen ursprünglichen Bandedementen, grünen Bandedementen ohne Neuvernetzung und roten Bandedementen mit Neuvernetzung, zur Veranschaulichung der Neuvernetzung am Band nach Bastos [56]. . . . .	45
2.21	Sprünge im Drehmomentenverlauf durch regelmäßige Neuvernetzung bei einem beispielhaften Hochlauf. . . . .	46
2.22	Motor, bei dem die Drehung des Rotors um $6,4^\circ$ durch Anpassung der Topologie realisiert wurde. . . . .	49

2.23	Besetzung der symmetrischen Induktionsmatrix mit den rot dargestellten Rotor- und den blau dargestellten Statoreinträgen. Die Gleichungen des Rotors und des Stators sind entkoppelt. . . . .	50
2.24	Motorsegment mit periodischen Randbedingungen . . . . .	53
2.25	Vergleich des Vektorpotentials für das komplette, das antiperiodische und das periodische Modell. . . . .	54
2.26	Spektrogramm des Motormoments bei linearen Materialien und unter Vernachlässigung dynamischer Effekt in zentrischer Lage, mit vier gekennzeichneten Superharmonischen (siehe Tabelle 2.2). . . . .	56
2.27	Spektrum der resultierenden Kraft bei linearen Materialien und unter Vernachlässigung dynamischer Effekte in zentrischer Lage. . . . .	56
2.28	Spektrum des Motormoments bei links: grober Vernetzung ( $29 \cdot 10^3$ FG) und rechts feiner Vernetzung ( $95 \cdot 10^3$ FG) . . . . .	57
2.29	Spektrum des Motormoments bei einer Ausgabeschrittweite von $2 \cdot 10^{-5}$ s. . . . .	58
2.30	Spektrum des Motormoments unter Berücksichtigung der Wirbelströme. . . . .	58
2.31	Spektrum des Motormoments bei einer statischen Exzentrizität von $125 \mu\text{m}$ . . . . .	59
2.32	Spektrum der resultierenden Kraft bei einer statischen Exzentrizität von $125 \mu\text{m}$ . . . . .	60
2.33	Spektrum des Motormoments bei einer Rundheitsabweichung von Rotor und Stator. . . . .	61
2.34	Spektrum des Drehmoments, wenn ein Magnet 90 % der Nennmagnetisierung aufweist. . . . .	61
2.35	Spektrum des Drehmoments, wenn jeder zweite Magnet 97 % der Nennmagnetisierung aufweist. . . . .	62
2.36	Spektrum des Drehmoments bei einer zufälligen Magnetisierung von 97 % - 103 % der Nennmagnetisierung. . . . .	63
2.37	Spektrum des Drehmoments bei paarweise verbauten Magneten. . . . .	63
2.38	ANSYS-Modell für die Verifizierung des genutzten Modells und der umgesetzten FEM. . . . .	65
2.39	Mit ANSYS ermitteltes Spektrogramm des Motormoments bei zentrischer Lage des Rotors mit konstanter Permeabilität. . . . .	65
2.40	Mit ANSYS ermitteltes Spektrogramm des Motormoments bei zentrischer Lage des Rotors mit feldabhängiger Permeabilität. . . . .	66
2.41	Vergleich von konstanter und feldabhängiger Permeabilität bei einem Hochlauf mit ANSYS. . . . .	66
3.1	Ausschnitt eines Simulinkmodells eines Gleichrichters. . . . .	68
3.2	links: Wechselspannung vor dem Gleichrichter zwischen den Phasen u und v, rechts: Strom der Phase u vor dem Gleichrichter. . . . .	68

3.3	Versuchsaufbau zur Validierung der erstellten Modelle und umgesetzten Programme mit den Komponenten: (1) Prüfstandsmotor, (2) Ausgleichskupplung, (3) Drehmomentensensor, (4) Gelenkwelle, (5) Welle, (6) Federkupplungen, (7) Versuchsmotor . . . . .	70
3.4	Widerstände und Gleichrichter für den Generatorbetrieb des Motors . . .	71
3.5	Winkel-Zeit-Verlauf bei einem Hoch- und Runterlauf des Motors. . . . .	72
3.6	Drehzahl-Zeit-Verlauf bei einem Hoch- und Runterlauf des Motors. . . . .	72
3.7	Ausschnitt der Strom-Zeit-Kennlinie eines Motorhochlaufs im Generatorbetrieb unter Verwendung eines Gleichrichters und elektrischer Widerstände. . . . .	73
3.8	Spektrogramm des Stroms bei einem Hochlauf des Motors im Generatorbetrieb unter Verwendung eines Gleichrichters und elektrischer Widerstände. . . . .	74
3.9	Ausschnitt der Spannung-Zeit-Kennlinie eines Motorhochlaufs im Generatorbetrieb unter Verwendung eines Gleichrichters und elektrischer Widerstände. . . . .	75
3.10	Spektrogramm der Spannung bei einem Hochlauf des Motors im Generatorbetrieb unter Verwendung eines Gleichrichters und elektrischer Widerstände. . . . .	75
3.11	Spektrogramm des Drehmoments am Versuchsmotor bei einem Hochlauf des Motors im Generatorbetrieb unter Verwendung eines Gleichrichters und elektrischer Widerstände. . . . .	76
3.12	Ausschnitt der Strom-Zeit-Kennlinie eines Motorhochlaufs im Motorbetrieb, bei einer Schaltfrequenz des Controllers von 20 kHz . . . . .	77
3.13	Veranschaulichung der Pulsdauermodulation nach [75] . . . . .	77
3.14	Spektrogramm des Stroms bei einem Hochlauf des Motors im Motorbetrieb unter Verwendung eines Controllers. . . . .	78
3.15	Ausschnitt der Spannung-Zeit-Kennlinie eines Motorhochlaufs im Generatorbetrieb unter Verwendung eines Gleichrichters und elektrischer Widerstände. . . . .	79
3.16	Spektrogramm der Spannung bei einem Hochlauf des Motors im Generatorbetrieb unter Verwendung eines Gleichrichters und elektrischer Widerstände. . . . .	79
3.17	Spektrogramm des Drehmoments am Versuchsmotor bei einem Hochlauf des Motors im Motorbetrieb bis 2 kHz unter Verwendung eines Gleichrichters und elektrischer Widerstände. . . . .	80
3.18	Spektrogramm des Schalldruckpegels am Versuchsmotor bei einem Hochlauf des Motors im Motorbetrieb. . . . .	81
3.19	Numerisch ermitteltes Spektrogramm des Drehmoments bis 2 kHz im Motorbetrieb unter Verwendung der gemessenen Ströme und der Drehzahl als Eingangsgrößen der Simulation. . . . .	82

---

3.20	Numerisch ermitteltes Spektrogramm des Drehmoments bis 2 kHz im Generatorprinzip, unter Verwendung der gemessenen Ströme und der Drehzahl als Eingangsgrößen der Simulation. . . . .	83
4.1	Prinzipbild der MKS. Auf Körper I wirken an den Knoten A, B und S (Schwerpunkt) Kräfte, die durch Interaktion mit den Körpern II-IV hervorgerufen werden. . . . .	85
4.2	Körper mit dem Schwerpunkt S, dem Punkt A und B sowie einem körperfesten und einem raumfesten Koordinatensystem. . . . .	86
4.3	Programmstruktur. . . . .	90
4.4	Querschnitt des Motors mit dem blau gekennzeichneten Schrägkugellager 3005-B-2RZ-TVH (Festlager) und dem grün gekennzeichneten Rillenkugellager 61813-2RZ-Y (Loslager). Zeichnung von Andreas Zörnig, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg. . . . .	92
4.5	Kraft-Weg-Kennlinie eines Segments der Lager. Links des Schrägkugellagers 3005-B-2RZ-TVH und rechts des Rillenkugellagers 61813-2RZ-Y. . . . .	94
4.6	Veranschaulichung der Wirkrichtung der Hertzschen Pressung zur Demonstration der Notwendigkeit der Korrektur. Die Außenkante des blau dargestellten Außenrings wird gegen den Innenring verschoben, dessen Bewegungsfreiheitsgrade an der Innenkante gesperrt sind. Die Farben veranschaulichen die Verschiebung. . . . .	95
4.7	Steifigkeit-Weg-Kennlinie eines Segments. Links des Schrägkugellagers 3005-B-2RZ-TVH und rechts des Rillenkugellagers 61813-2RZ-Y. . . . .	95
4.8	Modell eines Lagersegments zur Bestimmung der Lagersteifigkeit. . . . .	96
4.9	Mit ANSYS ermittelte Gesamtsteifigkeit der Lager. . . . .	96
4.10	Modelle zur Abschätzung von Verdrehung (links) und Durchbiegung (rechts) des Rotors. . . . .	98
4.11	Spektrogramm des Motormoments für den Motorbetrieb mit der gekoppelten Analyse von Strukturschwingung und Magnetkreis. . . . .	100
4.12	Spektrogramm der Motorkräfte in x-Richtung für den Motorbetrieb mit der gekoppelten Analyse von Strukturschwingung und Magnetkreis. . . . .	100
4.13	Spektrogramm der Motorkräfte in y-Richtung für den Motorbetrieb mit der gekoppelten Analyse von Strukturschwingung und Magnetkreis. . . . .	101
4.14	Spektrogramm der Wellenverschiebung in x-Richtung für den Motorbetrieb mit der gekoppelten Analyse von Strukturschwingung und Magnetkreis. . . . .	101
4.15	Spektrogramm der Kräfte im Schrägkugellager in x-Richtung für den Motorbetrieb mit der gekoppelten Analyse von Strukturschwingung und Magnetkreis. . . . .	102

4.16	Spektrogramm der Motorkräfte in x-Richtung für den Motorbetrieb, mit Berücksichtigung des UMP durch eine Feder mit negativer konstanter Steifigkeit. . . . .	103
4.17	Spektrogramm der Motorkräfte in y-Richtung für den Motorbetrieb, mit Berücksichtigung des UMP durch eine Feder mit negativer konstanter Steifigkeit. . . . .	103
4.18	Workflow von ANSYS Workbench, zur akustischen Untersuchung des Motors unter Nutzung der ermittelten elektromagnetischen Lasten. . . . .	104
4.19	Motormodell für die Modalanalyse und harmonische Analyse. . . . .	105
4.20	Vergleich der mit ANSYS und der vorgestellten Methode bestimmten Kraft auf einen Magneten bei einer Motordrehzahl von 1000 1/min. . . . .	105
4.21	Vergleich des mit ANSYS und der vorgestellten Methode bestimmten Drehmoments auf einen Magneten bei einer Motordrehzahl von 1000 1/min. . . . .	105
4.22	Die ersten sechzehn Eigenfrequenzen des Versuchsmotors mit zugehörigen Eigenformen. . . . .	107
4.23	Frequenzgang des Ausgangsmotors mit zugehörigen Eigenformen. . . . .	108
4.24	Modell der Akustiksimulation mit zugehöriger Vernetzung. . . . .	108
4.25	Frequenzgang der akustischen Untersuchung des Ausgangsmotors mit zugehörigen Eigenformen. . . . .	108
4.26	Untersuchte Designvariationen für die Verbesserung der Akustik des untersuchten Motors. Dabei ist 02 das originale Design. . . . .	110
4.27	Untersuchte Designvariationen des Deckels für die Verbesserung der Akustik des untersuchten Motors. . . . .	111
4.28	Frequenzgang des Schalleistungspegels der Zylinder 02, 83, 132 und 136 mit angegebenem Schalldruckpegel. . . . .	112
4.29	Terzpegel der Schalleistung der Zylinder 02, 83, 132 und 136 mit angegebenem Schalldruckpegel. . . . .	113
4.30	Terzpegel der Schalleistung der Zylinder 01, 82, 131 und 135 mit angegebenem Schalldruckpegel. . . . .	113
4.31	Terzpegel der Schalleistung der Zylinder 81, 111, 134 und 150 mit angegebenem Schalldruckpegel. . . . .	113
4.32	Frequenzgang der Schalleistung der Zylinder 01, 02, 136 und 150 bei 1000 U/min. . . . .	115
4.33	Terzpegel der Schalleistung der Zylinder 01, 02, 136 und 150 bei 1000 U/min. . . . .	115
4.34	Terzpegel der Schalleistung der Zylinder 83, 131 und 132 bei 1000 U/min. . . . .	115
4.35	Terzpegel der Schalleistung des Zylinders 136 mit den Deckeln a, b, c und d bei breitbandiger Anregung. . . . .	116
4.36	Terzpegel der Schalleistung des Zylinders 136 mit den Deckeln a, e, f und g bei breitbandiger Anregung. . . . .	116

4.37	Verbesserter Motor 136 auf dem Prüfstand und sowie die Prototypen 150 und 01. . . . .	117
4.38	Schalleistungspegel der Konfiguration 02 bei einer Drehzahl von 1000 Hz. . . . .	118
4.39	Schalleistungspegel der Konfiguration 136 bei einer Drehzahl von 1000 Hz. . . . .	118
4.40	Schalleistungspegel der Konfiguration 01 bei einer Drehzahl von 1000 Hz. . . . .	119
4.41	Schalleistungspegel der Konfiguration 150 bei einer Drehzahl von 1000 Hz. . . . .	119
4.42	Schalleistungspegel bei einer Drehzahl von 1000 Hz von Konfiguration 150 mit Partikeldämpfern. . . . .	120
4.43	Ermittelte Schalldruckamplituden im Frequenzbereich 2 kHz bis 3 kHz, bei Mikrofonarraymessung des elektrischen Gleitboots an Land [89] . . . . .	121
4.44	Abmessungen des Antriebsstrangs (Darstellung ist nicht maßstabsgetreu), mit dem Propeller (a), dem Stevenrohr (b), dem Lager (c), der Kupplung (d), dem Motor (e) und der Welle (f). . . . .	122
4.45	Modell des Antriebsstrangs des Gleitboots . . . . .	122
4.46	Spektrogramm des Stehlagers bei einem Hochlauf des Antriebsstrangs. . . . .	123
4.47	Spektrogramm des Stevenrohrs bei einem Hochlauf des Antriebsstrangs. . . . .	123
4.48	Spektrogramm des Loslagers bei einem Hochlauf des Antriebsstrangs. . . . .	124
4.49	Spektrogramm des Festlagers bei einem Hochlauf des Antriebsstrangs. . . . .	124
A.1	Elastische Klauenkupplung [92] . . . . .	138
A.2	Beispiel eines Stevenrohrs mit 175 mm Länge und einem Durchmesser von 150 mm [94]. . . . .	139

# Symbolverzeichnis

## Akronyme

Symbol	Bedeutung
DGL	Differentialgleichung bzw. Differentialgleichungssystem
DMS	Dehnungsmessstreifen
FEM	Finite Elemente Methode
FG	Freiheitsgrade
MKS	Mehrkörpersimulation
UMP	Unbalanced Magnetic Pull

## Mathematische Operationen und Notationen

Symbol	Bedeutung
$A, a$	Skalar
$\underline{A}$	Vektor
$\underline{\underline{A}}$	Matrix
$\text{div}(\underline{A})$	Divergenz
$\text{rot}(\underline{A})$	Rotation
$\text{grad}(\underline{A})$	Gradient
$\dot{A}$	Zeitliche Ableitung im raumfesten Koordinatensystem
$A'$	Zeitliche Ableitung im körperfesten Koordinatensystem
$A_i$	i-te Eintrag des Vektors $\underline{A}$
$A_x$	x-Komponente des Vektors $\underline{A}$
$A_y$	y-Komponente des Vektors $\underline{A}$
$A_z$	z-Komponente des Vektors $\underline{A}$
$A^e$	A vom e-ten Element

---

## Lateinische Buchstaben

Symbol	Bedeutung
$A$	magnetisches Vektorpotential
$\tilde{A}$	Querschnittsfläche
$B$	magnetische Flussdichte
$B_r$	remanente magnetische Flussdichte
$c$	Federsteifigkeit
$d$	Durchmesser
$D$	elektrische Flussdichte
$E$	elektrische Feldstärke
$e$	Spezifische Restunwucht
$f$	Frequenz
$F$	Kraft
$\underline{\underline{G}}$	Übertragungsmatrix
$\hat{G}$	Auswuchtgüte
$\hat{G}$	Schubmodul
$H$	magnetische Feldstärke
$H_c$	Koerzitivfeldstärke
$h_a$	äußere Kräfte
$h_\omega$	Zentrifugal- und Corioliskräfte
$I$	Strom
$\tilde{I}$	Flächenträgheitsmoment
$J$	Stromdichte
$\tilde{J}$	Jacobimatrix
$\underline{\underline{J}}$	Massenträgheitsmoment
$K$	Permeabilitätsmatrix
$L_p$	Schalldruckpegel
$L$	Wirbelstrom
$\tilde{L}$	Drehimpuls
$l$	Länge
$M$	Moment
$m$	Masse
$N$	Ansatzfunktion der Finite Elemente Methode
$n$	Anzahl

---

### Lateinische Buchstaben

Symbol	Bedeutung
$\underline{\underline{P}}$	Übertragungsmatrix
$p$	Polynomgrad
$\tilde{p}$	Impuls
$\hat{p}$	Druck
$pp$	Polpaarzahl
$q$	Flächenlast
$Q$	Induktion
$\tilde{Q}$	Drehmatrix
$\underline{\underline{R}}$	elektrischer Widerstand
$Re$	Residuum
$RS$	Vektor der rechten Seite
$r$	Ortsvektor
$\tilde{r}$	Radius
$t$	Zeit
$Topo$	Topologiematrix der FEM
$\underline{U}$	Spannung
$\tilde{U}$	Unwucht
$v$	Geschwindigkeit
$w$	Wichtung
$Y$	E-Modul

---

---

## Griechische Buchstaben

Symbol	Bedeutung
$\alpha$	Penaltyfaktor
$\gamma$	Dehnung
$\delta$	Verschiebung
$\epsilon$	Permittivität
$\epsilon_0$	elektrische Feldkonstante
$\epsilon_r$	relative Permittivität
$\zeta$	lokale Koordinate der Finite Elemente Methode
$\eta$	lokale Koordinate der Finite Elemente Methode
$\iota$	Verdrehwinkel
$\lambda$	Lagrange-Multiplikator
$\mu$	magnetische Permeabilität
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante
$\mu_r$	Permeabilitätszahl
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\xi$	lokale Koordinate der Finite Elemente Methode
$\rho$	Ladungsdichte
$\sigma$	elektrische Leitfähigkeit
$\phi$	skalares Potential
$\varphi$	Phasenwinkel
$\tilde{\varphi}$	Drehwinkel
$\chi$	Krümmungsradius
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit
$\tilde{\omega}$	Spinnmatrix
$\Omega$	Gebiet

---



# Kurzfassung

Der Klimawandel zwingt weite Bereiche der Industrie und Forschung, vorhandene Konzepte zu überarbeiten und Technologien einzusetzen, die weniger Treibhausgase, wie Kohlenstoffdioxid, während des Lebenszyklus ausstoßen. Aus diesen Veränderungen resultiert Forschungsbedarf, um die neuen Herausforderungen bestmöglich zu lösen und so Wettbewerbsvorteile gegenüber Mitbewerbern zu generieren. Aus den genannten Gründen gewinnen Elektrofahrzeuge zunehmend an Bedeutung und verdrängen die derzeitig dominierenden Fahrzeuge mit Verbrennungsmotor zunehmend. Durch die Verwendung elektrischer Motoren ist ein neuer Anregungsmechanismus im Antriebsstrang des Fahrzeugs vorhanden, der sich unter anderem durch seine Akustik deutlich vom bisher verwendeten Verbrennungsmotor unterscheidet.

Die vorliegende Arbeit untersucht die Wechselwirkung elektromagnetischer Felder und den daraus resultierenden Lasten mit den Schwingungen des mechanischen Systems, wie dem Motorgehäuse oder dem Antriebsstrang, am Beispiel eines elektrischen Bootsmotors. Diese Wechselwirkungen werden beispielsweise durch translatorische Relativbewegungen zwischen Rotor und Stator hervorgerufen, welche die elektromagnetischen Felder und damit auch Lasten verändern und so das Schwingungsverhalten und die Relativbewegung selbst beeinflussen. Dazu wird ein ganzheitlicher Simulationsansatz umgesetzt, indem ein Programm für Mehrkörpersimulationen, um elektrodynamische Lasten erweitert wird. Die Verwendung von Mehrkörperanalysen erlaubt eine Schwingungsanalyse bei allgemeiner räumlicher Bewegung. Die Erweiterung verwendet die Finite Elemente Methode, um die elektromagnetischen Felder in Abhängigkeit der aktuellen Zustandsgrößen zu ermitteln und daraus die Lasten abzuleiten. Auf diese Weise werden die Interaktionen des mechanischen und elektrischen Systems berücksichtigt. Die Kenntnis dieser Größen ermöglicht die Durchführung nachgelagerter Untersuchungen. Beispielhaft wird die Akustik des untersuchten Motors unter Berücksichtigung der ermittelten elektromagnetischen Lasten bei verschiedenen Außen geometrien bestimmt und daraus resultierend ein verbesserter Prototyp entwickelt. Durch die ganzheitliche Betrachtung von elektrischem und mechanischem System wird eine bessere Prediktionsgüte umgesetzt, wodurch sich der experimentelle Aufwand verringert und weniger Prototypen, welche mit erheblichen Kosten verbunden sind, notwendig sind.

## Abstract

Climate change is forcing large sectors of industry and research to revise existing concepts and use technologies that emit fewer greenhouse gases, such as carbon dioxide, during their life cycle. These changes result in a need for research in order to solve the new challenges in the best possible way and thus generate competitive advantages. For the reasons mentioned above, electric vehicles are gaining in importance and are increasingly displacing the currently dominant vehicles with internal combustion engines. The use of electric motors means that a new excitation mechanism is present in the vehicle's drivetrain, which differs significantly from the combustion engine in terms of its acoustics, among other things.

The present work investigates the interaction of electromagnetic fields with the vibration of the mechanical system using the example of an electric boat engine. For this purpose, a holistic simulation approach is implemented, in which an existing program for multibody simulations is extended by a force element for electrodynamic loads. This force element uses the finite element method to determine the electromagnetic fields as a function of the current state variables and determines the resulting loads. In this way, the interactions of both systems are taken into account. The knowledge of these quantities allows further investigations. As an example, the sound radiation of the investigated motor is determined under consideration of the detected electromagnetic loads with different external geometries and an improved prototype is developed as a result. By taking a holistic view of the electrical and mechanical system, better prediction quality is expected, reducing experimental effort and requiring fewer prototypes, which are associated with significant costs.

# 1 Einleitung

„Der fortschreitende Klimawandel wird voraussichtlich zu deutlich mehr Extremwetter Ereignissen überall auf der Welt führen. Wir können nicht endlos emittieren, weil sonst die Natur zurückschlägt. Die Folgen unkontrollierter Erderwärmung sind Überflutungen, Dürren, Hitzewellen und die daraus entstehenden Konflikte um Wasser und Weideland. Deshalb sind Maßnahmen zur Anpassung an den Klimawandel und ein angemessenes Risikomanagement in verstärktem Umfang notwendig. Neben unserem unermüdlichen Einsatz für Fortschritte in den internationalen Klimaschutzverhandlungen und für rechtlich verbindliche Regeln müssen wir auf den Klimawandel auch eine technologische Antwort finden. Sie ist Bedingung für Wachstum in der Zukunft, gerade für die Entwicklungs- und Schwellenländer.“ [1] sagte 2011 Dr. Norbert Rötgen in der Funktion als Bundesminister für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit. Mit dieser Aussage stimmt er mit der überwiegenden Mehrheit der Wissenschaftler überein, dass der menschengemachte Klimawandel, welcher durch den Ausstoß von Treibhausgasen wie Kohlenstoffdioxid und Methan hervorgerufen wird, ein großes Problem unserer Zeit ist. Das Weltwirtschaftsforum veröffentlicht jährlich den Bericht „The Global Risks Report“. In der aktuellen Version (2022) wird der Klimawandel und dessen Folgen als größte Bedrohung für die Menschheit bezeichnet [2]. Wesentliche Probleme sind der Anstieg des Meeresspiegels, der Verlust von Lebensraum und die Zunahme von Extremwetterereignissen. Ein Beispiel einer solchen Extremwetterlage in Deutschland ist das Hochwasser in Rheinland-Pfalz im Jahr 2021, mit vielen Opfern und enormen wirtschaftlichen Schäden [3].

Um die Folgen des Klimawandels und die damit verbundenen Gefahren für Menschen, Ökosysteme und Wirtschaft zu verringern, wird daran gearbeitet, die Treibhausgasemission durch Forschung, Anreize und Regeln zu verringern. Dies zeigt sich beispielsweise im Bereich der Mobilität, bei der bereits heute von Mobilitätswende gesprochen wird, welche unter anderem eine Transformation von fossilen zu erneuerbaren Energien zum Ziel hat, wodurch elektrifizierte Fahrzeuge zunehmend an Bedeutung gewinnen. Damit verbunden ist ein erhöhter Forschungsbedarf, um die neuen Herausforderungen in verschiedenen Bereichen durch Innovation zu meistern. An der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg wurden beispielsweise die öffentlich geförderten Vorhaben „Kompetenzzentrum eMobility“ (KeM) und „COmpetence in MObility“ (COMO) durchgeführt, bei denen Forscher verschiedener Fachbereiche gemeinsam Untersuchungen zur E-Mobilität umsetzten. Auf diese Weise wurden beispielsweise Motoren und Konzepte für deren Fertigung entwickelt, elektrifizierte Prototypen gebaut und Untersuchungen zum autonomen Fahren durchgeführt. Auch die in dieser Arbeit vorgestellte „Schwingungsanalysen unter ganz-

heitlicher Berücksichtigung elektromagnetischer Lasten“, wurde im Rahmen dieses Forschungsvorhabens initiiert und bearbeitet.

Die vorliegende Arbeit hat das Ziel, ein methodisches Vorgehen umzusetzen, um das Schwingungsverhalten von elektrifizierten Fahrzeugen detailliert analysieren zu können. Am Beispiel eines elektrischen Bootsmotors soll dieses Vorgehen genutzt werden, um das Schwingungsverhalten des Antriebsstrangs unter Berücksichtigung elektrodynamischer Lasten zu beschreiben und so die Prediktionsgenauigkeit zu verbessern. Dies ist wichtig, da Prototypen sehr teuer sind und die Kosten für Änderungen in späteren Entwicklungsphasen zunehmen. Das Schwingungsverhalten hat beispielsweise Einfluss auf die Akustik, den Komfort, den Verschleiß und damit auf die Lebensdauer. Das heißt, bei der Entwicklung neuer Fahrzeuge ist es entscheidend, dass das Verhalten des Fahrzeugs und der Einfluss von Änderungen und Anpassungen vor der Herstellung des Prototypen möglichst gut abgeschätzt werden kann, um die Kosten für spätere Änderungen und eine Vielzahl von Prototypen zu vermeiden.

Bei einer Simulation wird die Realität durch mathematische Modelle approximiert, welche eine Vorhersage des Verhaltens erlauben. Die Nutzbarkeit dieser Modelle wird mit Hilfe von Experimenten validiert. In dieser Arbeit ist eine Methodik beschrieben, validiert und angewendet, die es erlaubt, das Schwingungsverhalten eines Systems unter Berücksichtigung von elektromagnetischen Kräften zu bestimmen. Die Wechselwirkungen von elektrischem und mechanischem System werden mit einem ganzheitlichen Ansatz berücksichtigt. Das heißt, beide Systeme werden zu jedem Zeitpunkt gemeinsam und in einem Programm gelöst. Im Gegensatz dazu sind bei Co-Simulationen zwei separate Programme miteinander gekoppelt, die zu bestimmten Zeitpunkten aktuelle Zustandsgrößen austauschen. Außerhalb dieser Austauschzeitpunkte müssen die aktuellen Zustandsgrößen des jeweils anderen Systems interpoliert werden, was sich negativ auf die Genauigkeit auswirkt. Für den ganzheitlichen Ansatz wird ein bestehendes Programm für Mehrkörpersimulationen (MKS) um ein Kraftelement erweitert, welches in Abhängigkeit der aktuellen Systemeigenschaften die elektromagnetischen Kräfte, unter Nutzung der Finite Elemente Methode (FEM), bestimmt. In einem ersten Schritt wird das Kraftelement in Matlab und anschließend in Fortran umgesetzt, da das zu erweiternde MKS-Programm ebenfalls in Fortran vorliegt. Die Verwendung der MKS erlaubt eine Schwingungsanalyse bei allgemeinen räumlichen Bewegungen von Körpern und deren Interaktionen.

Die entwickelte Methodik wird mit Hilfe von kommerzieller Software und mit experimentellen Untersuchungen verifiziert bzw. validiert. Nachdem die Nutzbarkeit der Methode auf diese Weise nachgewiesen ist, dient ein permanenterregter Synchronmotor, der als Antrieb für ein Speedboot entwickelt wurde, als Anwendungsbeispiel. Eine akustische Analyse verschiedener Designvariationen dieses Motors, auf Grundlage der vorgestellten ganzheitlichen Betrachtung, ermöglicht die Abschätzung der Schallabstrahlung und erlaubt so die Entwicklung eines verbesserten Prototyps. Der neue Motor bestätigt noch einmal die Anwendbarkeit der Methodik, welche universell einsetzbar und nicht

auf den vorgestellten Anwendungsfall beschränkt ist. Für eine rechenzeiteffiziente Umsetzung werden verschiedene Koppelvarianten von Rotor und Stator untersucht sowie höherwertige Ansatzfunktionen im Rahmen der FE-Modellierung implementiert. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird zunächst ein Überblick über verschiedene Bauarten von Elektromotoren gegeben und speziell auf den Bootsmotor, an dem die umgesetzte Methode angewendet wird, eingegangen. Die sich anschließende Literaturrecherche gibt den Stand der Forschung in Bezug auf den Einfluss von Lageabweichungen von Rotor und Stator, sowie daraus resultierende Lasten und deren Einfluss auf das Schwingungsverhalten und auf die Akustik wieder. Aus dieser Literaturrecherche wird die ganzheitliche Betrachtung von elektrischem und mechanischem System motiviert.

Für die Beschreibung der elektromagnetischen Felder und daraus resultierenden Lasten wird die FEM, die auch in der Literatur häufig genutzt wird, verwendet. Deshalb werden zu Beginn des Kapitels 2 die mathematischen Grundlagen geschaffen, indem die Maxwellgleichungen und Materialgleichungen zu einer Differentialgleichung umgeformt werden, welche anschließend mit Hilfe der FEM gelöst werden kann. Dabei wird separat beispielsweise auf nicht lineare Materialeigenschaften, höherwertige Ansatzfunktionen, die Realisierung von Drehbewegung und die Umsetzung von rechenzeiteffektiven Matrixaufbau eingegangen. Abschließend wird die erarbeitete Methode genutzt, um eine Konvergenzstudie durchzuführen und die auftretenden Kräfte und Momente drehzahlabhängig bei verschiedenen Fertigungsabweichungen zu beschreiben.

Für die Validierung der umgesetzten Methode werden im darauf folgenden Kapitel 3 Experimente durchgeführt und mit den Simulationsergebnissen verglichen. Die Kopplung von FEM und MKS wird darauf aufbauend im Kapitel 4 durchgeführt, wobei zunächst die theoretischen Grundlagen der MKS und die umgesetzte Programmstruktur vorgestellt werden. Für die Anwendung der umgesetzten Methodik werden physikalische Parameter wie Lagersteifigkeit und Unwucht abgeschätzt. Nun kann der Einfluss der Interaktion und der Nutzen der Kopplung ermittelt werden. Die unter Berücksichtigung der Kopplung ermittelten Lasten auf die Magnete werden jetzt einer nachgelagerten akustischen Simulation übergeben, um so die Akustik des Motors zu beschreiben. Durch Designvariationen wird darauf aufbauend ein verbesserter Motor entwickelt, welcher anschließend, mit weiteren Prototypen, am Prüfstand untersucht wird. Danach wird als weiterer Anwendungsfall einer der beiden Antriebsstränge im Speedboot, vom Motor bis zum Propeller vorgestellt, bevor in Kapitel 5 wesentliche Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst werden und ein Ausblick gegeben wird.

## 1.1 Grundlagen Elektromotoren

Seit Moritz Hermann von Jacobi 1834 auf einem Boot mit 14 Personen an Bord auf der Newa in St. Petersburg erstmals die praktische Anwendung eines Elektromotors demonstrierte [4], sind die Anwendungsfelder elektrisch betriebener Maschinen deutlich

gewachsen. Sie reichen vom Ventilator im Büro, der Bohrmaschine des Handwerkers, der Waschmaschine im Haushalt und der elektrischen Eisenbahn im Kinderzimmer bis zum Antrieb von Drehmaschinen, Walzgerüsten, Verseilmaschinen oder Mehrachsrobotern im Maschinen- und Schwermaschinenbau. Auch in der Mobilität gewinnen elektrische Antriebe an Bedeutung. E-Fahrräder, Roller und Hoverboards erfreuen sich wachsender Beliebtheit. Die Automobilindustrie nimmt E-Mobilität vor dem Hintergrund politischer Forderungen und staatlicher Förderungen immer stärker in den Fokus und auch im öffentlichen Personenverkehr gewinnt dieses Thema an Bedeutung. Der einst von Verbrennungsmaschinen dominierte Markt verschiebt sich zugunsten des E-Antriebs [5]. Die Funktionsweise von elektrischen Maschinen ist seit Mitte des 19. Jahrhunderts bekannt und demzufolge in der Literatur, wie [6, 7, 8], ausführlich beschrieben. Sie basiert auf der elektromagnetischen Induktion [9], bei der Kräfte auftreten, wenn sich elektrische Ladungen in einem Magnetfeld bewegen. Dieses Wirkprinzip funktioniert auch umgekehrt und wird bei Generatoren eingesetzt. Dabei wird in einem bewegten Leiter in einem Magnetfeld bzw. in einem stehenden Leiter mit veränderlichem Magnetfeld eine Spannung im Leiter induziert, wodurch ein Strom fließt. Bei der Wandlung von mechanischer in elektrische Energie wird von Generatoren bzw. dem Generatorprinzip gesprochen [10]. Die analytischen Grundlagen wurden 1864 von James Clark Maxwell untersucht. Auf diesen Grundlagen basieren auch die in dieser Arbeit verwendeten Berechnungsmodelle, welche in Abschnitt 2.1 genauer beschrieben werden. Es gibt eine Vielzahl von verschiedenen Bauformen von elektrischen Maschinen. Grundsätzlich werden elektrische Motoren in Linear- und Drehmotoren unterschieden, wobei erstere eine translatorische Bewegung erzeugen und zweite eine rotatorische. Die Drehmotoren werden je nach Stromsignal den Gleichstrom- und Wechselstrommaschinen zugeordnet. Abbildung 1.1 zeigt eine Übersicht der verschiedenen Drehmaschinen.

## 1.2 Spezifikation des Versuchsmotors

Die in dieser Arbeit entwickelte Simulationsmethode wird auf einem an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg entwickelten Motor angewendet, um den Einfluss der elektromagnetischen Lasten auf das Schwingungsverhalten des Systems zu bestimmen und die Akustik des Motors zu verbessern. Von diesem Motor ist ein parametrisiertes CAD-Modell und ein funktionsfähiger Prototyp vorhanden, weshalb er sich als Untersuchungsobjekt besonders eignet. Zum einen können Experimente durchgeführt werden, um die entwickelte Simulationsumgebung zu validieren, zum anderen können Designvariationen genutzt werden, um das Verhalten dieser Variation vorherzusagen. Auf diese Weise soll ein verbesserter Prototyp entwickelt werden und gleichzeitig der Nutzen und die Nutzbarkeit der Methode demonstriert werden.

Der Versuchsmotor wurde von Dr. Andreas Zörnig am Institut für Mobile Systeme der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg entwickelt und ist in Abbildung 1.2 darge-

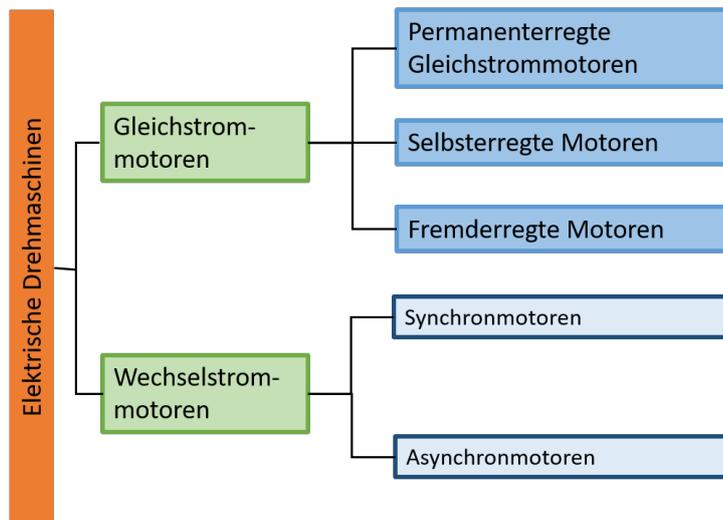


Abbildung 1.1: Klassifizierung von Motoren nach [11]

stellt. Weitere Motoren der Arbeitsgruppe, die vergleichbar aufgebaut sind, wurden beispielsweise in [12, 13, 14] vorgestellt. Es handelt sich um einen permanenterregten Außenläufer Synchronmotor mit Luftspaltwicklung mit einer Leistung von 5,5 kW. Das Nenndrehmoment beträgt 52,5 Nm und die Nenndrehzahl 1000 U/min, wobei der Motor bis zu einer Drehzahl von 3000 1/min betrieben werden kann. Die maximale Spannung beträgt 48 V und der Nennstrom des Motors von 300 A wird auf zwei Bereiche des Motors aufgeteilt, sodass in den Wicklungen 150 A fließen [15]. Der Motor wird für den Antrieb eines Speedbootes verwendet, welches schematisch in Abbildung 1.3 zu sehen ist.

Abbildung 1.4 zeigt ein Vierzehntel des Motors, also ein Polpaar, welches periodisch in Umfangsrichtung auftritt. Der Motor besteht aus einem außenliegenden Rotor, einem innenliegenden Stator und einem mit Luft gefüllten Spalt zwischen Rotor und Stator. Der elektromagnetisch wirksame Bereich, also der Bereich, in dem Leiter und Magnete wie in Abbildung 1.4 angeordnet sind, besitzt eine Länge von 120 mm. Der Stator setzt sich aus dem Statoreisen und den Kupferwicklungen, deren Querschnitt in Abbildung 1.5 zu sehen ist, zusammen.

In Abbildung 1.4 sind die Leiter in drei verschiedenen Farben dargestellt. Diese stellen die verschiedenen Phasenlagen (A, B, C), bei denen der Strom jeweils um  $120^\circ$  phasenverschoben ist, dar. Jede Phase besitzt sechs Leiter und tritt innerhalb des Polpaars zweimal auf. Abbildung 1.6 veranschaulicht die Lage eines Leiters. Er verläuft bis zum Wickelkopf achsenparallel zum Magneten, wird dann umgelenkt und ein halbes Polpaar weiter zurückgeführt. Der Leiter wird bei dem untersuchten Motor so oft umgelenkt, bis er die Hälfte aller Polpaare zweimal passiert hat. Das zweimalige Auftreten innerhalb eines Polpaars wird in Abbildung 1.4 durch die gleiche Leiterfarbe veranschaulicht.

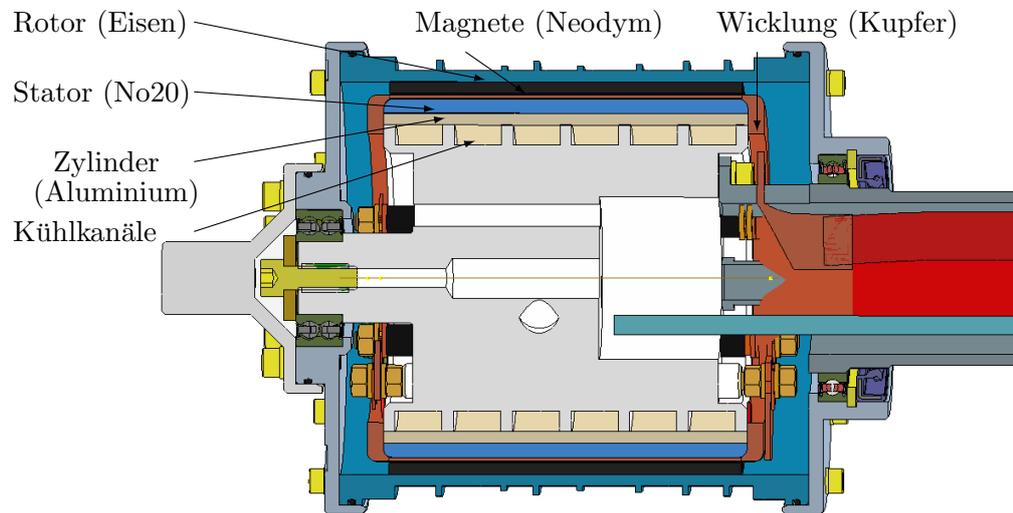


Abbildung 1.2: Längsschnitt des untersuchten permanentenerregten Außenläufers mit Beschriftung der elektromagnetisch relevanten Komponenten. Modell von Dr. Andreas Zörnig, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg.

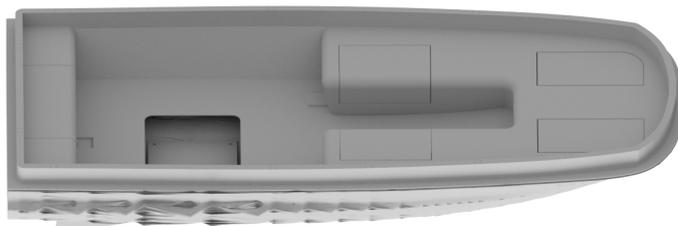


Abbildung 1.3: E-Gleitboot, in dem der untersuchte Motor zweimal verwendet wird. Modell von WTZ Roßlau.

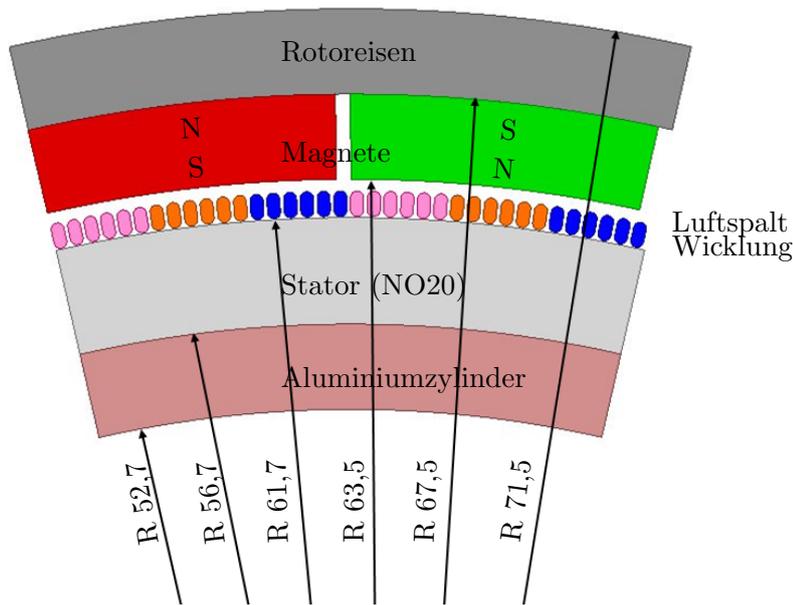


Abbildung 1.4: 2D-Modell eines Polpaars des Motors, mit Radien.

Allerdings fließt der Strom, wie Abbildung 1.6 zeigt, dabei in verschiedene Richtungen. Das kommt einer Phasenverschiebung von  $180^\circ$  gleich. Innerhalb eines Polpaars treten daher sechs verschiedene Phasenlagen auf. Diese werden mit  $A^+$ ,  $A^-$ ,  $B^+$ ,  $B^-$ ,  $C^+$  und  $C^-$  bezeichnet. Bei harmonischer Anregung ergibt sich der Strom in den Leitern in Abhängigkeit der Kreisfrequenz des Stroms  $\omega_{St}$ , der Zeit  $t$ , dem Phasenwinkel  $\phi_0$  und der Amplitude des Stroms  $I_{Amp}$

$$\begin{aligned}
 I_A^+ &= I_{Amp} \cdot \sin(\omega_{St}t + \phi_0 + 0^\circ), \\
 I_A^- &= I_{Amp} \cdot \sin(\omega_{St}t + \phi_0 + 0^\circ + 180^\circ), \\
 I_B^+ &= I_{Amp} \cdot \sin(\omega_{St}t + \phi_0 + 120^\circ), \\
 I_B^- &= I_{Amp} \cdot \sin(\omega_{St}t + \phi_0 + 120^\circ + 180^\circ), \\
 I_C^+ &= I_{Amp} \cdot \sin(\omega_{St}t + \phi_0 + 240^\circ), \\
 I_C^- &= I_{Amp} \cdot \sin(\omega_{St}t + \phi_0 + 240^\circ + 180^\circ).
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Damit die Phasenverschiebung zwischen den einzelnen Phasen möglichst klein ist, werden diese in der Reihenfolge  $A^+$ ,  $B^-$ ,  $C^+$ ,  $A^-$ ,  $B^+$  und  $C^-$  angeordnet, wodurch benachbarte Phasen  $60^\circ$  zueinander phasenverschoben sind.

Ein Motorsegment ist in Abbildung 1.4 dargestellt. Unterhalb des Stators schließt sich

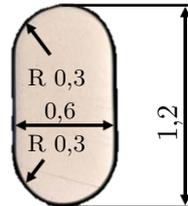


Abbildung 1.5: Querschnitt eines Leiters mit Bemaßung in mm nach [15].

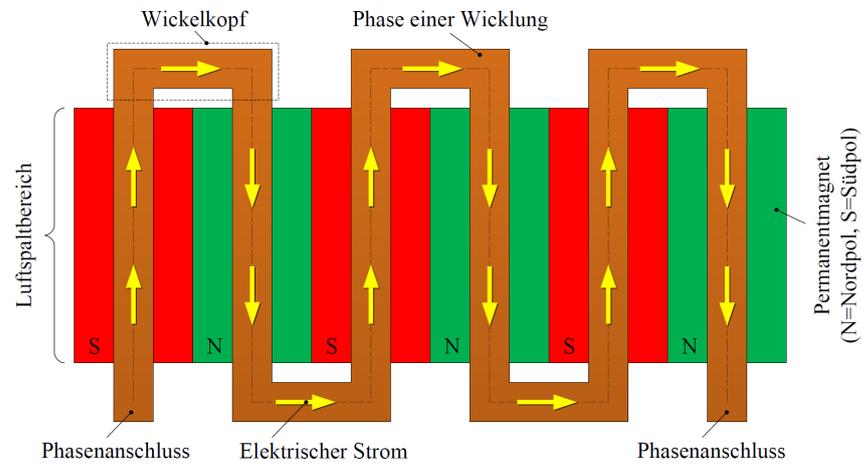


Abbildung 1.6: Schematischer Verlauf eines Leiters [14].

Tabelle 1.1: Im untersuchten Motor verwendete Materialien und zugehörige Materialeigenschaften

Bauteile	Permeabilität in H/m	Koerzitivfeldstärke in A/m	Leitfähigkeit in S/m
Aluminium	1,000021	0	38000000
NO20	siehe A.1	0	1923077
Kupfer	0,999991	0	58000000
Luft	1,0000004	0	0
Neodym-Eisen-Bor	1,0836	940007	625000
Eisen	4000	0	10300000

ein Aluminiumkörper an, in dem die Kühlkanäle verlaufen, welche wie in [16] vorgestellt, simuliert und ausgelegt wurden. Die Wicklungen werden, wie in [17] beschrieben, mit einer speziellen doppelseitigen Elektroisierklebefolie auf dem Stator appliziert. Der Rotor besteht aus NO20-Metall, einem Elektroblech, welches für die Anwendung in Elektromotoren hergestellt wird [18] und achtundzwanzig Neodym-Magneten. Die Materialdaten sind in Tabelle 1.1 zusammengefasst. Dabei ist zu beachten, dass der Stator (NO20) aus einzelnen Blechen besteht. Damit wird der induzierte Strom in axiale Richtung deutlich verkleinert. Dies kann in der Simulation berücksichtigt werden, indem die Leitfähigkeit null gesetzt wird.

Der Stator weist ein feldabhängiges Materialverhalten auf, das in Abbildung 1.7 zu sehen ist [18]. Die zugehörigen Werte sind tabellarisch im Anhang (A.1) angegeben. Der Zusammenhang von Drehzahl, Strom und Drehmoment des untersuchten Motors wurde in [18] experimentell untersucht und ist in Abbildung 1.8 dargestellt. Dabei wurde der Motor im Generatorprinzip betrieben, das heißt der Motor wurde von einem Prüfstandmotor angetrieben und Ströme und Drehmoment gemessen. Es ist gut zu sehen, dass die Drehmomente durch Erhöhung des Stroms steigen, was auch zu erwarten ist. Außerdem nimmt das Drehmoment bei gleichem Strom und steigender Drehzahl zu, was auf den Einsatz im Generatorprinzip zurückzuführen ist. Bei steigender Drehzahl treten höhere Verluste durch Induktion, Hysterese und Reibung auf. Im Motorbetrieb, welcher auch der Anwendungsfall des Motors ist, ist zu erwarten, dass das Drehmoment bei steigender Drehzahl und gleichem Strom abnimmt. Die Verlustanteile bei verschiedenen Drehzahlen wurden in [15] untersucht und sind in Tabelle 1.2 angegeben. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es nicht, den Motor hinsichtlich Leistung, Leistungsdichte oder Wirkungsgrad zu verbessern, sondern das Systemverhalten unter Berücksichtigung der gegebenen elektromagnetischen Komponenten zu beschreiben, um beispielsweise schwingungsreduzierende Maßnahmen oder mechanische Komponenten anzupassen. Gleichwohl

Tabelle 1.2: Anteile der Motorkomponenten am Leerlaufdrehmoment in Nm [15]

Drehzahl in 1/min	400	1000	2000	3000	4000
Schräglager	0,086	0,12	0,167	0,14	01,6
Radiallager	0,086	0,12	0,167	0,14	01,6
Radialwellendichtring	0,228	0,175	0,31	0,16	0,05
Gesamte Reibungsverluste	0,35	0,365	0,57	0,52	0,49
Blechkpaket	0,088	0,13	0,19	0,22	0,23
Wicklung	0,39	1,0	1,93		
Gesamt	0,828	1,495	2,69		

ist es möglich, den Einfluss von elektromagnetischen Änderungen zu berücksichtigen.

### 1.3 Kräfte aufgrund von Lageabweichungen

Ein Motor wandelt elektrische Energie in Bewegungsenergie. Dafür ist der Motor so gebaut, dass sich die tangentialen Kräfte addieren, woraus das resultierende und gewünschte Drehmoment resultiert und sich die radialen Kräfte aufheben. Ein perfekter Motor in zentrischer Lage weist also in Summe keine elektromagnetischen Kräfte in radialer Richtung auf. Da Perfektion unerreichbar ist, werden zunächst mögliche Lageabweichungen betrachtet und anschließend auf deren Wirkung eingegangen.

#### 1.3.1 Lageabweichungen zwischen Rotor und Stator

Der Einfluss von Lageabweichungen des Rotors gegenüber dem Stator wird in der Literatur eingehend untersucht, da, wie bereits erwähnt, hohe Kräfte resultieren. Dabei wird zwischen statischen, dynamischen und beliebigen Exzentrizitäten unterschieden. Die statische Exzentrizität, welche in Abbildung 1.9 in der Mitte dargestellt ist, bezeichnet die Verschiebung der Rotorachse gegenüber der Statorachse. Die Achsen sind dabei trotzdem parallel zueinander und der Rotor rotiert um seine Achse. Die Position der Rotorachse bleibt also während der Untersuchung unverändert. Diese Art der Lageabweichung kann bei hohen Lagersteifigkeiten zum Beispiel aus Fertigungstoleranzen oder Ungenauigkeiten bei der Positionierung von Lagern sowie deren Verschleiß auftreten [19].

Bei der dynamischen Exzentrizität, welche ebenfalls bei hohen Lagersteifigkeiten auftritt, rotiert die Rotorachse um den Stator. Diese beschreibt einen kreisförmigen Orbit und tritt typischerweise aufgrund von Fertigungsungenauigkeiten, Verschleiß [19] und bei elastischen Wellen im Bereich von kritischen Drehzahlen [20] auf.

Wegen der hohen Steifigkeit sind statische und dynamische Exzentrizitäten vor allem bei kugelgelagerten kleinen und mittelgroßen elektrischen Maschinen vorhanden und können

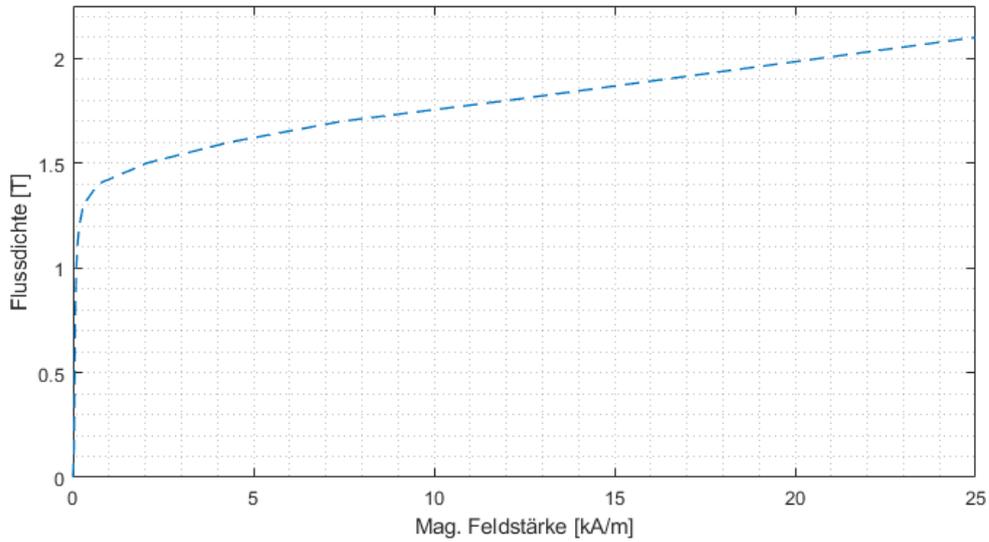


Abbildung 1.7: B-H-Kennlinie des No20-Metalls [18]

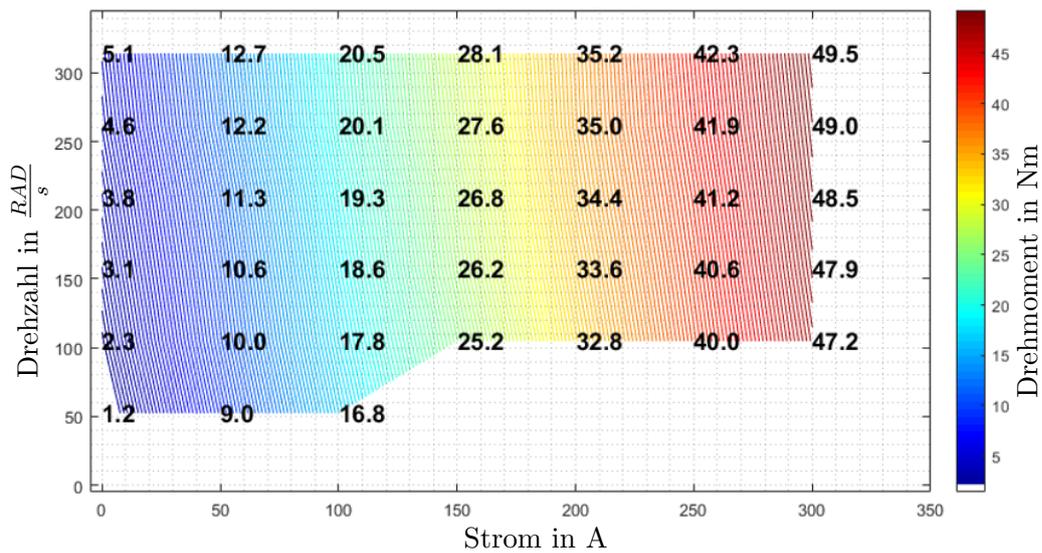


Abbildung 1.8: Experimentell ermittelte Drehzahl-Strom-Drehmomentenverlauf [18].

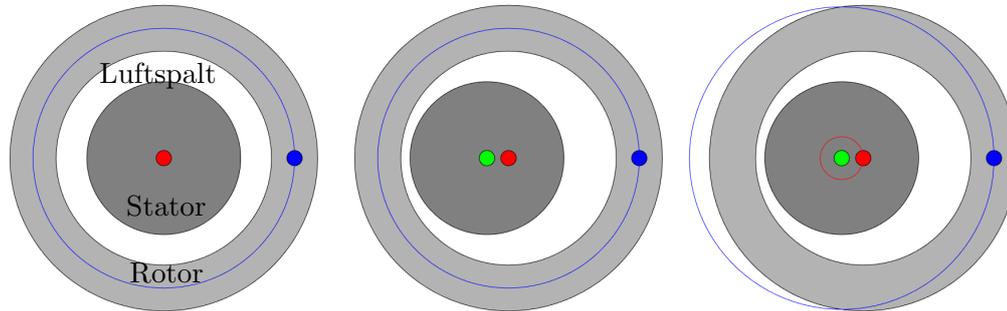


Abbildung 1.9: Links: Zentrische Lage des Rotors; Mitte: Statische Exzentrizität des Rotors; Rechts: Dynamische Exzentrizität des Rotors; Der grüne Punkt zeigt die Mitte des Stators, der rote die Mitte des Rotors und der Blaue zeigt einen Punkt auf dem Rotor. Die Kreise zeigen den Orbit des zugehörigen Punktes im nicht rotierenden Koordinatensystem.

gleichzeitig auftreten. Demgegenüber tritt die freie Exzentrizität, bei der die Drehachse beliebige Positionen besitzen kann, vor allem bei großen elektrischen Maschinen wie Generatoren oder bei gleitgelagerten Turbomaschinen auf [21]. Die vorgestellten Lageabweichungen sind Gegenstand vieler Untersuchungen, da sie eine elektromagnetische Kraft hervorrufen, die in Richtung des kleinsten Luftspalts wirkt. Diese wird in Kapitel 1.3.2 vorgestellt.

Eine weitere Lageabweichung ist die Verkippung des Rotors gegenüber dem Stator, wodurch der Luftspalt über die Länge des Motors veränderlich ist. Bedingt durch die elektromagnetische Kraft, welche in Richtung des geringsten Luftspalts wirkt, resultiert aus der Verkippung ein Kippmoment.

### 1.3.2 Der Unbalanced Magnetic Pull (UMP)

Sowohl bei Lageabweichungen zwischen Rotor und Stator als auch bei nicht periodisch verteilten elektromagnetischen Komponenten oder Materialparametern kommt es bei elektrischen Maschinen zu einer Kraft, die bei Lageabweichungen zum größten Teil in Richtung des geringsten Luftspalts wirkt und mit zunehmender Exzentrizität stärker wird. Dies ist einer der wichtigsten Effekte für die elektromechanische Interaktion in rotierenden Maschinen [22]. Untersuchungen zum Einfluss der beschriebenen Lageabweichung werden seit langem durchgeführt [23, 24], weil große Kräfte auftreten können, welche das Betriebsverhalten beeinflussen und sich auf Akustik, Schwingungsverhalten, Stabilität und Verschleiß auswirken [25, 26].

Der UMP kann in einen radialen Anteil, der in Richtung des kleinsten Luftspalts wirkt und einen tangentialen Anteil separiert werden [26]. Der radiale Anteil ist dabei deutlich größer [27], wodurch die Exzentrizität weiter erhöht und der Luftspalt verkleinert wird,

was zum Versagen der Maschine führen kann.

In vielen Untersuchungen wird ausschließlich der radiale Anteil des UMP betrachtet [19, 22], wodurch die elektromagnetischen Kräfte wie eine Feder mit negativer Steifigkeit abgebildet werden. In neueren Studien wird auch der tangential Anteil berücksichtigt [26]. Für die Berücksichtigung des UMP wird in den meisten Untersuchungen eine analytische Beschreibung der Kräfte gewählt [19, 22, 26, 28, 29], welche rechenzeiteffizient sind, aber geringere Genauigkeiten besitzen, da Effekte wie Wirbelströme und Hysterese nicht abgebildet werden können.

Einige Autoren berechnen den UMP numerisch in Abhängigkeit der Exzentrizität und verwenden die ermittelte Kennlinie für weitere Schwingungsuntersuchungen [25, 27, 30]. Calleecharan und Aidanpää [25] zeigten am Beispiel eines elastisch gelagerten Laval-Rotors den signifikanten Einfluss der radialen und tangentialen Komponente des UMP auf die Stabilität des Systems. Sie verwendeten eine lineare Abhängigkeit von Exzentrizität und UMP, welche durch das Fitten von 20 simulierten Betriebspunkten ermittelt wurde. Dieses einfache Modell ermöglicht geringe Rechenzeiten für die Beschreibung der Stabilität, vernachlässigt allerdings Schiefstellungen, Verformungen, Hysterese, nicht lineares Materialverhalten und Wirbelströme, welche mit der in dieser Arbeit vorgestellten Methode allerdings mit deutlich höheren Rechenzeiten berücksichtigt werden können. Die Ersatzfedersteifigkeit des untersuchten Motors wird auch in dieser Arbeit bestimmt und so der Unterschied der Methoden gegenübergestellt.

Eine transiente numerische Untersuchung, welche in der Lage ist, nicht lineare Materialien und Wirbelströme zu berücksichtigen, wurde bspw. von [31, 32, 33] durchgeführt. In [33] wurde der UMP eines Motors bei kleiner statischer Exzentrizität mit Hilfe der FEM bestimmt. Bei der während der gesamten Untersuchung konstant angenommenen Exzentrizität, ist eine Kopplung zur MKS mit einer Schwingungsanalyse der Struktur oder eine Einbeziehung räumlicher Bewegungen nicht notwendig. Die FEM wurde genutzt, um ein eingeführtes analytisches Modell zu verifizieren. Durch Verwendung von Dämpferwindungen konnte der UMP reduziert werden.

Im Gegensatz zu den vorgestellten Arbeiten wird die FEM und die MKS in dieser Arbeit voll gekoppelt. Die FEM wird als Krafroutine der MKS in jedem Zeitschritt aufgerufen und entsprechend den aktuellen Zustandsgrößen die resultierenden elektromagnetischen Kräfte bestimmt. Des Weiteren wird nicht ausschließlich der UMP, sondern auch deutlich höhere Frequenzen, die aus der elektromagnetischen Anregung resultieren, untersucht, um speziell den Einfluss auf die Akustik des Motors zu ermitteln.

Eine frühe und ebenso bedeutende Arbeit in Bezug der transienten Beschreibung eines Elektromotors mit Hilfe der FEM wurde in [34] vorgestellt. In der Arbeit wurde der zeitliche Verlauf von Strömen, Spannungen und Drehmomenten unter Berücksichtigung von Induktion, nicht linearen Materialeigenschaften im Eisenkern und Schiefstellung des Motors beschrieben. Aufgrund der begrenzten Rechnergeschwindigkeit mussten Vereinfachungen, wie die Ausnutzung der Periodizität durchgeführt werden, wodurch eine Berücksichtigung des UMP und die Kopplung zur MKS ausgeschlossen ist. Obwohl zwei-

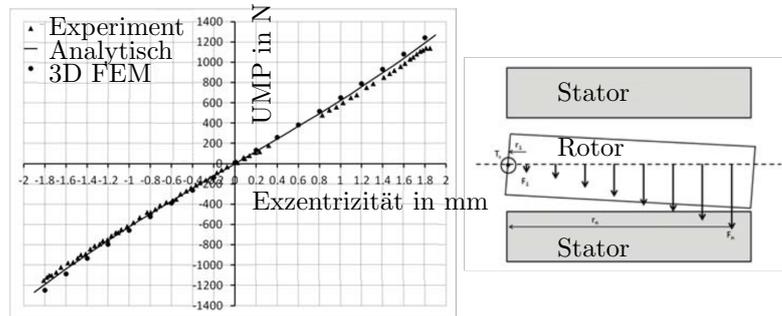


Abbildung 1.10: UMP in Abhängigkeit der Exzentrizität bei einem einseitig gekippten Rotor [35].

dimensionale Modelle verwendet wurden, konnte die Schiefstellung des Motors durch mehrere zweidimensionale Modelle realisiert werden. Auch eine rechenzeiteffiziente Realisierung der Rotordrehung wurde vorgestellt.

Dreidimensionale Untersuchungen des UMP wurden beispielsweise von [35, 36] durchgeführt, wobei analytische Formeln verwendet wurden und die FEM zur Verifizierung genutzt wurde. Abbildung 1.10 zeigt den resultierenden UMP in Abhängigkeit der Exzentrizität. Eine Übereinstimmung zwischen den verschiedenen Methoden und dem Experiment sowie eine lineare Abhängigkeit von Exzentrizität und Kraft ist deutlich zu sehen. Auch Verformungen des Rotors sind Gegenstand der Forschung [37]. Abbildung 1.11 zeigt einen Motor, bei dem die Verformung durch abschnittsweise 2D-Modelle abgebildet wird. Dabei trat auch ein axialer Anteil des UMP auf, der sich bei einer symmetrischen Biegung, aufhob. Die mit der FEM berechneten Kräfte wurden genutzt, um eine empirische Funktion zu fiten und so schnell den UMP bestimmen zu können, was gut funktionierte. Zusammenfassend wird der Einfluss der Lageabweichung und insbesondere der daraus resultierende UMP in einer Vielzahl von Arbeiten mit verschiedenen Methoden untersucht. Eine ganzheitliche Betrachtung unter Berücksichtigung der Rotordynamik, beliebiger räumlicher Orientierungen oder der Kopplung mit der umgebenden Struktur des mechanischen Systems wurde in der durchgeführten Literaturrecherche nicht gefunden.

## 1.4 Akustische Untersuchung von Motoren

Die Schallemission von elektrischen Motoren setzt sich im Wesentlichen aus mechanischen, aerodynamischen und elektrischen Quellen zusammen [38]. Im Vergleich zu Verbrennungsmotoren ist die Schallabstrahlung von Elektrofahrzeugen bei niedrigen Geschwindigkeiten, bei denen die Windgeräusche noch nicht dominant sind, deutlich geringer. Allerdings nimmt der Mensch hochfrequente Geräusche, wie sie von elektrischen Ma-

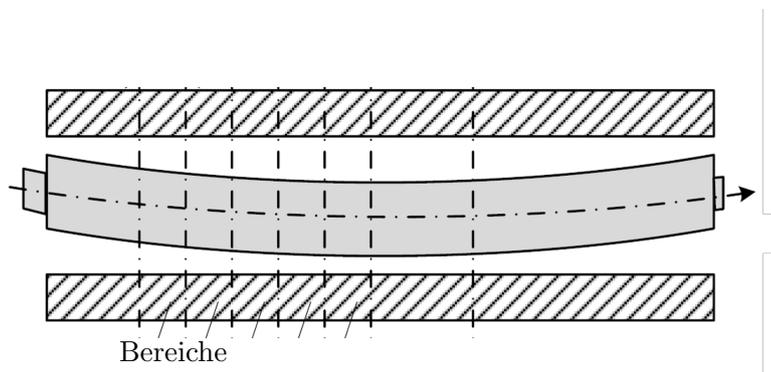


Abbildung 1.11: UMP bei elastischen Wellen durch abschnittsweise zweidimensionale Modelle [37].

schinen abgestrahlt werden, als besonders störend wahr, wodurch die Akustik dieser Motoren von besonderem Interesse für die Hersteller ist [39]. Die Ursache der hochfrequenten Geräusche sind die elektromagnetischen Kräfte im Motor, welche das Motorgehäuse zum Schwingen und damit zur Schallabstrahlung anregen. Auch elektrische Bauteile, wie Frequenzumrichter können zusätzliche Kräfte induzieren und den Geräuschpegel deutlich steigern [40]. Aus diesem Grund ist die Untersuchung der Schallabstrahlung, welche von elektromagnetischen Kräften hervorgerufen wird, Gegenstand vieler Untersuchungen.

Bereits 1968 veröffentlichten Ellison und Moore [41] einen Beitrag, der die Ursachen der Schallabstrahlung von elektrischen Maschinen beschreibt und Lösungen zur Schallreduktion vorschlägt. In dieser Arbeit wurde darauf hingewiesen, dass die Schallabstrahlung der elektrischen Maschine unmittelbar mit dem Schwingungsverhalten der umgebenden Struktur zusammenhängt. Die wichtigsten Ursachen der Schallemission sind dabei die mechanischen und die elektromagnetischen Schwingungen, sowie die Aerodynamik. Der Einfluss der Magnetostriktion, eine Verformung eines ferromagnetischen Materials im Magnetfeld, welche durch Drehung der Weisschen Bezirke hervorgerufen wird, ist vergleichsweise klein und wird im Weiteren nicht betrachtet [42].

Zur numerischen Beschreibung der Schallabstrahlung wird häufig die FEM zur Bestimmung der elektromagnetischen Kräfte gewählt, die wiederum als Anregung der Festkörperstruktur und anschließend der Schallabstrahlung genutzt wird [40, 43, 44]. In [44] wurde eine transiente Rechnung durchgeführt, bei der die Motordrehzahl kontinuierlich gesteigert wurde. Unter Berücksichtigung von nicht linearem Materialverhalten im Eisenkern und der Stromregelung wurden die ermittelten Lasten auf den Statorzähnen der Struktur aufgeprägt. Es konnte eine gute Übereinstimmung des Schalldruckpegels für Simulation und Messung gezeigt werden. Auch bei diesen Untersuchungen wird der Motor in zentrischer Lage angenommen. Der UMP spielt dementsprechend keine Rolle, wodurch die Akustik durch den fließenden Strom und die Stromregelung geprägt ist.

Diese Herangehensweise hat den Vorteil, dass Periodizität ausgenutzt werden kann, wodurch die Rechenzeiten massiv reduziert werden. Für die in dieser Arbeit umgesetzte Kopplung ist eine Ausnutzung der Periodizität nicht möglich, da diese durch exzentrische Rotorpositionen verloren gehen. Aber gerade dieser Einfluss soll hier betrachtet werden.

Zur Schallreduktion stehen aktive und passive Methoden zur Verfügung. Erstere verwenden Sensoren und Aktuatoren, um der Schwingung entgegenzuwirken und so die Schallabstrahlung zu verringern [45]. Ein Beispiel für eine aktive Methode ist die Nutzung von Piezokeramiken, die sowohl als Sensor als auch als Aktuator genutzt werden können [46, 47]. Deutlich weiter verbreitet als die aktiven Methoden sind die passiven, da keine Regelung notwendig ist. Stattdessen wird die Struktur, beispielsweise durch Rippen und Versteifungen [48], angepasst, wobei numerische Werkzeuge zur Abschätzung der Schallabstrahlung angewendet werden [49], der Übertragungsweg der Schwingung beeinflusst [50] oder dämpfende Materialien verwendet. Eine Möglichkeit besteht in der Verwendung von Schäumen, die auf der Oberfläche appliziert werden [51]. Eine andere passive Methode zur Schallreduktion ist die Verwendung von Partikeldämpfern, welche auf dem Prinzip der Energiedissipation durch Stöße und Reibung beruhen. In [52] wurde ein Konzept zur Schwingungs- und damit auch Schallreduktion mit granularem Material vorgestellt. Eine Kombination von granularem Material und Wabenstrukturen, welche eine hohe Steifigkeit besitzen, zeigt in [53] gute Ergebnisse. Ein Vergleich verschiedener Materialien ergab, dass granulares Gummi die Schwingungen besonders gut reduziert [54]. Der Einsatz granularer Dämpfer wird im Weiteren kurz an einem Experiment gezeigt und mit der numerisch erzielten Verbesserung verglichen. Resultierend aus [54] wird dafür granulares Gummi verwendet.

Aufgrund der großen Bedeutung der Motorakustik für die Hersteller und Nutzer von Fahrzeugen wird in dieser Arbeit auch auf den Einfluss der elektromagnetischen Lasten unter Berücksichtigung der mechanischen Schwingungen eingegangen. Dafür wird die im weiteren Verlauf vorgestellte ganzheitliche Methode genutzt. Durch eine Variation verschiedener Varianten kann so die Akustik des Motors und sogar des gesamten Systems verbessert werden.

## 2 Elektrodynamische Untersuchung mittels Finite Elemente Methode

In diesem Kapitel werden die Maxwellgleichungen, unter Einführung des magnetischen Vektorpotentials  $A$ , der Nutzung von Materialgleichungen und getroffener Annahmen in eine Differentialgleichung überführt. Diese Differentialgleichung wird durch Anwendung der FEM gelöst, wobei auf höherwertige Ansatzfunktionen, nicht lineare Materialeigenschaften und Koppelmethoden eingegangen wird. Nach dem Lösen der Differentialgleichung können elektromagnetische Kräfte und Momente bestimmt werden. Anschließend wird eine Konvergenzstudie am untersuchten Motor durchgeführt.

### 2.1 Mathematische Grundlagen der Elektrodynamik

Die Beschreibung elektrodynamischer Prozesse erfolgt auf Grundlage der vier Maxwell- (2.1 bis 2.4) sowie drei Material-Gleichungen (2.5 bis 2.7) [55]. Das Induktionsgesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke  $\underline{E}$  und der Änderung der magnetischen Flussdichte  $\underline{B}$ ,

$$\operatorname{rot}\underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0. \quad (2.1)$$

Die Wechselwirkung von elektrischen Strömen und deren Änderung auf die magnetische Feldstärke  $\underline{H}$  wird mit dem Durchflutungsgesetz

$$\operatorname{rot}\underline{H} = \underline{J} + \dot{\underline{D}}, \quad (2.2)$$

unter Verwendung der Stromdichte  $\underline{J}$  und der zeitlichen Ableitung der elektrischen Flussdichte  $\underline{D}$ , abgebildet. Elektrische Felder werden durch punktförmige Ladungen hervorgerufen, deren Feldlinien wirbelfrei sind, was mit dem Gaußschen Gesetz unter Nutzung der elektrischen Ladungsdichte  $\rho$

$$\operatorname{div}\underline{D} = \rho \quad (2.3)$$

beschrieben wird. Im Gegensatz dazu beschreibt das Gaußsche Gesetz für Magnetfelder die Quellfreiheit selbiger

$$\operatorname{div}\underline{B} = 0. \quad (2.4)$$

Zwischen magnetischem Feld und magnetischer Flussdichte gilt der Zusammenhang

$$\underline{B} = \mu \underline{H}, \quad (2.5)$$

wobei  $\mu$  die magnetische Permeabilität ist, welche nicht notwendigerweise konstant ist, sondern auch von  $H$  abhängen kann. In gleicher Weise besteht über die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  ein Zusammenhang zwischen Stromdichte und elektrischer Feldstärke

$$\underline{J} = \sigma \underline{E} \quad (2.6)$$

und über die Permittivität  $\epsilon$  zwischen elektrischer Flussdichte und elektrischer Feldstärke,

$$\underline{D} = \epsilon \underline{E}. \quad (2.7)$$

Die Permittivität wird aus der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_0$  und der relativen Permittivität  $\epsilon_r$ , einem Materialparameter, bestimmt

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r. \quad (2.8)$$

Gleiches gilt für die magnetische Feldkonstante  $\mu_0$  und die Permeabilitätszahl  $\mu_r$ , die ebenfalls ein Materialparameter ist

$$\mu = \mu_0 \mu_r. \quad (2.9)$$

Gleichung 2.4 zeigt, dass das magnetische Feld quellfrei ist. Es kann also ein Vektorfeld eingeführt werden, für das gilt

$$\underline{B} = \text{rot} \underline{A}. \quad (2.10)$$

Das eingeführte Vektorfeld  $\underline{A}$  wird magnetisches Vektorpotential genannt. Es ist gut zu erkennen, dass die magnetische Flussdichte  $\underline{B}$  sich nicht ändert, wenn das Vektorpotential mit einem beliebigen Skalarfeld  $\text{grad}(\Phi)$  addiert wird

$$\underline{B} = \text{rot} \underline{A} = \text{rot}(\underline{A} + \text{grad}(\Phi)). \quad (2.11)$$

Das Skalar  $\Phi$  wird skalares Potential genannt. Für dreidimensionale Probleme besitzt das magnetische Vektorpotential drei Komponenten

$$\underline{A}_{3D} = (A_x, A_y, A_z). \quad (2.12)$$

Im ebenen Fall, wobei  $z$  als Koordinate aus der Ebene gewählt wird, sind zwei dieser Komponenten 0, sodass

$$\underline{A}_{2D} = A_z \quad (2.13)$$

ist [56]. Durch Einsetzen von Gleichung 2.10 in Gleichung 2.1 ergibt sich

$$\text{rot}\underline{E} = -\text{rot}\dot{\underline{A}}. \quad (2.14)$$

Damit gilt für die elektrische Feldstärke

$$\underline{E} = -\dot{\underline{A}} - \text{grad}\Phi. \quad (2.15)$$

Durch Verwendung der Gleichung 2.6 gilt

$$\underline{J} = -\sigma\dot{\underline{A}} - \sigma\text{grad}\Phi. \quad (2.16)$$

Das skalare Potential  $\Phi$  kann beliebige Werte annehmen. Nur die Änderung im Lösungsgebiet ist für die Lösung entscheidend. Wie gut zu erkennen ist, entspricht die Stromdichte  $J$  im statischen Fall

$$\underline{J} = -\sigma\text{grad}\Phi. \quad (2.17)$$

Diese Stromdichte kann in elektrischen Leitern mit einer Stromquelle direkt bestimmt werden, weil Strom  $I$  und die Querschnittsfläche der Leiters  $\tilde{A}$  bekannt sind

$$-\sigma\text{grad}\Phi = \text{grad}\frac{I}{\tilde{A}}. \quad (2.18)$$

In Bereichen, in denen kein Strom fließt, wird  $\Phi$  dann als 0 definiert. Dieses Vorgehen ist nicht auf statische Fälle beschränkt, im dynamischen Fall wird die tatsächliche Stromdichte um die Wirbelströme reduziert. Eine vollständige Herleitung unter Einbeziehung von Gleichung 2.3 kann [56] entnommen werden.

Aus der zeitlichen Ableitung der Gleichung 2.7 und Gleichung 2.15 ergibt sich

$$\dot{\underline{D}} = -\epsilon\ddot{\underline{A}} - \epsilon\text{grad}\dot{\Phi}. \quad (2.19)$$

Für die Implementierung von Permanentmagneten wird deren remanente Flussdichte  $\underline{B}_r$ , welche bekannt ist, in der Gleichung 2.5 separat aufgeführt. Damit ergibt sich

$$\underline{B} - \underline{B}_r = \mu\underline{H}. \quad (2.20)$$

Zwischen remanenter Flussdichte und Koerzitivfeldstärke  $\underline{H}_c$  besteht der Zusammenhang

$$\underline{B}_r = -\mu\underline{H}_c. \quad (2.21)$$

Nun wird diese erweiterte Materialgleichung 2.20 in Gleichung 2.2 eingesetzt

$$\frac{1}{\mu}\text{rot}\underline{B} - \frac{1}{\mu}\text{rot}\underline{B}_r = \underline{J} + \dot{\underline{D}}. \quad (2.22)$$

Mit Gleichung 2.10 ergibt sich

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \underline{A}) - \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \underline{B}_r = \underline{J} + \underline{\dot{D}}. \quad (2.23)$$

Werden nun Gleichung 2.18 und Gleichung 2.19 eingesetzt, ergibt sich die Differentialgleichung

$$\operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \underline{A} \right) - \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \underline{B}_r = -\sigma \underline{\dot{A}} - \sigma \operatorname{grad}(\Phi) - \epsilon \underline{\ddot{A}} - \epsilon \operatorname{grad}(\dot{\Phi}). \quad (2.24)$$

In dieser Arbeit werden die letzten beiden Terme vernachlässigt, da die Permittivität  $\epsilon$  klein gegenüber der Permeabilität  $\mu$  ist. Das wird unter Nutzung der Gleichungen 2.8 und 2.9 deutlich, da die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_0$ , einen Wert von  $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$  besitzt und die relative Permittivität von Luft 1,000 59 sowie die relative Permittivität von elektrischen Leitern null ist. Dem gegenüber besitzt die magnetische Feldkonstante  $\mu_0$  eine Größe von  $1,26 \cdot 10^{-6} \text{ N/A}^2$ . Die Permeabilitätszahl von Luft ist ebenfalls im Bereich eins, allerdings von Eisen im Bereich von 300 bis 10 000. Die verbleibende Differentialgleichung, die auch in der Literatur [56] Anwendung findet, lautet

$$\operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \underline{A} \right) - \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \underline{B}_r = -\sigma \underline{\dot{A}} - \sigma \operatorname{grad}(\Phi). \quad (2.25)$$

Der erste Term berücksichtigt die Permeabilität und ist vergleichbar mit der Steifigkeit eines mechanischen Systems. Der zweite Term repräsentiert den Einfluss eines permanenterregten Magneten. Der Dritte bildet die Induktion ab, welche bei einer Änderung des magnetischen Feldes Wirbelströme hervorruft und der letzte Term stellt den Einfluss eines Stroms in einem elektrischen Leiter dar. Für die Lösung dieser Gleichung wird im Folgenden die Finite Elemente Methode (FEM) verwendet. Dadurch können komplexe Geometrien und verschiedene Strom-Zeit-Verläufe berücksichtigt werden.

### 2.1.1 Finite Elemente Methode zur Beschreibung der Elektrodynamik

Die FEM ist eine weit verbreitete Methode zur näherungsweise Lösung partieller Differentialgleichungen und wird in verschiedenen technischen Disziplinen, wie der Thermodynamik, Strömungslehre, Strukturmechanik und Elektrotechnik, eingesetzt. Dabei wird die komplexe Geometrie des Gesamtsystems in Teilgebiete, die Finiten Elemente, zerlegt. Die gesuchte Lösung wird dann in jedem Teilbereich mit Hilfe einfacher und nur lokal definierter Funktionen (Ansatzfunktionen) approximiert, um die Verteilung der unbekanntes Größe zu repräsentieren. Die Verwendung der FEM zur Beschreibung elektromagnetischer Vorgänge ist in der Literatur hinreichend bekannt und wurde z. B. von [57] als ein mögliches Anwendungsgebiet oder von [56, 58, 59], die sich ausschließlich

mit elektrodynamischen Problemen beschäftigen, vorgestellt. Zunächst werden die Terme aus Gleichung 2.25 in die Form

$$\sigma \dot{\underline{A}} + \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} (\underline{A}) \right) = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \underline{B}_r - \sigma \operatorname{grad}(\Phi). \quad (2.26)$$

gebracht. Dabei sind links Terme mit und rechts Terme ohne die gesuchte Größe  $A$ , das magnetische Vektorpotential.

Wie bereits beschrieben, wird das gesamte Lösungsgebiet  $\Omega$  in Teilgebiete  $\Omega^e$  zerlegt, wobei der Wert  $e$  angibt, auf das wievielte Teilsystem sich die Gleichung bezieht. Diese Elemente besitzen  $n^e$  Knoten, an denen die gesuchte Größe ermittelt werden soll, wobei ein Knoten mehreren Elementen angehören kann. Das Vektorpotential  $A$  des  $e$ -ten Elements wird mit  $n^e$  Ansatzfunktionen  $N^e$  in der Form

$$A^e = \sum_{j=1}^{n^e} A_j^e N_j^e \quad (2.27)$$

geschrieben. Gleichung 2.26 gilt auch in der lokalen Form

$$\sigma \dot{A}^e + \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} (A^e) \right) = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} B_r^e - \sigma \operatorname{grad}(\Phi^e). \quad (2.28)$$

Es kann eine Vielzahl von Ansatzfunktionen gewählt werden, wobei gilt, dass sie außerhalb des Elements null sind. Bei einem linearen zweidimensionalen Dreieckselement sind diese beispielsweise

$$\begin{aligned} N_1^e &= 1 - \xi - \eta; \\ N_2^e &= \xi; \\ N_3^e &= \eta, \end{aligned} \quad (2.29)$$

mit den lokalen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$ , die innerhalb des Dreieckselements Werte von 0 bis 1 annehmen [56]. Die lokale Form aus Gleichung 2.28 erfüllt Gleichung 2.26 aufgrund der lokalen Ansätze nicht notwendigerweise exakt. Es ergibt sich dementsprechend ein Fehler, das sogenannte Residuum  $Re^e$

$$Re^e = \sigma \dot{A}^e + \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} (A^e) \right) - \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} B_r^e + \sigma \operatorname{grad}(\Phi^e). \quad (2.30)$$

Dieser Fehler wird nun mit der Methode der gewichteten Residuen minimiert. Dazu wird die Wichtungsfunktion  $w_i$  eingeführt und das Integral des Residuums über das Gebiet zu null gefordert

$$Re^e = \int_{\Omega^e} w_i^e Re^e d\Omega^e = 0. \quad (2.31)$$

Nach der Methode von Galerkin werden für die Wichtungsfunktionen  $w_i$  die Ansatzfunktionen  $N_i$  verwendet

$$Re^e = \int_{\Omega^e} N_i^e Re^e d\Omega^e = 0. \quad (2.32)$$

Durch Einsetzen von Gleichung 2.30 in Gleichung 2.32 ergibt sich

$$\int_{\Omega^e} N_i^e \sigma \dot{A}^e + \text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot} (N_i^e A^e) \right) - \frac{1}{\mu} \text{rot} (N_i^e B_r^e) + N_i^e \sigma \text{grad}((\Phi^e)) d\Omega^e = 0. \quad (2.33)$$

Unter Verwendung des lokalen Ansatzes nach Gleichung 2.27 resultiert die finale Gleichung, der in dieser Arbeit verwendeten FEM-Variante

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n^e} \int_{\Omega^e} \dot{A}_j^e N_i^e \sigma N_j^e + A_j^e \text{rot}(\text{rot}(N_i^e)) \frac{1}{\mu} \text{rot}(\text{rot}(N_j^e)) d\Omega^e = \\ \int_{\Omega^e} \frac{1}{\mu} \text{rot}(N_i^e B_r^e) - N_i^e \sigma \text{grad}(\Phi^e) d\Omega^e. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Die lokalen Differentialgleichungssysteme werden in ein globales Differentialgleichungssystem, mit der Wirbelstrommatrix  $\underline{\underline{L}}$ , der Permeabilitätsmatrix  $\underline{\underline{K}}$ , dem Vektor der Magnetfelder  $\underline{B}_0$  und dem Vektor der angelegten Ströme  $\underline{J}$  zusammengefasst

$$\underline{\underline{L}} \underline{\dot{A}} + \underline{\underline{K}} \underline{A} = \underline{B}_0 + \underline{J}. \quad (2.35)$$

Unter Nutzung von Anfangsbedingungen und Randbedingungen wird das Differentialgleichungssystem gelöst, wodurch das magnetische Vektorpotential anschließend an allen Knoten des Lösungsgebietes bekannt ist. Durch Nutzung von Gleichung 2.10 wird die magnetische Flussdichte und anschließend mit Gleichung 2.5 die magnetische Feldstärke bestimmt.

Bei geringen zeitlichen Änderungen der elektromagnetischen Felder verschwindet die Ableitung des Vektorpotentials, die Anfangsbedingungen entfallen und das System wird als magnetostatisch bezeichnet

$$\underline{\underline{K}} \underline{A} = \underline{B}_0 + \underline{J}. \quad (2.36)$$

Gleichung 2.35 berechnet das Vektorpotential bei einer bekannten Stromquelle. In einer Vielzahl von Anwendungen werden Spannungsquellen, wie Batterien, verwendet. Um eine Spannungsquelle zu berücksichtigen, wird Gleichung 2.35 um das Ohmsche Gesetz

$$\underline{\underline{R}} \underline{I} = \underline{U} \quad (2.37)$$

erweitert und der Strom, der durch die Spannung erzeugt wird, als zusätzliche Unbekannte eingeführt, wobei  $\underline{\underline{R}}$  eine Diagonalmatrix ist, das heißt lediglich die Einträge der Hauptdiagonale sind ungleich null. Es resultiert das Differentialgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{L}} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{A}} \\ \underline{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\underline{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{I} \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} \underline{B}_0 + \underline{J} \\ \underline{U} \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Hier sind Vektorpotential und Strom zunächst entkoppelt, wodurch die äußere Spannung keinen Einfluss auf die Magnetfelder hat. Das Ziel, den Strom, der in Gleichung 2.35 über den Vektor  $\underline{J}$  berücksichtigt wird, mit der gesuchten Größe  $\underline{I}$  abzubilden, wird durch die Übertragungsmatrix  $\underline{P}$

$$\underline{P} = \int_{\Omega^e} N_i^e N_j^e d\Omega^e \quad (2.39)$$

realisiert. Für sie gilt

$$\underline{P}\underline{I} = \underline{J}. \quad (2.40)$$

Der Vektor  $\underline{J}$ , der sowohl Ströme aus Strom- und Spannungsquellen enthält, wird durch  $\underline{J}_0$  ersetzt, der nur noch Ströme aus bekannten Stromquellen enthält, aber Ströme aus Spannungsquellen vernachlässigt.

Es resultiert das Differentialgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \underline{L} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{A}} \\ \dot{\underline{I}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K} & -\underline{P} \\ \underline{0} & \underline{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{I} \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} \underline{B}_0 + \underline{J}_0 \\ \underline{U} \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Statt des Ohmschen Gesetzes aus Gleichung 2.37 können, wie in [56] gezeigt wurde, komplexere Gleichungen verwendet werden. Diese ermöglichen beispielsweise die Berücksichtigung der Induktion in der Spule, des Einflusses der Wicklungsköpfe oder elektrischer Schalter. Wird beispielsweise die Spulenspannungsgleichung

$$\underline{R}\underline{I} + n_S \dot{\underline{A}} = \underline{U}, \quad (2.42)$$

statt des Ohmschen Gesetzes verwendet, bei der  $n_S$  die Anzahl der Windungen ist, wird Gleichung 2.41, durch Verwendung der Methode der gewichteten Residuen und Galerkin um die Induktionsmatrix  $\underline{Q}$

$$\underline{Q} = \sum_{j=1}^{n^e} \int_{\Omega^e} N_i^e n_S N_j^e d\Omega^e \quad (2.43)$$

erweitert [56]

$$\begin{bmatrix} \underline{L} & \underline{0} \\ \underline{Q} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{A}} \\ \dot{\underline{I}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K} & -\underline{P} \\ \underline{0} & \underline{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{I} \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} \underline{B}_0 + \underline{J}_0 \\ \underline{U} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Durch diese Erweiterung erzeugt eine Änderung des magnetischen Feldes einen Strom im elektrischen Leiter, wodurch beispielsweise Generatoren berechnet werden können. In der vorliegenden Arbeit wird Gleichung 2.35 verwendet, da die Ströme durch die Messung bekannt sind und im Anwendungsfall durch den Regler direkt gesteuert werden.

## 2.2 Hysterese

Bei elektrischen Motoren weist der Eisenkern des Stators typischerweise ein nicht lineares Materialverhalten mit Hysterese-Effekt auf. Das bedeutet, die elektromagnetischen Felder sind nicht nur von den äußeren Parametern, sondern auch vom vorherigen Zustand des Systems abhängig. Die numerische Lösung der Maxwell-Gleichungen mit Hilfe der FEM ermöglicht es, nicht lineares Materialverhalten und Hysteresen zu berücksichtigen. Abbildung 2.1 zeigt links die Hysterese eines weichmagnetischen Materials. Es demagnetisiert fast vollständig, sobald das äußere Magnetfeld verschwindet, sodass die lineare Materialgleichung 2.5, mit einer konstanten Permeabilität  $\mu$ , bei schwachen Feldern genutzt werden kann. Bei größeren Feldern muss zusätzlich die Sättigung berücksichtigt werden, welche durch die Neukurve beschrieben werden kann. Es resultiert die feldabhängige Materialgleichung

$$\underline{B} = \mu(H)\underline{H}. \quad (2.45)$$

Bei hartmagnetischen Materialien, die in Abbildung 2.1 rechts zu sehen sind, bleibt nach ausreichender Magnetisierung auch nach Entfernen eines äußeren Magnetfeldes eine Magnetisierung vorhanden, wodurch die Materialgleichung 2.45 bzw. bei schwachen Feldern die Materialgleichung 2.5 um die remanente magnetische Flussdichte erweitert wird

$$\underline{B} = \mu(H)\underline{H} + \underline{B}_r \quad (2.46)$$

bzw.

$$\underline{B} = \mu\underline{H} + \underline{B}_r. \quad (2.47)$$

Diese remanente magnetische Flussdichte wird durch Gleichung 2.20 berücksichtigt und resultiert in  $\underline{B}_0$  in Gleichung 2.35. Materialien mit dieser Hystereseurve eignen sich für die Herstellung von Permanentmagneten. Abbildung 2.1 zeigt deutlich, dass die Annahme eines linearen Anstiegs zwischen magnetischer Flussdichte und Feldstärke bei beiden Materialarten nur in einem begrenzten Bereich zulässig ist. Die Wahl der Materialgleichung ist damit vom Material und den anliegenden Feldern abhängig. Für eine realistische Simulation sollte in den meisten Fällen mindestens die Sättigung berücksichtigt werden, welche wie beschrieben, durch eine von der magnetischen Feldstärke abhängige Permeabilität realisiert werden kann. Bisher wurden lediglich nicht lineare Materialien betrachtet. Für eine vollständige Modellierung der Hysterese ist die Permeabilität von vergangenen Feldstärken abhängig

$$\underline{B} = \mu(H, \text{Vergangenheit})\underline{H} \quad (2.48)$$

bzw.

$$\underline{B} = \mu(H, \text{Vergangenheit})\underline{H} + \underline{B}_r. \quad (2.49)$$

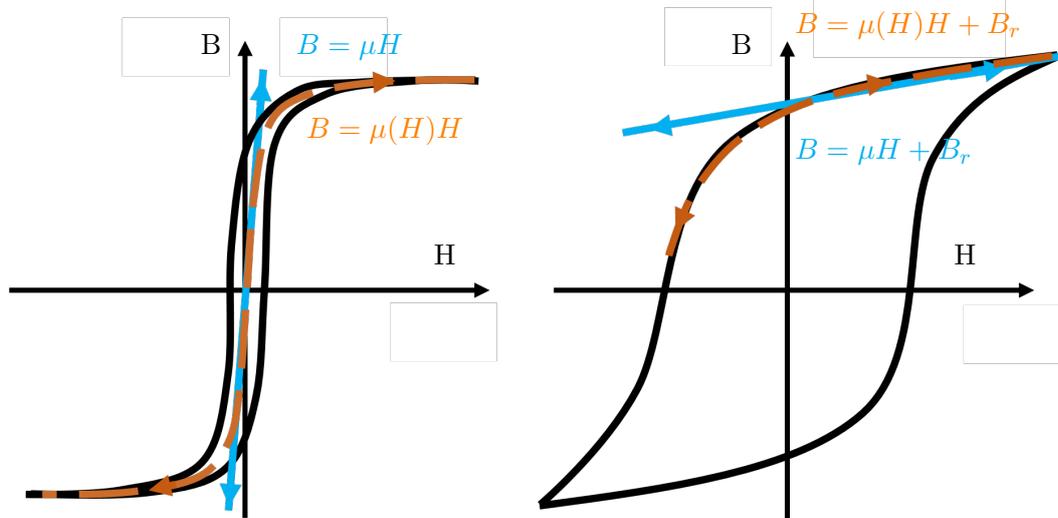


Abbildung 2.1: Beschreibung der Hysterese mit linearen Materialmodellen, mit den links dargestellten weichmagnetischen und rechts hartmagnetischen Materialien nach [58].

So lassen sich beispielsweise Hystereseverluste berücksichtigen. Eine ausführliche Beschreibung von Hysteresen kann [58] entnommen werden. Der Nachteil des nicht linearen Materialverhaltens ist, dass die Permeabilität  $\mu$  von der magnetischen Feldstärke  $H$  abhängt und diese mit Gleichung 2.5 aus der Permeabilität und der magnetischen Flussdichte  $B$  bestimmt wird. Infolgedessen muss das Differentialgleichungssystem bzw. Gleichungssystem so oft gelöst werden, bis die Ergebnisse konvergieren.

## 2.3 Elektromagnetische Kräfte und Momente

In diesem Kapitel wird die Bestimmung der äquivalenten Knotenkräfte nach [56] im globalen Koordinatensystem, welche aus der magnetischen Feldstärke  $H$  resultieren, erläutert. Diese Kräfte werden zu einer resultierenden Kraft und einem resultierenden Moment zusammengefasst und der MKS übergeben. So können die elektromagnetischen Lasten in Abhängigkeit der aktuellen Zustandsgrößen berücksichtigt werden und so deren Einfluss auf das Systemverhalten. Die berechneten Lasten können außerdem für weitere Berechnungen, wie die Bestimmung der Verformungen oder der Schallabstrahlung des Motors genutzt werden.

Es wird davon ausgegangen, dass das Gleichungssystem aus Gleichung 2.36 bzw. eine der Differentialgleichungen aus Kapitel 2.1.1 gelöst wurde, wodurch das magnetische Vektorpotential  $A$  an jedem Knoten bekannt ist. Aus dieser mathematischen Hilfsgröße kann die magnetische Flussdichte nach Gleichung 2.10 und daraus die magnetische Feldstärke  $H$

wie in Kapitel 2.2 beschrieben, bestimmt werden. Das Vektorpotential  $\underline{A}$  ist an den Knoten bekannt und die Werte sind im lokalen und globalen Koordinatensystem identisch. Durch Nutzung der Ansatzfunktionen  $N(\xi, \eta, \zeta)$  aller Knoten eines Elements kann das Vektorpotential und damit auch die magnetische Flussdichte und Feldstärke an jedem beliebigen Punkt im Element bestimmt werden

$$A(\xi, \eta, \zeta) = \sum_i^{n_e} A_i N_i(\xi, \eta, \zeta). \quad (2.50)$$

Während das Vektorpotential im gesamten Lösungsgebiet einen stetigen Verlauf annimmt, treten bei der magnetischen Flussdichte  $B$  und der magnetischen Feldstärke  $H$  Unstetigkeiten an den Elementkanten auf, da die Werte auf den Kanten von verschiedenen Elementen bestimmt werden können. Um diese Sprünge und dementsprechend auch Fehler, gering zu halten müssen dort wo diese Größen benötigt werden kleine Elemente oder Elemente mit höheren Ansatzfunktionen verwendet werden (siehe Kapitel 2.4).

Die Kräfte werden an den Grenzflächen von Rotor und Stator mit Hilfe des Maxwell'schen Spannungstensors [56]

$$d\underline{F} = -\frac{\mu_0}{2} |\underline{H}| d\underline{\Gamma} + \mu_0 (\underline{H} d\underline{\Gamma}) \underline{H} \quad (2.51)$$

bestimmt. Mit dem Normalenvektor  $\underline{n}$ , gilt

$$d\underline{\Gamma} = d\underline{\Gamma} \underline{n}. \quad (2.52)$$

Damit kann Gleichung 2.51 in der Form

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dF_x \\ dF_y \\ dF_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{\mu_0}{2} (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) n(1) \\ -\frac{\mu_0}{2} (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) n(2) \\ -\frac{\mu_0}{2} (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) n(3) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} \mu_0 (H_x^2 n(1) + H_x H_y n(2) + H_x H_z n(3)) \\ \mu_0 (H_x H_y n(1) + H_y^2 n(2) + H_y H_z n(3)) \\ \mu_0 (H_x H_z n(1) + H_y H_z n(2) + H_z^2 n(3)) \end{bmatrix} d\underline{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.53)$$

geschrieben und anschließend auf die Form

$$\begin{bmatrix} dF_x \\ dF_y \\ dF_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu_0}{2} (H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) n(1) \\ \frac{\mu_0}{2} (H_y^2 - H_x^2 + H_z^2) n(2) \\ \frac{\mu_0}{2} (H_z^2 - H_x^2 + H_y^2) n(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_0 H_x H_y n(2) + \mu_0 H_x H_z n(3) \\ \mu_0 H_x H_y n(1) + \mu_0 H_y H_z n(3) \\ \mu_0 H_x H_z n(1) + \mu_0 H_y H_z n(2) \end{bmatrix} d\underline{\Gamma} \quad (2.54)$$

gebracht werden. Durch Nutzung der Gauß-Integration ergibt sich die resultierende Kraft  $\underline{F}$  auf die Elementfläche durch Summation von Gleichung 2.54 an den Gaußpunkten, der

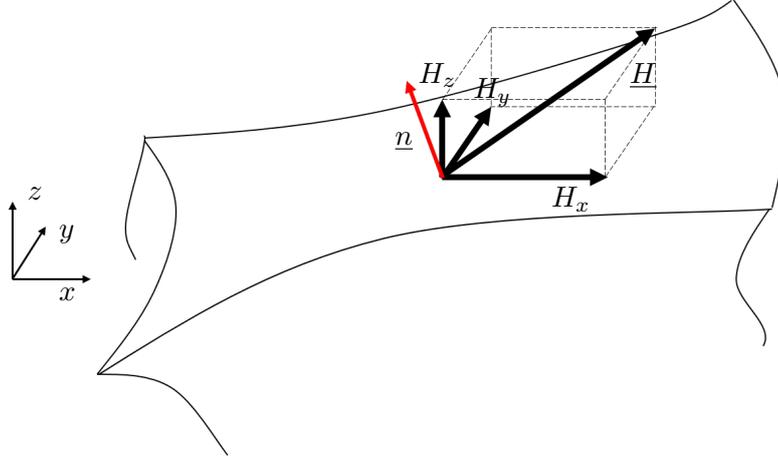


Abbildung 2.2: Magnetisches Feld  $\underline{H}$  an der Elementfläche für die Bestimmung der resultierenden Kraft.

Verwendung der Wichtung und wie in Anhang A.2 beschrieben der Elementfläche, welche mit der Determinante der Jacobimatrix  $\underline{\tilde{J}}$  korreliert

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} &= \sum_i \left( \begin{bmatrix} \frac{\mu_0}{2}(H_{xi}^2 - H_{yi}^2 - H_{zi}^2)n_i(1) \\ \frac{\mu_0}{2}(H_{yi}^2 - H_{xi}^2 + H_{zi}^2)n_i(2) \\ \frac{\mu_0}{2}(H_{zi}^2 - H_{xi}^2 + H_{yi}^2)n_i(3) \end{bmatrix} + \right. \\
 &\quad \left. \begin{bmatrix} \mu_0 H_{xi} H_{yi} n_i(2) + \mu_0 H_{xi} H_{zi} n_i(3) \\ \mu_0 H_{xi} H_{yi} n_i(1) + \mu_0 H_{yi} H_{zi} n_i(3) \\ \mu_0 H_{xi} H_{zi} n_i(1) + \mu_0 H_{yi} H_{zi} n_i(2) \end{bmatrix} w_i \det(\underline{\tilde{J}}_i) \right). \tag{2.55}
 \end{aligned}$$

Abbildung 2.2 zeigt die magnetische Feldstärke  $\underline{H}$  an einem Punkt der Elementoberfläche. Die Anzahl der notwendigen Gaußpunkte für eine exakte Integration des Systems ist in Tabelle 2.1 für Dreieckselemente in Abhängigkeit des Polynomgrads der Ansatzfunktion aufgelistet. In der ersten Spalte ist der Polynomgrad des Elements  $p_{An}$  zu sehen. In der zweiten Spalte ist der Polynomgrad der magnetischen Feldstärke  $p_H$  angegeben. Dieser ist bei einem Dreieckselement ein Grad geringer als die Ansatzfunktion. Da die magnetische Feldstärke in jedem Summanden quadratisch eingeht, erhöht sich der Polynomgrad für die Funktion der resultierenden Kraft  $p_F$ , aus der sich schließlich die Anzahl der notwendigen Gaußpunkte  $p_{Gauß}$  für eine exakte Integration ergibt.

Nun ist die resultierende Kraft auf das Element bekannt, allerdings nicht der Angriffspunkt  $\xi, \eta$  dieser Kraft. Dieser wirkt nicht notwendigerweise in der Elementmitte und kann durch den Erwartungswert oder auch Schwerpunkt der Last bestimmt werden. Für

Tabelle 2.1: Anzahl notwendiger Gaußpunkte für eine exakte Berechnung der elektromagnetischen Kräfte

$p_{An}$	$p_H$	$p_F$	$n_{\text{Gauß}}$
1	0	0	1
2	1	2	2
3	2	4	3
4	3	6	4
5	4	8	5

ein zweidimensionales Element ergibt sich

$$\xi_R = \frac{dF(\xi, \eta)\xi}{F} d\xi d\eta \quad (2.56)$$

und

$$\eta_R = \frac{dF(\xi, \eta)\eta}{F} d\xi d\eta. \quad (2.57)$$

Durch Anwendung der Gaussintegration ergibt sich

$$\xi_R = \sum_i \frac{F(\xi_i, \eta_i)\xi_i}{F} w_i \det(\underline{\tilde{J}}_i) \quad (2.58)$$

und

$$\eta_R = \sum_i \frac{F(\xi_i, \eta_i)\eta_i}{F} w_i \det(\underline{\tilde{J}}_i). \quad (2.59)$$

Alternativ kann die Verteilung der Last und damit der resultierende Lastangriffspunkt auch dadurch berücksichtigt werden, dass die Summation in Gleichung 2.55 vernachlässigt wird und die Kraftanteile direkt auf die zugehörigen Gaußpunkte wirken. Nun können diese Kräfte an den Gauß-Knoten  $F_{\text{Gauß}}$  mittels Elementansatzfunktionen  $N$  auf die FE-Knoten umgerechnet werden

$$F_{FEj} = \sum_i N_j(\xi_i, \eta_i) F_{\text{Gauß},i}. \quad (2.60)$$

Dafür werden die lokalen Koordinaten der Gauß-Knoten  $\xi$  und  $\eta$  verwendet. Die resultierende Kraft  $F_{res}$  auf den gesamten Motor, welche an die MKS zurückgegeben wird, ergibt sich durch Summation der Einzelkräfte, wobei es egal ist, ob die Kräfte an den Gauß-Knoten oder an den FE-Knoten verwendet werden

$$\underline{F}_{res} = \sum_i \underline{F}_i. \quad (2.61)$$

Das resultierende Drehmoment  $\underline{M}_{res}$  wird aus dem Kreuzprodukt der Einzelkräfte und deren Abstand zur Drehachse ermittelt

$$\underline{M}_{res} = \sum \underline{r}_i \times \underline{F}_i. \quad (2.62)$$

## 2.4 Höherwertige Finite Elemente

Wie bereits beschrieben, ist die Finite Elemente Methode ein Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen. Dabei wird das Lösungsgebiet in eine endliche Anzahl von Elementen zerlegt, für die Ansatzfunktionen gewählt werden. Für die Berechnung konvergenter Ergebnisse wird in den meisten Fällen die h-Version der FEM verwendet, das heißt, die Anzahl der Elemente wird so lange erhöht, bis das Ergebnis die gewünschte Genauigkeit erreicht. Dem gegenüber wird bei der p-Version der Polynomgrad der Ansatzfunktion erhöht. Eine Kombination der beiden Methoden wird hp-Version genannt. Das bedeutet, der Unterschied zwischen den Versionen liegt allein in den verwendeten Elementansatzfunktionen. Daher, können für alle drei Versionen die Gleichungen aus Kapitel 2.1.1 verwendet werden.

Wie in Abbildung 2.3 zu erkennen ist, zeigt die p-Version ein besseres Konvergenzverhalten als die h-Version der FEM. Das beste Konvergenzverhalten liegt bei einer Kombination der Methoden vor. Neben den hohen Konvergenzraten ist die p-Version auch wegen ihrer Robustheit gegen Elementverzerrungen und Locking-Effekte von großem Vorteil [60]. Ein weiterer Vorteil höherwertiger Ansatzfunktionen ist, dass gekrümmte Kanten mit Krümmung abgebildet werden können. Lineare Ansatzfunktionen sind dazu nicht in der Lage, da die Elementkante durch einen linearen Ansatz, also eine Gerade, approximiert wird. Abbildung 2.4 zeigt die in dieser Arbeit verwendeten Serendipity-Elemente mit den zugehörigen Ansatzfunktionen bis zum Polynomgrad drei. Die Verwendung verschiedener höherwertiger Ansatzfunktionen ist in der Literatur ausführlich beschrieben [60, 61, 62, 63] und kommt beispielsweise bei der Wellenausbreitung in dünnwandigen Strukturen zum Einsatz. Der Algorithmus zum Aufbau höherwertiger Elemente, sowie die Elementansatzfunktionen wurden einem FEM-Programm für mechanische Fragestellungen von Dr. Sascha Eisenträger entnommen. Das Programm wurde bspw. für die Beschreibung von Lamb-Wellen [64, 65] genutzt.

## 2.5 Elektromagnetische Finite Elemente Analyse

Unter Nutzung der vorgestellten theoretischen Grundlagen der FEM für elektromagnetische Problemstellungen, werden in diesem Abschnitt verschiedene Modellierungsstufen des vorgestellten Motors untersucht und Konvergenzstudien durchgeführt. Dafür wird in einem ersten Schritt der Phasenwinkel des Stroms  $\varphi_0$  bestimmt, bei dem das maximale Drehmoment auftritt und anschließend die Vernetzung, der Polynomgrad und die Geometrie variiert. Für die Verifizierung wird im anschließenden Kapitel das kommerzielle

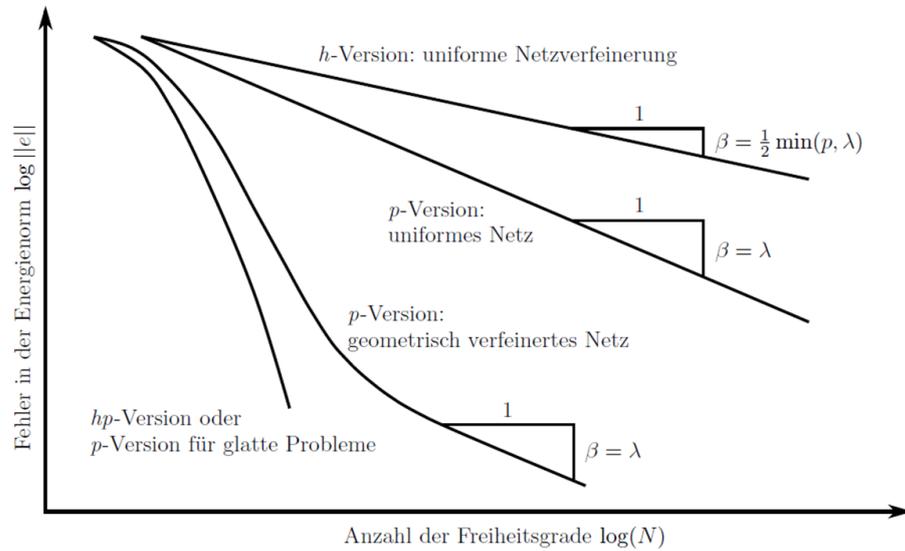
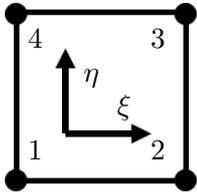


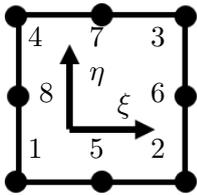
Abbildung 2.3: Konvergenzraten der h, p und hp-Version der FEM für ein zweidimensionales lineares elastisches Problem mit Singularitäten [62]

Programm ANSYS verwendet, um die korrekte Umsetzung der Methode sicherzustellen. Die mit der FEM bestimmten elektromagnetischen Lasten werden dann im weiteren Verlauf der Arbeit an ein MKS übergeben um die Interaktionen von elektrischem und mechanischem System zu berücksichtigen. Mit Hilfe von periodischen Rändern ist es ausreichend, nur ein Polpaar, also ein Viertel des Gesamtmotors, zu betrachten, was zu erheblichen Rechenzeitverringerungen führt. Diese Randbedingungen können nur bei einer zentrischen Position des Rotors verwendet werden, das heißt, wenn die Höhe des Luftspalts über dem Umfang konstant ist. Diese zentrische Position geht bei der später durchgeführten Kopplung mit dem mechanischen System verloren, da elastische Lager berücksichtigt werden, wodurch der Rotor sich gegenüber dem Stator verschieben kann. Bei dem gekoppelten System ist dementsprechend das volle Modell erforderlich. Die elektromagnetischen Felder werden zum einen von den Magneten über die magnetische Koerzitivfeldstärke und zum anderen über den Strom in den elektrischen Leitern hervorgerufen.

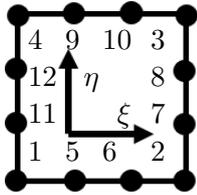
Aufgrund wesentlich geringerer Rechenzeiten, weil keine Zeitintegration durchgeführt werden muss, wird die Konvergenzstudie an einer magnetostatischen Untersuchung durchgeführt, bei der das Gleichungssystem 2.36 gelöst wird und dynamische Prozesse wie Wirbelströme, vernachlässigt werden. Diese Wirbelströme werden in einem zweiten Schritt durch Gleichung 2.35 berücksichtigt und ihr Einfluss bewertet, um zu zeigen, ob und wenn ja, ab welcher Drehzahl diese einen relevanten Einfluss auf das elektrodyna-



$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta) \\ N_2 &= -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta) \\ N_3 &= -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta) \\ N_4 &= -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta) \\ N_5 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ N_6 &= \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \\ N_7 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ N_8 &= \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{32}(\eta - 1)(\xi - 1)(9\eta^2 + 9\xi^2 - 10) \\ N_2 &= -\frac{1}{32}(\eta - 1)(\xi + 1)(9\eta^2 + 9\xi^2 - 10) \\ N_3 &= \frac{1}{32}(\eta + 1)(\xi + 1)(9\eta^2 + 9\xi^2 - 10) \\ N_4 &= -\frac{1}{32}(\eta + 1)(\xi - 1)(9\eta^2 + 9\xi^2 - 10) \\ N_5 &= \frac{9}{32}(\eta - 1)(-3\xi^3 + \xi^2 + 3\xi - 1) \\ N_6 &= -\frac{9}{32}(\eta - 1)(-3\xi^3 - \xi^2 + 3\xi + 1) \\ N_7 &= -\frac{9}{32}(\xi + 1)(-3\eta^3 + \eta^2 + 3\eta - 1) \\ N_8 &= \frac{9}{32}(\xi + 1)(-3\eta^3 - \eta^2 + 3\eta + 1) \\ N_9 &= -\frac{9}{32}(\eta + 1)(-3\xi^3 + \xi^2 + 3\xi - 1) \\ N_{10} &= \frac{9}{32}(\eta + 1)(-3\xi^3 - \xi^2 + 3\xi + 1) \\ N_{11} &= \frac{9}{32}(\xi - 1)(-3\eta^3 + \eta^2 + 3\eta - 1) \\ N_{12} &= -\frac{9}{32}(\xi - 1)(-3\eta^3 - \eta^2 + 3\eta + 1) \end{aligned}$$

Abbildung 2.4: Vierecks-Serendipity Elemente bis zum Polynomgrad 3, mit Ansatzfunktionen nach [63].

mische Verhalten haben. Außerdem wird mit einer 2D-Konvergenzstudie begonnen und dieses Modell anschließend in die Längsachse extrudiert, um ein 3D-Modell zu erzeugen. Es wird erwartet, dass die Elemente in Längsrichtung deutlich größer sein können, da es keine geometrischen Unterschiede in dieser Richtung gibt. Diese Elementverzerrung sollte speziell bei der Verwendung von höherwertigen Elementen unproblematisch sein. Auf diese Weise wird die Anzahl der Parameter für die Konvergenzstudie schrittweise erhöht.

Als vergleichende Größe wird die Anzahl der Freiheitsgrade, das maximal auftretende Vektorpotential an einem ausgewählten Punkt sowie die Summe der Kräfte und Momente auf den Rotor verwendet. Die letzten beiden Größen sind für die Einbindung in die MKS, wie im weiteren Verlauf der Arbeit gezeigt wird, von besonderer Bedeutung, können aber durch die Aufsummierung aller Werte auftretende Fehler maskieren, weshalb auch das Vektorpotential als primäre Lösung des Gleichungssystems für diese Vergleiche verwendet wird.

Das nicht lineare Materialverhalten des Stators wurde [18] entnommen und ist in Anhang A.1 sowie in Abbildung 1.7 dargestellt. Ein entwickeltes parametrisiertes Modell, baut schichtweise von innen nach außen die Knoten und Elemente auf und weist den Elementen Materialeigenschaften zu. Auf diese Weise können geometrische Eigenschaften wie Radien, Anzahl der Magnete und Anzahl der Leiter schnell und mit einer regelmäßigen Vernetzung eingearbeitet werden. Die minimale Anzahl der Elemente ist von der Anzahl der elektrischen Leiter im Motor abhängig. Ein Leiter und die Lücke zwischen zwei Leitern bestehen jeweils aus mindestens einem Element, womit die Anzahl der Elemente in Umfangsrichtung bekannt ist. Die minimale Anzahl der Elemente in radialer Richtung ist von den einzelnen Bauteilen wie Rotor, Stator, Luftspalt und Magnete abhängig. In den folgenden Untersuchungen wird die Anzahl der Elemente schrittweise erhöht, indem die Anzahl der Elemente in radialer und Umfangsrichtung in ganzzahlige Vielfache der Minimalkonfiguration geteilt werden. Für die Untersuchung von komplizierteren Geometrien können kommerzielle Preprozessoren genutzt werden und die Modelle, also Knoten und deren Koordinaten, Elemente und deren Materialeigenschaften, eingelesen und für die vorgestellte Methode genutzt werden. Ein Segment des Motormodells ist in Abbildung 2.5 dargestellt. In Anlehnung an die vorausgegangenen Untersuchungen von [18] wird auf die Berücksichtigung des Aluminiumzylinders und der umgebenden Luft verzichtet. Diese Annahme wird in diesem Kapitel überprüft. Außerdem werden die elektrischen Leiter, wie auch in [18] vorerst ohne Rundungen approximiert, sondern als Quadrate mit einer Kantenlänge von 0,6 mm abgebildet, um die Konvergenz nicht von Fehlern der Approximation eines Kreises mit linearen Elementen abhängig zu machen. Im Folgenden wird ein sinusförmiger Strom von 250 A angenommen, welcher, wie in Kapitel 1.2 beschrieben, auf zwei Motorhälften und sechs Leiter aufgeteilt wird. Es resultiert eine Stromdichte von  $5,8 \cdot 10^7 \text{ A/m}^2$ . Die in Kapitel 2.4 vorgestellten höherwertige Ansatzfunktionen eignen sich für die Abbildung von runden Elementkanten, während lineare Ansatzfunktionen Kreise nur durch viele abschnittsweise lineare Kanten approxi-

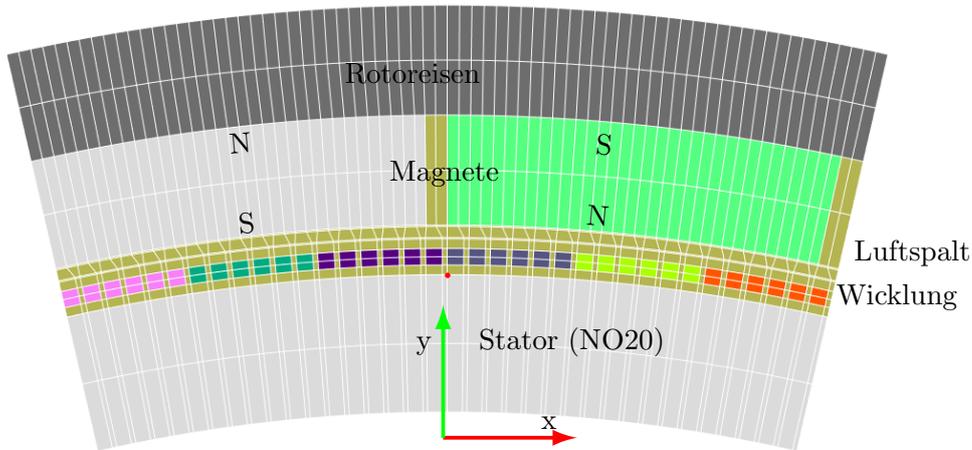


Abbildung 2.5: Ein Segment des untersuchten Motors mit einem beispielhaften FE-Netz, sowie den mit rotem Punkt gekennzeichneten Knoten, an dem das Vektorpotential bei verschiedenen Netzen verglichen wird.

mieren können, was zu einer hohen Elementanzahl in den vergleichsweise kleinen Leitern (verglichen mit Magneten, Rotor und Stator) führen würde.

Vor den Konvergenzstudien wird zunächst der optimale Nullphasenwinkel  $\varphi_0$  des Stroms, also der Phasenwinkel bei dem das maximale Drehmoment auftritt, im Vergleich zu den Permanentmagneten bestimmt (siehe Gleichung 1.1). Alternativ könnte auch  $\varphi_0$  beispielsweise auf 0 gesetzt werden und der Rotor gedreht werden. Für die Bestimmung wird das Maximum des resultierenden Moments in Abhängigkeit von  $\varphi_0$  ermittelt. Diese Berechnung ist nur einmal notwendig, wodurch die verwendete Vernetzung sehr fein gewählt werden kann. Abbildung 2.6 zeigt den Verlauf des Drehmoments von Rotor und Stator bei einer Schrittweite von  $\varphi_0$  von  $5^\circ$  bzw.  $0,0873$ . Das maximale Drehmoment stellt sich bei 2,5 ein und entspricht  $35 \text{ Nm}$ . Das verwendete Modell nutzt kubische Elemente und besitzt  $145 \cdot 10^3$  Freiheitsgrade (FG). Dieser ermittelte Winkel wird für alle folgenden Simulationen verwendet.

Die primäre Ergebnisgröße des Gleichungssystems 2.36 bzw. der DGL 2.35 ist das magnetische Vektorpotential  $A$ , welches an dem in Abbildung 2.5 rot dargestellten Knoten mit den Koordinaten  $x = 0 \text{ mm}$  und  $y = 61,7 \text{ mm}$  einen Wert von  $4,54 \cdot 10^{-3} \text{ Wb/m}$  annimmt. Der relative Fehler bezogen auf das Ergebnis des quintischen Ansatzes, also  $p = 5$ , mit  $1,8 \cdot 10^6$  FG ist in Abbildung 2.7 zu sehen. Diese Vernetzung wird auch für folgende relative Fehler verwendet. Es ist deutlich zu sehen, dass die Ergebnisse sehr schnell konvergieren und die Fehler bereits bei den linearen Elementen mit  $20 \cdot 10^3$  FG unterhalb von einem Prozent liegen. Unter Verwendung der in Kapitel 2.3 vorgestellten Gleichungen kann daraus für jeden Knoten eine Kraft ermittelt und anschließend resul-

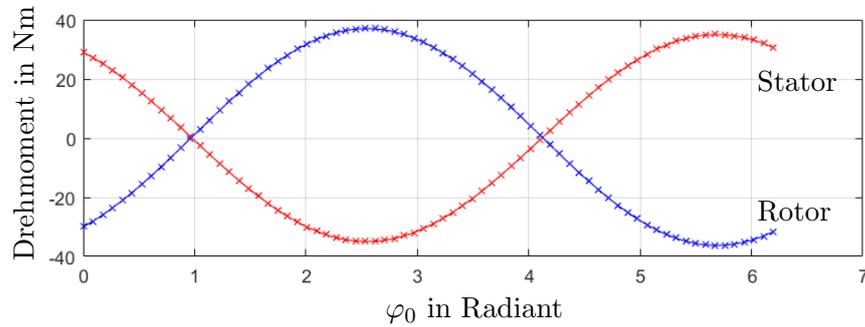


Abbildung 2.6: Drehmoment in Abhängigkeit des Nullphasenwinkels  $\varphi_0$ .

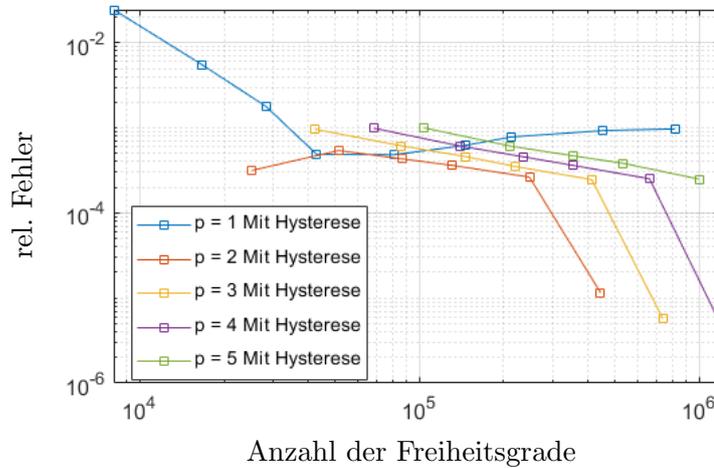


Abbildung 2.7: Konvergenzverhalten des Vektorpotentials  $A$  bei der magnetostatischen Untersuchung des untersuchten Motors an einem ausgewählten Punkt (siehe Kapitel 2.5).

tierende Kräfte und Momente auf Rotor und Stator bestimmt werden.

Das auf den Rotor wirkende Drehmoment in Abhängigkeit der gewählten Vernetzung ist in Abbildung 2.8 dargestellt, wobei links die absoluten Werte und rechts der relative Fehler dargestellt ist. Es ist deutlich zu sehen, dass die Drehmomente  $M$  bei höheren Freiheitsgraden schneller konvergieren, als die primäre Größe  $A$ , was darauf zurückzuführen ist, dass für die Bestimmung des Drehmoments  $M$  die magnetische Flussdichte  $B$  benötigt wird, welche durch die Rotation, also einer Ableitung von  $A$ , ermittelt wird (siehe Gleichung 2.10). Herausstechend sind die Ergebnisse der linearen Elemente, welche deutlich später konvergieren als die Ergebnisse unter Verwendung von höherwertigen Ansatzfunktionen. Auf lineare Elemente sollte für eine effiziente Abbildung des Motors verzichtet werden. Für eine gewählte Fehlerschranke von 2% sollten quadratische Elemente mit  $52 \cdot 10^3$  FG gewählt werden.

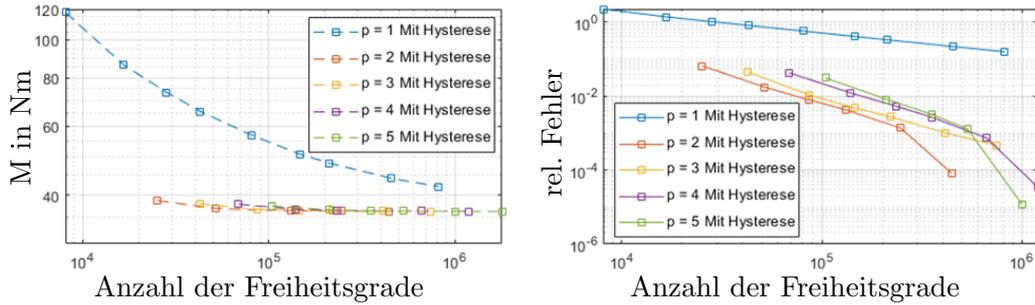


Abbildung 2.8: Konvergenzverhalten des Rotordrehmoments  $M_{Rot}$  bei der magnetostatischen Untersuchung des untersuchten Motors mit nichtlinearem Materialverhalten des Stators.

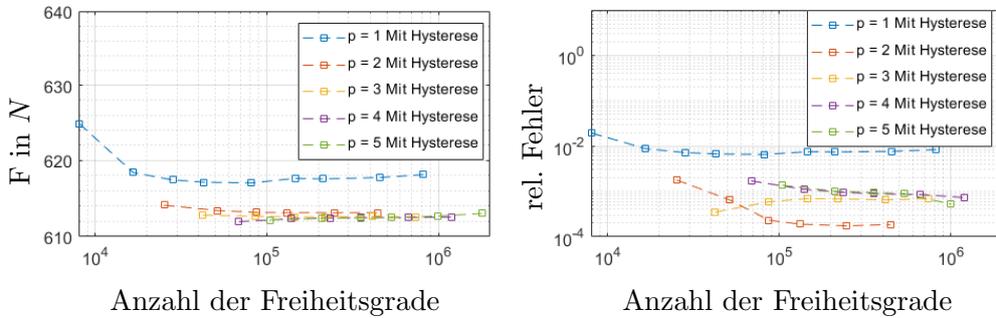


Abbildung 2.9: Konvergenzverhalten der Kraft  $F_y$ , welche in Richtung der Exzentrizität wirkt, bei einer Exzentrizität von 250  $\mu\text{m}$ .

Die resultierende Kraft auf Rotor und Stator ist in zentrischer Lage ungefähr 0 N. Für die Sicherstellung, dass auch diese Größe konvergiert, wird die Konvergenz bei einer Exzentrizität von 250  $\mu\text{m}$ , einer relativen Exzentrizität von 50 %, ermittelt. Absolute (links) und relative Fehler (rechts) der resultierenden Kräfte sind in Abbildungen 2.9 und 2.10 dargestellt, wobei Erstere die Kraft in Richtung der Exzentrizität ( $y$ -Richtung) und Letztere in  $x$ -Richtung zeigt. Die relativen Fehler in Richtung der Exzentrizität sind bei fast allen Varianten unterhalb eines Prozents und bei den höherwertigen Elementen unterhalb von 0,1 %. Außerdem konvergieren die linearen Elemente nicht gegen den gleichen Wert wie die höherwertigen. Die Kräfte senkrecht zur Exzentrizität ( $x$ -Richtung) weisen eine deutlich schlechtere Konvergenz auf. Dieser Fehler wird vernachlässigt, da die Kräfte in Richtung der Exzentrizität ein Vielfaches größer sind, beispielsweise bei quadratischen Elementen und  $52 \cdot 10^3$  FG ist das Verhältnis größer als 500. Aus diesem Grund wird das gewählte Modell weiter verwendet. Es bleibt bei dem gewählten Modell mit  $52 \cdot 10^3$  FG und quadratischen Ansatzfunktionen.

Wie in Kapitel 1.3.2 beschrieben, kann der UMP eines elektrischen Motors oft als

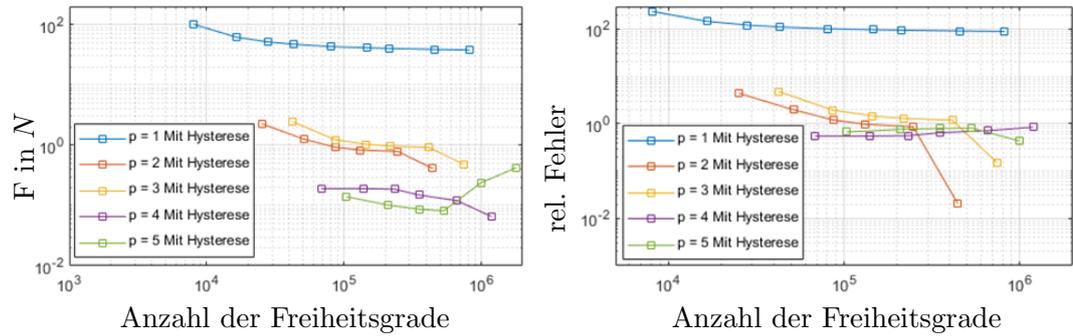


Abbildung 2.10: Konvergenzverhalten der Kraft  $F_x$ , welche senkrecht zur Exzentrizität wirkt, bei einer Exzentrizität von  $250 \mu m$ .

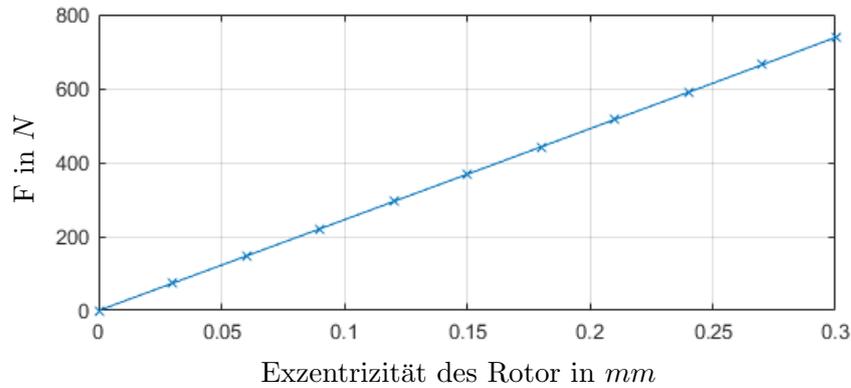


Abbildung 2.11: Für den untersuchten Motor resultierender UMP in Abhängigkeit der Exzentrizität.

Feder mit negativer konstanter Federsteifigkeit betrachtet werden. Abbildung 2.11 zeigt den Kraft-Exzentrizitätsverlauf in Richtung der Exzentrizität und bestätigt diesen linearen Zusammenhang, für magnetostatische Untersuchungen. Im einfachsten Fall können Schwingungsuntersuchungen des Motors mit einer Steifigkeit  $c_{Motor}$  von  $-2,46 \cdot 10^6 N/m$  durchgeführt werden.

Die magnetische Permeabilität  $\mu$  ist nach Gleichung 2.5 das Verhältnis aus magnetischer Feldstärke  $H$  und magnetischer Flussdichte  $B$ . Wie in Abbildung 1.7 dargestellt, ist dieses Verhältnis beim Stator des untersuchten Motors nicht konstant. Die Berücksichtigung dieses nicht linearen Materialverhaltens des Stators hat einen großen Einfluss auf die Rechenzeit, da das Differentialgleichungssystem 2.35 bzw. das Gleichungssystem 2.36 in jedem Zeitschritt mehrfach gelöst werden muss, bis die Werte der Permeabilität konvergieren. Die Anzahl der notwendigen Iterationen kann reduziert werden, wenn als

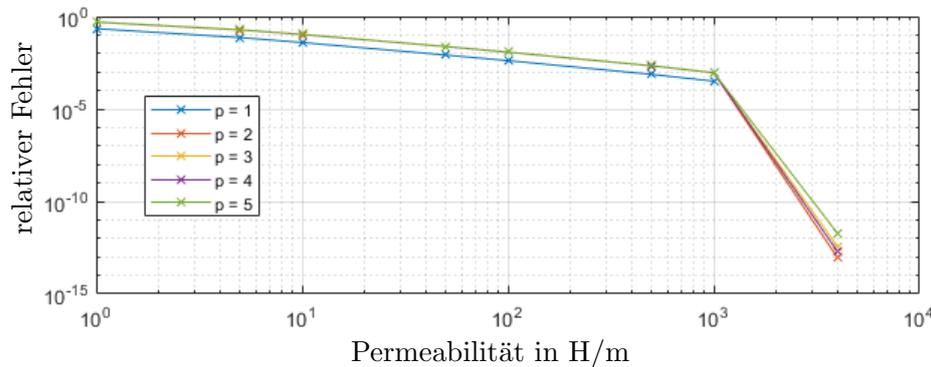


Abbildung 2.12: Relativer Fehler des Drehmoments in Abhängigkeit einer konstanten Permeabilität des Stators, unter Verwendung verschiedener Ansatzfunktionen.

Ausgangswert die Permeabilität des letzten Zeitschritts gewählt wird. Zur Überprüfung der Notwendigkeit von diesem nicht linearen Materialverhalten bzw. der Ermittlung einer geeigneten konstanten Permeabilität des Stators, werden Permeabilitäten von 1 H/m, 5 H/m, 10 H/m, 50 H/m, 100 H/m, 500 H/m, 1000 H/m und 4000 H/m angenommen, wobei 4000 H/m der Permeabilität des Rotors entspricht und mit dem Modell mit nicht linearem Material verglichen. In Abbildung 2.12 ist der relative Fehler in Abhängigkeit der gewählten Statorpermeabilität für verschiedene Ansatzfunktionen dargestellt. Es wurden jeweils die Modelle gewählt, die in Abbildung 2.8 einen relativen Fehler unterhalb 0,02 aufweisen, mit Ausnahme der linearen Elemente, die diese Schranke nicht erreicht haben und bei denen das Modell mit  $17 \cdot 10^3$  FG zu sehen ist. Der Verlauf der Kurven ist nahezu identisch, der relative Fehler ist bereits bei einer Permeabilität  $\mu$  von 50 H/m kleiner als ein Prozent und verringert sich mit höherer Permeabilität weiter. Bei einer Permeabilität von 4000 H/m liegt der relative Fehler im Bereich der numerischen Ungenauigkeit und kann damit vernachlässigt werden. Die geringe Sensitivität der Ergebnisgrößen gegenüber höherer Permeabilitäten kann darauf zurückgeführt werden, dass die Permeabilität gegenüber der umgebenden Luft sehr groß ist und sich das Magnetfeld dementsprechend fast ungehindert im Stator ausbilden kann. Bei der blau dargestellten Kurve für lineare Ansatzfunktionen, waren die Ergebnisse identisch zur Berechnung mit nicht linearen Materialeigenschaften, wodurch der relative Fehler 0 wird und in der logarithmischen Darstellung nicht aufgetragen wird. Für die statischen Modelle wird daraus resultierend in den folgenden Modellen mit einer Permeabilität des Stators von 4000 H/m gerechnet.

Bisher wurde davon ausgegangen, dass sowohl der Aluminiumzylinder, in dem die Kühlkanäle verlaufen, als auch die Luft, die den Motor umgibt, einen geringen Einfluss auf die elektromagnetischen Felder besitzt. In diesem Abschnitt soll überprüft werden, ob die getroffenen Randbedingungen, dass das Vektorpotential an der Innenkante des Stators und der Außenkante des Rotors gleich null ist, zulässig sind. Dafür werden, wie in

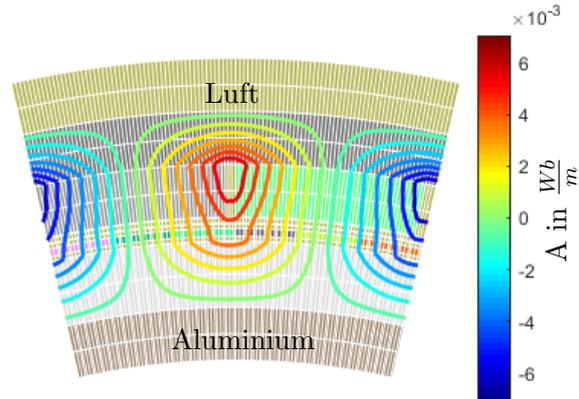


Abbildung 2.13: Vektorpotential  $A$  eines Segments des untersuchten Motors, unter Berücksichtigung der umgebenden Luft und des Aluminiumzylinders.

Abbildung 2.13 dargestellt, zusätzlich der Aluminiumzylinder unterhalb des Stators und die Luft außerhalb des Rotors modelliert und die Randbedingungsknoten entsprechend an die Innenkante des Aluminiumzylinders bzw. an die Außenkante der Luft verschoben. Die dargestellten Feldlinien zeigen die Isolinien des Vektorpotentials, welche sich im Stator und Rotor, aufgrund der hohen Permeabilität gut ausbreiten können. Das berechnete Drehmoment beträgt  $36,7933 \text{ Nm}$  und ist damit  $0,5 \%$  geringer als unter Vernachlässigung dieser Bauteile. Die Unterschiede sind vernachlässigbar klein, sodass diese Komponenten im Weiteren nicht berücksichtigt werden.

Anders als in den vorangegangenen Berechnungsmodellen sind die realen Leiter, wie in Abbildung 1.5 zu sehen ist, an der Innen- und Außenseite gekrümmt. In dem vorgestellten automatischen Modellaufbau ist diese Krümmung nicht umgesetzt und damit in der Konvergenzstudie nicht berücksichtigt. Für das konvergente Modell wird überprüft, ob die Vernachlässigung der Krümmung zulässig ist. Dabei ist zu beachten, dass der Strom in den Leitern gleich groß ist, das heißt die Stromdichte, welche in Gleichung 2.35 über  $\underline{J}$  berücksichtigt wird, muss angepasst werden. Abbildung 2.14 zeigt links einen Ausschnitt des Motors mit angepasster Leitergeometrie. Die dargestellten Leiter werden jeweils mit einem quadratischen Element abgebildet und die Mittenknoten der inneren und äußeren Elementkante verschoben. Es ist gut zu sehen, dass die Leiter nicht rund sind, was lediglich der Darstellung geschuldet ist, in der die FE-Knoten miteinander verbunden werden. Unter Berücksichtigung der Ansatzfunktion ergibt sich die in Abbildung 2.14 rechts dargestellte Geometrie des Leiters. Auch die quadratischen Ansatzfunktionen sind nicht in der Lage eine halbkreisförmige Kante abzubilden, der dargestellte Leiter weicht  $5 \%$  von der angestrebten Geometrie ab. Der relative Fehler des Vektorpotentials  $A$  beträgt  $4,5 \cdot 10^{-4}$  am ausgewählten Vergleichsknoten (siehe Abbildung 2.5) und  $8,5 \cdot 10^{-2}$  für

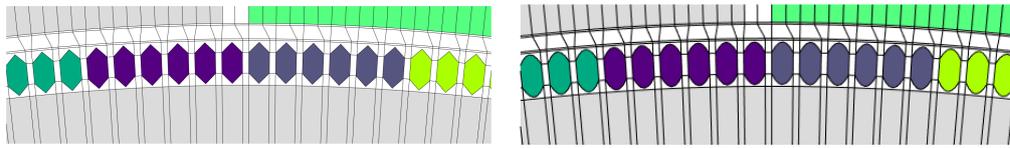


Abbildung 2.14: Ausschnitt des Motormodells mit runden Leitern aus je einem Element mit quadratischen Ansatzfunktionen. links: für die Darstellung werden die Punkte des Elements verwendet; rechts: für die Darstellung wird die Ansatzfunktion verwendet.

das Drehmoment. Während der Fehler des Vektorpotentials vernachlässigbar klein ist, ist die Abweichung des Drehmoments deutlich und sollte nicht vernachlässigt werden.

Unter Berücksichtigung von Genauigkeit und Aufwand werden quadratische Elemente mit  $52 \cdot 10^3$  FG, eine konstante Statorpermeabilität von  $4000 \text{ H/m}$ , ein Nullphasenwinkel des Stroms von  $2,5$  und abgerundete Leiter verwendet, um das System zu beschreiben. Dynamische Effekte, welche bis hierhin vernachlässigt wurden, werden in einem späteren Kapitel untersucht, sobald die notwendigen Grundlagen geschaffen wurden.

### 2.5.1 Verwendung von 3D-Modellen

Für die Berücksichtigung von Verformungen von Rotor und Stator, der Effekte am Ende des elektromagnetischen Bereichs, bspw. durch die Krümmung der elektrischen Leiter und die Verkippung des Rotors, sind 3D-Modelle notwendig, da die 2D-Modelle von einem unveränderlichen Magnetfeld über die gesamte Länge des elektromagnetischen Bereichs ausgehen. Die in Kapitel 2.5 bestimmten 2D-Modelle werden an dieser Stelle zu dreidimensionalen Modellen erweitert. Dafür wird zunächst die Fehlerschranke von  $1\%$  auf  $3\%$  angehoben, da von erheblichem numerischen Mehraufwand auszugehen ist. Damit werden die Modelle mit quadratischen Elementen mit  $25 \cdot 10^3$  FG und kubischen Elementen mit  $42 \cdot 10^3$  FG für die dreidimensionale Konvergenzstudie verwendet. Die 2D-Modelle werden lediglich extrudiert, sodass der geometrische Einfluss des Wicklungsendes, also die gebogenen Leiter, nicht berücksichtigt werden. Um einen Mehrwert gegenüber der 2D-Berechnung zu generieren, werden noch zwei Elementschichten von jeweils  $0,03 \text{ m}$  mit Luft verwendet. Auf diese Weise wird das zweidimensionale Magnetfeld am Ende des Motors gestört. Andernfalls wären die Ergebnisse durch die Randbedingung mit denen der 2D-Lösung identisch. Der elektromagnetische Bereich des Motors beträgt  $0,12 \text{ m}$ . Abbildung 2.15 zeigt das berechnete Motormoment für quadratische Elemente in Abhängigkeit der Freiheitsgrade, wobei die Anzahl der Knoten in z-Richtung im Motorbereich schrittweise erhöht wurde. Es ist gut zu erkennen, dass die Ergebnisse konvergieren, aber eine enorme Anzahl an Freiheitsgraden notwendig ist. Die Nutzung der extrudierten 2D-Modelle liefert kaum andere Ergebnisse als die 2D-Modelle, aber einen erheblichen Mehraufwand an Rechenzeit, da zum einen deutlich mehr Knoten als im zweidimensionalen Fall vorhanden sind und im dreidimensionalen

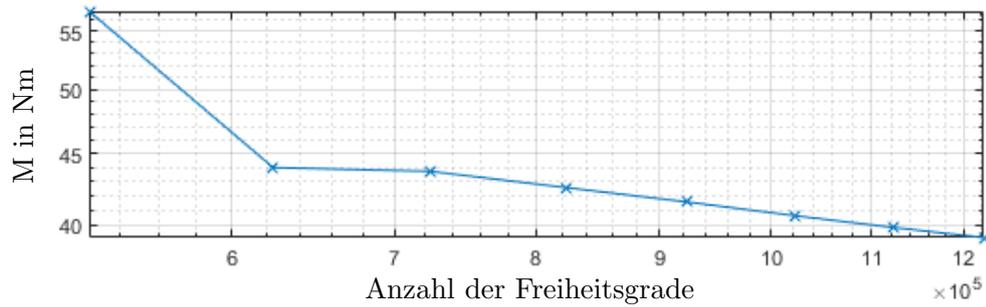


Abbildung 2.15: Konvergenzverhalten des Motormoments für das dreidimensionale Modell mit quadratischen Elementen. Ober- und unterhalb des elektromagnetisch wirksamen Bereichs befinden sich jeweils zwei Elementschichten Luft mit einer jeweiligen Höhe von 0,03 m.

jeder Knoten drei Freiheitsgrade besitzt. Demgegenüber sind die  $x$  und  $y$  Komponente des Vektorpotentials bei der zweidimensionalen Variante 0. Das bedeutet, dass bei sieben Schichten in  $z$ -Richtung, was einer sehr groben Vernetzung entspricht, angesichts der vielen kleinen Elemente in  $x$ - und  $y$ -Richtung, die Anzahl der FG bereits bei linearen Elementen auf das Einundzwanzigfache steigt, was eine enorme Erhöhung der Rechenzeit bedeutet. Dieser Mehraufwand ist für die angestrebte Zeitintegration bei der Kopplung von MKS und FEM nicht vertretbar und wird deshalb nicht weiter verfolgt.

### Berücksichtigung von Schiefstellung durch mehrere 2D-Modelle

Eine rechenzeiteffektive Methode zur Beschreibung von Schiefstellungen und Verzerrungen ohne Verwendung von 3D-Elementen wurde von [32, 34] vorgestellt. Hier wird der Motor in mehrere 2D-Scheiben zerlegt. In der genannten Literatur wurde nicht darauf eingegangen, wie viele Scheiben sinnvoll sind und wie diese verteilt werden müssen. Das in Abbildung 2.16 dargestellte Beispiel ist [32] entnommen und verwendet für eine starre verkippte Welle drei gleich große Abschnitte. Es soll an einem Beispiel gezeigt werden, dass zwei Abschnitte bei einer starren Welle ausreichen, wenn die Positionen richtig gewählt werden. Wie bereits in der Literatur [25, 27, 30] beschrieben und in Abbildung 2.11 gezeigt wurde, kann der UMP in erster Näherung als eine lineare Funktion der Auslenkung untersucht werden. Der Abstand zur Drehachse kann sich bei besagter starrer Welle ebenfalls nur linear verändern, woraus eine Welle mit einer Trapezlast resultiert. Abbildung 2.17 veranschaulicht das Modell. Mithilfe der Gauß-Integration, die in Anhang A.2 vorgestellt wurde, sollen nun möglichst wenige Abschnitte bzw. Gaußpunkte  $n_{Gauss}$  genutzt werden, um das resultierende Moment und die resultierende Kraft zu bestimmen. Wie bereits beschrieben, liefert die Gauß-Integration das exakte Ergebnis,

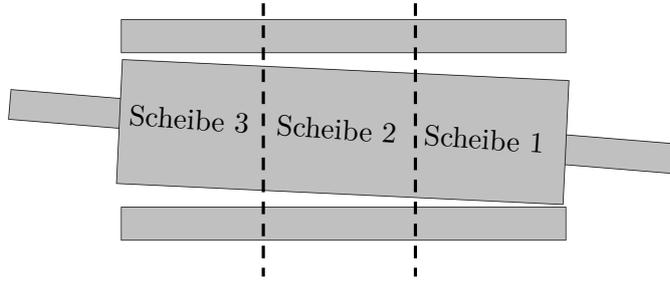


Abbildung 2.16: Rotor mit Schiefstellung, in Anlehnung an [32].

wenn der Polynomgrad  $p$  der Funktion höchstens

$$p \leq 2n_{Gauss} - 1 \quad (2.63)$$

ist. Die Flächenlast  $q$  ist

$$q(\zeta) = q_0 + \frac{q_1}{2} + \frac{q_1}{2a}\zeta. \quad (2.64)$$

Die Wichtungsfunktionen  $w_i$  und Gaußpunkte  $\zeta_i$  bis zu  $n = 3$  sind in Tabelle A.2 angegeben. Da

$$F_{res} = \int_z q(\zeta) d\zeta \quad (2.65)$$

würde für die resultierende Kraft bereits ein Gaußpunkt, und zwar in der Mitte des Motors, ausreichen, um diese exakt zu bestimmen. Für das Moment  $M_{res}$

$$M_{res} = \int_z q(\zeta)\zeta d\zeta \quad (2.66)$$

reichen zwei Gaußpunkte aus. An dem vorgestellten Beispiel soll kurz die analytische Lösung sowie die Lösung mit zwei gleich großen Abschnitten und zwei Abschnitten nach der Gauß-Quadratur vorgestellt werden. Die analytische Lösung zeigt

$$F_{res,analytisch} = q_0 2a + q_1 a \quad (2.67)$$

$$M_{bx,res,analytisch} = q_1 \frac{a^2}{3}. \quad (2.68)$$

Bei der Variante mit zwei gleich großen Abschnitten wird die resultierende Kraft exakt berechnet

$$\begin{aligned} F_{res,2Bereiche} = F_{B1} + F_{B2} &= \int_{-a}^0 q(\zeta) d\zeta + \int_0^a q(\zeta) d\zeta = \\ &= q_0 a + \frac{q_1 a}{2} - q_1 \frac{a}{4} + q_0 a + \frac{q_1 a}{2} + q_1 \frac{a}{4} = q_0 2a + q_1 a. \end{aligned} \quad (2.69)$$

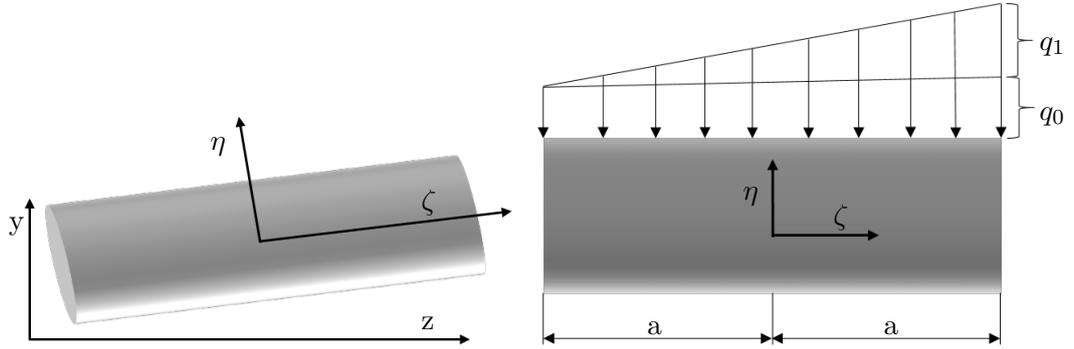


Abbildung 2.17: links: Motor mit Schiefstellung des Rotors; rechts: Rotor mit der aus der Schiefstellung resultierenden Streckenlast des UMP.

Das resultierende Moment wird über die Kräfte an den Abschnitten und den zugehörigen Hebelarm bestimmt

$$M_{\text{res,2Bereiche}} = F_{B1} \frac{-a}{2} + F_{B2} \frac{a}{2} = \frac{q_1 a^2}{4}. \quad (2.70)$$

und hat eine prozentuale Abweichung von 25%. Dieser Fehler verkleinert sich bei zusätzlichen Abschnitten, wie in Abbildung 2.18 dargestellt wird. Demgegenüber werden nun die resultierende Kraft und das resultierende Moment an den Gaußpunkten bestimmt. Die resultierende Kraft ergibt sich aus der Summe der Kräfte an den Gaußpunkten

$$\begin{aligned} F_{\text{res,Gauß}} &= F_{G1} + F_{G2} \\ &= \left( q_0 + \frac{q_1}{2} + \frac{q_1}{2a} \left( -\sqrt{\frac{1}{3}} a \right) \right) a + \left( q_0 + \frac{q_1}{2} + \frac{q_1}{2a} \sqrt{\frac{1}{3}} a \right) a = 2q_0 a + q_1 a \end{aligned} \quad (2.71)$$

und das resultierende Moment aus der Summe der Momente an den Gaußpunkten

$$\begin{aligned} M_{\text{res,Gauß}} &= M_{G1} + M_{G2} = \left( \frac{q_1}{2a} \frac{1}{3} a^2 + \left( q_0 + \frac{q_1}{2} \right) \left( -\sqrt{\frac{1}{3}} a \right) \right) a + \\ &\quad \left( \frac{q_1}{2a} \frac{1}{3} a^2 + \left( q_0 + \frac{q_1}{2} \right) \sqrt{\frac{1}{3}} a \right) a = \frac{q_1 a^2}{3}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Das wirkende Kippmoment auf einen starren verkippten Motor kann also mit zwei Scheiben an den Gaußpunkten sehr gut beschrieben werden. Der Einfluss der Wickelköpfe kann allerdings nicht berücksichtigt werden, da diese in den 2D-Modellen nicht existieren.

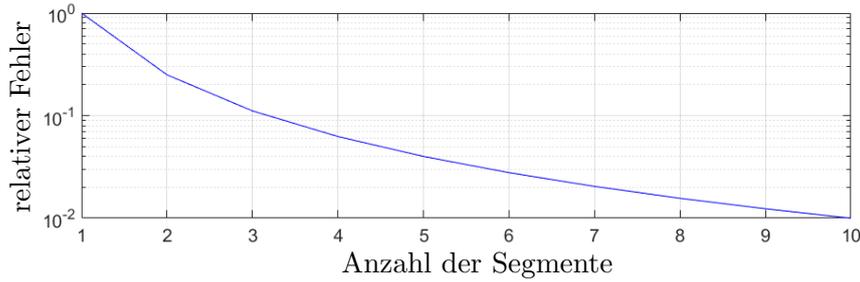


Abbildung 2.18: Relativer Fehler des berechneten resultierenden Kippmoments in Abhängigkeit der genutzten Anzahl an gleichgroßen 2D-Motorsegmenten mit mittlerer Kraftbestimmung.

## 2.6 Relativbewegung von Stator und Rotor

Bisher wurden lediglich magnetostatische Untersuchungen durchgeführt. Die Realisierung von translatorischen und rotatorischen Bewegungen zwischen Rotor und Stator wird in diesem Kapitel vorgestellt. Um die translatorische Bewegung zu berücksichtigen, wird eine Knotenverschiebung der Rotorknoten durchgeführt. Dafür wird wie in [56] beschrieben, ein Band verwendet und in Abbildung 2.19 veranschaulicht. Das Band ist ein Kreisring, mit einem Element in radialer Richtung. Das Band ist Teil des Luftspalts, aber nicht notwendigerweise die gesamte Luft. Die innere und äußere Kante des Kreisrings besitzen die identische Anzahl an Knoten. Die Abstände dieser Knoten sind auf ihrem jeweiligen Kreisring im Idealfall gleich groß. Alle Knoten die vom Bandbereich umschlossen sind, sowie die Eckknoten auf der Innenseite des Bandes werden beim dargestellten Außenläufer dem Stator zugeordnet. Dementsprechend werden die äußeren Eckknoten des Bandes und die Knoten außerhalb des Bandes dem Rotor zugeordnet. Eine translatorische Bewegung des Rotors gegenüber dem Stator wird durch Verschiebung aller Knoten des Rotors inklusive der rotorseitigen Bandknoten  $\underline{x}_{\text{Rotor0}}$  um den Zustandsvektor  $\underline{x}_{\text{Zustands}}$  realisiert

$$\underline{x}_{\text{Rotor}} = \underline{x}_{\text{Rotor0}} + \underline{x}_{\text{Zustands}}. \quad (2.73)$$

Durch die Verschiebung der Rotorknoten müssen auch die Mitten- und Kantenknoten im Band angepasst werden, welche bei höheren Ansatzfunktionen auftreten und weder dem Rotor noch dem Stator zugeordnet sind. Eine einfache Variante, die Position dieser Knoten zu bestimmen, ist, diese entsprechend den Elementansatzfunktionen des zugehörigen linearen Elements und ihren lokalen Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  zu ermitteln

$$\underline{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta, \zeta) \underline{x}_i. \quad (2.74)$$

Um möglichst große Verschiebungen realisieren zu können, ist es zweckmäßig, die Band-

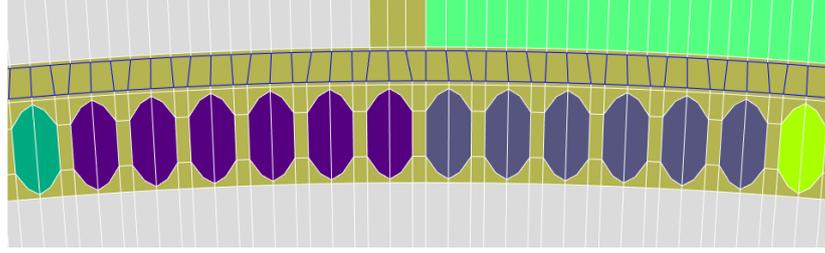


Abbildung 2.19: Motor mit hervorgehobenem Bandbereich, der für die translatorische und rotatorische Relativbewegung von Rotor und Stator eine wichtige Rolle spielt.

elemente in radialer Richtung möglichst groß auszuführen. Dadurch können Verschiebungen bis zum Kontakt von Rotor und Stator realisiert werden, ohne dass sich Innen- und Außenkante des Bandes durchdringen. Für die rotatorische Bewegung wird eine Koordinatentransformation mittels Drehmatrix  $\underline{\underline{\tilde{Q}}}$

$$\underline{\underline{\tilde{Q}}} = \begin{bmatrix} \cos(\tilde{\varphi}_R) & -\sin(\tilde{\varphi}_R) & 0 \\ \sin(\tilde{\varphi}_R) & \cos(\tilde{\varphi}_R) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

für die Rotorknoten durchgeführt, welche den Drehwinkel des Motors  $\tilde{\varphi}_R$  enthält und einzeln mit den Koordinaten aller Rotorknoten multipliziert wird

$$\begin{bmatrix} x_{\text{Rotor,Q}} \\ y_{\text{Rotor,Q}} \\ z_{\text{Rotor,Q}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\tilde{Q}}} \begin{bmatrix} x_{\text{Rotor}} \\ y_{\text{Rotor}} \\ z_{\text{Rotor}} \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

Durch die Drehung der Rotorknoten kommt es zu starken Verzerrungen der Elemente im Kontaktbereich von Rotor und Stator und damit zu großen Fehlern, die mit verschiedenen Methoden vermieden werden können. Als Erstes wird die Topologieanpassung [56], als Zweites das Penalty-Kopplung [66] und als Drittes Lagrange-Multiplikatoren [67] vorgestellt.

Bei der ersten Methode, der Topologieanpassung, wird eine regelmäßige Neuvernetzung unter Verwendung eines Bandes [56], wie es für die Beschreibung der Translation bereits eingeführt wurde (siehe Abbildung 2.19), durchgeführt. Diese Neuvernetzung ist durch den regelmäßigen Elementaufbau im Band einfach realisierbar. Die rotorseitigen Knoten des Bandes bewegen sich mit dem Rotor und die statorseitigen Knoten des Bandes mit dem Stator. Wird bei der relativen Rotation der beiden Baugruppen ein kritischer Winkel  $\tilde{\varphi}_{\text{krit}}$  überschritten, der über die Anzahl der Bandelemente  $n_{\text{Band}}$

$$\tilde{\varphi}_{\text{krit}} = \frac{2\pi}{n_{\text{Band}}} \quad (2.77)$$

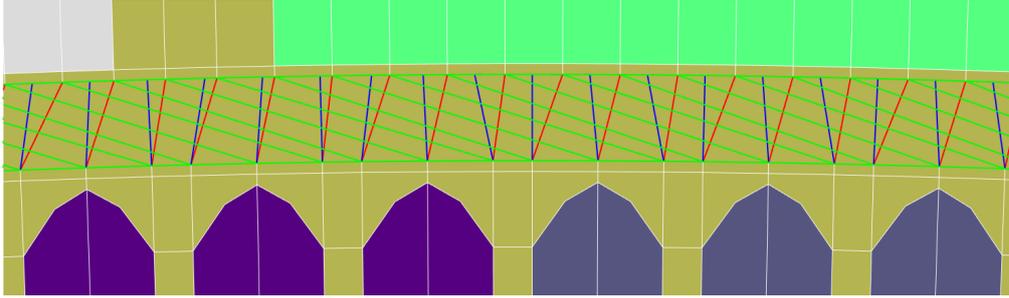


Abbildung 2.20: Ausschnitt des Motormodells mit blau hervorgehobenen ursprünglichen Bandlelementen, grünen Bandlelementen ohne Neuvernetzung und roten Bandlelementen mit Neuvernetzung, zur Veranschaulichung der Neuvernetzung am Band nach Bastos [56].

bestimmt wird, werden die Elemente im Bandbereich neu vernetzt. Dabei wird die erste Neuvernetzung bei dem halben kritischen Winkel  $\frac{\varphi_{\text{krit}}}{2}$  durchgeführt, um die Netzverzerrung zu reduzieren. Abbildung 2.20 zeigt einen Ausschnitt des Motormodells bei einem Drehwinkel des Rotors von  $\varphi = 1^\circ$ . Die blauen Linien zeigen die ursprünglichen Bandlelemente, die grünen Linien die verzerrten Bandlelemente ohne Neuvernetzung und die roten Linien die verwendeten Elemente nach Neuvernetzung. Diese Methode hat den Nachteil, dass es aufgrund der Neuvernetzung zu Sprüngen im Drehmomentenverlauf kommt, welche zeitschrittweitengesteuerten Solvern Probleme bereiten. Abbildung 2.21 zeigt den Drehmomentenverlauf des untersuchten Motors mit Band. Diese Sprünge können durch Erhöhung der Anzahl der Bandlelemente oder der Elementansatzfunktionen reduziert werden, treten dann in geringerer Größe, aber in gesteigerter Häufigkeit auf. Die Positionierung der Kanten- und Mittenknoten des Bandes kann äquivalent zur Verschiebung mit Gleichung 2.74 durchgeführt werden.

Eine andere Methode zur Berücksichtigung der Rotation des Rotors basiert auf dem Penalty-Verfahren [66]. Bei dieser Methode werden Rotor und Stator unabhängig voneinander aufgebaut und es wird kein Band (Kreisring), sondern eine Kreiskante benötigt. Aufgrund dessen, dass das Band für die translatorische Bewegung verwendet wird, ist es zweckmäßig, eine der Kreisringkanten zu nutzen. In dieser Arbeit wird die rotorseitige Kante des Bandes für die Penalty-Kopplung verwendet. Eine regelmäßige Anordnung von Knoten auf der Koppelkante ist sehr wichtig. Andernfalls besitzen benachbarte Koppelknoten aus Rotor und Stator verschiedene Abstände, was zu Fehlern führt. Die Knoten auf dieser Kante existieren jeweils zweimal, einmal auf dem Stator und einmal auf dem Rotor. Die Rotor- und Stator-knoten mit den gleichen Positionen sollen jeweils die gleichen Werte annehmen, was über die namensgebenden Strafterme (engl. Penalty) realisiert wird. Dafür wird eine Abweichung des Vektorpotentials  $A$  der gekoppelten Knoten, ähnlich der Federkraft in der Mechanik, mit einem eingeführten Term bestraft.

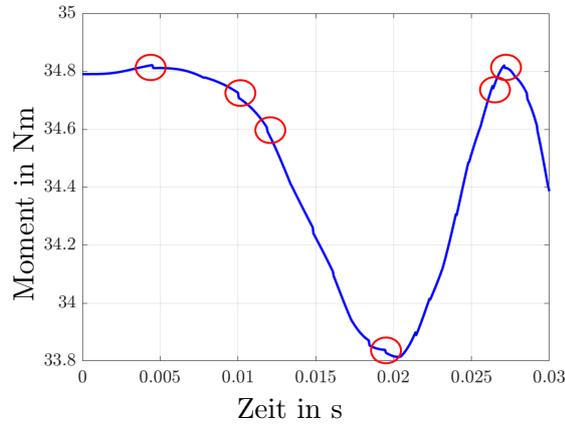


Abbildung 2.21: Sprünge im Drehmomentenverlauf durch regelmäßige Neuvernetzung bei einem beispielhaften Hochlauf.

Das heißt, an die Hauptdiagonalelemente der Koppelknoten wird die Steifigkeit  $\alpha$  addiert und an den Nebendiagonalelementen subtrahiert. Je größer die Steifigkeit, um so kleiner ist die Abweichung der Ergebnisgröße an den beiden Knoten. Trotzdem kann dieser Wert nicht beliebig gewählt werden, weil sich die Kondition der Matrix verschlechtert. In der vorliegenden Arbeit wird das Zehnfache des maximalen Wertes der Steifigkeitsmatrix verwendet. Das resultierende Gleichungssystem lautet

$$\begin{bmatrix} K_{RR} & K_{RK} & 0 & 0 \\ K_{KR} & K_{KK} + \alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & K_{KK} + \alpha & K_{KS} \\ 0 & 0 & K_{SK} & K_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_{RK} \\ A_{SK} \\ A_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \\ J \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Auch bei dieser Methode treten Sprünge auf, wenn die zu koppelnden Knoten, während der Zeitintegration, wechseln. Die Sprünge sind deutlich größer, weil die Bandelemente sich nicht kontinuierlich verformen, sondern sprunghaft die Koppelknoten wechseln. Ein neuer Aufbau der Steifigkeitsmatrix mit verformtem Bandbereich, wie er bereits vorgestellt wurde, ist möglich. Sowohl die Penalty-Methode als auch die Topologieanpassung eignen sich für die Umsetzung, wobei bei der Penalty-Methode die Elemente im Bandbereich alle gleich groß sein sollten. Die Wahl der Methode ist damit vom rechentechnischen Aufwand abhängig.

Eine weitere Variante zur Implementierung der Rotation stellt die Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren [67, 68, 69] dar. Wie bei der Nutzung des Penalty-Verfahrens wird auch bei dieser Variante ein Kreisring benötigt, auf dem Rotor- und Stator-knoten definiert sind und deren Lösungsgröße  $A$  gekoppelt werden soll. Bei dieser Variante wird je Koppelbedingung eine zusätzliche Unbekannte  $\lambda$ , der Multiplikator, eingeführt und

das Gleichungssystem um eins vergrößert. Das neue Gleichungssystem lautet

$$\begin{bmatrix} K_{RR} & K_{RK} & 0 & 0 & 0 \\ K_{KR} & K_{KK} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & K_{KK} & K_{KS} & -1 \\ 0 & 0 & K_{SK} & K_{SS} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_{RK} \\ A_{SK} \\ A_S \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \\ J \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

Dieses Verfahren ist sehr genau und erfordert keinen gewählten Parameter, wie die Penalty-Methode. Stattdessen wird  $\lambda$  beim Lösen des Gleichungssystems bestimmt. Nachteilig an dieser Methode ist die schlechte Konvergenz. Außerdem ist die Steifigkeitsmatrix nicht mehr positiv definit, weil Nulleinträge auf der Hauptdiagonale stehen, wodurch die Zahl der nutzbaren Solver eingeschränkt wird. Im Folgenden wird die Topologieanpassung verwendet, da sie weder die Kondition der Matrix verschlechtert noch der Steifigkeitsmatrix die positive Definitheit nimmt. Außerdem können bei der Topologieanpassung die Bandelemente unterschiedlich groß sein, da die Elemente angepasst werden. Das würde bei der Penalty-Kopplung und bei den Lagrange-Multiplikatoren zu Problemen führen, weil lediglich verschiedene Knoten miteinander gekoppelt werden. Dadurch kommt es zu Fehlern, wenn Knoten mit großen Abständen mit Knoten mit kleinen Abständen gekoppelt werden müssen.

## 2.7 Methoden zur Steigerung der Rechenzeiteffizienz

Die Berechnung der elektromagnetischen Lasten wird bei der im weiteren Verlauf der Arbeit realisierten Kopplung, in jedem Zeitschritt durchgeführt. Aus diesem Grund ist eine rechenzeiteffektive Umsetzung von großer Bedeutung.

### 2.7.1 Partikulärer Matrixaufbau

Während der Zeitintegration kommt es aufgrund der Drehung regelmäßig zu Neuvernetzungen bzw. Änderung der Koppelbedingungen (siehe Kapitel 2.6) und durch die Verschiebung des Rotors gegenüber dem Stator zur Änderung der Knotenpositionen des Rotors. Da der Aufbau der Systemmatrizen und Vektoren rechenzeitintensiv ist, wird an dieser Stelle darauf eingegangen, wie dieser Aufwand reduziert werden kann bzw. wann er nicht notwendig ist. Es wird auf alle Systemmatrizen und Vektoren der Gleichung 2.35 eingegangen. Die Permeabilitätsmatrix  $\underline{K}$  wird wie in Gleichung 2.34 zu sehen ist, mit Hilfe der Permeabilität  $\mu$  bestimmt und ist für alle Elemente ungleich null. Die Gesamtmatrix setzt sich aus den Anteilen der Stator-  $K_S$ , Rotor-  $K_R$  und Bandmatrix  $K_B$

$$\underline{K} = \underline{K}_S + \underline{K}_R + \underline{K}_B \quad (2.80)$$

zusammen. Die Position der Statorknoten ist während der gesamten Zeitintegration unverändert, weshalb  $\underline{K}_S$  konstant ist. Sie wird also nur einmal aufgebaut und für die gesamte Simulationszeit verwendet. Die Knoten des Rotors rotieren um die Drehachse, wodurch sich ihre Position und damit  $\underline{K}_R$  ändert. Nun wird ausgenutzt, dass in der FEM alle Elemente lokal aufgebaut werden. Das bedeutet, die absolute Position der Knoten ist innerhalb der Gesamtmatrix nicht enthalten, die Interaktion mit benachbarten Knoten erfolgt über die Koppelterme, welche aus benachbarten Elementen resultieren. Werden diese Nachbarn neu zugeordnet, kann dem System eine Drehung aufgeprägt werden, ohne dass die Rotorelemente neu aufgebaut werden müssen, wodurch auch  $\underline{K}_R$  nur einmalig aufgerufen werden muss. Das heißt, die Elementmatrizen von Rotor und Stator müssen nur einmal aufgebaut werden. Eine angenommene Rotation des Rotors kann dadurch berücksichtigt werden, dass die Topologie des Bandes beim Aufbau der Gesamtmatrix geändert wird. Das folgende Beispiel verdeutlicht das Vorgehen.

Die Elementpermeabilitätsmatrix  $[i,j,k,l]$  wird aufgebaut, allerdings in die Zeilen  $[i,k,m,n]$  der Gesamtmatrix einsortiert. Wird dieses Vorgehen für alle Bandelemente durchgeführt, sind der Rotor und der Stator entlang der schwarz dargestellten Linie in Abbildung 2.22 verbunden. Das dargestellte Vektorpotential veranschaulicht die Drehung von  $6,4^\circ$ , was einem Viertel Polpaar entspricht. Im Übergangsbereich von Rotor und Stator wirken die Feldlinien stark zusammengedrückt, was lediglich der Darstellung geschuldet ist. Wird der Rotor so gedreht, dass die beiden schwarzen Linien eine einzelne Linie ergeben, sind die Feldlinien, mit denen in Abbildung 2.13 vergleichbar. Dieses Vorgehen diene lediglich der Veranschaulichung und würde nur so viele unterschiedliche Winkel des Motors zulassen, wie Bandelemente vorliegen. Die tatsächliche Umsetzung beruht auf dem gleichen Prinzip. Die Matrizen von Rotor und Stator werden einmalig aufgebaut und die Bandknoten des Rotors entsprechend dem Drehwinkel des Motors rotiert. Nun werden die Bandelementmatrizen bereits mit der neuen Topologie aufgebaut und entsprechend in die Gesamtmatrix eingebaut. Auf diese Weise können sowohl Rotation als auch Verschiebung des Rotors effizient berücksichtigt werden.

Der Quellterm  $\underline{J}$  ist ausschließlich bei den elektrischen Leitern, also im Bereich des Stators, ungleich null. Durch die Relativbewegung von Rotor und Stator ist also kein neuer Aufbau des Quellterms notwendig. Allerdings ändert sich der Strom bzw. die Stromdichte während der Zeitintegration in Abhängigkeit des Stromsignals. Für eine rechenzeiteffektive Berechnung wird ein zeitunabhängiges  $\underline{J}_{0i}$  für alle Phasen  $i$  mit einer Stromdichte von eins aufgebaut. Diese kann nun mit der aktuellen Amplitude  $J_{Akt}$  multipliziert werden

$$\underline{J}_{ti} = \underline{J}_{0i} J_{Akt}. \quad (2.81)$$

Für einen sinusförmigen Strom ergibt sich die aktuelle Amplitude aus dem Winkel des Stroms  $\varphi_S$  und dem Phasenwinkel  $\varphi_{oi}$  sowie der maximalen Amplitude  $J_{max}$

$$\underline{J}_{ti} = J_{max} \sin(\varphi_S + \varphi_{oi}) \underline{J}_{0i}. \quad (2.82)$$

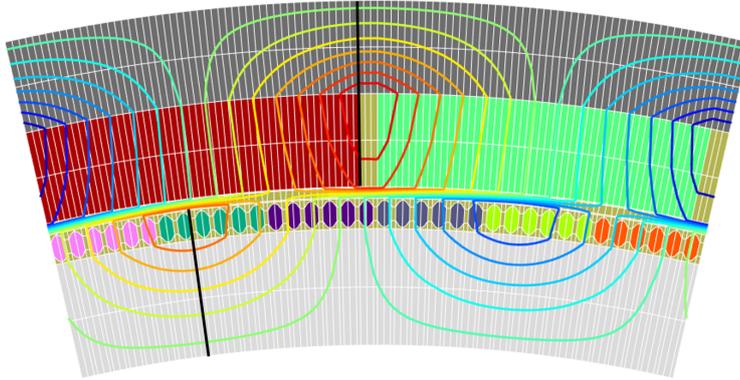


Abbildung 2.22: Motor, bei dem die Drehung des Rotors um  $6,4^\circ$  durch Anpassung der Topologie realisiert wurde.

Nun müssen die Vektoren der einzelnen Phasen durch Addition zu einem gesamten Stromvektor  $\underline{J}$  zusammengefasst werden

$$\underline{J} = \sum_i J_{ti}. \quad (2.83)$$

Die Magnete befinden sich auf dem Rotor, sodass der Magnetvektor  $\underline{B}_0$  ausschließlich im Bereich des Rotors Einträge ungleich null besitzt. Dieser Vektor ist, der gleichen Argumentation wie bei der Permeabilitätsmatrix  $\underline{K}$  folgend, trotz Drehung konstant. Im Luftspalt ist die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  gleich null. Damit ist der Leiterterm  $L$  für den Rotor und den Stator entkoppelt. Durch die vorgestellte Scheindrehung ist eine Anpassung der Matrix während der Zeitintegration nicht notwendig. Abbildung 2.23 zeigt beispielhaft die Besetzung der Induktionsmatrix  $\underline{L}$  mit den rot dargestellten Rotor- und den blau dargestellten Statoreinträgen. Es ist gut zu sehen, dass es keine Koppeleinträge gibt.

Damit muss während der Zeitintegration lediglich die Matrix  $\underline{K}_{\text{Band}}$  des Bandbereichs aufgebaut werden, was zu einer erheblichen Reduzierung der Rechenzeit führt.

### 2.7.2 Substrukturtechnik

Das Differentialgleichungssystem 2.35 bzw. das Gleichungssystem 2.36 muss in jedem Zeitschritt gelöst werden. Zur Reduktion der Rechenzeit wird die Verwendung der Substrukturtechnik [70] untersucht. Dafür werden die Knoten und zugehörigen Freiheitsgrade in Master  $M$  und Slave  $S$  unterteilt. Das Ziel der Substrukturtechnik ist, ein Gleichungssystem aufzustellen, bei dem das Vektorpotential  $A$  lediglich an den Masterknoten  $M$  unbekannt ist. Diese Vektorpotential an den Masterknoten  $A_M$  wird anschlie-

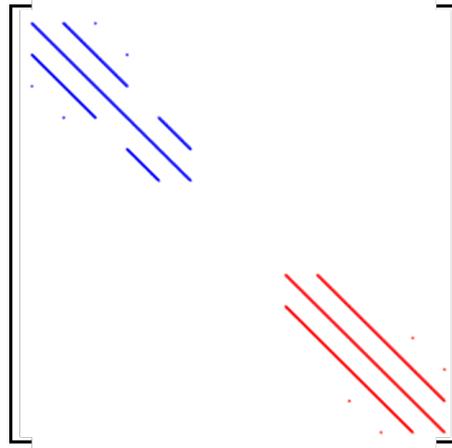


Abbildung 2.23: Besetzung der symmetrischen Induktionsmatrix mit den rot dargestellten Rotor- und den blau dargestellten Statoreinträgen. Die Gleichungen des Rotors und des Stators sind entkoppelt.

ßend genutzt, um das Vektorpotential an den Slaveknoten  $S$  zu bestimmen, ohne ein Gleichungssystem zu lösen. Das Gleichungssystem 2.36 kann in die Form

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{MM} & \underline{\underline{K}}_{MS} \\ \underline{\underline{K}}_{SM} & \underline{\underline{K}}_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_M \\ \underline{A}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{RS}_M \\ \underline{RS}_S \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

gebracht werden, wobei  $\underline{RS}$  die Summe der Vektoren  $\underline{B}_0$  und  $\underline{J}$  ist. Dieses Gleichungssystem wird ausmultipliziert, wodurch die beiden Gleichungssysteme

$$\underline{\underline{K}}_{MM}\underline{A}_M + \underline{\underline{K}}_{MS}\underline{A}_S = \underline{RS}_M \quad (2.85)$$

und

$$\underline{\underline{K}}_{SM}\underline{A}_M + \underline{\underline{K}}_{SS}\underline{A}_S = \underline{RS}_S \quad (2.86)$$

entstehen. Durch Umstellen von Gleichung 2.86 nach  $\underline{A}_S$  ergibt sich

$$\underline{A}_S = \underline{\underline{K}}_{SS}^{-1}\underline{RS}_S - \underline{\underline{K}}_{SS}^{-1}\underline{\underline{K}}_{SM}\underline{A}_M. \quad (2.87)$$

Die Werte  $\underline{A}_S$  können also unter Kenntnis von  $\underline{A}_M$  durch Verwendung von Matrixmultiplikation und Addition ermittelt werden. Die Inversion von  $\underline{\underline{K}}_{SS}$  ist zeitaufwändig, wodurch dieses Vorgehen nur dann sinnvoll ist, wenn die Matrix  $\underline{\underline{K}}_{SS}$  in der Zeitintegration konstant ist, das heißt die Inversion, welche intern als Gleichungssystemlösung

realisiert werden kann, nur einmalig durchgeführt werden muss. Wird Gleichung 2.87 in Gleichung 2.85 eingesetzt und nach  $\underline{A}_M$  umgestellt, ergibt sich das Gleichungssystem

$$(\underline{K}_{MM} - \underline{K}_{MS}\underline{K}_{SS}^{-1}\underline{K}_{SM})\underline{A}_M = (\underline{RS}_M - \underline{K}_{MS}\underline{K}_{SS}^{-1}\underline{RS}_S). \quad (2.88)$$

Es ist gut zu sehen, dass diese Methode dann effektiv ist, wenn auch die Koppelmatrizen  $\underline{K}_{MS}$  und  $\underline{K}_{SM}$  sowie der Vektor  $\underline{RS}_S$  im Verlauf der Zeitintegration konstant sind. Das resultierende Gleichungssystem besitzt nur noch die Größe der Masterfreiheitsgrade. Der Nachteil der Methode ist, dass die invertierte Matrix  $\underline{K}_{SS}^{-1}$  voll besetzt ist, wodurch anders als bei der Ausgangsmatrix mit Bandstruktur viele Operationen notwendig sind, um das Gleichungssystem zu lösen. Die Nutzbarkeit der Methode ist damit maßgeblich von der Anzahl der Masterfreiheitsgrade abhängig.

Das in Kapitel 2.5 gewählte Modell besitzt  $52 \cdot 10^3$  FG. Lediglich die Position der Bandknoten und die Topologie der Bandelemente verändert sich während der Zeitintegration, was 2016 FG entspricht. Durch die Änderung der Topologie im Bandbereich ändern sich auch die Koppelterme zu den benachbarten Elementen, weshalb auch die benachbarten Knoten des Bandbereichs als Masterknoten deklariert werden, damit  $\underline{K}_{MS}$  und  $\underline{K}_{SM}$  konstant bleiben. Die rechte Seite des Gleichungssystems ändert sich lediglich bei den elektrischen Leitern, deren Stromdichte eine zeitlich veränderliche Größe ist. Um die Multiplikation der vollbesetzten Matrix  $\underline{K}_{SS}^{-1}$  mit  $\underline{F}_S$  nicht in jedem Zeitschritt durchführen zu müssen, werden die Knoten der Leiter ebenfalls als Masterknoten deklariert. Damit ergeben sich  $23 \cdot 10^3$  Master und  $28 \cdot 10^3$  Slave Knoten. Ein Vergleich der Rechenzeiten ergab mit Matlab 0,1 s für das Lösen des Gleichungssystems 2.36 und 88 s für das reduzierte Problem. Die Ursache dafür ist die viel zu hohe Anzahl an Masterknoten und die damit hohe Anzahl an Operationen, die durch die vollbesetzte Matrix in Gleichung 2.88 notwendig werden. Die Substrukturtechnik wird in dieser Arbeit nicht weiter genutzt.

### 2.7.3 Periodische Randbedingungen

Wenn ein Gesamtsystem in wiederkehrende Segmente eingeteilt werden kann, ist es mit periodischen Randbedingungen möglich, das System durch Lösen eines Segments zu beschreiben [56]. Eine solche Periodizität liegt bei vielen Motoren mit mehreren Polpaaren und auch bei dem hier untersuchten Motor, welcher vierzehn Polpaare besitzt, vor. Dies gilt wenn sich der Rotor in zentrischer Lage befindet und keine Fertigungsungenauigkeiten, wie geometrische Abweichungen oder unterschiedliche Materialeigenschaften, auftreten. Das Gleichungssystem verringert sich damit ca. um den Faktor der Polpaare, also im vorliegenden Fall vierzehn, was eine enorme Reduktion der Rechenzeit zur Folge hat. Diese Methode eignet sich allerdings nicht für die Kopplung von MKS und FEM, da die MKS nur dann einen Mehrwert liefert, wenn die Rotorpositionen zeitlich veränderlich sind und dadurch bspw. der UMP berücksichtigt werden kann. Dennoch lohnt es sich, auf diese Methode zurückzugreifen, wenn dieser Einfluss nicht berücksichtigt werden

soll. Abbildung 2.24 zeigt ein Motorsegment mit den blau und rot markierten periodischen Rändern und Knoten auf diesen Rändern. Zur besseren Veranschaulichung besitzt das dargestellte Modell nur wenige Freiheitsgrade und acht Knoten sind benannt. Eine Periodizität liegt vor, wenn die Knoten auf der roten Kante nach dem Lösen des Gleichungssystems die gleichen Werte wie die zugehörigen Knoten auf der blauen Kante annehmen, also  $A_i = A_k$  und  $A_j = A_l$  ist. Um dies sicherzustellen, werden hier zwei Methoden vorgestellt. Beiden Methoden ist gemein, dass die berechneten Momente mit der Anzahl der Polpaare multipliziert werden müssen, da lediglich das Moment eines Polpaars berechnet wird. Die berechnete resultierende Kraft bezieht sich ebenfalls auf ein Segment und muss null gesetzt werden, da sie sich mit den resultierenden Kräften der vernachlässigten Segmente aufhebt. Die Knotenkräfte können allerdings für Untersuchungen mit elastischem Rotor verwendet werden. Bei der ersten Variante, welche Bastos et al. [56] entnommen ist, werden die Element-Matrizen und -Vektoren der roten Kante mit den Koordinaten der roten Knoten aufgebaut, aber so in die Gesamt-Matrizen und -Vektoren eingebaut, als ob sie zur blauen Kante gehören. Dafür ist es sinnvoll, zwei Topologiematrizen zu nutzen, wobei eine sowohl die roten als auch die blauen Knoten enthält und zum Aufbau der Elementmatrix verwendet wird

$$\underline{\underline{Topo}}_1 = \begin{bmatrix} Kn_i & Kn_m & Kn_n & Kn_j \\ Kn_o & Kn_k & Kn_l & Kn_p \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

und die andere statt den roten Einträgen die blauen besitzt und für die Einsortierung der Elementmatrix in die Gesamtmatrix genutzt wird

$$\underline{\underline{Topo}}_2 = \begin{bmatrix} Kn_k & Kn_m & Kn_n & Kn_l \\ Kn_o & Kn_k & Kn_l & Kn_p \end{bmatrix}. \quad (2.90)$$

Im Gleichungssystem sind die Zeilen und Spalten der roten Knoten nicht besetzt und müssen dementsprechend aus dem Gleichungssystem gestrichen werden. Die andere Variante, die im Weiteren verwendet wird, nutzt die Penalty-Methode, bei der die Koppelknoten, wie in Gleichung 2.78 gezeigt, mit einer hohen Steifigkeit gekoppelt werden. Da  $\alpha$  sehr groß ist, kann die Gleichung nur erfüllt werden, wenn die gekoppelten Knoten ungefähr gleich groß sind.

## 2.7.4 Antiperiodische Randbedingungen

Eine weitere Verringerung der Rechenzeit ist mit der Verwendung von antiperiodischen Rändern möglich. Anders als bei den periodischen Rändern muss kein Polpaar, sondern lediglich ein Pol modelliert werden, demzufolge muss das berechnete Moment mit der Anzahl der Pole, also beim untersuchten Motor 28, multipliziert werden. Die roten Knoten aus Abbildung 2.24 besitzen den Kehrwert des zugehörigen blauen Knotens, also  $A_i = -A_k$  und  $A_j = -A_l$ . Auch hier ist sowohl die Anpassung der Topologie [56] als

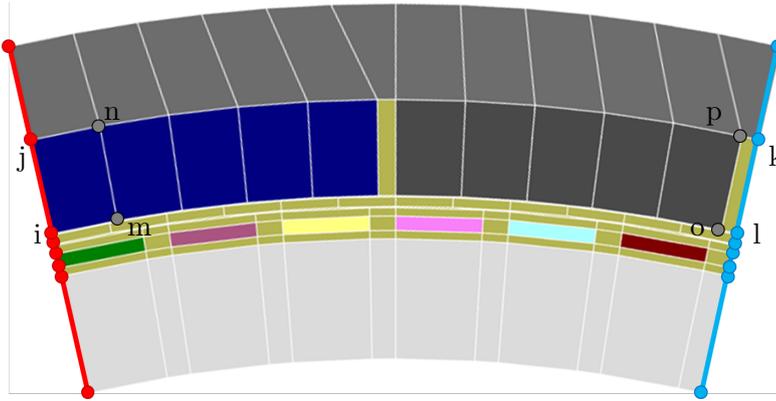


Abbildung 2.24: Motorsegment mit periodischen Randbedingungen

auch die Penalty-Methode möglich. Bei der Anpassung der Topologie wird genauso vorgegangen wie bei den periodischen Rändern, mit dem Unterschied, dass die Vorzeichen der Koppelterme der Knoten von der anderen Seite der Randbedingung geändert werden. Das bedeutet, die Elementpermeabilitätsmatrix ist

$$\begin{bmatrix} K_{kk} & -K_{km} & -K_{kn} & K_{kl} \\ -K_{mk} & K_{mm} & K_{mn} & -K_{ml} \\ -K_{nk} & K_{nm} & K_{nn} & -K_{nl} \\ K_{lk} & -K_{lm} & -K_{ln} & K_{ll} \end{bmatrix}, \quad (2.91)$$

und die rechte Seite

$$\begin{bmatrix} RS_k \\ -RS_m \\ -RS_n \\ RS_l \end{bmatrix}. \quad (2.92)$$

Bei der Penalty-Methode werden Haupt- und Nebendiagonalelemente der zu koppeln den Knoten mit  $\alpha$  beaufschlagt

$$\begin{bmatrix} K_{ii} + \alpha & K_{ij} & K_{ik} + \alpha & K_{il} \\ K_{ji} & K_{jj} + \alpha & K_{jk} & K_{jl} + \alpha \\ K_{ki} + \alpha & K_{kj} & K_{kk} + \alpha & K_{kl} \\ K_{li} & K_{lj} + \alpha & K_{lk} & K_{ll} + \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.93)$$

Abbildung 2.24 zeigt drei Pole des Motors, mit dem zugehörigen berechneten Vektorpotential. Für den linken Teil der Abbildung wurde der gesamte Motor berechnet, für den mittleren Teil wurden anti-periodische Ränder verwendet und der rechte Teil zeigt das Vektorpotential mit periodischen Rändern. Es ist gut zu sehen, dass die berechneten

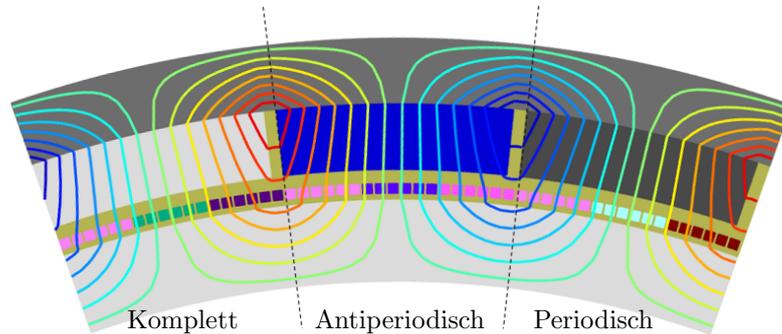


Abbildung 2.25: Vergleich des Vektorpotentials für das komplette, das antiperiodische und das periodische Modell.

Feldgrößen identisch sind. Solange der Motor periodisch aufgebaut und in zentrischer Lage fixiert ist, werden periodische Randbedingungen verwendet, da diese die Rechenzeit massiv reduzieren. Andernfalls wird das vollständige Modell genutzt.

## 2.8 Drehzahlabhängiges Verhalten des Motors

Bisher wurde, wie bereits beschrieben, von einem magnetostatischen System ausgegangen, wodurch die Induktionsmatrix  $\underline{L}$ , in Gleichung 2.35, null ist. In diesem Kapitel wird überprüft, bis zu welcher Drehzahl diese Annahme zutreffend ist und ab wann eine Berücksichtigung der Wirbelströme zu empfehlen ist. Dafür werden Hochläufe, das heißt die Drehzahl des Motors wird kontinuierlich gesteigert, für beide Varianten durchgeführt und die resultierenden Spektrogramme verglichen. Anschließend wird der Einfluss von Fertigungsungenauigkeiten untersucht. Die Spektrogramme stellen, mit Hilfe von Kurzzeit-Fourier-Transformationen, das Frequenzspektrum des Drehmoments oder der resultierenden Kraft über die Motordrehzahl dar [71]. Für diese Untersuchung ist kein MKS-Programm notwendig, da die Lagerung nicht berücksichtigt wird und die Rotorposition kein Freiheitsgrad der Simulation ist. Allerdings ist eine regelmäßige Neuvernetzung (siehe Kapitel 2.6) und ein effektiver Matrixaufbau (siehe Kapitel 2.7.1) notwendig, welche auch für die Kopplung zur MKS entscheidend sind. Für die Untersuchung wird das umgesetzte MKS-Programm mit elektrodynamischer Kraftberechnung über die FEM verwendet, aber zunächst die Freiheitsgrade der Positionen und Winkel gesperrt. Die Spektrogramme können sowohl für die Validierung als auch die Verifizierung verwendet werden.

Tabelle 2.2: Anstiege im Spektrum.

Superharmonische	Anstieg	Anstieg / $(pp \cdot 6)$
1	84	1
2	168	2
3	336	6
4	672	12

### 2.8.1 Einfluss von Wirbelströmen

Das Spektrum des simulierten Motormoments in Abhängigkeit der Motordrehzahl bei Vernachlässigung von dynamischen Effekten ist in Abbildung 2.26 dargestellt. Es sind mehrere Geraden mit konstantem Anstieg und Nulldurchgang zu erkennen. Die ermittelten Frequenzen regen das mechanische System zu Schwingungen an und sind Vielfache der Drehzahl des Motors sowie von dieser linear abhängig. Da sie höher als die Drehfrequenz sind, werden sie Superharmonische genannt. Die Anstiege sind in Tabelle 2.2 aufgelistet. Es ist gut zu sehen, dass alle Anstiege Vielfache der Drehzahl mal der Polpaarzahl mal sechs sind, wobei sechs der Anzahl der verschiedenen Phasenströme entspricht. Die Superharmonischen werden nachfolgend  $nppx$  oder Superharmonische mit dem Anstieg  $ppx$  bezeichnet. Auf diese Weise wird ausgedrückt, dass die Superharmonischen lineare Funktionen sind, deren Anstieg das Produkt aus Polpaarzahl und einer ganzen Zahl  $x$  ist. Über den dargestellten Drehzahlbereich sind die Amplituden konstant. Die erste auftretende Frequenz besitzt die größten Amplituden und ist, wie auch die zweite Frequenz, sehr schmalbandig. Höhere Superharmonische sind deutlich breitbandiger. Das zugehörige Spektrum der resultierenden Kraft ist in Abbildung 2.27 zu sehen. Es zeigt sehr geringe Amplituden, welche auf die zentrische Lage zurückzuführen sind. Die Anstiege sind identisch zu der Momentendarstellung.

Um sicherzustellen, dass dieses Ergebnis nicht der regelmäßigen Neuvernetzung im Bandbereich geschuldet ist, welche, wie beschrieben nach bestimmten Winkeln stattfindet und dementsprechend drehzahlabhängig ist, sind in Abbildung 2.28 die Spektrogramme des Moments mit quadratischen Elementen und  $29 \cdot 10^3$  FG sowie  $95 \cdot 10^3$  FG dargestellt. Die ersten beiden Superharmonischen des Modells mit  $95 \cdot 10^3$  FG sind mit denen des Modells mit  $52 \cdot 10^3$  FG, aus Abbildung 2.26, vergleichbar. Die dritte und vierte Superharmonische besitzen bei dem Modell mit  $95 \cdot 10^3$  FG geringfügig geringere Amplituden. Bei dem Modell mit  $29 \cdot 10^3$  FG sind zwei zusätzliche Superharmonische mit geringer Amplitude zu erkennen. Auch die dritte Superharmonische weist eine höhere Amplitude auf. Ein Fehler aufgrund der regelmäßigen Neuvernetzung ist nicht zu sehen, sonst würde jede Netzverfeinerung zu neuen Superharmonischen führen und deren Amplituden sinken, weil die Sprünge häufiger und mit geringerer Amplitude auftreten. Die Unterschiede sind auf den Diskretisierungsfehler zurückzuführen und werden mit zunehmender Modellgröße geringer. Die in Abbildung 2.26 dargestellten Superhar-

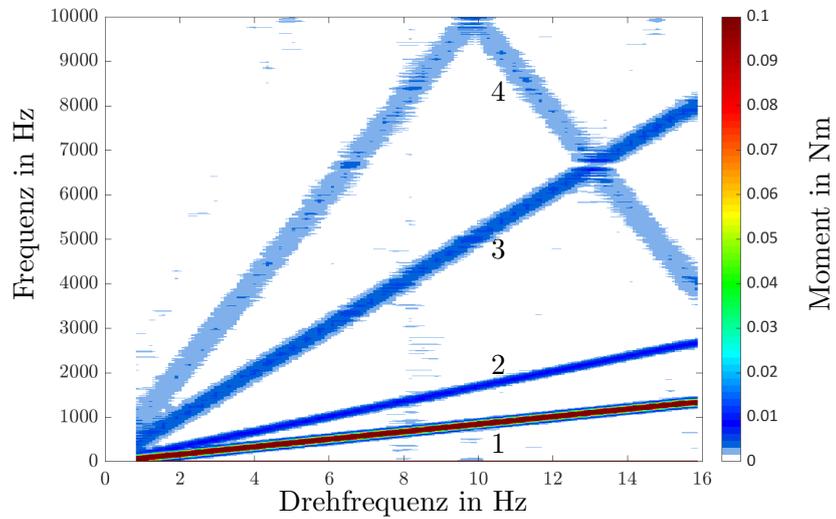


Abbildung 2.26: Spektrogramm des Motormoments bei linearen Materialien und unter Vernachlässigung dynamischer Effekte in zentrischer Lage, mit vier gekennzeichneten Superharmonischen (siehe Tabelle 2.2).

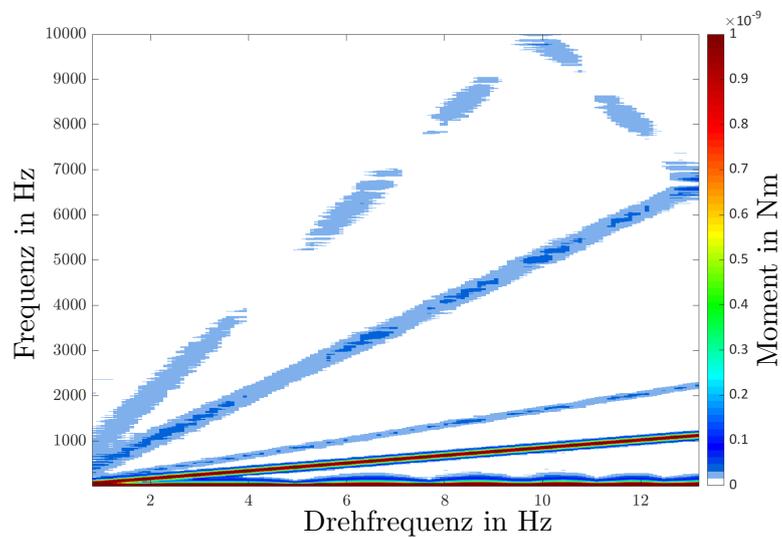


Abbildung 2.27: Spektrum der resultierenden Kraft bei linearen Materialien und unter Vernachlässigung dynamischer Effekte in zentrischer Lage.

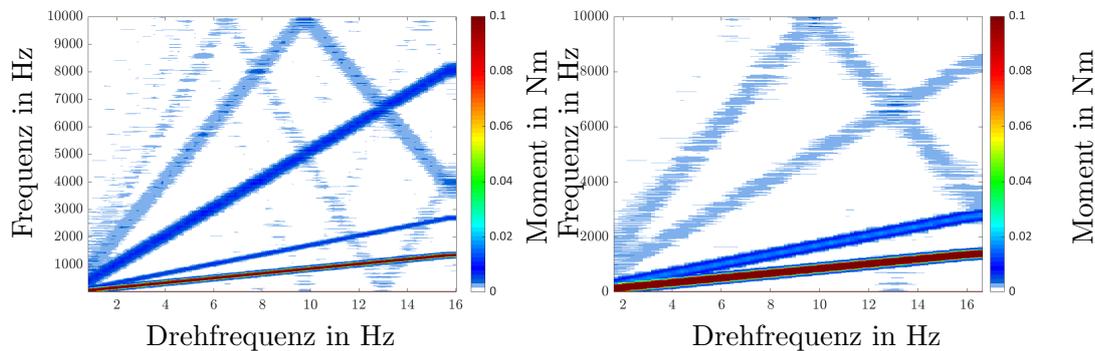


Abbildung 2.28: Spektrum des Motormoments bei links: grober Vernetzung ( $29 \cdot 10^3$  FG) und rechts feiner Vernetzung ( $95 \cdot 10^3$  FG)

monischen werden dementsprechend nicht durch das gewählte Netz hervorgerufen. Es ist gut zu erkennen, dass die Frequenzen bei 10 kHz und 0 Hz gespiegelt werden. Die Spiegelungen treten nicht real auf, sondern sind der Fouriertransformation geschuldet. Abbildung 2.29 zeigt das gleiche Modell wie Abbildung 2.26, mit einer kleineren Ausgabeschrittweite ( $2 \cdot 10^{-5}$  s). Es ist gut zu sehen, dass die Spiegelungen bei 10 kHz nicht auftreten. Aufgrund der erhöhten Rechenzeit wird in den folgenden Darstellungen weiterhin die Ausgabeschrittweite von  $5 \cdot 10^{-5}$  s verwendet.

Abbildung 2.30 zeigt das Spektrogramm unter Berücksichtigung von Wirbelströmen in den Leitern, welche durch den geschwindigkeitsabhängigen Term in Gleichung 2.35 berücksichtigt werden. Es ist gut zu sehen, dass der Einfluss auf die ersten drei Superharmonischen gering ist. Lediglich die vierte Superharmonische aus Abbildung 2.26 besitzt so geringe Amplituden, dass sie nicht mehr zu erkennen ist. Die Wirbelströme haben bei geringen Drehzahlen einen geringen Einfluss auf die Anregung, werden bei größeren allerdings relevanter. Der Mehraufwand zur Berücksichtigung der Wirbelströme ist gering, sodass diese trotz des geringen Einflusses in Kapitel 3 und Folgenden nicht vernachlässigt werden.

### 2.8.2 Einfluss verschiedener Fertigungsabweichungen

Die in den Abbildungen 2.26 bis 2.30 dargestellten Spektrogramme gehen von einem Motor ohne Fertigungsungenauigkeiten aus. Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich diese auf das Spektrogramm auswirken. Als Erstes wird der Einfluss einer statischen Exzentrizität untersucht. Dafür wird der Rotor um  $125 \mu\text{m}$  verschoben und das resultierende Spektrogramm in Abbildung 2.31 dargestellt. Es sind keine zusätzlichen Frequenzen zu erkennen und auch die Amplitude des Drehmoments ist mit Abbildung 2.26 vergleichbar. Allerdings sind die resultierenden Kräfte, wie in Abbildung 2.32 dargestellt, deutlich größer. Dies war aufgrund des UMP zu erwarten. Die Anstiege bleiben unverändert. Da

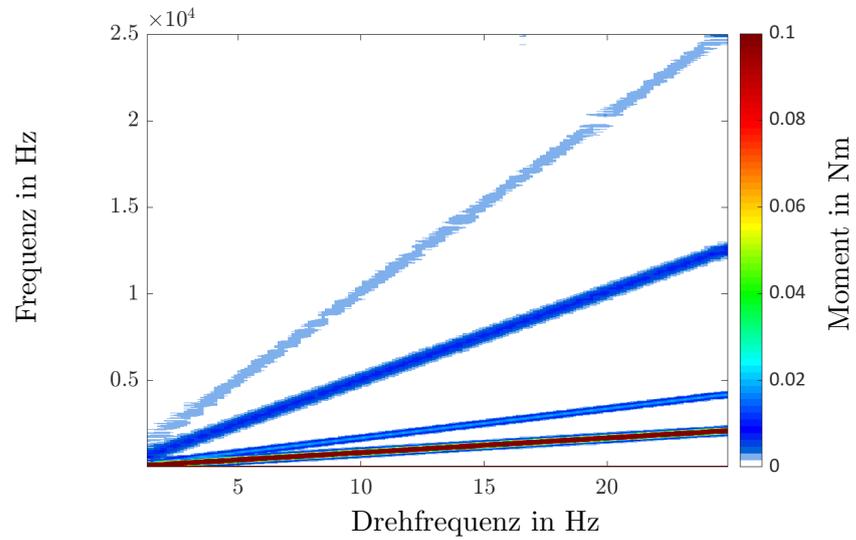


Abbildung 2.29: Spektrum des Motormoments bei einer Ausgabeschrittweite von  $2 \cdot 10^{-5}$  s.

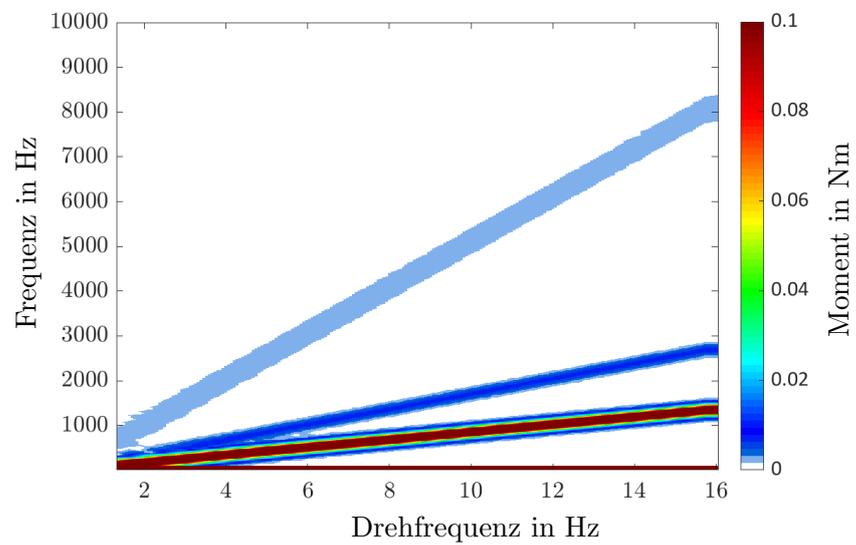


Abbildung 2.30: Spektrum des Motormoments unter Berücksichtigung der Wirbelströme.

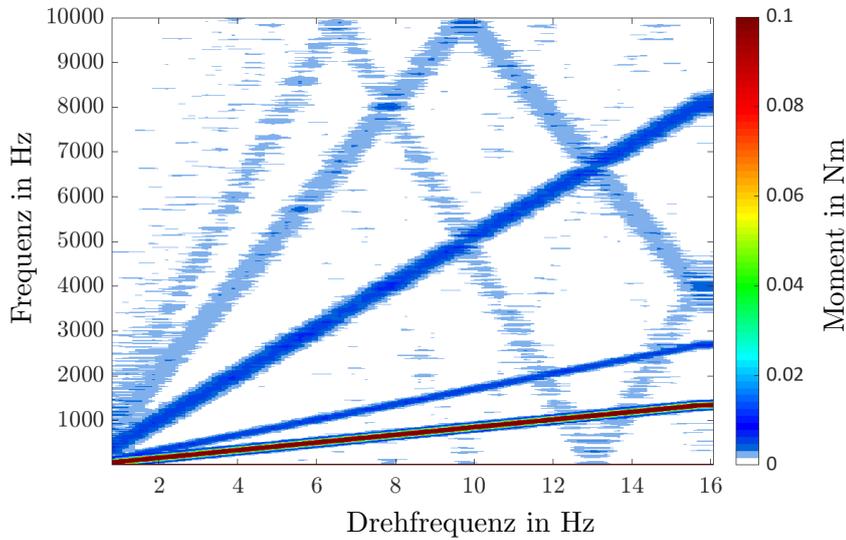


Abbildung 2.31: Spektrum des Motormoments bei einer statischen Exzentrizität von  $125 \mu\text{m}$ .

die Exzentrizität wie eine Unwucht bei unterkritischen Drehzahlen wirkt, sollte eine drehzahlsynchrone Frequenz zu sehen sein. Diese ist aufgrund der geringen untersuchten Drehzahlen nicht zu erkennen. Zusätzlich zu den bisher beobachteten Superharmonischen erscheint im Kraftspektrum eine zusätzliche, deren Anstieg dem Produkt aus Polpaarzahl  $pp$ , sechs und fünf entspricht ( $npp30$ ). Die Superharmonische  $npp6$  ist dominant.

Eine andere Fertigungsabweichung ist die Unrundheit von Rotor und Stator. Statt eines kreisrunden Rotors bzw. Stators wird dieser oval gestaltet. Die Gleichung zur Bestimmung der Knotenpositionen  $x, y$  mit Hilfe des Winkels  $\beta$

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\beta_i) \\ \cos(\beta_i) \end{bmatrix} \tilde{r}_i \quad (2.94)$$

werden um einen Korrekturradius  $\tilde{r}_{korr}$  und einen Winkel  $\beta_{korr}$ , mit dem die Richtung der Unrundheit gesteuert werden kann, erweitert

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\beta_i) \\ \cos(\beta_i) \end{bmatrix} \tilde{r}_i + \begin{bmatrix} \sin(\beta_i + \beta_{korr}) \\ \cos(\beta_i + \beta_{korr}) \end{bmatrix} \tilde{r}_{korr}. \quad (2.95)$$

Diese Abweichung kann sowohl beim Rotor, als auch beim Stator, auftreten. In Abbildung 2.33 ist das Frequenzspektrum des Drehmoments dargestellt, wenn sowohl Rotor als auch Stator mit dem Korrekturradius  $\tilde{r}_{korr}$  von  $0,2 \text{ mm}$  beaufschlagt werden. Zusätzlich

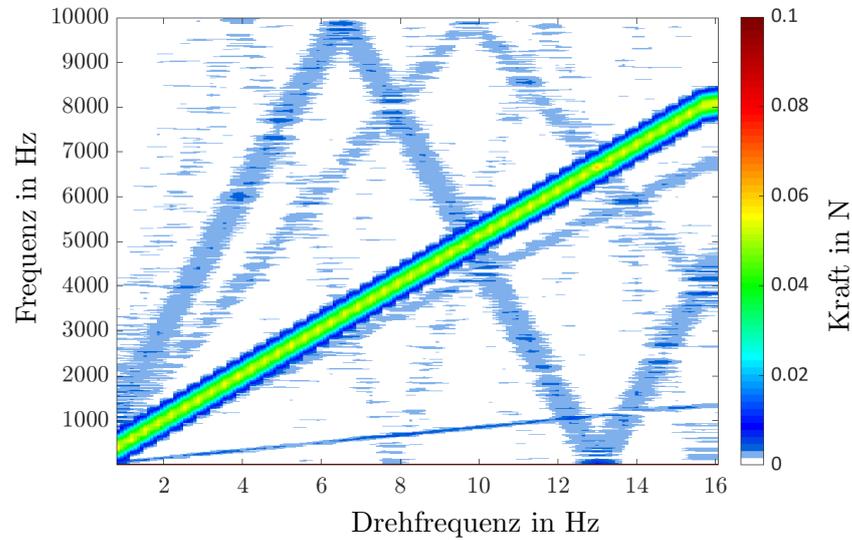


Abbildung 2.32: Spektrum der resultierenden Kraft bei einer statischen Exzentrizität von  $125 \mu\text{m}$ .

zu den bisher aufgetretenen Frequenzen treten zwei Superharmonische mit dem Zweifachen bzw. Vierfachen des Produkts aus Polpaarzahl und Drehzahl auf. Werden diese Frequenzen im Experiment gemessen, ist die Rundheitsabweichung von Rotor und Stator eine mögliche Ursache. Das Kraftspektrum weist die gleichen Anstiege auf, ist allerdings von den Amplituden vernachlässigbar gering und wird deshalb nicht dargestellt.

Die Magnete sind laut Hersteller bis zu 97 % genau magnetisiert. Es soll untersucht werden, wie sich das Spektrum von Moment und Kraft verändert, wenn ein Magnet nur 90 % der geforderten Magnetisierung besitzt, wenn die Magnetisierung aller Magnete zufällig, aber innerhalb der Fertigungstoleranz verteilt ist und wenn alle Magnete einer Ausrichtung 97 % und die andere Hälfte 100 % der gewünschten Magnetisierung besitzt. Der erste Fall, also ein Magnet ist nur zu 90 % magnetisiert, könnte bei Entmagnetisierung z. B. durch Stöße beim Herunterfallen hervorgerufen werden. Das in Abbildung 2.34 dargestellte Spektrum des Moments zeigt keine neuen Superharmonischen. Die Frequenzen aus Tabelle 2.2 sind deutlich zu sehen. Die Amplituden der ersten beiden Superharmonischen sind mit denen aus Abbildung 2.26 vergleichbar, die anderen beiden sind etwas schwächer ausgeprägt. Im Motor werden zwei verschiedene Magnetbauformen eingebaut. Welche in Umfangsrichtung in wechselnder Reihenfolge verbaut werden. Bei der einen Bauform ist der Nordpol innen, bei der anderen der Südpol. Wenn aufgrund der Fertigung alle Magnete, bei denen der Südpol innen ist, nur zu 97 % magnetisiert sind, ergibt sich das in Abbildung 2.35 dargestellte Spektrum des Drehmoments. Es können die gleichen Superharmonischen, wie bei dem idealen Motor, beobachtet werden. Die

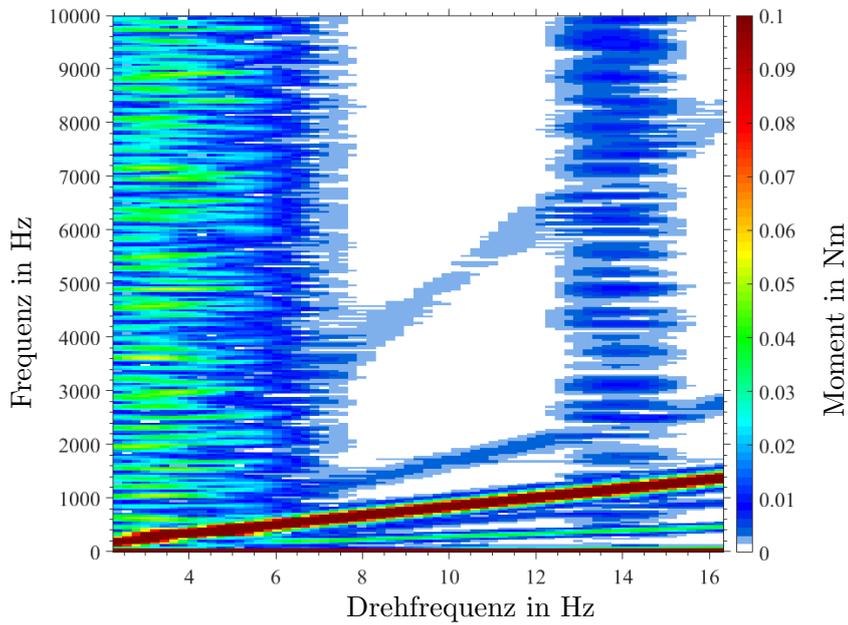


Abbildung 2.33: Spektrum des Motormoments bei einer Rundheitsabweichung von Rotor und Stator.

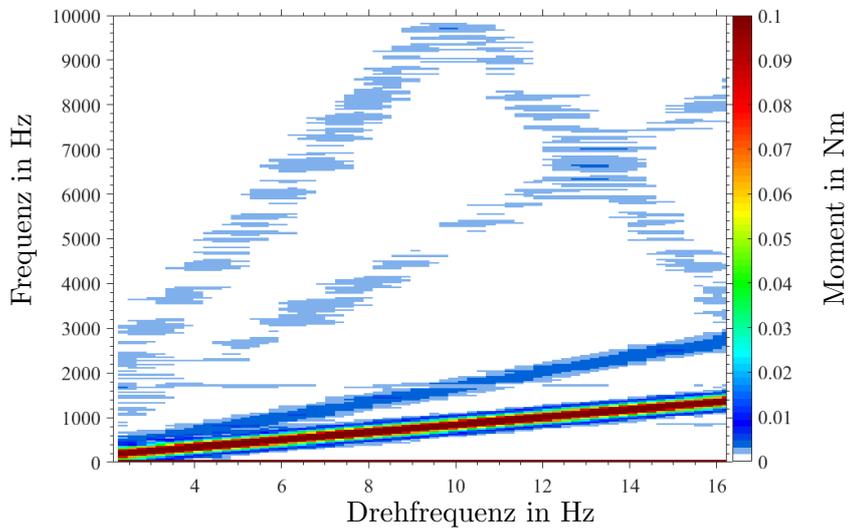


Abbildung 2.34: Spektrum des Drehmoments, wenn ein Magnet 90 % der Nennmagnetisierung aufweist.

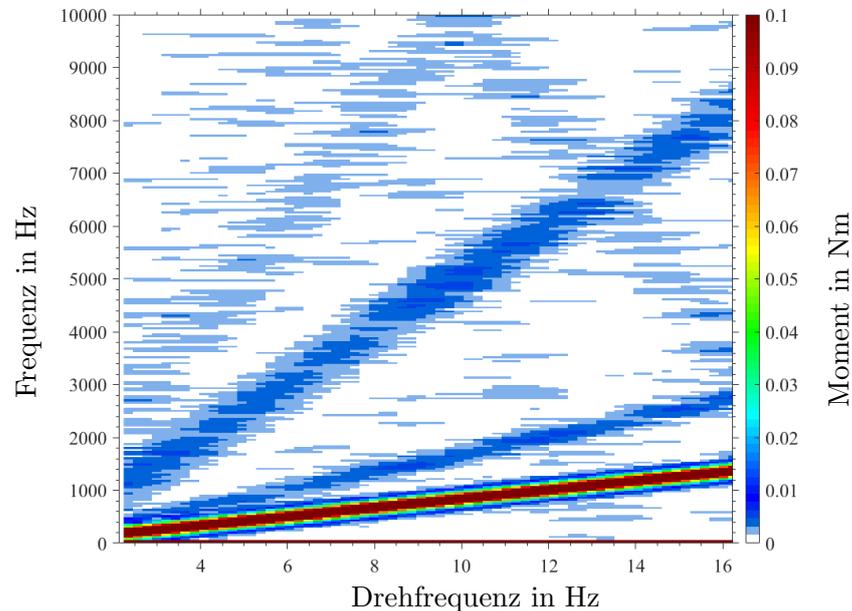


Abbildung 2.35: Spektrum des Drehmoments, wenn jeder zweite Magnet 97 % der Nennmagnetisierung aufweist.

Amplituden sind ebenfalls unverändert. Aufgrund der weiterhin vorhandenen Periodizität sind die resultierenden Kräfte in der Größe der numerischen Ungenauigkeit und können vernachlässigt werden.

Alternativ können alle Magnete einer Ausrichtung falsch positioniert sein. Dies geschieht, weil erst alle Magnete einer Ausrichtung auf den Rotor geklebt werden und anschließend die anderen 14 Magnete mit Hilfe eines Distanzstücks an den bereits angebrachten Magneten ausgerichtet werden. Abbildung 2.37 zeigt das Spektrogramm, wenn alle Magnete mit einem Abstand von 0,2 mm zu dem benachbarten Magnet mit dem geringeren Abstand eingebracht werden. Dieser Abstand ist vergleichsweise groß und dient der Abschätzung, ob dieser Einbaufehler das Spektrum beeinflusst. Die Superharmonischen des Drehmoments sind unverändert. Allerdings fällt auf, dass besonders die dritte Superharmonische  $pp36$ , welche dem 504-fachen der Drehfrequenz entspricht, deutlich erhöht ist. Durch die Periodizität verschwindet die Summe der resultierenden Kräfte.

Die ermittelten Spektren des Motormoments sind gegenüber Fertigungsungenauigkeiten nicht sensitiv. Das bedeutet, diese Spektren können nicht für die Detektion von Fehlern herangezogen werden. Außerdem beeinflussen die untersuchten Fehler auch nicht das Schwingungsverhalten, wodurch sie bei der Auslegung des Motors nicht zwingend berücksichtigt werden müssen.

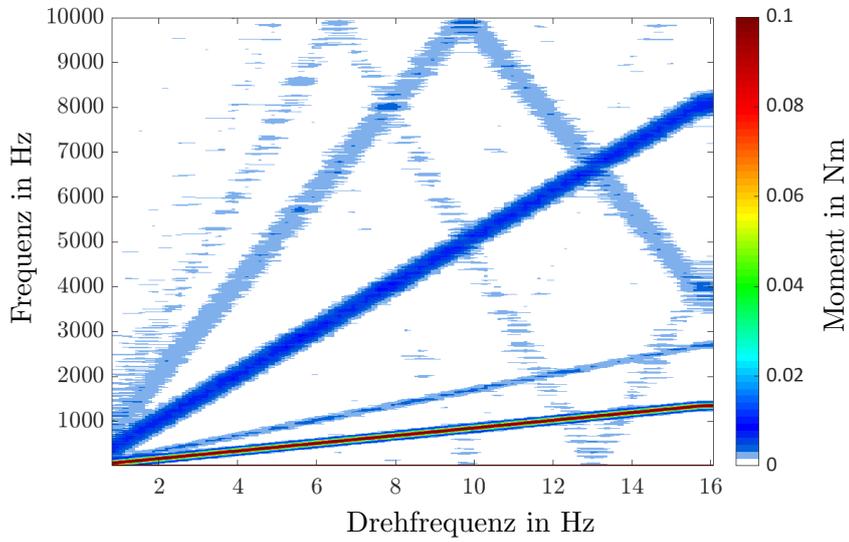


Abbildung 2.36: Spektrum des Drehmoments bei einer zufälligen Magnetisierung von 97 % - 103 % der Nennmagnetisierung.

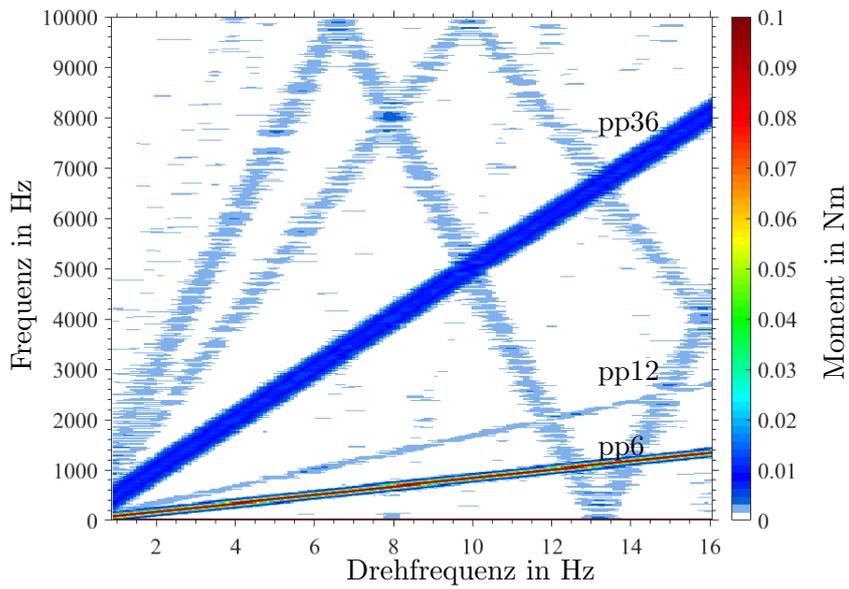


Abbildung 2.37: Spektrum des Drehmoments bei paarweise verbauten Magneten.

Anders verhält es sich bei den resultierenden Kräften, bei denen die Frequenzen weitestgehend, denen des Moments entsprechen, aber die Amplituden stark von den Fertigungsungenauigkeiten abhängen. Dies geschieht, wenn die Symmetrie des Systems gestört wird, andernfalls verschwindet die Summe der Kräfte. Diese wirkenden Kräfte können zum einen den Motor zu Schwingungen anregen und werden zum anderen über die Lagerung an die umgebende Struktur abgegeben, wodurch beispielsweise die Akustik des Gesamtsystems beeinflusst wird. Dieser Einfluss kann durch einen ganzheitlichen Ansatz berücksichtigt werden.

### 2.8.3 Verifizierung der elektromagnetischen Kraftroutine der MKS

Die Verifizierung der umgesetzten Methode an einfachen Beispielmotoren, welche [56] entnommen sind, wurde in [72] gezeigt. Für die Verifizierung der umgesetzten FE-Modelle wird in dieser Arbeit ANSYS und das vollständige Motormodell verwendet. Das in Abbildung 2.38 dargestellte Modell eines Motorsegments besitzt die gleichen Eigenschaften wie das bisher verwendete Modell. Bei ANSYS kann die Lage des Rotors während der Simulation nicht geändert werden, da es eine reine FEM Simulation ist und wird deshalb in zentrischer Lage gewählt. Das maximale resultierende Vektorpotential von  $7,059 \cdot 10^{-3}$  Wb/m entspricht einem relativen Fehler von 0,067 % gegenüber dem Modell mit  $52 \cdot 10^3$  FG aus 2.5. Das Rotormoment beträgt 34,5 Nm und weicht damit 0,26 % vom verwendeten Modell ab. Die Abweichungen der umgesetzten Finiten-Elemente-Methode gegenüber ANSYS sind für magnetostatische Untersuchungen gering. Das mit ANSYS bestimmte Spektrogramm des Motors ist in Abbildung 2.39 dargestellt. Die dominanten Superharmonischen pp6 und pp12, die auch in Abbildung 2.26 zu sehen sind, sind deutlich zu erkennen. Die niederfrequenten Superharmonischen können dementsprechend gut abgebildet werden. Die beiden höherfrequenten Superharmonischen, die in Abbildung 2.26 zu sehen sind, treten im ANSYS-Modell nicht auf. Die Ursache dafür konnte nicht geklärt werden, allerdings stellen die zusätzlichen Superharmonischen den kritischeren Fall dar. Wie Abbildung 2.40 zeigt, beeinflusst die Berücksichtigung von Wirbelströmen in den elektrischen Leitern und nicht linearem Materialverhalten im Stator das Spektrum nicht. Lediglich der Betrag des Drehmoments verändert sich gegenüber dem Modell mit linearem Material und ohne Wirbelströme, wie in Abbildung 2.41 dargestellt ist. Es konnte gezeigt werden, dass die Berechnung der elektromagnetischen Felder und die daraus resultierenden Kräfte und Momente mit Hilfe der umgesetzten FE-Software berechnet werden kann. Damit ist ein wesentlicher Teil des ganzheitlichen Ansatzes, der den Einfluss der elektromagnetischen Felder und den daraus resultierenden Lasten berücksichtigt, umgesetzt. Die vorgestellte FEM wird, nachdem sie im nächsten Kapitel am Motorprüfstand validiert wird, als Kraftroutine in eine MKS implementiert, wodurch das System rückwirkungsbehaftet beschrieben werden kann.

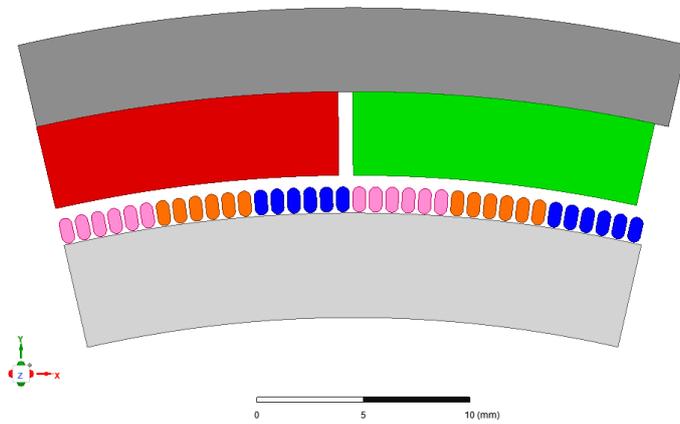


Abbildung 2.38: ANSYS-Modell für die Verifizierung des genutzten Modells und der umgesetzten FEM.

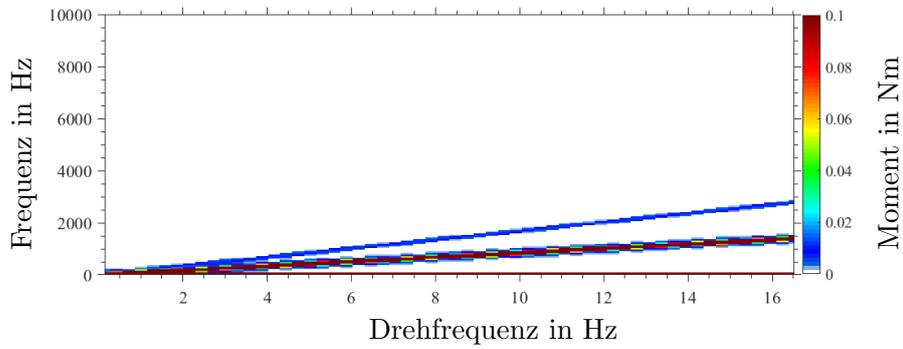


Abbildung 2.39: Mit ANSYS ermitteltes Spektrogramm des Motormoments bei zentrischer Lage des Rotors mit konstanter Permeabilität.

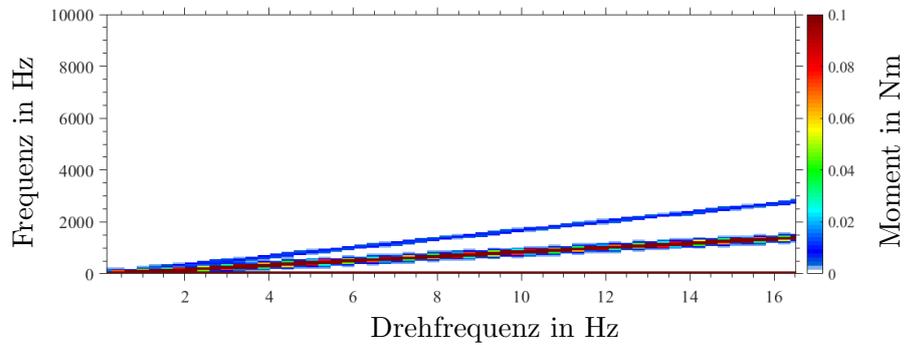


Abbildung 2.40: Mit ANSYS ermitteltes Spektrogramm des Motormoments bei zentrischer Lage des Rotors mit feldabhängiger Permeabilität.

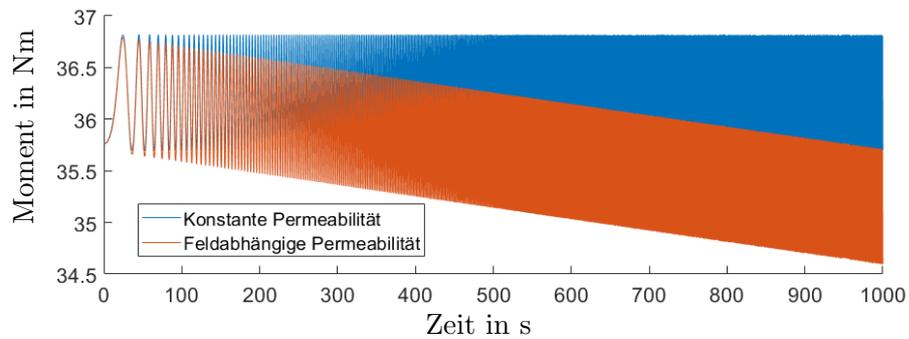


Abbildung 2.41: Vergleich von konstanter und feldabhängiger Permeabilität bei einem Hochlauf mit ANSYS.

## 3 Experimentelle Untersuchung des Motors

Zur Validierung der umgesetzten Kopplung von elektromagnetischen Kräften und mechanischen Schwingungen werden Experimente an einem Motorenprüfstand durchgeführt. Dafür werden Ströme, Spannungen, Drehzahl, Drehmoment und Schallabstrahlung bei Hochläufen und bei konstanten Drehzahlen gemessen und mit den Simulationsergebnissen verglichen. Es werden zwei verschiedene Betriebsarten des Motors untersucht. Bei der ersten wird der Bootsmotor im Generatorprinzip betrieben, das heißt der Prüfstandsmotor dreht den zu untersuchenden Bootsmotor, wodurch Ströme induziert und mit Widerständen in Wärme umgewandelt werden. Bei dieser Variante wird kein Controller benötigt, der durch die eingebaute Regelung zusätzliche Frequenzen anregen könnte. Allerdings ist es nicht möglich, verschiedene Spannungen bei einer Drehzahl zu untersuchen, da sich Strom und Spannung lediglich in Abhängigkeit der Drehzahl einstellen. Außerdem wird ein Gleichrichter verwendet, der den erzeugten Wechselstrom in Gleichstrom umwandelt, damit dieser an den Widerständen in thermische Energie umgewandelt werden kann.

Bei dem zweiten und anwendungsnäheren Fall dreht der Bootsmotor gegen den Prüfstandsmotor, wird dementsprechend im Motorbetrieb genutzt. Die Ströme werden mit Hilfe eines Controllers gesteuert. In beiden Varianten wird die Drehzahl des Bootsmotors vom Prüfstandsmotor vorgegeben.

Wie in der Simulation bietet sich die Untersuchung von Hochläufen an, um mit einem geringen Messaufwand das Schwingungsverhalten des Systems in einem großen Drehzahlbereich zu bestimmen. Anschließend können die gemessenen Ströme und Drehwinkel als Eingangsgrößen für das Simulationsmodell genutzt werden, um beispielsweise Einflüsse des Controllers in der Simulation zu berücksichtigen.

### 3.1 Grundlagen

Zunächst werden der Gleichrichter und die Messung des Drehmoments mit Dehnungsmessstreifen (DMS) vorgestellt.

#### 3.1.1 Gleichrichter

Um den vom Motor erzeugten Wechselstrom an den Widerständen zu verbrauchen, wird ein Gleichrichter verwendet, der den Wechselstrom in Gleichstrom umwandelt. Abbildung 3.1 zeigt den Ausschnitt eines Simulink-Modells eines Gleichrichters mit einem

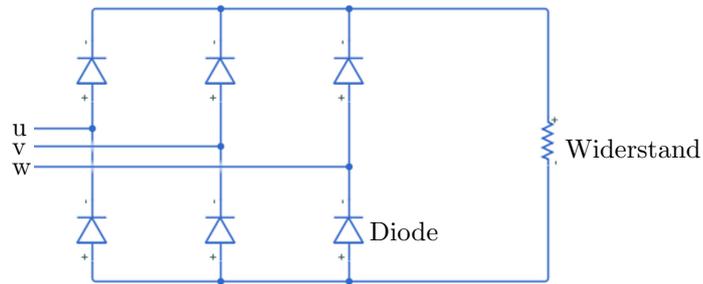


Abbildung 3.1: Ausschnitt eines Simulinkmodells eines Gleichrichters.

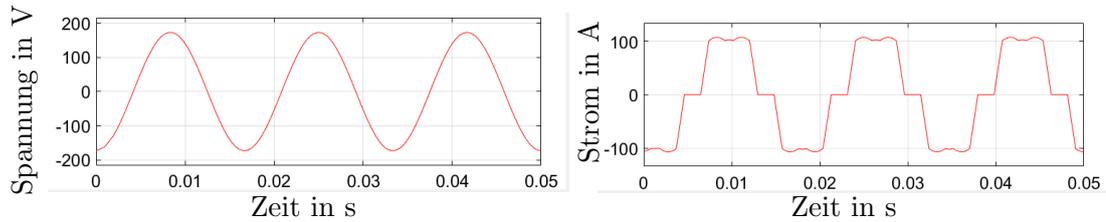


Abbildung 3.2: links: Wechselspannung vor dem Gleichrichter zwischen den Phasen u und v, rechts: Strom der Phase u vor dem Gleichrichter.

Widerstand von  $1 \Omega$ . Das vollständige Modell besitzt zusätzlich jeweils drei Spannungsquellen und Amper- und Voltmeter zum Messen von Stromstärke und Spannung. Es ist gut zu sehen, dass der Gleichrichter aus sechs Dioden besteht. Diese besitzen in Pfeilrichtung einen geringen und in die andere Richtung einen großen Widerstand, sodass der Strom nur in Durchlassrichtung der Diode fließen kann. Werden bei diesem Modell drei sinusförmige Spannungsquellen mit einer Amplitude von  $100 \text{ V}$ , einer Frequenz von  $60 \text{ Hz}$  und einer jeweiligen Phasenverschiebung von  $120^\circ$  verwendet, ergibt sich der in Abbildung 3.2 links dargestellte Spannungsverlauf zwischen der Phase u und v und vor dem Gleichrichter fließt der in Abbildung 3.2 rechts dargestellte Strom. Es ist gut zu sehen, dass der Strom trotz der sinusförmigen Spannung nicht sinusförmig ist. Da auch im Motor eine sinusförmige Spannung erwartet wird, ist mit dem dargestellten Verlauf des Stromsignals zu rechnen. Für den Betrieb des Motors ist dieser Fall nicht von Bedeutung, der Gleichrichter dient lediglich der Umwandlung des im Generatorprinzip erzeugten Wechselstrom in Gleichstrom, um diesen am Widerstand zu verbrauchen.

### 3.1.2 Drehmomentenmessung mit DMS

Dehnungsmessstreifen (DMS) sind flächige Sensoren, in denen dünne elektrisch leitende Drähte verbaut sind. Diese werden auf einer Oberfläche, bspw. mit Kleber, appliziert, wodurch sie die gleichen Dehnungen erfahren, wie die darunterliegende Struktur. Die daraus resultierende Längenänderung führt zu einer Änderung des elektrischen Widerstands, welcher gut messbar ist. Wird also ein DMS auf einem Bauteil appliziert und dieses an einer definierten Stelle mit einer Kraft oder einem Moment beaufschlagt, resultiert daraus eine messbare Dehnung  $\gamma$ . Nach diesem Abgleich erlauben gemessene Dehnungen einen Rückschluss auf die eingeleitete Last an der definierten Stelle. Problematisch ist nun, wenn die Anzahl der möglichen Lasten, die eingeleitet werden, die Anzahl der linear unabhängig messbaren Dehnungen überschreitet. Dann können die Dehnungen nicht eindeutig den Lasten zugeordnet werden. Dieses Phänomen wird Übersprechung genannt und lässt sich durch zusätzliche DMS beheben, wenn das resultierende Gleichungssystem

$$\underline{\underline{G}}_{DMS} \underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{F}} \quad (3.1)$$

linear unabhängig und die Anzahl der eingeleiteten Lasten kleiner oder gleich der Anzahl der DMS ist. Die Übertragungsmatrix  $\underline{\underline{G}}$  kann experimentell oder numerisch bestimmt werden [73]. An einfachen Geometrien wie Balken können Brückenschaltungen verwendet werden, um Biegemomente, Torsionsmoment, Querkräfte und Zug/Druckkräfte unabhängig voneinander zu messen. Bei den durchgeführten Experimenten wird an der Statorwelle eine DMS-Vollbrücke zur Messung des Drehmoments verwendet. Das heißt, die DMS werden so miteinander verschaltet, dass die Widerstandsänderung bei anderen Schnittgrößen als der Torsion verschwindet.

## 3.2 Versuchsaufbau

Die Messungen werden an dem in Abbildung 3.3 dargestellten Motorenprüfstand durchgeführt. Der obere Bereich zeigt den gesamten Antriebsstrang des Prüfstands und benennt wichtige Komponenten. Darunter sind Ausschnitte zu erkennen und Messgeräte benannt. Der Prüfstandsmotor (1) (WEKA RE-POWER) dient dem Bootsmotor als Last, gegen die dieser arbeiten muss (Motorprinzip) bzw. treibt das System an (Generatorprinzip), die Drehzahl wird mit dem Steuergerät (WEKAMAT Prüfstandssteuerung) eingestellt. Auf diese Weise kann die Drehzahl am Prüfstand sehr genau vorgegeben werden. Eine Ausgleichskupplung (2) verringert die Übertragung von Schwingungen und Stößen des Antriebssystems auf die restliche Struktur und erlaubt kleine Winkel-, Axial- und Parallelabweichungen. Mit einem Drehmomentensensor (3) (Lorenz Messtechnik DR-2212) wird das Drehmoment mit einer Genauigkeit von 0,1 % ermittelt. Das gemessene Drehmoment beinhaltet das Lastmoment des Motors und Verluste durch Reibung und Wirbelströme. Die Gelenkwelle (4) gleicht axialen Versatz zwischen Antriebs-

### 3 Experimentelle Untersuchung des Motors

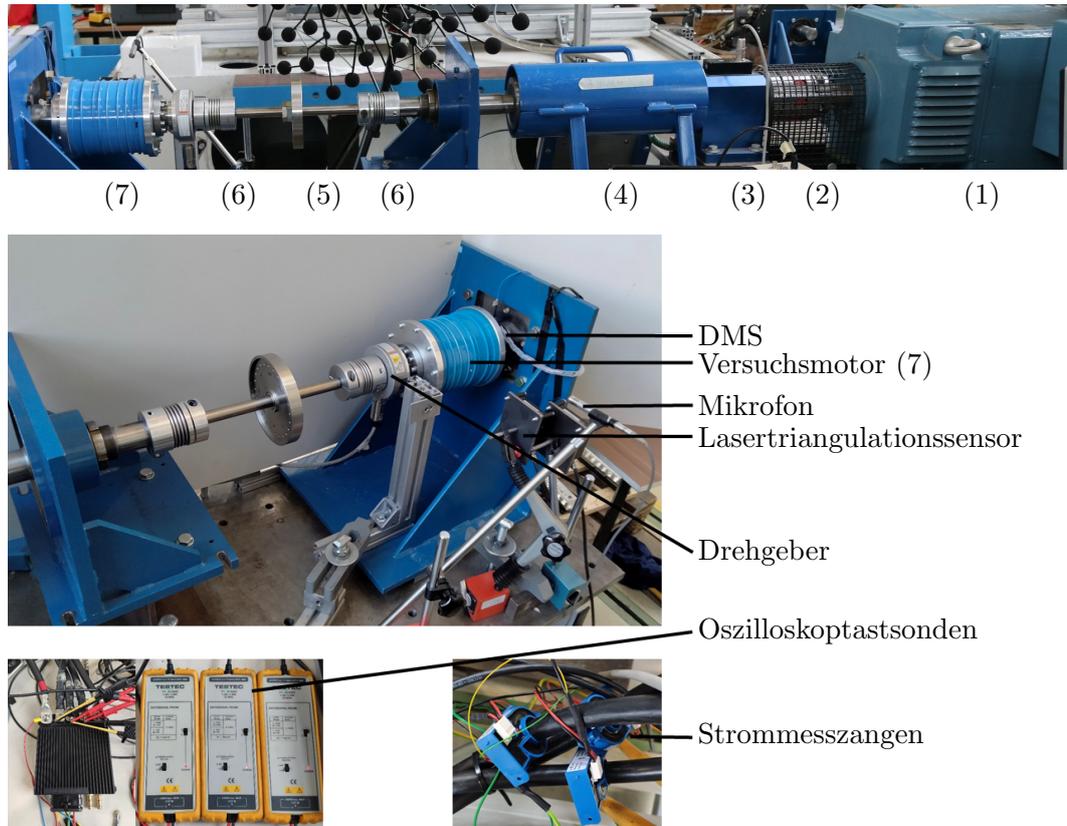


Abbildung 3.3: Versuchsaufbau zur Validierung der erstellten Modelle und umgesetzten Programme mit den Komponenten: (1) Prüfstandsmotor, (2) Ausgleichkupplung, (3) Drehmomentensensor, (4) Gelenkwelle, (5) Welle, (6) Federkupplungen, (7) Versuchsmotor

und Lastmaschine aus. Die Welle (5) ist an beiden Enden mit einer Federkupplung (6) verbunden, welche stark schwingungsdämpfend wirkt. Die Ströme an den drei Phasen werden an den Kabeln des Bootsmotors mit Hilfe von drei Strommesszangen (Teledyne LeCroy CP150-6M) bestimmt. Die Messung basiert auf einer Kombination aus Halleffekt und Transformator-Technologie und eignet sich für Wechsel- und Gleich- sowie Impulstrom. Die differentiellen Oszilloskopstastsonden (Testec Tastkopf TT-SI 9002) messen die Spannungen zwischen zwei Phasen. Die Temperatur im Inneren des Motors wird mit einem Widerstandthermometer (PT100) überwacht. Der Sensor wird direkt auf die Wicklungsköpfe der Kupferwicklungen im Motor appliziert. Durch den temperaturabhängigen elektrischen Widerstand des Sensors erlaubt eine Widerstandsmessung Rückschlüsse auf die Temperatur. Auf diese Weise kann der thermische Einfluss abgeschätzt sowie ein Überhitzen des Motors verhindert werden. Die Temperatur an der Mantelfläche des Mo-



Abbildung 3.4: Widerstände und Gleichrichter für den Generatorbetrieb des Motors

tors wird mit Hilfe eines Infrarot-Thermometers (Raytek) gemessen. Die elektrischen und mechanischen Messgrößen werden mit einem Oszilloskop (MDA800A) zusammengefasst. Dadurch besitzen diese Messgrößen den gleichen Zeitstempel. Wird der Motor im Motorprinzip betrieben, werden neben den in Abbildung 3.3 dargestellten Komponenten und Messgeräten die in Abbildung 3.4 dargestellten Widerstände und der abgebildete Gleichrichter verwendet. Die Widerstände besitzen je  $1\ \Omega$  und sind parallel geschaltet, woraus sich ein Gesamtwiderstand von  $0,33\ \Omega$  ergibt. Der Gleichrichter kommutiert den im Motor erzeugten Wechselstrom in Gleichstrom.

## 3.3 Ergebnisse und Auswertung

### 3.3.1 Bootsmotor im Generatorbetrieb

Der Motor wird im Generatorbetrieb genutzt. Das bedeutet, dass die mit der Antriebsmaschine erzeugte Bewegungsenergie genutzt wird, um Spannung und daraus resultierend Strom zu generieren, welcher unter Verwendung von elektrischen Widerständen in Wärme umgewandelt wird. Wirbelstrom- und Reibungsverluste wirken der Bewegung entgegen, wodurch die mechanische Leistung, die in das System eingebracht wird, größer ist als die elektrische Leistung, die am untersuchten Motor entnommen wird. Der Drehgeber dient zum einen der Bestimmung des Drehwinkels, mit dem die Beziehung zwischen Rotor und Stator beschrieben wird und zum anderen der Drehzahl, welche durch die drehzahlabhängigen Frequenzen und die dynamischen Anteile der Differentialgleichung wichtig ist. Für eine sehr genaue Bestimmung beider Größen besitzt der Drehgeber 5000 Inkremente. Des Weiteren erfasst der Drehgeber einen definierten Nullwinkel, welcher bei jeder Drehung erkannt wird und es erlaubt, den Winkel und nicht nur die Winkeländerung während der Messung zwischen Rotor und Stator zu ermitteln und Fehler bei der Winkelmessung zu korrigieren. Diese Fehler treten in Abhängigkeit der Drehzahl und der gewählten Abtastfrequenz, welche bei den durchgeführten Experimenten 110 kHz

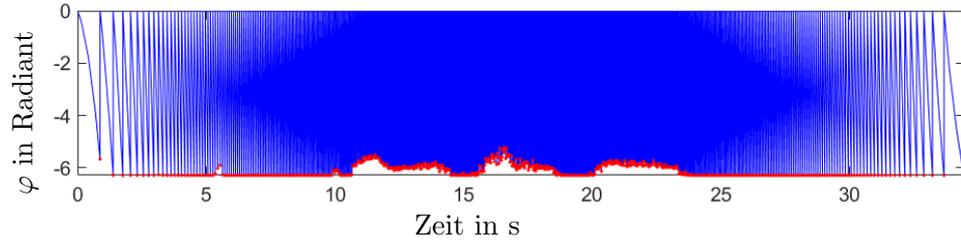


Abbildung 3.5: Winkel-Zeit-Verlauf bei einem Hoch- und Runterlauf des Motors.

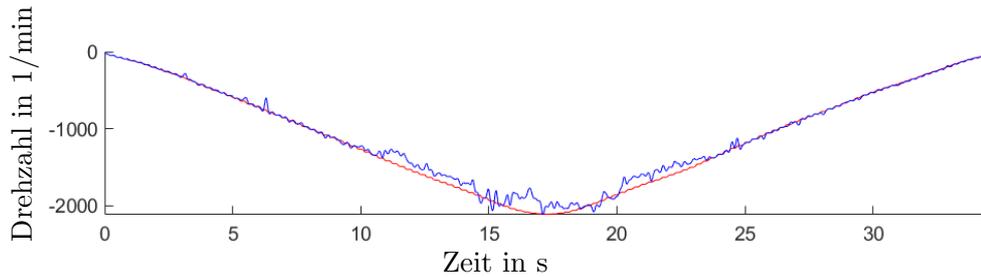


Abbildung 3.6: Drehzahl-Zeit-Verlauf bei einem Hoch- und Runterlauf des Motors.

beträgt, auf, wenn zwischen zwei Abtastpunkten mehr als ein Inkrement den Sensor passiert. Abbildung 3.5 und Abbildung 3.6 verdeutlichen das am Beispiel eines Hoch- und Runterlaufs bis ca. 2000 1/min. Die blauen Linien zeigen die ermittelten Winkel  $\varphi$  bzw. die Drehzahl über die Zeit. Der Winkel, welcher ein Vielfaches der gezählten Inkremente ist, erreicht bei den hohen Drehzahlen keine  $2\pi$ , welche bei einer vollständigen Drehung auftreten müssten. An den rot dargestellten Punkten wird der Nullwinkel erreicht, der für eine Korrektur genutzt werden kann. Die Drehzahl ohne Korrektur zeigt keinen glatten Verlauf. Werden dagegen lediglich vollständige Umdrehungen gezählt, ergibt sich der wesentlich glattere rote Verlauf. Als Eingabe für die Simulation wird sowohl für den Winkel, als auch für die Drehzahl, der korrigierte Verlauf genutzt, da der unkorrigierte Verlauf Sprünge und falsche Winkel besitzt, welche zu falschen Drehmomenten führen (siehe Abbildung 2.6). Ein Drehgeber mit geringerer Anzahl an Inkrementen wäre demzufolge möglich gewesen, alternativ könnte die Abtastrate, die allerdings schon sehr hoch ist, erhöht werden.

Ein Ausschnitt der Strom-Zeit Kennlinie eines Hochlaufs ist beispielhaft in Abbildung 3.7 dargestellt. Ein zyklischer Verlauf ist bei allen drei Phasen deutlich zu erkennen. Ein harmonischer Verlauf der Ströme, wie er bei einem Motor im Generatorprinzip zu erwarten ist [74], kann nicht beobachtet werden. Stattdessen entspricht der abgebildete Verlauf der Ströme, dem vom Gleichrichter hervorgerufen aus Kapitel 3.1.1. Der Strom und damit auch Drehmomentenverlauf wird dementsprechend vom Gleichrichter beeinflusst. Durch den kleinen Ausschnitt von Abbildung 3.7 wirkt die Amplitude konstant,

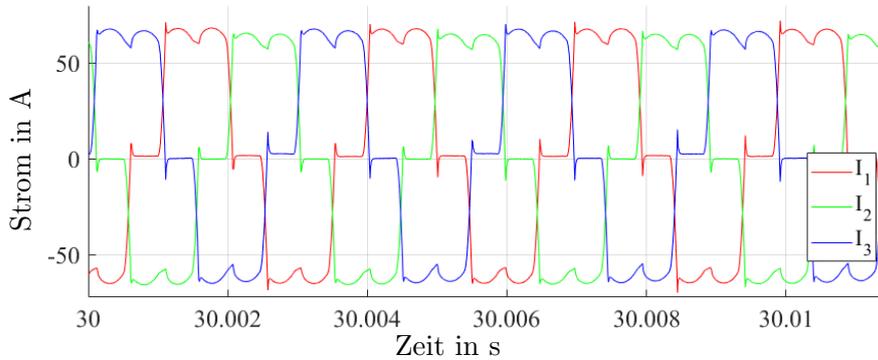


Abbildung 3.7: Ausschnitt der Strom-Zeit-Kennlinie eines Motorhochlaufs im Generatorbetrieb unter Verwendung eines Gleichrichters und elektrischer Widerstände.

steigt allerdings mit zunehmender Drehzahl, was den Erwartungen entspricht.

Das Spektrogramm der Phase A ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Die erwartete Superharmonische mit dem Anstieg 14 der Drehzahl ist dominant und entspricht den Erwartungen, da diese der Anzahl der Polpaare entspricht. Diese Frequenz wurde auch in der Simulation als Eingangsgröße verwendet. Zusätzlich treten das 3-, 5-, 7-, 11-, 13-, 17-fache des Produkts aus Drehzahl und Polpaarzahl und weitere der erwarteten Superharmonischen auf. Wie bereits beschrieben, werden die Superharmonischen nach den Faktoren benannt, aus denen sie sich zusammensetzen, wobei  $n$  der Drehzahl und  $pp$  der Polpaarzahl entspricht. Eine Superharmonische deren Anstieg dem Produkt aus Polpaarzahl und drei entspricht, wird dementsprechend  $npp3$  benannt. Die zusätzlichen Anregungsfrequenzen, die in diesem Fall auf den Gleichrichter zurückgeführt werden können, können die Systemschwingung beeinflussen, was im weiteren Verlauf der Arbeit untersucht wird.

Die zugehörigen Spannungen der Phasen zueinander sind in Abbildung 3.9 dargestellt. Es ist gut zu erkennen, dass auch die Spannungen sehr regelmäßig sind. Anders als in den durchgeführten Simulationen, in denen der Strom bzw. die Stromdichte als Eingangsgröße verwendet wird, kann auch die Spannung als Eingangsgröße der Simulation gewählt werden (siehe Gleichung 2.44). Bei Kenntnis des elektrischen Widerstands der Leiter wird der Strom in den Leitern berechnet. Wie auch bei der Strom-Zeit-Kennlinie ist ein kleiner Ausschnitt dargestellt, bei dem die Amplituden konstant wirken, allerdings genauso drehzahlabhängig sind. Das Verhältnis von Strom und Spannung

$$R = \frac{U}{I} = 0.33 \quad (3.2)$$

entspricht ungefähr dem verwendeten Gesamtwiderstand. Das in Abbildung 3.10 dargestellte Frequenzspektrum zeigt die gleichen Frequenzen wie das Spektrum des Stroms

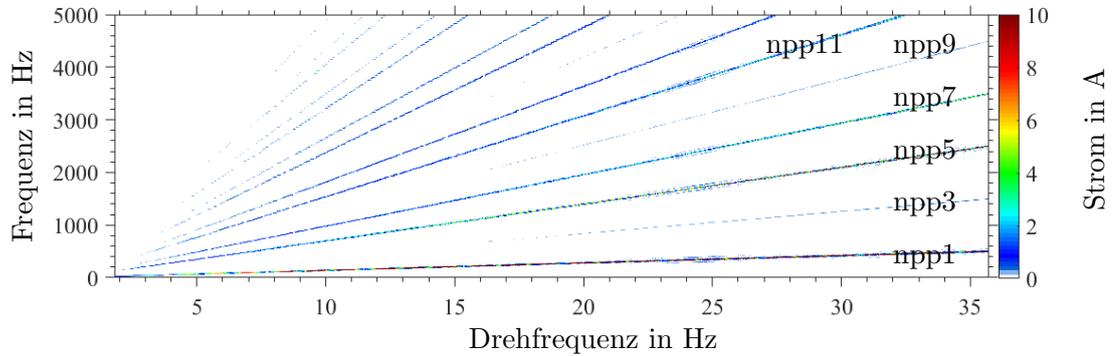


Abbildung 3.8: Spektrogramm des Stroms bei einem Hochlauf des Motors im Generatorbetrieb unter Verwendung eines Gleichrichters und elektrischer Widerstände.

aus Abbildung 3.8. Die für die Validierung wichtigste Größe ist das Drehmoment, welches im Experiment mit Dehnungsmessstreifen (Vollbrücke) in der Nähe des Versuchsmotors gemessen wird. Das Spektrogramm der gemessenen Torsionsmomente ist in Abbildung 3.11 dargestellt. Es sind drei drehzahlabhängige Frequenzen (1-3) und eine drehzahlunabhängige Frequenz (4) zu erkennen. Die drehzahlunabhängige Frequenz tritt bei 500 Hz auf. Die Superharmonische npp2 ist am stärksten ausgeprägt. Des Weiteren treten die Superharmonischen npp4 und npp6 auf. Kreuzen sich die drehzahlunabhängige Frequenz und eine Superharmonische, sind die Amplituden des Drehmoments stark erhöht. Eine mögliche Ursache für die drehzahlunabhängige Frequenz ist eine Torsionseigenfrequenz. Diese führt bei bestimmten Drehzahlen, also wenn die Drehfrequenz oder die Superharmonischen diese Frequenz anregen, zu erhöhten Drehmomenten.

Die Superharmonische npp6 trat in allen numerischen Hochläufen aus Kapitel 2.8 auf, war dort allerdings die dominante Superharmonische. Höhere Superharmonische der Simulation konnten im Experiment nicht nachgewiesen werden, was an der deutlich geringeren Amplitude liegen könnte. Die gemessenen Superharmonischen npp2 und npp4 traten bei einer Rundheitsabweichung von Rotor und Stator (siehe Abbildung 2.33) auf. Wie im Experiment war die Amplitude von npp2 sichtlich höher als die von npp4. Die Amplituden können ohne Kenntnis der Größe der Unrundheit allerdings nicht bewertet werden.

### 3.3.2 Bootsmotor im Motorbetrieb

Der Motor wird im Motorprinzip genutzt, was bedeutet, dass elektrische Energie in Bewegungsenergie umgewandelt wird. Der Prüfstandsmotor ermöglicht eine genaue Steuerung der Drehzahl, indem er das erzeugte Moment des Versuchsmotors aufnimmt, aber die

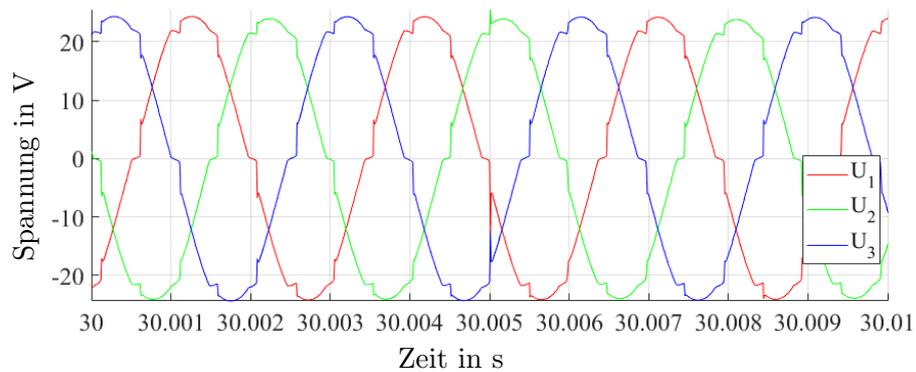


Abbildung 3.9: Ausschnitt der Spannung-Zeit-Kennlinie eines Motorhochlaufs im Generatorbetrieb unter Verwendung eines Gleichrichters und elektrischer Widerstände.

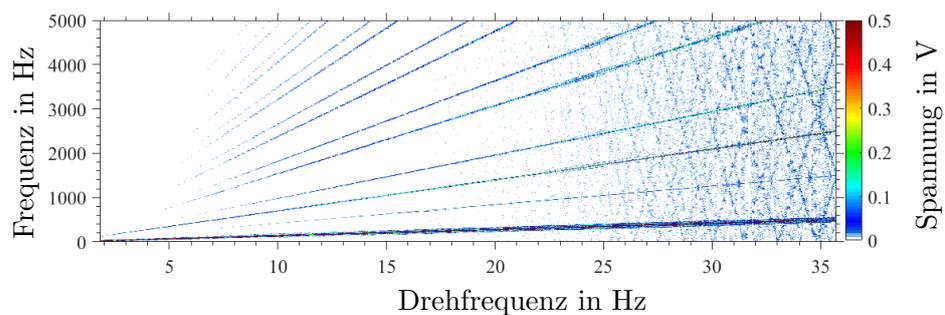


Abbildung 3.10: Spektrogramm der Spannung bei einem Hochlauf des Motors im Generatorbetrieb unter Verwendung eines Gleichrichters und elektrischer Widerstände.

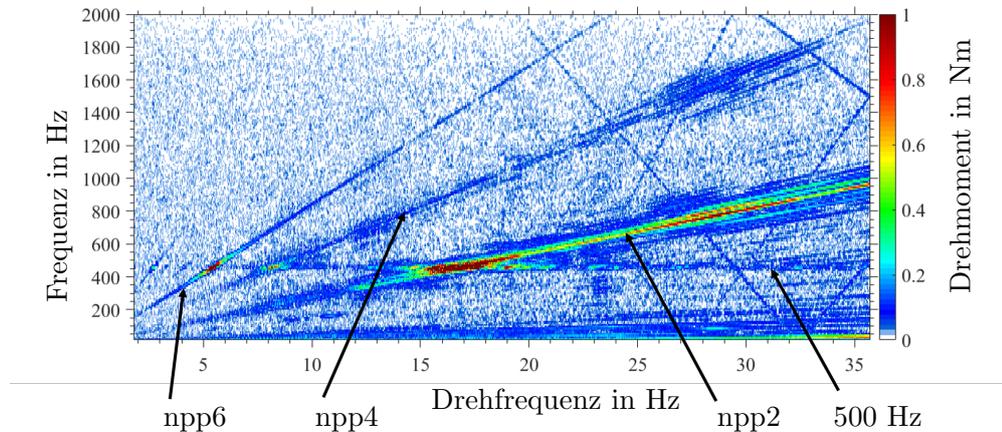


Abbildung 3.11: Spektrogramm des Drehmoments am Versuchsmotor bei einem Hochlauf des Motors im Generatorbetrieb unter Verwendung eines Gleichrichters und elektrischer Widerstände.

Drehzahl vorgibt. Auf diese Weise kann die Spannung, welche mit dem resultierenden Drehmoment korreliert, unabhängig von der Drehzahl vorgegeben werden. Dies war im Generatorprinzip nicht möglich.

Für die Untersuchung der angeregten drehzahlabhängigen Frequenzen werden Hochläufe mit verschiedenen Spannungen durchgeführt. Abbildung 3.12 zeigt einen Ausschnitt der Strom-Zeit-Kennlinie für einen Hochlauf bei einer Spannung von 50 V. Die Kennlinie unterscheidet sich deutlich von der im Generatorprinzip aus Abbildung 3.7. Während im Generatorprinzip der Verlauf auf den Gleichrichter zurückgeführt werden kann, besitzt der Verlauf im Motorbetrieb höherfrequente Schwingungsanteile. Dieses Verhalten des Stroms wird von dem Controller hervorgerufen, welcher den Strom dem aktuellen Drehwinkel anpasst und mit Hilfe von Pulsdauermodulation (PDM) steuert. Das bedeutet, der Strom wird über die Spannung geregelt, welche nur die Zustände  $U_{max}$  und  $-U_{max}$  besitzt. Die effektive Spannung und damit auch der Strom wird über die Dauer der Zustände  $U_{max}$  und  $U_{min}$  reguliert [75]. Abbildung 3.13 veranschaulicht die PDM. Das zugehörige Spektrogramm ist in Abbildung 3.14 dargestellt und zeigt ganzzahlige Vielfache von Drehzahl und Polpaarzahl  $n_{ppi}$  für  $i=1\dots 17$ . Dieser Unterschied im Frequenzspektrum des Stroms kann zu weiteren Frequenzen im Momentenspektrum führen. Anders als im Generatorbetrieb mit elektrischen Widerständen ist die Spannung nicht von der Drehzahl abhängig, sondern wird vom Controller vorgegeben, wodurch die Amplituden über den gesamten Drehzahlbereich unverändert bleiben. Der in Abbildung 3.15 dargestellte Ausschnitt des Verlaufs der gemessenen Spannungsunterschiede der Phasen zueinander zeigt die PDM des Controllers. Anders als im Generatorprinzip

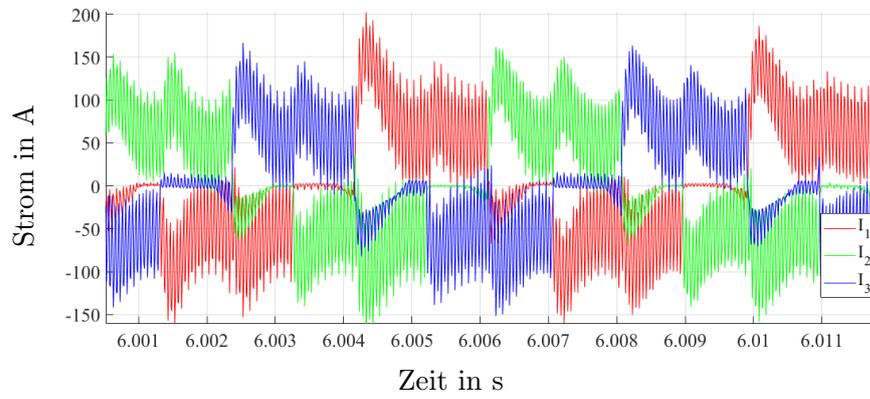


Abbildung 3.12: Ausschnitt der Strom-Zeit-Kennlinie eines Motorhochlaufs im Motorbetrieb, bei einer Schaltfrequenz des Controllers von 20 kHz

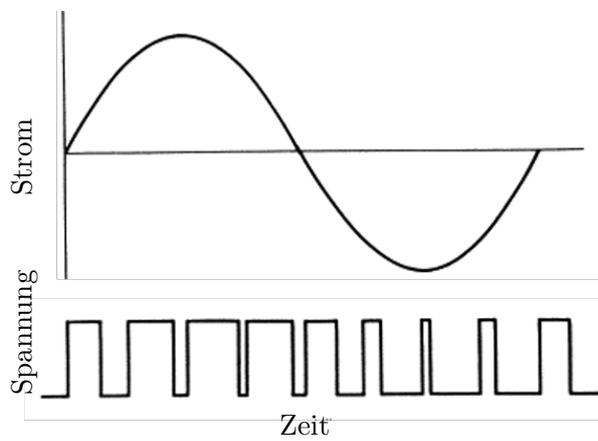


Abbildung 3.13: Veranschaulichung der Pulsdauermodulation nach [75]

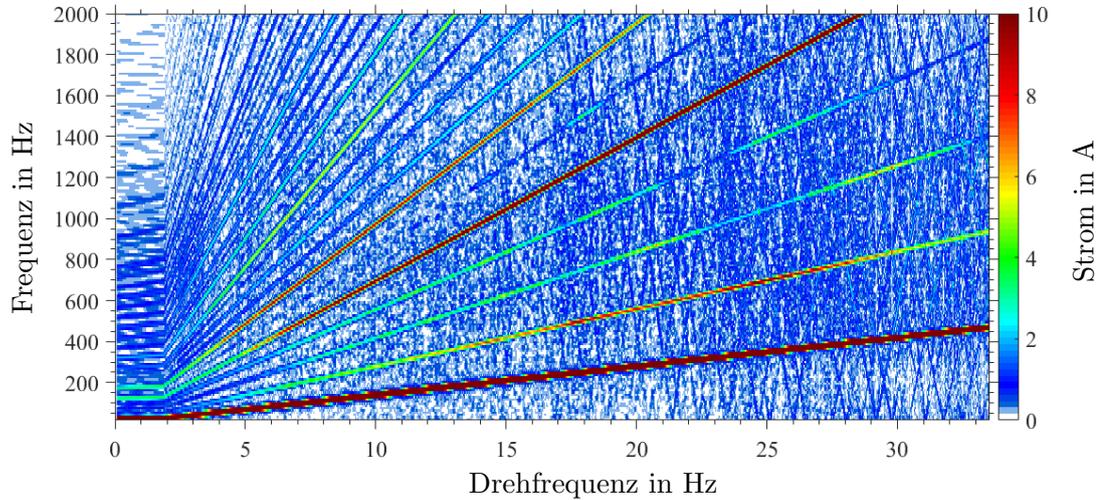


Abbildung 3.14: Spektrogramm des Stroms bei einem Hochlauf des Motors im Motorbetrieb unter Verwendung eines Controllers.

unterscheiden sich die Verläufe der Eigenfrequenzen von Strom und Spannung in den Spektren deutlich, wie der Vergleich von Abbildung 3.14 und Abbildung 3.16 zeigt.

Das Spektrogramm des Motormoments im Motorbetrieb bis 2 kHz ist in Abbildung 3.17 zu sehen und besitzt wie beim Generatorprinzip, in Abbildung 3.11, eine drehzahlunabhängige Frequenz von 500 Hz. Auch npp2, npp4 und npp6 treten in beiden Varianten auf. Die Amplituden von npp2 sind weitestgehend vergleichbar, allerdings im Motorprinzip bei Frequenzen unter 500 Hz und beim Generatorprinzip bei Frequenzen oberhalb 500 Hz größer. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass die Spannung im Generatorprinzip mit der Drehzahl steigt und im Motorprinzip konstant ist. Die Amplituden sind damit nur begrenzt vergleichbar. Bei den Superharmonischen npp4 und npp6 sind im Motorprinzip im gesamten Drehzahlbereich höhere Amplituden zu sehen. Zusätzlich zu den Superharmonischen, die auch im Generatorprinzip auftreten, werden npp1 und npp3 angeregt. Des Weiteren treten oberhalb von npp6 einige Superharmonische mit kleineren Amplituden auf. Zusammenfassend werden im Generatorprinzip zusätzliche Frequenzen angeregt, was wahrscheinlich auf die zusätzlichen Frequenzen im Spektrum des Stroms zurückgeführt werden kann.

Zusätzlich zu Winkel, Strom, Spannung und Drehmoment wurde auch der Schalldruck  $\hat{p}$  mit einem Mikrofon gemessen. Es ist zu bemerken, dass die Ergebnisse nur qualitativ bewertet werden können, da sich der Prüfstand nicht in einem reflexionsarmen Raum befindet, wodurch auch Sekundärschall, also Reflexionen des eigentlichen Signals, ge-

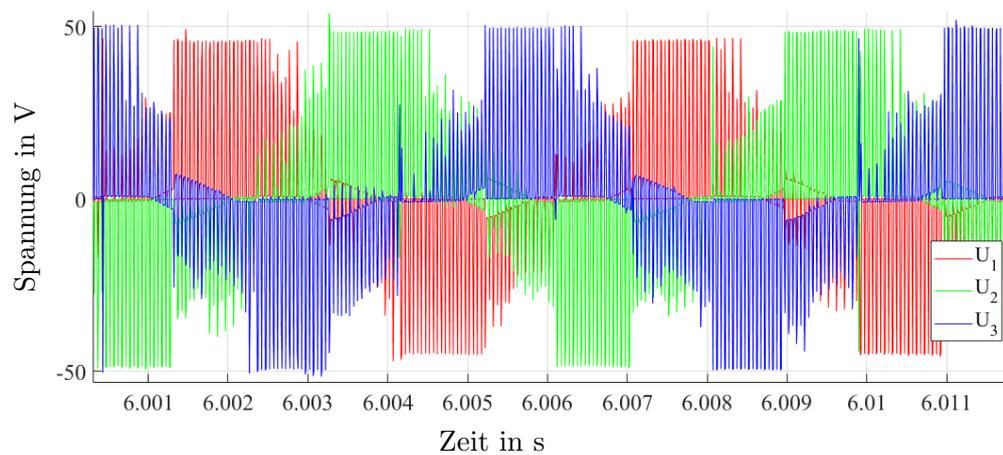


Abbildung 3.15: Ausschnitt der Spannung-Zeit-Kennlinie eines Motorhochlaufs im Generatorbetrieb unter Verwendung eines Gleichrichters und elektrischer Widerstände.

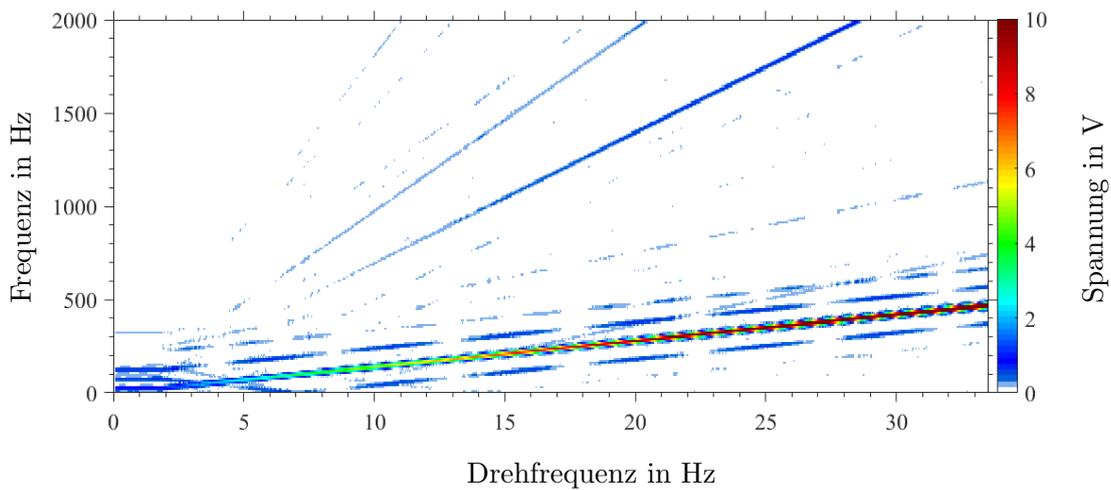


Abbildung 3.16: Spektrogramm der Spannung bei einem Hochlauf des Motors im Generatorbetrieb unter Verwendung eines Gleichrichters und elektrischer Widerstände.

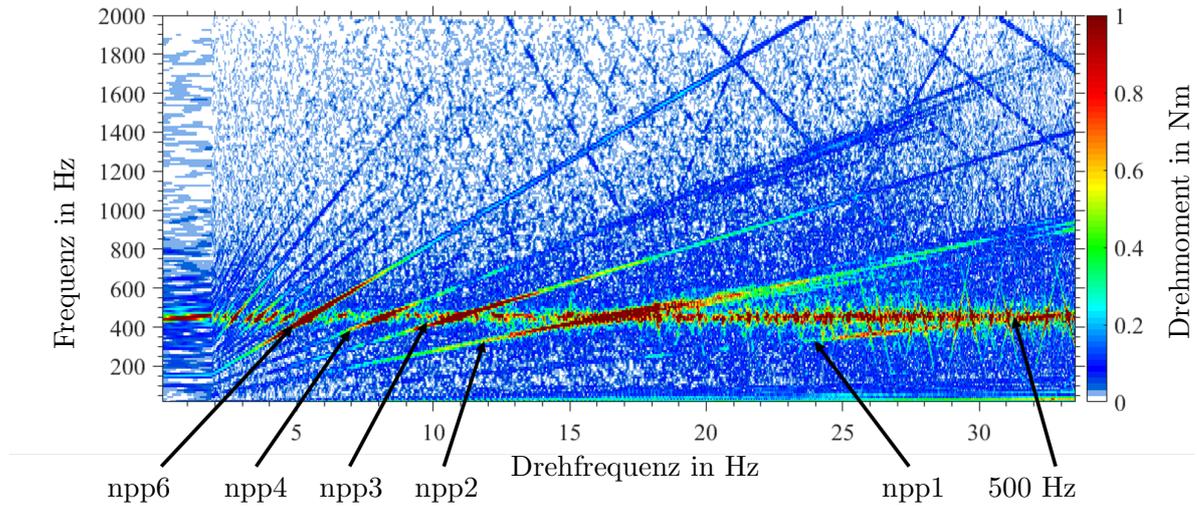


Abbildung 3.17: Spektrogramm des Drehmoments am Versuchsmotor bei einem Hochlauf des Motors im Motorbetrieb bis 2 kHz unter Verwendung eines Gleichrichters und elektrischer Widerstände.

messen wurden. Weitere Schallquellen sind der Prüfstandsmotor, dessen Abstand zum Mikrophon deutlich größer ist als zum Versuchsmotor und andere Hallengeräusche. Der Schalldruck wird mit dem Bezugsschalldruck  $\hat{p}_0$  von  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa in den Schalldruckpegel  $L_{\hat{p}}$

$$L_{\hat{p}} = 20 \log\left(\frac{\hat{p}}{\hat{p}_0}\right) dB \quad (3.3)$$

umgerechnet. Das gemessene Spektrum des Schalldruckpegels ist in Abbildung 3.18 dargestellt. Es sind die drei Superharmonischen npp2, npp4 und npp6 zu erkennen, die auch in der Simulation auftraten. Die größte Amplitude tritt bei npp2 auf. Anders als beim Drehmoment sind die Superharmonischen npp1 und npp3 nicht zu sehen. Die drehzahlunabhängige Frequenz bei 500 Hz ist sehr schwach ausgeprägt. Die elektromagnetischen Felder beeinflussen dementsprechend die Akustik des Motors, welche unter Nutzung der entwickelten Methode beschrieben werden kann. Eine numerische Untersuchung des Einflusses der elektromagnetischen Kräfte wird in Kapitel 4.3.3 durchgeführt.

### 3.4 Validierung der FE-Umsetzung

In diesem Abschnitt werden die vorgestellten experimentellen Untersuchungen mit der umgesetzten Methode nachgerechnet, wobei der Rotor zunächst in zentrischer Lage ver-

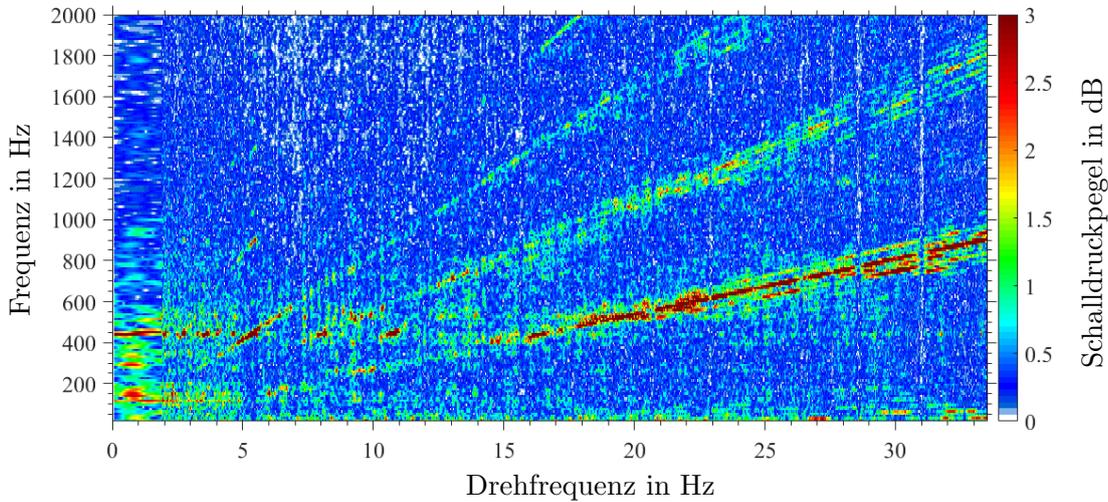


Abbildung 3.18: Spektrogramm des Schalldruckpegels am Versuchsmotor bei einem Hochlauf des Motors im Motorbetrieb.

bleibt. Die Berücksichtigung von veränderlichen Exzentrizitäten wird durchgeführt, sobald die theoretischen Grundlagen dafür geschaffen wurden.

### 3.4.1 Bootsmotor im Motorbetrieb

Das in Abbildung 3.17 dargestellte Spektrogramm des Motormoments zeigt Frequenzen, die in der Simulation bisher nicht aufgetreten sind. Diese werden wahrscheinlich durch die Stromregelung des Controllers hervorgerufen. Zur Validierung der umgesetzten Simulation werden die gemessenen Ströme, Winkel und Winkelgeschwindigkeiten als Eingangsgröße der Simulation verwendet und der resultierende Momentenverlauf ermittelt. Dieser ist in Abbildung 3.19 dargestellt. Wie in Abbildung 3.17 sind die Superharmonischen  $npp1$ ,  $npp2$ ,  $npp3$ ,  $npp4$ ,  $npp6$  und weitere Superharmonische zu erkennen. Die bisher nicht auftretenden Frequenzen werden demzufolge durch die reale Stromanregung hervorgerufen, die anders als bisher angenommen nicht sinusförmig ist. Eine drehzahlunabhängige Frequenz von 500 Hz tritt nicht auf. Im Experiment stiegen die Amplituden der Superharmonischen, wenn ihre Frequenz im Bereich der Drehzahlunabhängigen war. Dieser Effekt erschwert die Vergleichbarkeit, weil die drehzahlunabhängige Frequenz in der Simulation nicht auftrat. Die höchsten Amplituden traten im Experiment bei  $npp2$ ,  $npp3$  und  $npp6$  auf. Auch in der Simulation sind die Amplituden von  $npp6$  und  $npp3$  am größten. Die Superharmonische  $npp2$  ist in der Simulation allerdings in der gleichen Größenordnung wie beispielsweise die Superharmonische  $npp4$  und damit kleiner als er-

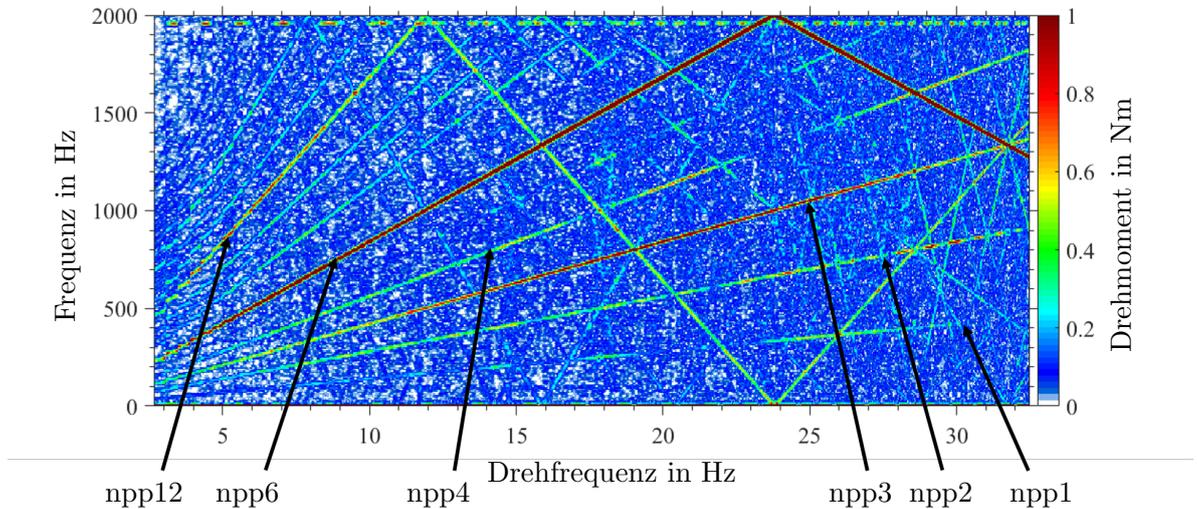


Abbildung 3.19: Numerisch ermitteltes Spektrogramm des Drehmoments bis 2 kHz im Motorbetrieb unter Verwendung der gemessenen Ströme und der Drehzahl als Eingangsgrößen der Simulation.

wartet. Der Unterschied könnte aus der Wechselwirkung mit der drehzahlunabhängigen Frequenz resultieren. Das Systemverhalten konnte mit einer guten Übereinstimmung vorausgesagt werden. Der größte Unterschied liegt darin, dass die drehzahlunabhängige Frequenz nicht auftrat.

### 3.4.2 Bootsmotor im Generatorprinzip

In Kapitel 2.8.2 wurden Fertigungsabweichungen und deren Einfluss auf das Spektrum untersucht. Es konnte gezeigt werden, dass Rundheitsabweichungen von Rotor und Stator zusätzliche Drehzahlsynchrone anregen, die anschließend auch im Experiment des Motors im Generatorprinzip beobachtet wurden. In der numerischen Untersuchung des Motors wurde dabei von einem sinusförmigen Verlauf des Stroms ausgegangen. Wie Abbildung 3.8 zeigt, ist der Strom in der experimentellen Untersuchung durch die Verwendung eines Gleichrichters (siehe Kapitel 3.1.1) nicht sinusförmig. Damit könnte die Ursache, wie beim Validierungsbeispiel, bei dem der Strom über einen Controller geregelt wurde (siehe Kapitel 3.4.1), am zeitlichen Verlauf des Stroms liegen, weshalb dieses Experiment ebenfalls nachgerechnet wird. Abbildung 3.20 zeigt die Superharmonischen npp2, npp4, npp8 und npp10. Wie zu erwarten war, steigen die Amplituden mit der Drehzahl, da auch die Spannung und der Strom drehzahlabhängig sind. Entgegen der Erwartung ist npp6 nicht aufgetreten, dafür sind die Superharmonischen npp8 und npp10 deutlich

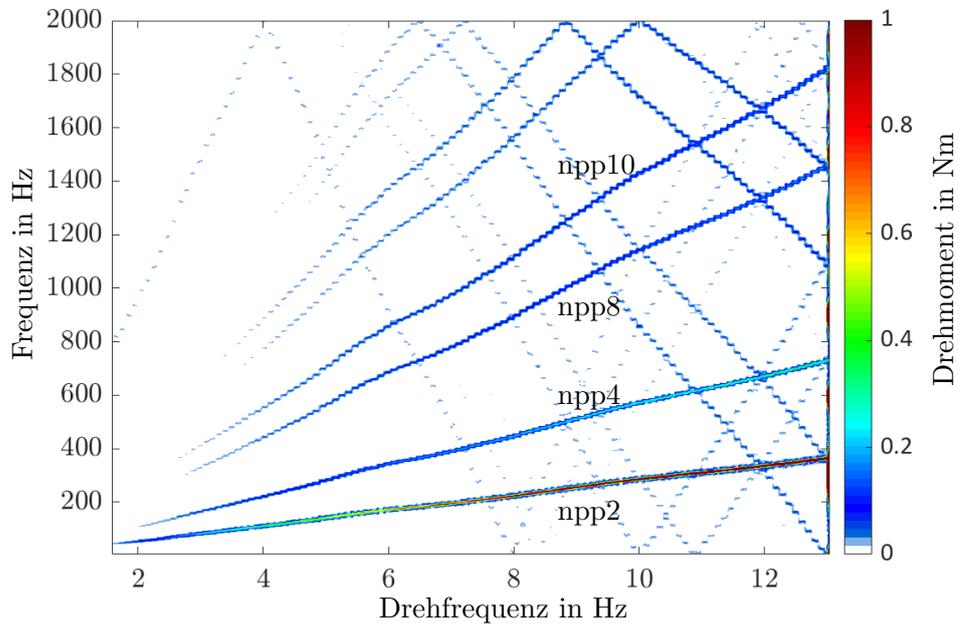


Abbildung 3.20: Numerisch ermitteltes Spektrogramm des Drehmoments bis 2 kHz im Generatorprinzip, unter Verwendung der gemessenen Ströme und der Drehzahl als Eingangsgrößen der Simulation.

zu erkennen, welche in Abbildung 3.11 nicht aufgetreten sind. Die größten Amplituden weist, wie im Experiment auch, npp2 auf. Es ist deutlich zu sehen, dass auch in der Simulation der Strom einen entscheidenden Einfluss auf das Spektrogramm des Drehmoments hat. Zusammenfassend kann die Schwingung im Motorbetrieb sehr gut vorausgesagt werden. Im Generatorbetrieb weist das Modell Schwächen auf. Diese sind wahrscheinlich auf die Vernachlässigung der Induktion und des Gleichrichters zurückzuführen. Da der untersuchte Motor im Anwendungsfall Bootsmotor im Motorbetrieb verwendet werden soll, kann das vorgestellte Modell genutzt werden.

## 4 Schwingungsuntersuchung mit ganzheitlicher Berücksichtigung der Elektrodynamik

Da die Konvergenz des Modells sichergestellt, die Methode verifiziert und validiert ist, wird die Kopplung der elektromagnetischen FEM mit der MKS durchgeführt, um den Einfluss von Lageabweichungen des Rotors zu untersuchen. Dafür wird das MKS Programm EMD verwendet, das an der OvGU Magdeburg am Lehrstuhl für technische Dynamik entwickelt wurde. Die theoretischen Grundlagen und Validierungen können [76, 77, 78] entnommen werden und werden im Weiteren vorgestellt. Wie bereits erwähnt, ist eine Nutzung von periodischen und anti-periodischen Randbedingungen aus Kapitel 2.7.3 und Kapitel 2.7.4 nicht mehr möglich, weil die Periodizität und Anti-Periodizität durch die Lageabweichung verloren geht. Dadurch resultieren deutlich höhere Rechenzeiten allein aus der Nutzung des vollständigen FE-Modells.

Als Anwendungsbeispiel der ganzheitlichen Betrachtung wird die Schallabstrahlung des untersuchten Bootsmotors, unter Berücksichtigung verschiedener Designvariationen, untersucht. Abschließend wird auf die Schallabstrahlung des Speedbootes, in dem der Motor zweimal verbaut ist, eingegangen.

### 4.1 Mathematische Grundlagen der Mehrkörpersimulation

Mehrkörpersimulationen dienen der Beschreibung der räumlichen Bewegung und des dynamischen Verhaltens von Körpern unter Einwirkung von Lasten, die auch elektrodynamische Kräfte beinhalten können. Abbildung 4.1 zeigt einen Körper  $K_I$ , der mit den Körpern  $K_{II}$  bis  $K_{IV}$  über Kräfte interagiert. Die dargestellten körperfesten Punkte repräsentieren Kraftangriffspunkte, die sogenannten „Marker“, wobei die Pfeile in dieser Darstellung weder Aussagen über die Größe noch die Richtung der wirkenden Kraft haben, sondern nur darüber, welche Marker interagieren. Die Kräfte selbst können nun über die relative Position und/oder Geschwindigkeit der Marker zueinander über Kraftelemente, wie zum Beispiel Federn, Dämpfer, Kennfelder oder komplexe Berechnungen, wie der hier vorgestellten FEM, bestimmt werden. Aufgrund von translatorischen und rotatorischen Bewegungen der einzelnen Körper können sich auch die Kräfte sowohl vom Betrag, als auch der Richtung, verändern. Um relative Position und Geschwindigkeit bestimmen zu können, ist es notwendig, das Bewegungsverhalten jedes Körpers und aller

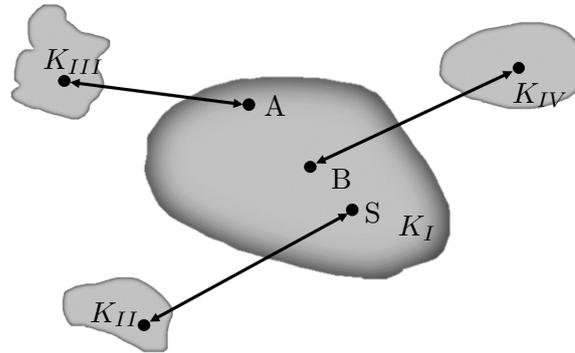


Abbildung 4.1: Prinzipbild der MKS. Auf Körper I wirken an den Knoten A, B und S (Schwerpunkt) Kräfte, die durch Interaktion mit den Körpern II-IV hervorgerufen werden.

notwendigen Punkte auf dem Körper (Kraftangriffspunkte, Schwerpunkte) zu kennen. Dafür wird zunächst Körper  $K_I$  betrachtet und wie in Abbildung 4.2 ein inertiales, also zeitlich unveränderliches, Koordinatensystem  $I_e$  eingeführt. Jeder Körper besitzt einen Bezugspunkt, der im dargestellten Fall der Punkt B ist und eine Orientierung in Form eines körperfesten Koordinatensystems  $K_e$ , welches sich sowohl translatorisch als auch rotatorisch mit diesem bewegt.

Für die Beschreibung der Bewegung werden der Impuls- und der Drehimpulssatz verwendet. Für einen starren Körper lautet ersterer

$$\tilde{\underline{p}} = m\underline{v}_S, \quad (4.1)$$

mit dem Impuls  $\tilde{\underline{p}}$ , der Masse des Körpers  $m$  und der Schwerpunktgeschwindigkeit  $\underline{v}_S$ . Unter der Annahme einer konstanten Masse ergibt sich nach einmaliger Differentiation der Kräftesatz [79]

$$\dot{\tilde{\underline{p}}} = m\dot{\underline{v}}_S = m\ddot{\underline{x}}_S = \sum_i \underline{F}_i^a, \quad (4.2)$$

mit den  $i$  äußeren Kräften  $\underline{F}^a$ . Die inneren Kräfte  $\underline{F}^i$  sind aufgrund des newtonschen Axioms, „Aktion gleich Reaktion“ in Summe null. Bei starren Körpern ist der Vektor zwischen zwei Punkten eines Körpers für sein körperfestes Koordinatensystem  $K$  konstant. Der Ortsvektor des Schwerpunktes S im körperfesten Koordinatensystem ergibt sich aus

$${}^K \underline{r}_S = {}^K \underline{r}_B + {}^K \underline{r}_{BS}. \quad (4.3)$$

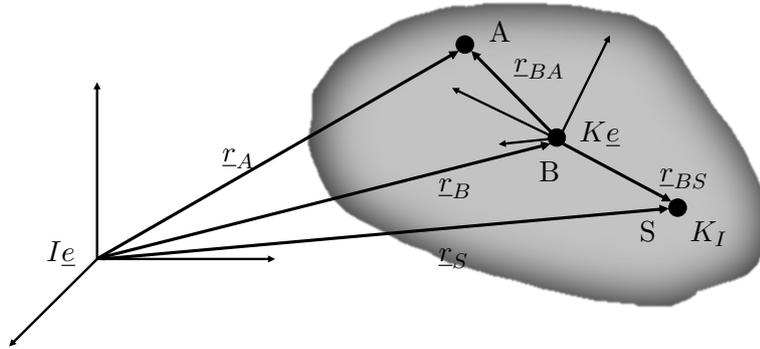


Abbildung 4.2: Körper mit dem Schwerpunkt S, dem Punkt A und B sowie einem körperfesten und einem raumfesten Koordinatensystem.

Die in Gleichung 4.2 enthaltenen zeitlichen Ableitungen müssen im Inertialsystem durchgeführt werden [77]. Die absolute Ableitung eines beliebigen Vektors  $\underline{r}$  wird demnach mit der Spinnmatrix  ${}_K\tilde{\underline{\omega}}$ , welche aus dem Produkt der Transformationsmatrix und deren zeitlichen Ableitung resultiert

$${}_K\tilde{\underline{\omega}} = \underline{\tilde{Q}}^T \cdot \dot{\underline{\tilde{Q}}}, \quad (4.4)$$

durchgeführt

$${}_K\dot{\underline{r}} = {}_K\underline{r}' + {}_K\tilde{\underline{\omega}} \cdot {}_K\underline{r} = {}_K\underline{r}' + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{r}. \quad (4.5)$$

Dabei stellt  ${}_K\underline{r}'$  die relative Ableitung dar, welche ein mitbewegter Beobachter registrieren würde. Damit ergibt sich die Geschwindigkeit des Punktes S zu

$${}_K\dot{\underline{r}}_S = {}_K\underline{r}'_B + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{r}_B + {}_K\underline{r}'_{BS} + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{r}_{BS}, \quad (4.6)$$

wobei der Vektor  ${}_K\underline{r}_{BS}$  bei einem starren Körper konstant und die Ableitung dementsprechend null ist

$${}_K\ddot{\underline{r}}_S = {}_K\underline{r}''_B + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{r}'_B + {}_K\dot{\underline{\omega}} \times {}_K\underline{r}_B + {}_K\underline{\omega} \times ({}_K\underline{r}'_{BS} + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{r}_B) + {}_K\dot{\underline{\omega}} \times {}_K\underline{r}_{BS} + {}_K\underline{\omega} \times ({}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{r}_{BS}) \quad (4.7)$$

In gleicher Weise wird die zweite Ableitung gebildet

$${}_K\ddot{\underline{r}}_S = {}_K\underline{r}''_B + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{r}'_B + {}_K\dot{\underline{\omega}} \times {}_K\underline{r}_B + {}_K\underline{\omega} \times ({}_K\underline{r}'_{BS} + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{r}_B) + {}_K\dot{\underline{\omega}} \times {}_K\underline{r}_{BS} + {}_K\underline{\omega} \times ({}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{r}_{BS}) \quad (4.8)$$

und kann nun in Gleichung 4.2 eingesetzt werden.

$$\sum_i F_i^a = m(K\underline{r}_B'' + K\underline{\omega} \times K\underline{r}_B' + K\underline{\dot{\omega}} \times K\underline{r}_B + K\underline{\omega} \times (K\underline{r}_B' + K\underline{\omega} \times K\underline{r}_B) + K\underline{\dot{\omega}} \times K\underline{r}_{BS} + K\underline{\omega} \times (K\underline{\omega} \times K\underline{r}_{BS})). \quad (4.9)$$

Neben dem Impuls muss auch der Drehimpuls  $\tilde{L}$  Berücksichtigung finden. Zunächst wird die Grundgleichung des Drehimpulses

$$\int \underline{r}_{BA} \times \dot{\underline{r}}_A dm = \tilde{\underline{L}}^A \quad (4.10)$$

einmal zeitlich differenziert

$$\int (\underline{r}_{BA} \times \dot{\underline{r}}_A) dm = \dot{\tilde{\underline{L}}}^A. \quad (4.11)$$

Für den linken Teil der Gleichung wird die Produktregel

$$(\underline{r}_{BA} \times \dot{\underline{r}}_A) = \dot{\underline{r}}_{BA} \times \dot{\underline{r}}_A + \underline{r}_{BA} \times \ddot{\underline{r}}_A \quad (4.12)$$

angewendet. Es gilt also

$$\int \dot{\underline{r}}_{BA} \times \dot{\underline{r}}_A + \underline{r}_{BA} \times \ddot{\underline{r}}_A dm = \dot{\tilde{\underline{L}}}^A. \quad (4.13)$$

Der Term  $\dot{\underline{r}}_{BA} \times \dot{\underline{r}}_A$  verschwindet, da die zeitliche Ableitung von  $\underline{r}_{BA}$  für einen starren Körper null ist. Unter Nutzung des newtonschen Grundgesetzes

$$\int \ddot{\underline{r}}_A dm = \int d\underline{F}_a \quad (4.14)$$

ergibt sich

$$\int \underline{r}_{BA} \times \ddot{\underline{r}}_A dm = \int \underline{r}_{BA} \times d\underline{F}_a dm = \sum_i \underline{M}_a^{Ai} = \dot{\tilde{\underline{L}}}^A. \quad (4.15)$$

Es muss allerdings beachtet werden, dass in Gleichung 4.14 davon ausgegangen wird, dass sich die inneren Kräfte aufgrund des Reaktionsprinzips aufheben. Beim Einsetzen in Gleichung 4.15 können die inneren Kräfte also nur vernachlässigt werden, wenn

$$\int \underline{r}_{BA} \times d\underline{F}_i = \underline{0} \quad (4.16)$$

gilt, was axiomatisch eingeführt wird und als boltzmannsches Axiom bekannt ist. Von Gleichung 4.15 werden nun die Teile

$$\int \underline{r}_{BA} \times \ddot{\underline{r}}_A dm = \sum_i \underline{M}_a^{Ai} \quad (4.17)$$

genutzt und äquivalent zu Gleichung 4.8 die Ableitungen bezüglich des Inertialsystems gebildet

$$\sum_i \underline{M}_a^{Ai} = \int {}_K \underline{r}_{BA} \times ({}_K \underline{r}'_A + {}_K \underline{\dot{\omega}} \times {}_K \underline{r}_A + 2 \cdot {}_K \underline{\omega} \times {}_K \underline{r}'_A + {}_K \underline{\omega} \times ({}_K \underline{\omega} \times {}_K \underline{r}_A) + {}_K \underline{\dot{\omega}} \times {}_K \underline{r}_{BA} + {}_K \underline{\omega} \times ({}_K \underline{\omega} \times {}_K \underline{r}_{BA})) dm. \quad (4.18)$$

Unter Verwendung des Massenträgheitsmoments  ${}_K \hat{\underline{J}}^A = - \int {}_K \underline{\tilde{r}}_{BA} \cdot {}_K \underline{\tilde{r}}_{BA} dm$  und Durchführung der Integration resultiert

$$\sum_i \underline{M}_a^{Ai} = m \cdot {}_K \underline{r}_{BS} \times {}_K \underline{r}''_A + m \cdot {}_K \underline{r}_{BS} \times ({}_K \underline{\dot{\omega}} \times {}_K \underline{r}_A) + 2 \cdot m \cdot {}_K \underline{r}_{BS} \times ({}_K \underline{\omega} \times {}_K \underline{r}'_A + m \cdot {}_K \underline{r}_{BS} \times ({}_K \underline{\omega} \times ({}_K \underline{\omega} \times {}_K \underline{r}_A))) + {}_K \hat{\underline{J}}^A \cdot {}_K \underline{\dot{\omega}} + {}_K \underline{\tilde{\omega}} \cdot {}_K \hat{\underline{J}}^A \cdot {}_K \underline{\omega}. \quad (4.19)$$

Durch Einführung der Absolutgeschwindigkeiten, Gleichung 4.6 und Absolutbeschleunigungen, Gleichung 4.7 des Referenzsystems bezogen auf das Inertialsystem ergibt sich

$$\sum_i {}_K \underline{M}_a^{Ai} = m \cdot {}_K \underline{r}_{BS} \times {}_K \underline{r}''_A + m \cdot {}_K \underline{r}_{BS} \times ({}_K \underline{\omega} \times {}_K \underline{r}'_A) + {}_K \hat{\underline{J}}^A \cdot {}_K \underline{\dot{\omega}} + {}_K \underline{\tilde{\omega}} \cdot {}_K \hat{\underline{J}}^A \cdot {}_K \underline{\omega}. \quad (4.20)$$

Um die Bewegung der Körper zu ermitteln, wird das aus Gleichung 4.9 und Gleichung 4.20 resultierende Differentialgleichungssystem

$${}_K \underline{M}_K \underline{a} + {}_K \underline{h}_\omega = {}_K \underline{h}_a \quad (4.21)$$

gelöst. Es setzt sich aus der Massenmatrix

$${}_K \underline{M} = \begin{bmatrix} m \cdot \underline{E} & -m \cdot {}_K \underline{\tilde{c}}_s \\ m \cdot {}_K \underline{\tilde{r}}_{BS} & {}_K \hat{\underline{J}}^A \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

dem Vektor der Beschleunigungen  ${}_K \underline{a}$ , den verallgemeinerten Zentrifugal und Corioliskräften

$${}_K \underline{h}_\omega = \begin{bmatrix} m \cdot {}_K \underline{\tilde{\omega}} \cdot {}_K \underline{r}'_A + m \cdot {}_K \underline{\tilde{\omega}} \cdot {}_K \underline{\tilde{\omega}} \cdot {}_K \underline{r}_{BS} \\ {}_K \underline{\tilde{\omega}} \cdot {}_K \hat{\underline{J}}^A \cdot {}_K \underline{\tilde{\omega}} + m \cdot {}_K \underline{\tilde{c}}_s \cdot {}_K \underline{\tilde{\omega}} \cdot {}_K \underline{r}'_A \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

und den äußeren Kräften und Momenten

$${}_K \underline{h}_a = \begin{bmatrix} {}_K \underline{F}_a \\ {}_K \underline{M}_a^A \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

zusammen. Der Einfluss der elektrodynamischen Kräfte und Momente, die in dieser Arbeit beschrieben und untersucht werden, wird über den Term der externen Lasten hinzugefügt. Diese werden in der Form

$${}^K \underline{h}_a = \begin{bmatrix} {}^K \underline{F}_a \\ {}^K \underline{M}_a^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^K \underline{F}_{el} \\ {}^K \underline{M}_{el}^A \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

ergänzt. Durch Lösen des Differentialgleichungssystems 4.21 sind die Beschleunigungen und Winkelbeschleunigungen der Körper bekannt. Mit Hilfe eines Zeitintegrationsverfahrens kann nun das resultierende Bewegungsverhalten beschrieben werden. In dieser Arbeit wird der ODE-45 (Expliziter Runge-Kutta) [80] verwendet. Vergleichsweise wurden auch der ODE-23t (Trapezregel) und ODE-23s (Modifizierter Rosenbrock) verwendet. Sowohl Rechenzeit als auch Ergebnisgüte sind bei allen drei Integratoren vergleichbar.

## 4.2 Programmstruktur

Für die Realisierung des Ziels, eine Methode zu entwickeln, die es erlaubt, die Interaktion von elektromagnetischen Feldern und Kräften mit mechanischen Schwingungen zu beschreiben und verschiedene Umsetzungsmöglichkeiten hinsichtlich ihrer Effizienz zu bewerten, werden die bereits vorgestellten theoretischen Grundlagen zusammengeführt. Die umgesetzte Programmstruktur ist in Abbildung 4.3 dargestellt, die zugehörigen theoretischen Grundlagen der einzelnen Abschnitte wurden in den vorangegangenen Kapiteln erörtert. Für die Umsetzung der Methode wird ein Programm für Mehrkörpersimulationen, EMD um die bereits vorgestellte Finite-Elemente-Methode für die Berechnung elektromagnetischer Kräfte und Momente (siehe Kapitel 2.1.1) erweitert. Die Mehrkörpersimulation ruft die Finite Element Routinen in jedem Zeitschritt als äußere Kraft auf (Gleichung 4.21). Dies geschieht auf die gleiche Weise, wie auch andere Interaktionen zwischen Körpern beschrieben werden. Die FEM berechnet nun in Abhängigkeit der relativen Positionen  $\vec{x}$ ,  $\vec{\varphi}$  und Geschwindigkeiten  $\dot{\vec{x}}$ ,  $\omega$  von Rotor und Stator, die elektromagnetischen Felder und anschließend die Kräfte und Momente und gibt diese an die Mehrkörpersimulation zurück. Gegenüber einer Co-Simulation wird das System in jedem Zeitschritt gemeinsam gelöst und nicht an diskreten Zeitpunkten, was sich positiv auf die Simulationsgenauigkeit auswirkt. Aufgrund der Drehbewegung muss eine Netzanpassung realisiert werden (siehe Kapitel 2.6). Für eine rechenzeiteffektive Umsetzung werden beim ersten Aufruf der Kraftroutine, dem First Call, Matrizen aufgebaut und abgelegt, die während der gesamten Simulationsdauer unverändert sind (siehe Kapitel 2.7.1). Des Weiteren werden die Grenzflächen, an denen die elektromagnetischen Kräfte berechnet werden, ermittelt. Bei der Verwendung von nicht linearen Materialeigenschaften ist eine Iteration der Feldgrößen notwendig (siehe Kapitel 2.2), wodurch das Differentialgleichungssystem während eines Zeitschritts mehrfach gelöst wird. Nachdem die resultierenden Kräfte und Momente bestimmt wurden (Kapitel 2.3), kann die Mehrkörpersimulation die Bewegung der Körper berechnen.

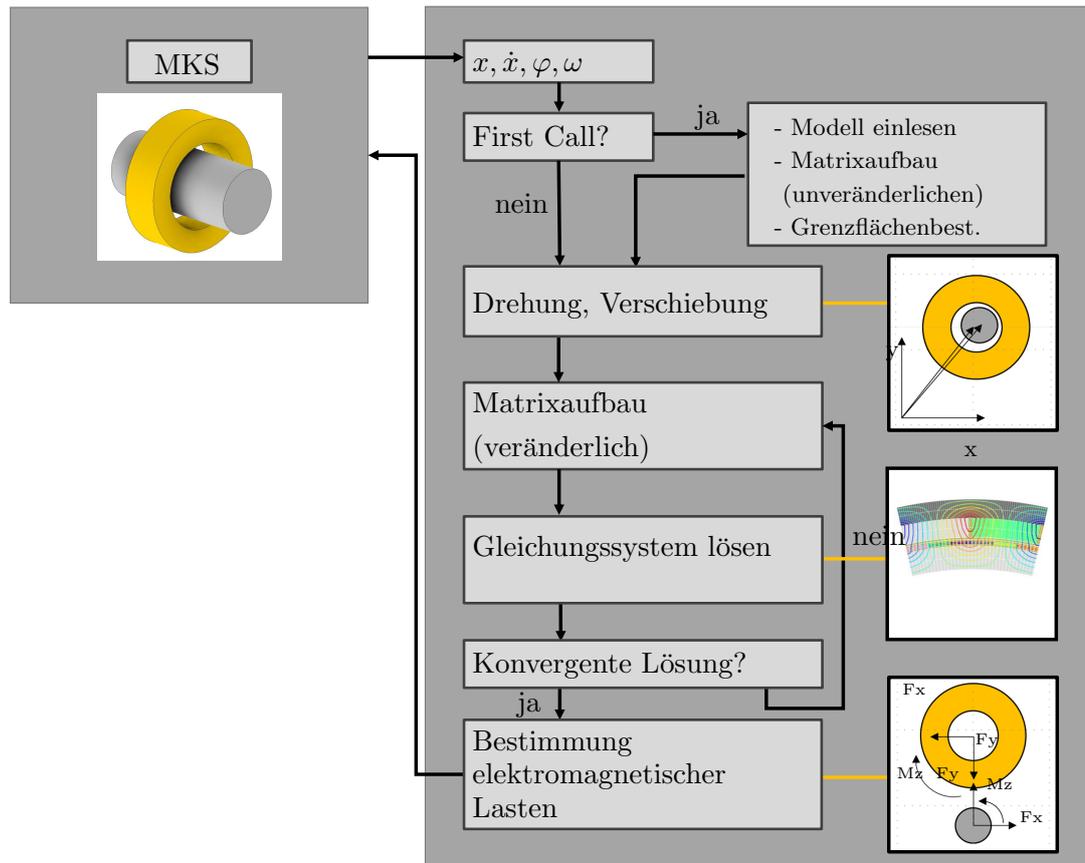


Abbildung 4.3: Programmstruktur.

## 4.3 Anwendung der ganzheitlichen Methode

In diesem Kapitel wird die vorgestellte ganzheitliche Methode genutzt, um den Bootsmotor zu untersuchen. Dafür wird zunächst auf Parameter, die für die Simulation notwendig sind, eingegangen und anschließend der Einfluss der Lageabweichung gegenüber der Simulation mit zentrischer Lage bewertet. Die unter der Verwendung der ganzheitlichen Untersuchung ermittelten elektromagnetischen Lasten, werden in einer nachgelagerten akustischen Simulation genutzt, um die Akustik in Abhängigkeit der Statorgeometrie zu beschreiben und so eine geeignete Geometrie auszuwählen. Um den Nutzen des vorgestellten Workflows zu bestätigen, werden ausgewählte Motordesigns am Prüfstand miteinander verglichen. Abschließend wird der Motor im Anwendungsobjekt Speedboot betrieben und das zugehörige Modell mit Antriebsstrang vorgestellt.

### 4.3.1 Abschätzung relevanter Größen

In diesem Abschnitt werden für die Simulation wichtige Parameter und Einflüsse abgeschätzt.

#### Bestimmung der Lagersteifigkeiten

Die Motorlager verbinden den stehenden Stator und den rotierenden Rotor und haben eine entscheidende Bedeutung für das Schwingungsverhalten des Motors und die Größe der elektromagnetischen Kräfte. In diesem Kapitel werden zwei Möglichkeiten zur Abschätzung der Lagersteifigkeit vorgestellt. In Abbildung 4.4 ist ein Längsschnitt des untersuchten Motors dargestellt und abtriebsseitig das als Festlager verwendete zweireihige Schrägkugellager 3005-B-2RZ-TVH blau und statorseitig als Loslager das einreihige Rillenkugellager 61813-2RZ-Y grün gekennzeichnet. Die für die Berechnung notwendigen Abmessungen und Materialdaten der Lager sind in Tabelle 4.1 angegeben. Für die Bestimmung der Lagersteifigkeiten wird zunächst die Steifigkeit eines Segments bzw. einer Kugel mit Hilfe der Hertzschen Pressung bzw. der FEM ermittelt. Diese Steifigkeit kann genutzt werden, um die Gesamtsteifigkeit der Lager zu bestimmen.

Die Kugeln mit dem Radius  $\tilde{r}$  haben Kontakt zur inneren und zur äußeren Laufbahn des Lagers, welche sowohl in Umfangs- ( $\tilde{r}_{i1}$  und  $\tilde{r}_{a1}$ ), als auch in Längsrichtung ( $\tilde{r}_{i2}$  und  $\tilde{r}_{a2}$ ) gekrümmt sind. Zur Hertzschen Pressung kommt es am Kontaktpunkt von Kugel und innerer sowie Kugel und äußerer Laufbahn. Für die Bestimmung der Verformung von Kugel und Laufbahn, in Abhängigkeit einer äußeren Kraft  $F$ , werden, nach [81], der Ersatz-E-Modul

$$Y = \frac{2Y_1Y_2}{(1 - \nu_1^2)Y_2 + (1 - \nu_2^2)Y_1}, \quad (4.26)$$

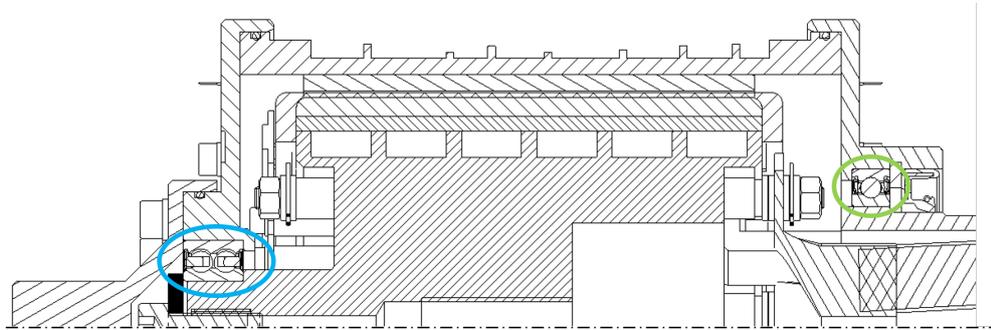


Abbildung 4.4: Querschnitt des Motors mit dem blau gekennzeichneten Schrägkugellager 3005-B-2RZ-TVH (Festlager) und dem grün gekennzeichneten Rillenkugellager 61813-2RZ-Y (Loslager). Zeichnung von Andreas Zörnig, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg.

Tabelle 4.1: Für die Steifigkeitsbestimmung benötigte Abmessungen und Materialdaten.

	Formel- zeichen	Einheit	3005-B- 2RZ-TVH	61813 2RZ-Y
Anzahl der Laufbahnen	$n_{\text{Laufbahn}}$	-	2	1
Kugeln je Laufbahn	$n_{\text{Kugel}}$	-	10	24
Kugelradius	$\tilde{r}$	mm	3,175	2,778
Radius 1 der inneren Laufbahn	$\tilde{r}_{11}$	mm	14,825	37,427
Radius 2 der inneren Laufbahn	$\tilde{r}_{12}$	mm	-3,302	-2,86
Radius 1 der äußeren Laufbahn	$\tilde{r}_{21}$	mm	21,175	37,582
Radius 2 der äußeren Laufbahn	$\tilde{r}_{22}$	mm	-3,302	-2,86
E-Modul	$Y$	MPa	210	210
Querkontraktionszahl	$\nu$	-	0,3	0,3

Tabelle 4.2: Koeffizienten zur Hertzschen Theorie [81]

$\cos(\tau)$	$\xi$	$\cos(\tau)$	$\xi$	$\cos(\tau)$	$\xi$
0,9990	18,53	0,9500	4,12	0,650	1,66
0,9975	13,15	0,9400	3,83	0,500	1,57
0,9950	10,15	0,9300	3,59	0,450	1,41
0,9925	8,68	0,9200	3,40	0,400	1,35
0,9900	7,76	0,9100	3,23	0,350	1,29
0,9875	7,13	0,9000	3,09	0,300	1,24
0,9850	6,64	0,8750	2,82	0,250	1,19
0,9825	6,26	0,8500	2,60	0,200	1,15
0,9800	5,94	0,8000	2,30	0,150	1,11
0,9775	5,67	0,7500	2,07	0,100	1,07
0,9750	5,44	0,7000	1,91	0,050	1,03
0,9700	5,05	0,6500	1,77	0,000	1,00
0,9600	4,51	0,6000	1,66		

das kumulierte Krümmungsmaß

$$\chi = \frac{1}{\tilde{r}_{11}} + \frac{1}{\tilde{r}_{12}} + \frac{1}{\tilde{r}_{21}} + \frac{1}{\tilde{r}_{22}} \quad (4.27)$$

und ein Koeffizient zur Hertzschen Theorie  $\xi$ , welcher mit dem Hilfwert  $\cos(\tau)$  und der Tabelle 4.2 gegeben ist, benötigt. Der Hilfwert  $\cos(\tau)$  wird über die Verhältnisse der Krümmungen, welche das Reziproke des zugehörigen Radius sind,

$$\cos(\tau) = \frac{\chi_{11} - \chi_{12} + \chi_{21} - \chi_{22}}{\chi_{11} + \chi_{12} + \chi_{21} + \chi_{22}} \quad (4.28)$$

ermittelt.

Die Verschiebung an einer Kontaktfläche kann nach [81] bestimmt werden

$$\delta = \frac{3}{2}\xi \sqrt[3]{\frac{F^2\chi}{3Y^2}}. \quad (4.29)$$

Die Kraft-Weg-Kennlinie des Festlagers ist in Abbildung 4.5 links, die des Loslagers in Abbildung 4.5 rechts jeweils mit der blauen Volllinie dargestellt. Es ist zu beachten, dass die unter Verwendung der Hertzschen Pressung bestimmte Verschiebung  $\delta_h$  bei dem Schrägkugellager korrigiert werden muss, weil sie nicht in radiale Richtung des Lagers wirkt, wie Abbildung 4.6 veranschaulicht. Der Winkel  $\alpha$  beträgt zu Beginn des Kontakts ca.  $56^\circ$ , die für das Lager relevante radiale Verschiebung  $\delta_r$  entspricht

$$\delta_r = \cos(\delta_h). \quad (4.30)$$

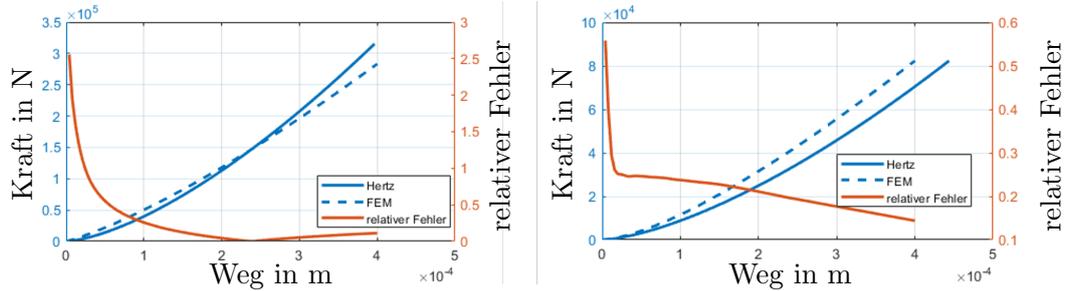


Abbildung 4.5: Kraft-Weg-Kennlinie eines Segments der Lager. Links des Schrägkugellagers 3005-B-2RZ-TVH und rechts des Rillenkugellagers 61813-2RZ-Y.

Aus dem Zusammenhang

$$c = \frac{F}{\delta} \quad (4.31)$$

werden die in Abbildung 4.7 gezeigten zugehörigen Steifigkeit-Weg-Diagramme abgebildet.

Alternativ kann die Steifigkeit einer Kugel mit der FEM bestimmt werden. Abbildung 4.8 zeigt das Berechnungsmodell mit dem orange gekennzeichneten Innenring, dem rot dargestellten Käfig, der gelben Kugel und dem blauen Außenring. Die Kugel besitzt Kontaktflächen zur Laufbahn des Innen- und Außenrings, sowie zum Käfig. Für die Ausnutzung der Symmetrie, zur Verkleinerung des Modells, ist die Bewegung der Knoten an den geschnittenen Kanten in Normalenrichtung gesperrt. Die Verschiebungsfreiheitsgrade an der Innenseite des Innenrings sind null und die an der Außenseite des Außenrings werden vorgegeben. Für die nicht lineare Berechnung wurde eine statische Analyse mit ANSYS durchgeführt. Für das Festlager wurden 51 000 quadratische Elemente (SOLID186 und SOLID187) mit 127 000 Knoten und für das Loslager 69 000 quadratische Elemente mit 226 000 Knoten verwendet. Die resultierenden Steifigkeitskennlinien sind in Abbildung 4.7 für das Loslager rechts bzw. das Festlager links, jeweils in blauer Strichlinie dargestellt. Es ist gut zu sehen, dass die Ergebnisse des Rillenkugellagers (Loslager) in großen Bereichen Fehler unterhalb 30 % aufweisen. Die Abweichungen des Schrägkugellagers sind etwas größer, was auf die schräge Belastung zurückgeführt werden kann. Für folgende Simulationen werden die Ergebnisse der FEM verwendet, für eine schnelle Abschätzung der Größenordnung eignen sich die Steifigkeiten der Berechnung nach Hertz dennoch.

Wie Tabelle 4.1 entnommen werden kann, sind auf dem Umfang des Lagers 3005-B, 10 und auf dem von Lager 61813, 24 Kugeln verteilt. Diese tragen die Last nicht gleichmäßig. Für die Bestimmung der Gesamtsteifigkeit wird angenommen, dass jede der Kugeln den in Abbildung 4.5 dargestellten Kraft-Weg-Verlauf besitzt, die Kugeln

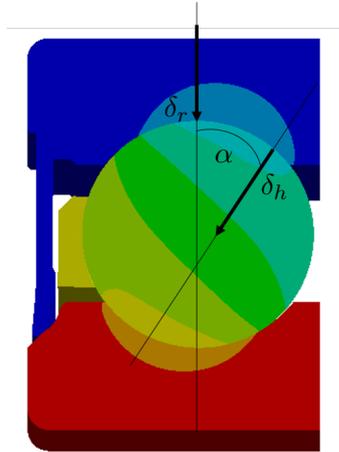


Abbildung 4.6: Veranschaulichung der Wirkrichtung der Hertz'schen Pressung zur Demonstration der Notwendigkeit der Korrektur. Die Außenkante des blau dargestellten Außenrings wird gegen den Innenring verschoben, dessen Bewegungsfreiheitsgrade an der Innenkante gesperrt sind. Die Farben veranschaulichen die Verschiebung.

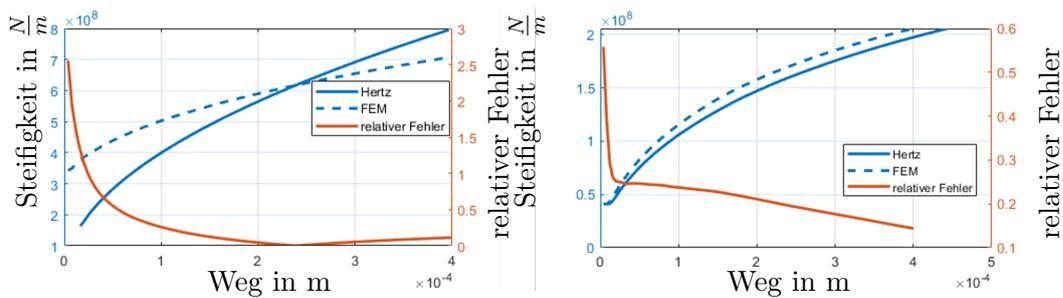


Abbildung 4.7: Steifigkeit-Weg-Kennlinie eines Segments. Links des Schrägkugellagers 3005-B-2RZ-TVH und rechts des Rillenkugellagers 61813-2RZ-Y.

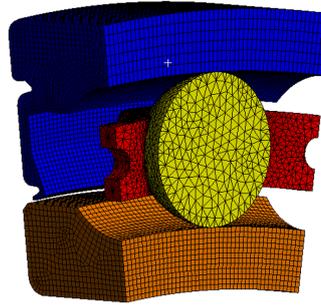


Abbildung 4.8: Modell eines Lagersegments zur Bestimmung der Lagersteifigkeit.

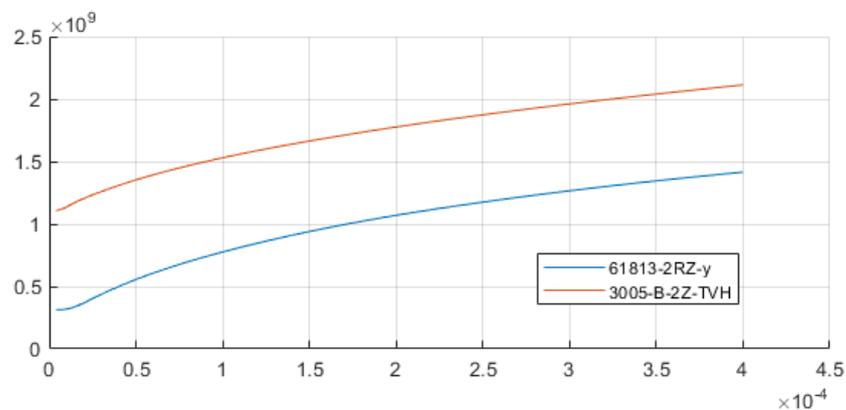


Abbildung 4.9: Mit ANSYS ermittelte Gesamtsteifigkeit der Lager.

gleichmäßig auf den Umfang verteilt sind und dass die Kugeln nicht in der Lage sind Zugkräfte zu übertragen. Bei einer Verschiebung des Innenrings gegenüber dem Außenring kann jeder Kugel eine Stauchung und damit eine Kraft zugeordnet werden. Aus der Summe der Kräfte und der Verschiebung ergibt sich die in Abbildung 4.9 dargestellte Gesamtsteifigkeit der Lager.

### Abschätzung der Unwucht

Für eine wirklichkeitsgetreue Beschreibung des Systemverhaltens wird in der Simulation eine realistische Unwucht verwendet. Diese Unwucht hat Auswirkungen auf die Lagerkräfte und die Auslenkung des Rotors, wodurch wiederum die elektromagnetischen Kräfte beeinflusst werden. Der Motor wird entsprechend der DIN ISO 21940-11 [82] gewuchtet, dementsprechend kann die Unwucht nach dieser Norm wie folgt abgeschätzt werden. Die spezifische Restunwucht  $e_{\text{per}}$  ergibt sich aus dem Verhältnis von Restun-

wucht  $\tilde{U}_{\text{per}}$  und Rotormasse  $m_{\text{Rot}}$

$$e_{\text{per}} = \frac{\tilde{U}_{\text{per}}}{m_{\text{Rot}}}. \quad (4.32)$$

Die Auswucht-Gütestufe  $G$  kann aus dem Produkt aus Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und spezifischer Restunwucht

$$\tilde{G} = e_{\text{per}}\omega \quad (4.33)$$

ermittelt werden und ist in der DIN ISO 21940-11 für Elektromotoren mit einer Nenn-drehzahl über 950 1/min mit 2,5 mm/s angegeben. Bei einer maximalen Drehzahl  $n$  von 3000 1/min ergibt sich mit

$$\omega = 2\pi n \quad (4.34)$$

und Gleichung 4.33 eine spezifische Restunwucht von 8 gmm/kg. Bei einer Rotormasse von 5 kg ergibt sich eine Restunwucht vom 40 gmm.

### Durchbiegung und Verdrehung des Motors

Das genutzte MKS-Programm EMD bietet die Möglichkeit, den Rotor elastisch, als FE-Balken abzubilden und so den Einfluss von Verdrehwinkel und Durchbiegung auf die elektromagnetischen Felder zu berücksichtigen. Die Verdrehung und Durchbiegung der Welle soll in diesem Abschnitt abgeschätzt und hinsichtlich ihres Einflusses auf das Systemverhalten bewertet werden. Die notwendigen Gleichungen können Standardwerken wie [83] entnommen werden. Abbildung 4.10 zeigt die verwendeten Modelle für Torsion (links) und Biegung (recht) und Tabelle 4.3 gibt die zugehörigen Material- und Geometriewerte an. Als Vereinfachung werden der Eisenzylinder des Rotors ohne Rippen berücksichtigt und die Magnete vernachlässigt. Die Torsionsstreckenlast  $q_t$  ergibt sich aus dem Nennmoment von 52,5 Nm und der Länge des elektromagnetischen Bereichs von 0,12 m zu 437,5 Nm/m. Unter Nutzung des Torsionsträgheitsmoments  $\tilde{I}_t$

$$\tilde{I}_t = \frac{\pi(d_a^4 - d_i^4)}{32} \quad (4.35)$$

ergibt sich der Verdrehwinkel  $\tilde{\phi}(z)$

$$\tilde{\phi}(z) = \frac{q_t z^2}{2\tilde{G}\tilde{I}_t}. \quad (4.36)$$

Der maximale Verdrehwinkel  $\tilde{\phi}_{\text{max}}$  wird bei  $z = 0,12$  m erreicht und beträgt  $0,4663 \cdot 10^{-5}$  und ist damit trotz der konservativen Abschätzung vernachlässigbar gering.

Für die Bestimmung der Durchbiegung wird eine Exzentrizität von 0,3 mm angenommen.

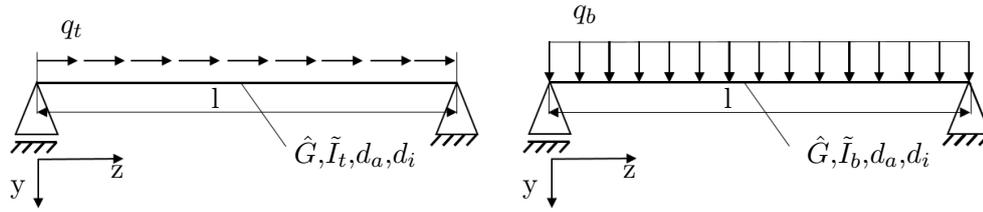


Abbildung 4.10: Modelle zur Abschätzung von Verdrehung (links) und Durchbiegung (rechts) des Rotors.

Tabelle 4.3: Material- und Geometriewerte des Rotors für die Bestimmung von Durchbiegung und Verdrehung.

Name	Symbol	Wert	Einheit
Schubmodul	$\hat{G}$	80	GPa
Elastizitätsmodul	$Y$	210	GPa
Länge der Welle	$l$	0.12	m
Innendurchmesser der Welle	$d_a$	0.143	m
Außendurchmesser der Welle	$d_i$	0.135	m

Nach Abbildung 2.11 resultiert ein UMP von 740 N, der auf die Länge des Motors verteilt eine Streckenlast  $q_b$  von 6167 N/m ergibt. Mit dem Flächenträgheitsmoments  $I_b$

$$\tilde{I}_b = \frac{\pi(d_a^4 - d_i^4)}{64} \quad (4.37)$$

kann die Biegelinie  $v(z)$  nach [83] zu

$$v(z) = \frac{q_b l^4}{24Y\tilde{I}_b} \left( \frac{z}{l} - 2\left(\frac{z}{l}\right)^3 + \left(\frac{z}{l}\right)^4 \right) \quad (4.38)$$

bestimmt werden. Die maximale Durchbiegung ergibt sich an der Mitte des Rotors, also bei  $z = 0,06$  m und beträgt  $1,9 \cdot 10^{-5}$  mm. Die Durchbiegung ist damit vernachlässigbar klein. Verglichen mit der Exzentrizität verändert sich die Auslenkung lediglich um 0,006%.

### 4.3.2 Struktur-Magnetfeld-Interaktion

Die Interaktion von Strukturschwingung und magnetischem Feld soll in diesem Abschnitt untersucht werden. Dafür werden die ermittelten Steifigkeiten aus Kapitel 4.3.1, die in Tabelle 4.4 angegebenen Trägheiten, die mit dem Programm Inventor aus dem CAD-Modell bestimmt wurden, die abgeschätzte Unwucht aus Kapitel 4.3.1 und die Lagersteifigkeiten aus Kapitel 4.3.1 verwendet. Zum Beginn der Simulation befindet sich der Rotor in zentrischer Lage.

Tabelle 4.4: Massenträgheitsmomente des Rotors in  $\text{kgmm}^2$

Bauteil	$\tilde{I}_{xx}$	$\tilde{I}_{yy}$	$\tilde{I}_{zz}$
Deckel	15 620	15 620	1162
Zylinder	62 676	62 676	15 029
Deckel	1181	1181	1146
Flansch	95	95	68
Magnete	25 288	25 288	5978
Insgesamt	104 860	104 860	23 483

Für die elektromagnetischen Lasten wird entweder eine Feder mit der in Abbildung 2.11 dargestellten negativen Steifigkeit und einem konstanten Drehmoment bzw. das vollständige 2D-Modell aus Kapitel 2.5 verwendet. Das 3D-Modell wird aus Gründen der Rechenzeit, wie in Kapitel 2.5.1 gezeigt, nicht genutzt. Es ist zu erwarten, dass mit der Feder lediglich der Einfluss des UMP untersucht werden kann. Anregungen aus den Strömen, wie sie in Kapitel 2.8 zu sehen sind und Schwankungen des Drehmoments können nur mit dem vollständigen Modell untersucht werden. Für die Berücksichtigung der Verkippung werden zwei Segmente des Motors, wie in Kapitel 2.5.1 beschrieben, an den Gaußpunkten verwendet. Als Erstes wird die Simulation mit Berücksichtigung der Interaktion von Strukturschwingung und elektromagnetischen Kräften genutzt, um den experimentellen Hochlauf, im Motorprinzip, aus Kapitel 3.2 nachzurechnen. Es ergibt sich das in Abbildung 4.11 dargestellte Spektrogramm des Motormoments. Sowohl Amplituden als auch Frequenzen stimmen mit dem Versuch aus Abbildung 3.17 und der Validierungsrechnung aus Abbildung 3.19 überein. Aus Gründen der Vergleichbarkeit wird in Abbildung 4.11 nur die halbe Amplitude verwendet, um zu berücksichtigen dass der Motor mit zwei Segmenten modelliert wurde. Das Verhalten des anderen Segments ist identisch. Es fällt auf, dass die konstante Frequenz von 500 Hz, die beim Experiment auftritt, nicht zu sehen ist. Die beiden simulativ ermittelten Spektrogramme weisen nur geringe Unterschiede auf, sodass der deutlich höhere numerische Aufwand durch das vollständige Motormodell in diesem Fall nicht gerechtfertigt ist. Allerdings werden beim vollständigen Modell, im Vergleich zum Modell unter Ausnutzung der Periodizität, die elektromagnetischen Kräfte in radiale Richtung berücksichtigt. Die Spektrogramme der resultierenden Motorkräfte in x- und y-Richtung sind in Abbildung 4.12 und Abbildung 4.13 dargestellt. Bei beiden Bildern treten zwei konstante Frequenzen auf. Eine befindet sich bei 610 Hz und besitzt deutlich geringere Amplituden als die Zweite bei 230 Hz. Die Frequenz von 610 Hz weicht von der gemessenen konstanten Frequenz von 500 Hz um 22 % ab. Allerdings ist die Amplitude so gering, dass diese Kraft vernachlässigt werden kann. Diese Kraft ist der UMP, der aufgrund der kleinen Verschiebung, welche in Abbildung 4.14 dargestellt ist, entsprechend gering ist. Hier treten die gleichen Frequenzen auf und die Verschiebungsamplitude ist kleiner als  $1 \mu\text{m}$ , wodurch die resultierende

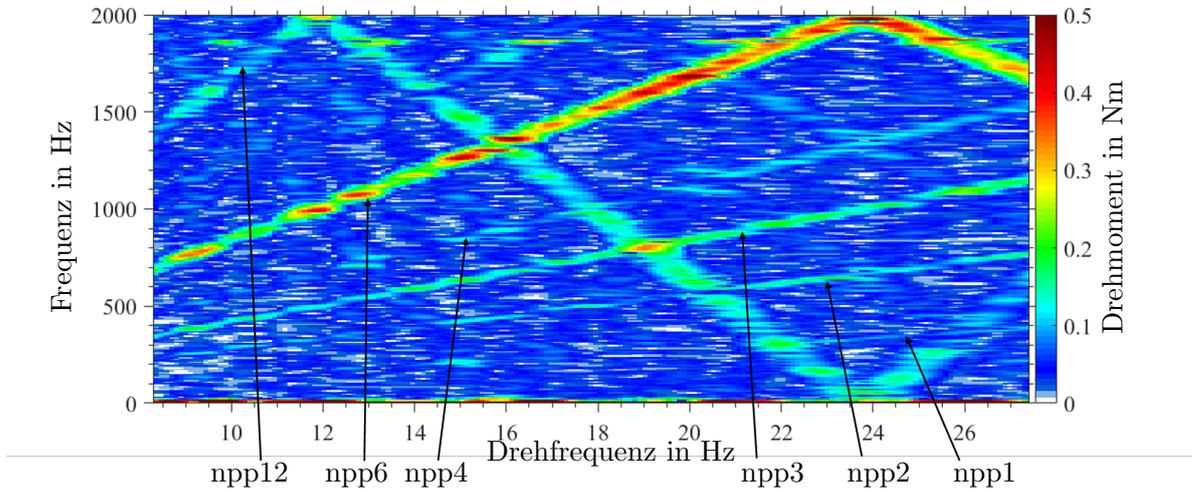


Abbildung 4.11: Spektrogramm des Motormoments für den Motorbetrieb mit der gekoppelten Analyse von Strukturschwingung und Magnetkreis.

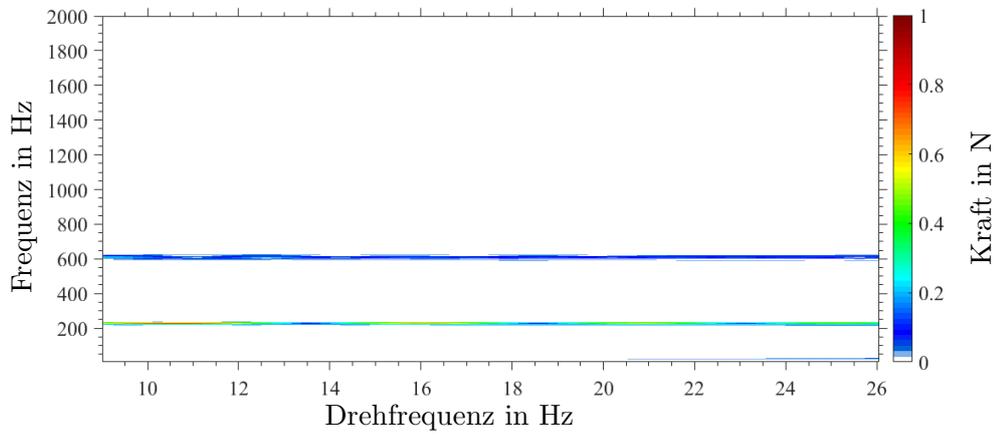


Abbildung 4.12: Spektrogramm der Motorkräfte in x-Richtung für den Motorbetrieb mit der gekoppelten Analyse von Strukturschwingung und Magnetkreis.

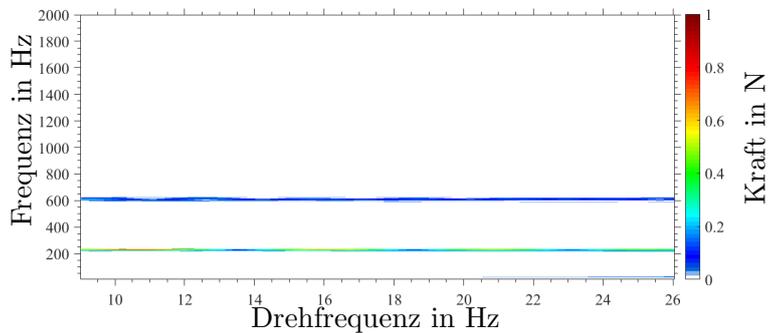


Abbildung 4.13: Spektrogramm der Motorkräfte in y-Richtung für den Motorbetrieb mit der gekoppelten Analyse von Strukturschwingung und Magnetkreis.

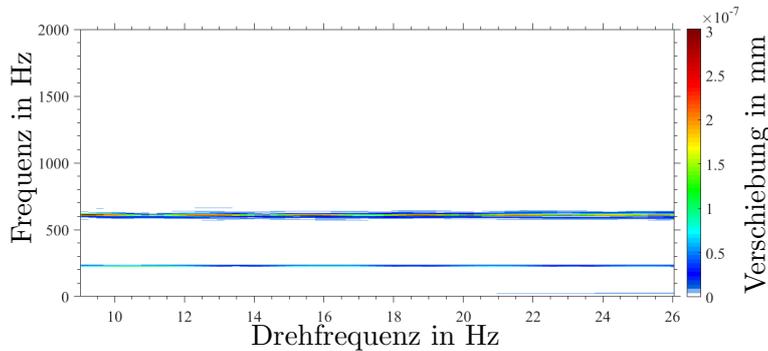


Abbildung 4.14: Spektrogramm der Wellenverschiebung in x-Richtung für den Motorbetrieb mit der gekoppelten Analyse von Strukturschwingung und Magnetkreis.

Kraft in Folge des UMP entsprechend gering ist. Diese beiden Frequenzen treten ebenfalls in den Motorlagern auf. Beispielhaft ist das Frequenzspektrum des Rillenslagers in x-Richtung in Abbildung 4.15 dargestellt.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass anders als im Versuch, bei der vollständigen Simulation des Motors kein drehzahlunabhängiges Drehmoment im Bereich von 500 Hz auftritt. Dafür treten Lagerkräfte bei 610 Hz und 230 Hz auf. Die Amplituden der beiden Frequenzen sind dabei vergleichbar. Damit ist es wahrscheinlich, dass die gemessene konstante Frequenz im Drehmoment aus der Querempfindlichkeit der Drehmomentenmessung mit Dehnungsmessstreifen resultiert. Die Ursache dafür, dass in der Simulation, anders als im Versuch, zwei Frequenzen auftreten, ist unklar. Daraus resultiert eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Messung. Das Schwingungsverhalten

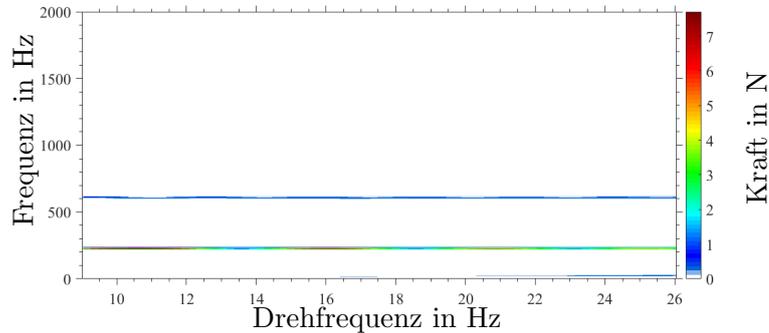


Abbildung 4.15: Spektrogramm der Kräfte im Schrägkugellager in x-Richtung für den Motorbetrieb mit der gekoppelten Analyse von Strukturschwingung und Magnetkreis.

und damit auch die elektromagnetischen Kräfte können mit einer hohen Genauigkeit vorausgesagt werden. Während der Einfluss des UMP sehr gering ist, kann der Einfluss der Stromregelung im Momentenspektrum deutlich gesehen werden. Wird der UMP durch Federn mit negativer Steifigkeit ersetzt, reduziert sich die Rechenzeit massiv. Abbildung 4.16 zeigt die Kräfte in x- und Abbildung 4.17 in y-Richtung, mit Federn statt des bisher verwendeten FEM-Modells. Die auftretenden Frequenzen stimmen mit dem vollständigen Modell gut überein. Bei den Amplituden gibt es besonders bei der ersten Superharmonischen Abweichungen. Diese ist beim vollständigen Modell 2-3fach gegenüber dem Modell mit der Feder. Die großen Abweichungen des vollständigen Modells gegenüber dem Modell mit Feder resultiert aus der Berücksichtigung des Stroms, der wie in Kapitel 3 gezeigt wurde, einen deutlichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten hat.

Aufgrund der großen Lagersteifigkeiten sind die resultierenden Kräfte und die Verkipfung des Rotors relativ gering. Bei größeren Motoren oder weicheren Lagern wird die Bedeutung des abgebildeten UMP steigen.

Zusammenfassend kann konstantiert werden, dass der Einfluss der Elektromagnetischen Kräfte bei dem gewählten Motor relativ gering ist. Allerdings konnte gezeigt werden, dass bei weicheren Lagern oder entsprechend höheren Lasten, die bei größeren Motoren auftreten, diese Effekte das Schwingungsverhalten beeinflussen. Für eine rechenzeit-effektive Simulation ist es sinnvoll zunächst den UMP in Abhängigkeit der Exzentrizität mit einer magnetostatischen Berechnung durchzuführen. Die daraus resultierende Federkennlinie kann verwendet werden, um das Schwingungsverhalten des Gesamtsystems zu beschreiben. Trotz des geringen Einfluss auf das Schwingungsverhalten des Gesamtsystems, haben die elektromagnetischen Felder einen deutlichen Einfluss auf die Akustik des Motors, was im Folgenden gezeigt wird. Dabei ist zu beachten, dass für die akustische Untersuchung die lokalen elektromagnetischen Lasten bekannt sein müssen, wie sie

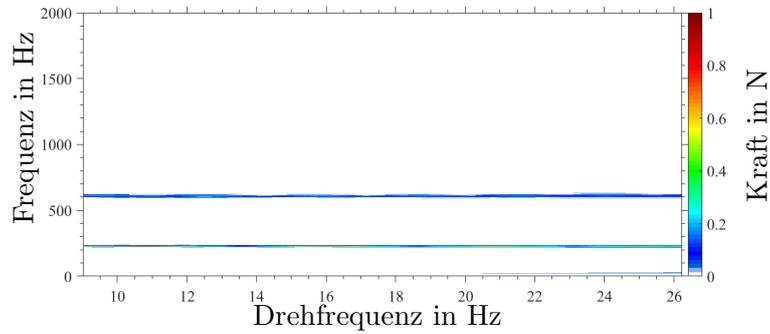


Abbildung 4.16: Spektrogramm der Motorkräfte in x-Richtung für den Motorbetrieb, mit Berücksichtigung des UMP durch eine Feder mit negativer konstanter Steifigkeit.

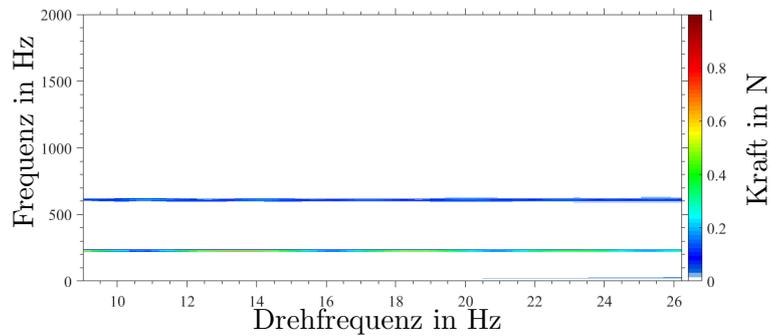


Abbildung 4.17: Spektrogramm der Motorkräfte in y-Richtung für den Motorbetrieb, mit Berücksichtigung des UMP durch eine Feder mit negativer konstanter Steifigkeit.

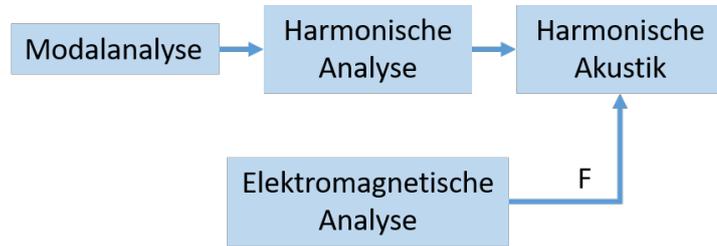


Abbildung 4.18: Workflow von ANSYS Workbench, zur akustischen Untersuchung des Motors unter Nutzung der ermittelten elektromagnetischen Lasten.

durch die FEM bestimmt werden.  $j$  —————

### 4.3.3 Einfluss elektrodynamischer Lasten auf die Akustik

Die im Zeitbereich ermittelten elektromagnetischen und mechanischen Lasten können für nachgelagerte Untersuchungen genutzt werden, was am Beispiel einer akustischen Untersuchung mit ANSYS veranschaulicht wird. Diese akustischen Untersuchungen sind für die Hersteller von entscheidender Bedeutung, weil zum einen die Kaufentscheidung der Kunden maßgeblich von dem abgestrahlten Schall abhängt [84] und zum anderen die geltenden Richtlinien eingehalten werden müssen, welche über die Jahre immer geringere Grenzwerte festlegen [85].

Im Kapitel 3 konnte der Einfluss der elektromagnetischen Kräfte auf die Schallabstrahlung gezeigt werden und auch verschiedene Arbeiten bestätigen den Zusammenhang, wie in Kapitel 1.4 gezeigt wurde. Die genutzten Module von ANSYS Workbench sind in Abbildung 4.18 dargestellt. Als Erstes wird eine Modalanalyse zur Bestimmung der Eigenfrequenzen durchgeführt. Das verwendete Modell des Bootsmotors besitzt 170 000 FG, ist in Abbildung 4.19 dargestellt und das Festlager, bei dem die Verschiebungsfreiheitsgrade gesperrt sind und das Loslager, bei dem die Verschiebung in radiale Richtung gesperrt ist, sind gekennzeichnet. Die beiden Deckel und der Flansch bestehen aus Aluminium, der Zylinder aus Stahl und die Magnete aus Neodym-Eisen-Bor.

Die ersten sechzehn Eigenfrequenzen mit zugehörigen Eigenmoden sind in Abbildung 4.22 dargestellt, wobei doppelt auftretende Frequenzen, bei denen die Formen lediglich gedreht sind, zusammengefasst werden. Anschließend wird eine harmonische Analyse durchgeführt. Die dafür benötigten Lasten auf die Magnete werden mit der vorgestellten Kopplung, bei einer Motordrehzahl von 1000 U/min, ermittelt. Abbildung 4.20 und Abbildung 4.21 zeigen die auf einen Magneten wirkende Kraft und das Moment im Frequenzbereich. Aufgrund der hohen Lagersteifigkeiten ist die auftretende Exzentrizität vernachlässigbar klein, wodurch das Ergebnis mit dem von ANSYS vergleichbar ist. Speziell an den Peaks ist eine gute Übereinstimmung zu erkennen. Die Lasten, also Kräfte in x- und y-Richtung, sowie Momente um die z-Achse, werden im Frequenzbereich den 28

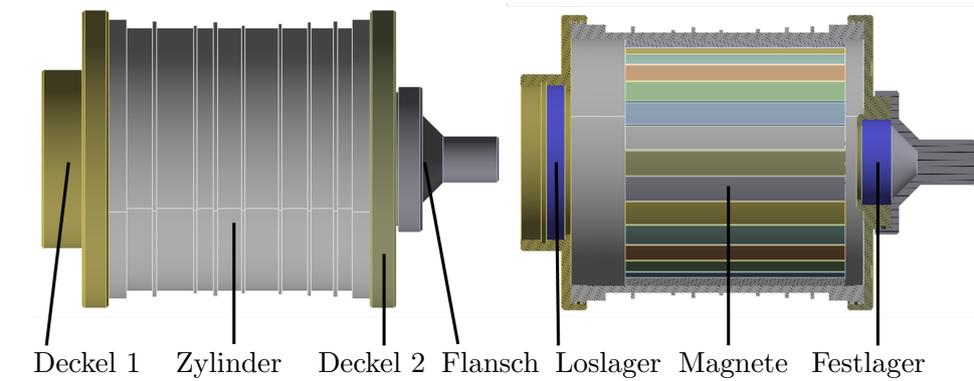


Abbildung 4.19: Motormodell für die Modalanalyse und harmonische Analyse.

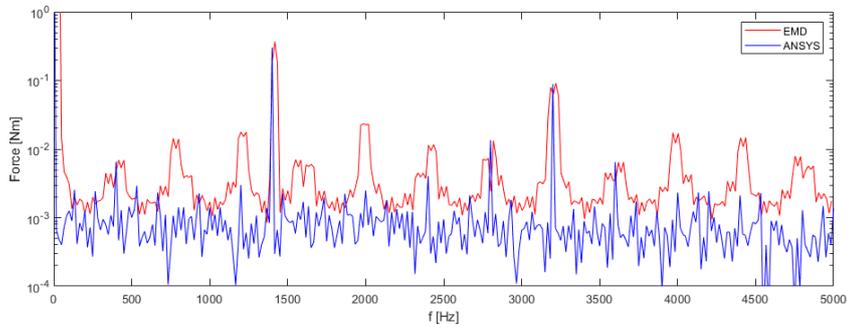


Abbildung 4.20: Vergleich der mit ANSYS und der vorgestellten Methode bestimmten Kraft auf einen Magneten bei einer Motordrehzahl von 1000 1/min.

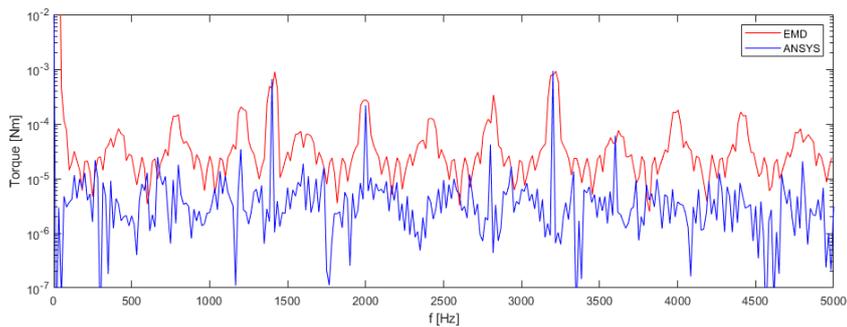


Abbildung 4.21: Vergleich des mit ANSYS und der vorgestellten Methode bestimmten Drehmoments auf einen Magneten bei einer Motordrehzahl von 1000 1/min.

Magneten aufgeprägt. Um unendlich große Amplituden im Bereich der Eigenfrequenzen zu verhindern, wird ein Dämpfungsmaß  $d$  von  $1 \cdot 10^{-3}$  gewählt. Die harmonische Analyse wird für Frequenzen von 10 Hz bis 5000 Hz mit einer 10 Hz Schrittweite durchgeführt. Des Weiteren wird die harmonische Analyse an den Eigenfrequenzen durchgeführt, da der Frequenzgang im Bereich der Eigenfrequenzen hohe Gradienten aufweist und dadurch die ermittelte Frequenz, wenn sie nur geringfügig von der Eigenfrequenz abweicht, deutlich kleiner ist. Auf diese Weise kann ein Frequenzgang ermittelt und jeder Frequenz eine Schwingform zugeordnet werden. Als Anregung werden die bei einer Drehzahl von 1000 1/min (Nenn Drehzahl) bestimmten elektromagnetischen Lasten auf die Magnete gewählt. Beispielhaft ist in Abbildung 4.23 der Frequenzgang des untersuchten Motors, mit zugehörigen Schwingformen an den Eigenfrequenzen dargestellt.

Im Anschluss an die harmonische Analyse wird eine akustische Untersuchung durchgeführt. Die in der harmonischen Untersuchung ermittelten Amplituden der Strukturschwingung werden als importierte Lasten eingefügt und so als Anregung der umgebenden Luft verwendet. Es wird davon ausgegangen, dass die Luftschwingung keinen Einfluss auf die Strukturschwingung besitzt, wodurch die Ergebnisse der harmonischen Analyse als Anregung genutzt werden können und keine Interaktionen mit einer ganzheitlichen Analyse berücksichtigt werden. Um den Motor wird eine Luftkugel mit 200 000 FG und einem Radius von 100 mm modelliert und als Akustikbereich definiert. Abbildung 4.24 veranschaulicht die Luftkugel und zeigt die Vernetzung. Die Außenseite der Kugel besitzt eine Abstrahlrandbedingung, wodurch der Schall absorbiert und nicht reflektiert wird. Die untersuchten Frequenzen entsprechen denen der harmonischen Analyse. Mit Hilfe dieser Analyse kann der abgestrahlte Schall im Frequenzbereich sowie die Schalldruckverteilung jeder Frequenz ermittelt und bewertet werden. Der resultierende Frequenzgang, sowie die Schalldruckverteilung an den Peaks ist in Abbildung 4.25 dargestellt.

In akustischen Untersuchungen werden die Ergebnisse oft in Terz- oder Oktavbändern dargestellt, was dem menschlichen Empfinden geschuldet ist. So werden die Tonintervalle der Terzpaare von (400 Hz, 500 Hz), von (800 Hz, 1000 Hz) und von (1000 Hz, 1250 Hz) als identische Höhenänderungen empfunden [86]. Demnach ist eine hohe Auflösung des Frequenzbereichs für akustische Untersuchungen nicht sinnvoll. Das akustische Verhalten wird mit Hilfe der genannten Bänder, über Bandpass-Filter, in Intervalle unterteilt. Die untere Eckfrequenz  $f_u$  und ober Eckfrequenz  $f_o$  begrenzen ein Terz- bzw. Oktavband. Der Name des Bandes entspricht seiner Mittenfrequenz  $f_m$ . Für Oktavbänder gilt

$$f_o = 2f_u \tag{4.39}$$

und

$$f_m = \sqrt{2}f_u. \tag{4.40}$$

Terzbänder werden auch als Drittel-Oktaven bezeichnet, da drei nebeneinander liegende Terzbänder einem Oktavband entsprechen. Die Frequenzen berechnen sich wie folgt

$$f_o = \sqrt[3]{2}f_u \tag{4.41}$$

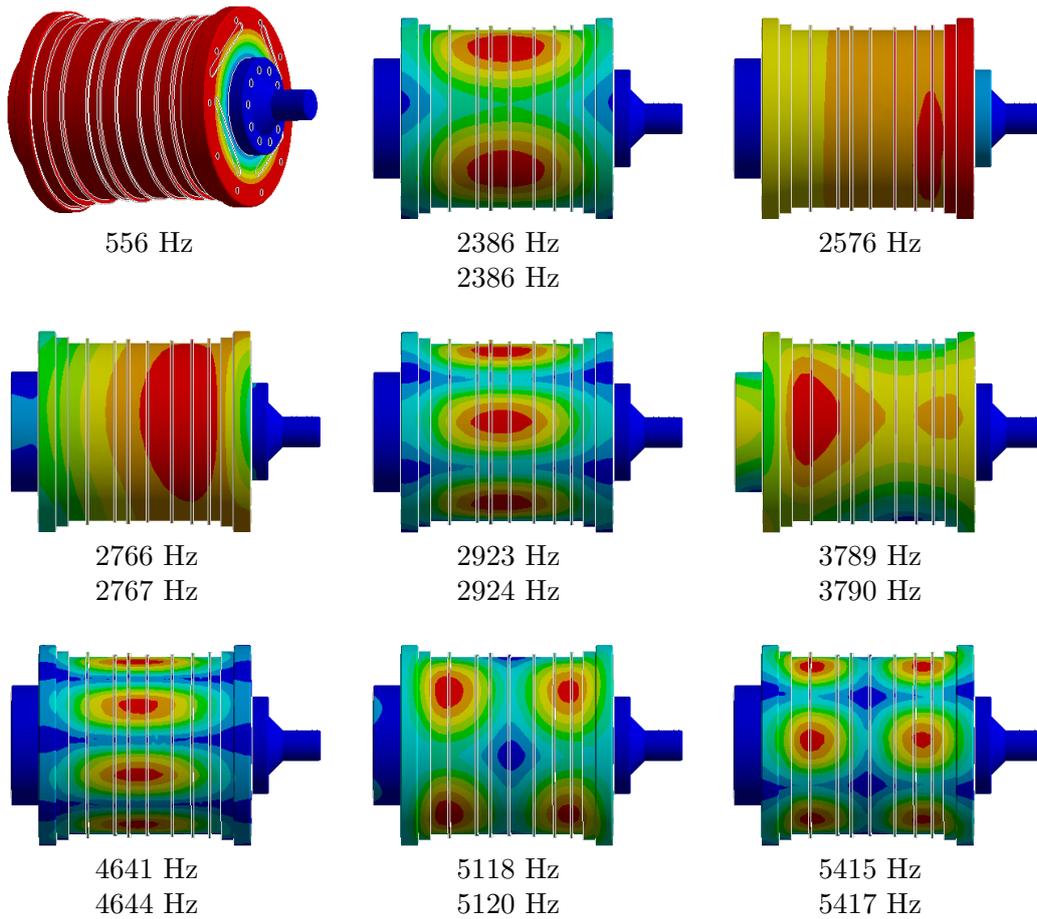


Abbildung 4.22: Die ersten sechzehn Eigenfrequenzen des Versuchsmotors mit zugehörigen Eigenformen.

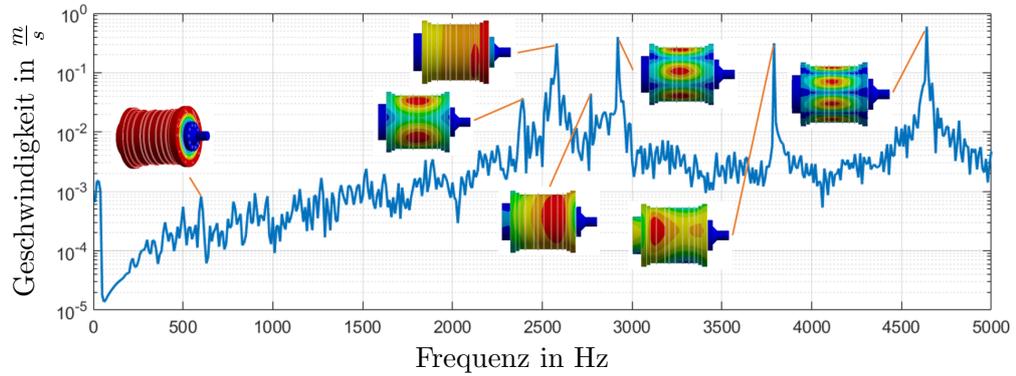


Abbildung 4.23: Frequenzgang des Ausgangsmotors mit zugehörigen Eigenformen.

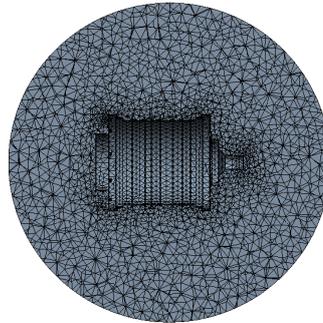


Abbildung 4.24: Modell der Akustiksimulation mit zugehöriger Vernetzung.

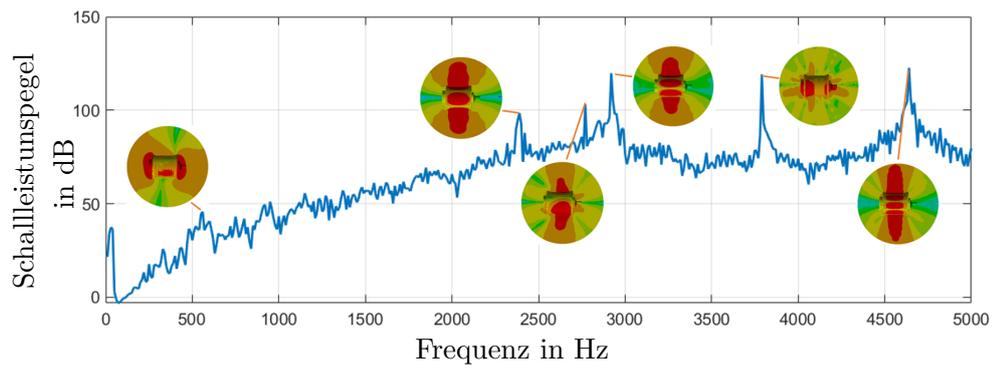


Abbildung 4.25: Frequenzgang der akustischen Untersuchung des Ausgangsmotors mit zugehörigen Eigenformen.

und

$$f_m = \sqrt[6]{2} f_u. \quad (4.42)$$

Die erste untere Eckfrequenz entspricht 12,5 Hz, die resultierende obere Eckfrequenz ist die untere Eckfrequenz des nächsten Bereichs, womit die Bereiche vollständig beschrieben sind. Im Folgenden werden Terzbänder verwendet.

Um verschiedene Frequenzgänge miteinander vergleichen zu können, wird der Schalldruckpegel  $L_{\hat{p}}$

$$L_{\hat{p}} = 20 \lg \sum_i \frac{\hat{p}_i}{\hat{p}_0}, \quad (4.43)$$

mit  $\hat{p}_0 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$ , verwendet. Außerdem ist es möglich, den abgestrahlten Schall an einem beliebigen Punkt als Ton hörbar zu machen und diesen unter Nutzung von psychoakustischen Untersuchungen zu bewerten [84, 87, 88].

#### 4.3.4 Designvariationen des Zylinders

Unter Nutzung des in Kapitel 4.3.3 vorgestellten Workflows, werden in diesem Abschnitt verschiedene Zylinder, siehe Abbildung 4.26 und verschiedene Deckel, siehe Abbildung 4.27, des Motors untersucht und hinsichtlich ihrer abgestrahlten Schalleistung bewertet. Die einfachste Zylindervariante wird mit 01 bezeichnet. Sie ist ein Zylinder mit einem Innendurchmesser von 67,5 mm und einem Außendurchmesser von 71,5 mm. Dieser Zylinder ist mit einer Masse von 2,9 kg der leichteste. Auch bei allen anderen Varianten bleibt dieser Zylinderbereich unangetastet, da er für die elektromagnetischen Felder wichtig ist. Es wird lediglich Material auf der Außenseite des Zylinders hinzugefügt. Zylinder 02 entspricht der originalen Konfiguration, die bei den vorangegangenen Experimenten verwendet wurde. Hier wurde der Zylinder mit zusätzlichen Rippen versehen. Die Zylinder 81, 82 und 83 wurden ebenfalls mit Rippen versehen. Zylinder 111, 131, 132, 134, 135 und 136 besitzen eine gekrümmte Oberfläche und sind damit in der Fertigung deutlich aufwändiger. Zylinder 150 besitzt drei Rippen, die gleichmäßig auf den Zylinder verteilt sind. Die entstehenden Zwischenräume sollen in anderen Untersuchungen genutzt werden, um Schäume und andere akustisch relevante Materialien zu applizieren und die Schallabstrahlung so zu verringern.

Die sieben untersuchten Deckel, inklusive der originalen Konfiguration a, sind in Abbildung 4.27 zu sehen, wobei der Deckel, der in Abbildung 4.19 als Deckel 02 bezeichnet ist, variiert wird.

Zwei Deckel und vier Zylinder werden als Prototyp gefertigt. Gesetzt sind bereits der originale Zylinder 02 und der originale Deckel 01, der reine Zylinder 01, bei dem eine hohe Schallabstrahlung erwartet wird, sowie Zylinder 150. Damit bleibt ein Zylinder und

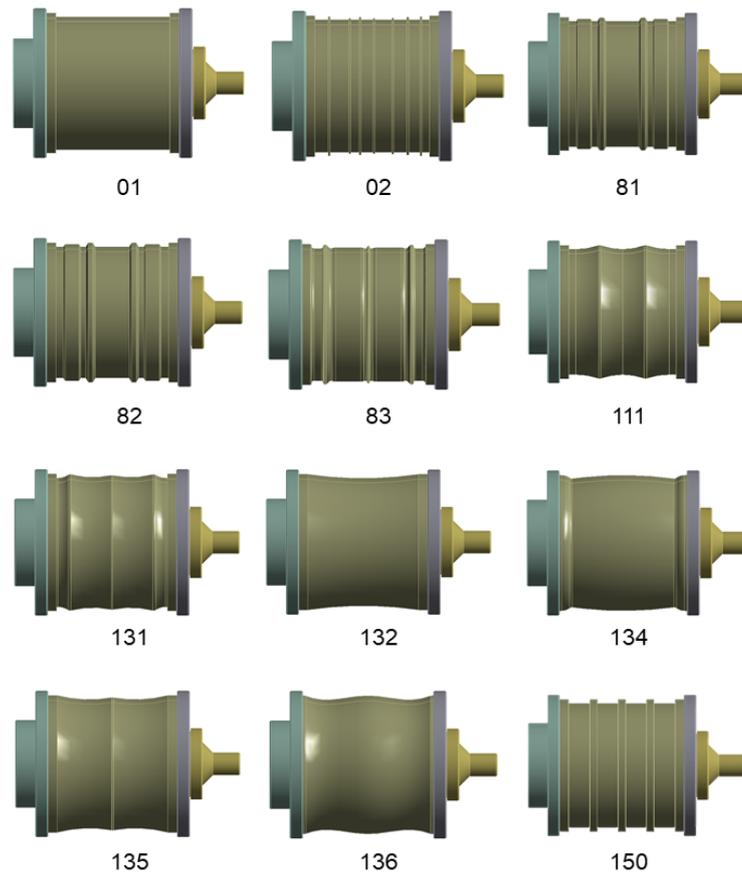


Abbildung 4.26: Untersuchte Designvariationen für die Verbesserung der Akustik des untersuchten Motors. Dabei ist 02 das originale Design.

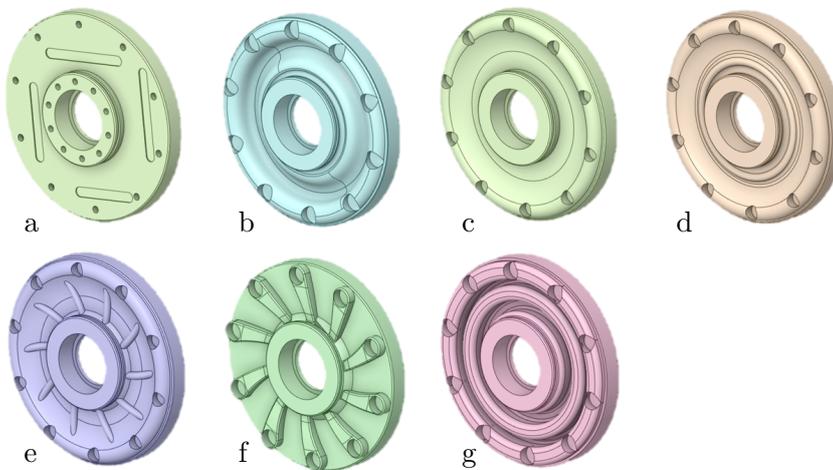


Abbildung 4.27: Untersuchte Designvariationen des Deckels für die Verbesserung der Akustik des untersuchten Motors.

ein Deckel, der unter Anwendung der vorgestellten Methode ausgewählt werden soll. Mit Hilfe des bereits vorgestellten Prüfstandes aus Kapitel 3 kann anschließend die Prediktionsgenauigkeit bewertet werden.

Wie in Kapitel 2.8 numerisch und in Kapitel 3 experimentell gezeigt, sind die angeregten Frequenzen stark von der Motordrehzahl abhängig. Für den konkreten Anwendungsfall Speedboot muss davon ausgegangen werden, dass der Nutzer keine konstante Motordrehzahl verwendet, sondern diese der Situation oder den Wünschen des Fahrers angepasst wird. Auch häufiges Beschleunigen und Bremsen kann nicht ausgeschlossen werden. Aus diesem Grund werden die in Abbildung 4.26 dargestellten Zylinder zunächst mit einer breitbandigen Kraft bis 5 kHz und einer Amplitude von 1 N angeregt, d. h. die berechneten elektromagnetischen Kräfte werden noch nicht benötigt. Anschließend werden die Zylindergeometrien mit den größten Schallemissionen aussortiert und die Schallabstrahlung der Verbliebenen bei der Nenndrehzahl von 1000 U/min verglichen. Dafür werden die mit der gekoppelten Simulation berechneten Lasten aus Abbildung 4.20 und Abbildung 4.21 verwendet. Diese Kräfte und Momente auf die Magnete wurden bei einer Umdrehung ermittelt und mit der Fouriertransformation in den Frequenzbereich transformiert. Auf diese Weise soll der verbesserte Prototyp sowohl im gesamten Frequenzbereich, als auch in der Nenndrehzahl besonders schallarm sein. Die in diesem Kapitel vorgestellte Designanpassung auf Grundlage der auftretenden Kräfte und Momente im Motorbetrieb eignet sich besonders gut, wenn der Motor bei definierten Drehzahlen betrieben wird, weil das Design so gewählt werden kann, dass Anregungsfrequenzen und Eigenfrequenzen nicht zusammen treffen. Bei variablen Drehzahlen kann ein Zusammenreffen nicht verhindert werden, da die meisten Anregungsfrequenzen drehzahlabhängig

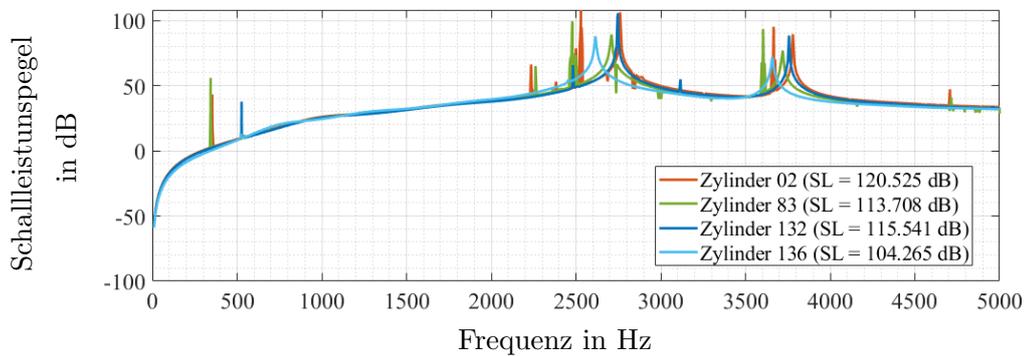


Abbildung 4.28: Frequenzgang des Schalleistungspegels der Zylinder 02, 83, 132 und 136 mit angegebenem Schalldruckpegel.

sind (siehe bspw. Kapitel 3).

Abbildung 4.28 zeigt den Frequenzgang des Schalleistungspegels der Zylinder 02, 83, 132 und 136. Der angegebene Schalldruckpegel nimmt Werte zwischen 108 dB und 121 dB an. Die Eigenfrequenzen treten an ähnlichen Frequenzen, mit ähnlichen Amplituden auf. Aufgrund der breitbandigen Anregung ist der Frequenzgang sehr glatt, an den Eigenfrequenzen sind die Peaks deutlich zu sehen. Lediglich bei Zylinder 136 treten weniger Frequenzen auf und die Amplitude bei ca. 2500 Hz ist deutlich geringer, was in einem deutlich geringeren Schalldruckpegel resultiert. Wie in Kapitel 4.3.3 beschrieben, werden die Kennlinien geterzt. Abbildung 4.29 zeigt den zugehörigen Terzpegel, bei dem die Unterschiede, welche hauptsächlich an den Eigenfrequenzen auftreten, besser erkennbar sind. Abbildung 4.30 zeigt die Terzpegel der Zylinder 01, 82, 131, 135 und Abbildung 4.31 von 81, 111, 134 und 150. Die schlechtesten Konfigurationen 111, 134 und 135 weisen Schalldruckpegel von 129 dB auf. Obwohl davon auszugehen war, dass 01 die schlechteste Konfiguration ist, da sie zum einen die geringste Masse aufweist, keinerlei Versteifungen und eine große Fläche besitzt, die sich hervorragend als Schallabstrahler eignet, befindet sich diese Variante mit 120 dB im Mittelfeld und ist ähnlich gut, wie die originale Variante 02. Für die Untersuchung des stationären Betriebs werden alle Zylinder ausgewählt, deren Schalldruckpegel unterhalb 119 dB liegt. Tabelle 4.5 ordnet die Zylinder hinsichtlich ihres Schalleistungspegels und gibt das Gewicht dieser an. Es ist deutlich zu sehen, dass die verwendete Masse eines Zylinders nicht auf den Schalleistungspegel schließen lässt. Außerdem ist zu erkennen, dass Variante 136 den geringsten Schalleistungspegel aufweist.

Für die Varianten 136, 83, 132, 131, sowie die drei gesetzten Varianten 01, 02 und 150 wird die Schallabstrahlung bei einer Motordrehzahl von 1000 U/min untersucht. Wie in Abbildung 4.32 zu sehen ist, sind die Frequenzgänge nicht mehr so glatt, wie bei der breitbandigen Anregung. Es wird erwartet, dass die Schalleistung besonders hoch ist,

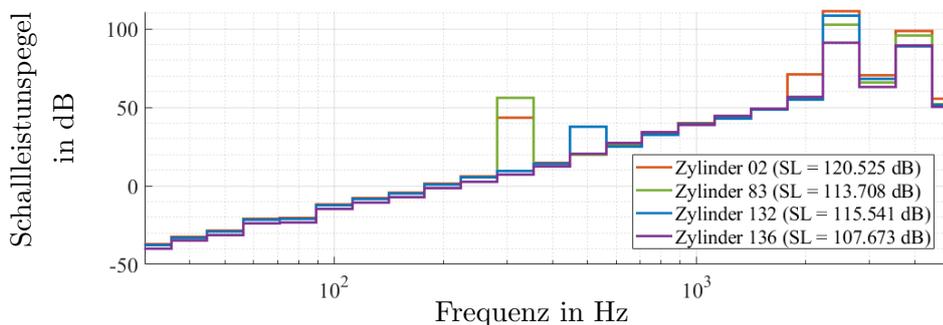


Abbildung 4.29: Terzpegel der Schalleistung der Zylinder 02, 83, 132 und 136 mit angegebenem Schalldruckpegel.

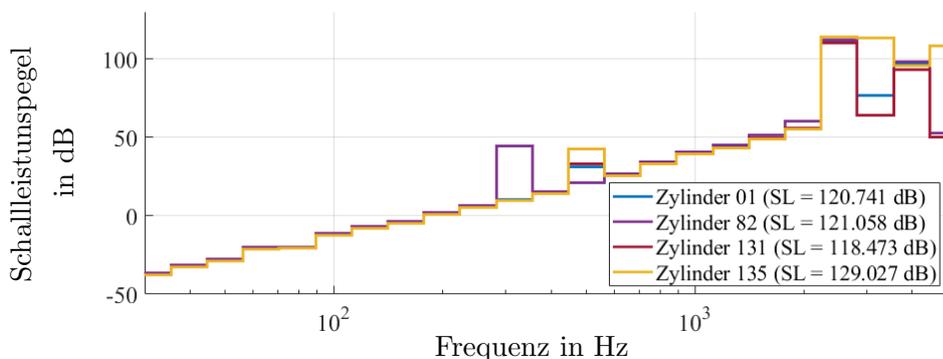


Abbildung 4.30: Terzpegel der Schalleistung der Zylinder 01, 82, 131 und 135 mit angegebenem Schalldruckpegel.

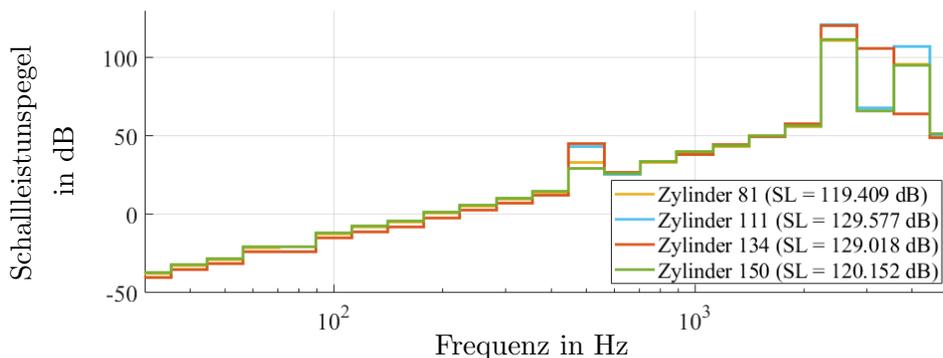


Abbildung 4.31: Terzpegel der Schalleistung der Zylinder 81, 111, 134 und 150 mit angegebenem Schalldruckpegel.

Tabelle 4.5: Zylinder mit berechneten Schalleistungspegel und Gewicht.

Zylinder	Schalleistungspegel in dB	Gewicht in kg
136	107,7	3,7
83	113,7	3,3
132	115,5	3,6
131	118,5	3,6
81	119,4	3,4
150	120,2	3,4
02	120,5	3,3
01	120,7	2,9
82	121,1	3,5
134	129,0	4,2
135	129,0	3,4
111	129,6	3,5

wenn Eigenfrequenzen und Anregungsfrequenz zusammenfallen. Die Terzbänder in Abbildung 4.33 und Abbildung 4.34 zeigen, dass auch bei einer Drehzahl von 1000 U/min der Zylinder 136 den geringsten Schalleistungspegel, von 131,6 Hz aufweist. Dieser Zylinder wird als verbesserter Motor gebaut.

#### 4.3.5 Designvariationen des Deckels

Zusätzlich zum Zylinder soll auch der Deckel 2 auf der Abtriebsseite hinsichtlich seiner akustischen Eigenschaften verbessert werden. Die sieben Deckel, welche in Abbildung 4.27 dargestellt sind, werden mit dem Zylinder 136 kombiniert. Die resultierenden Terzbänder bei breitbandiger Anregung in Abbildung 4.35 und Abbildung 4.36 zeigen, dass der Deckel 2 einen vergleichsweise geringen Einfluss auf die Schallabstrahlung des Motors besitzt. Die schlechteste Variante b und die beste Variante d unterscheiden sich um 1,3 dB. Nach dieser Berechnung sollte Variante d gebaut werden. Aufgrund des geringen Unterschieds wird der drittbeste Deckel f gewählt, der eine deutlich andere Geometrie als der originale Deckel aufweist. Da der Deckel 2 einen vergleichsweise kleinen Einfluss besitzt, wird der Deckel 1, aus Abbildung 4.19, nicht angepasst. Die Geometrieanpassung auf Grundlage der gekoppelten elektro-mechanischen Analyse ist damit abgeschlossen.

#### 4.3.6 Experimentelle Untersuchung des verbesserten Motors

An dem in Kapitel 3 vorgestellten Prüfstand soll nun getestet werden, ob die gewählte Designvariante Vorteile hinsichtlich der Schallabstrahlung gegenüber den anderen Varianten aufweist. Abbildung 4.37 zeigt den Prüfstand mit den neuen Designkonfigurationen

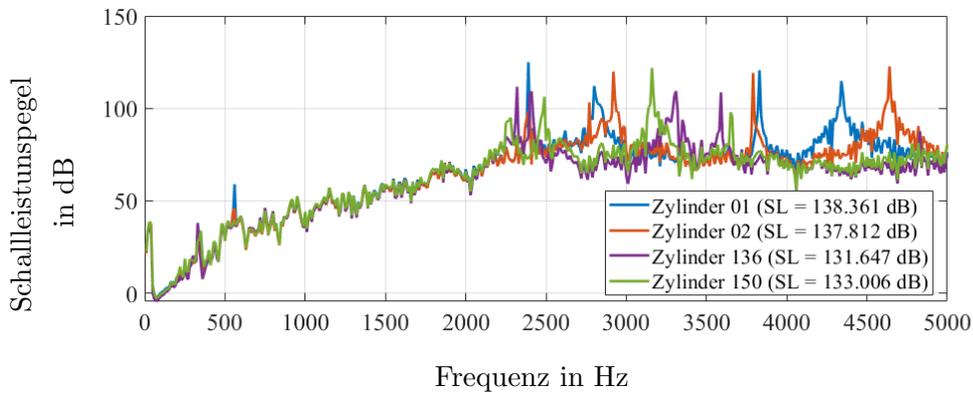


Abbildung 4.32: Frequenzgang der Schalleistung der Zylinder 01, 02, 136 und 150 bei 1000 U/min.

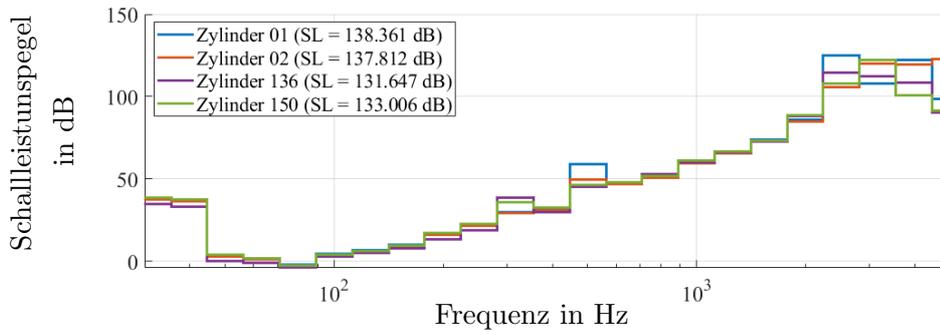


Abbildung 4.33: Terzpegel der Schalleistung der Zylinder 01, 02, 136 und 150 bei 1000 U/min.

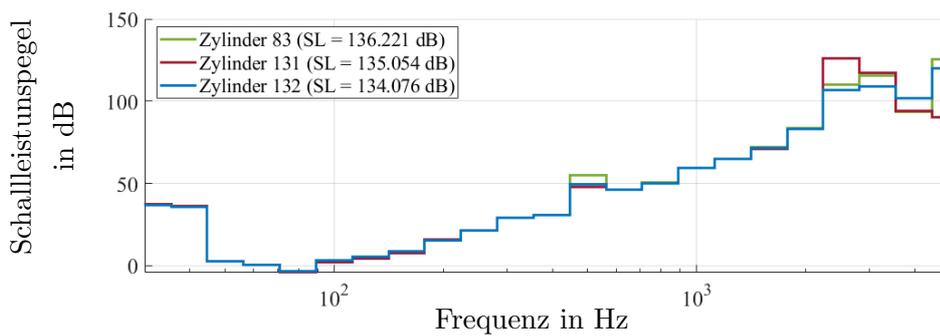


Abbildung 4.34: Terzpegel der Schalleistung der Zylinder 83, 131 und 132 bei 1000 U/min.

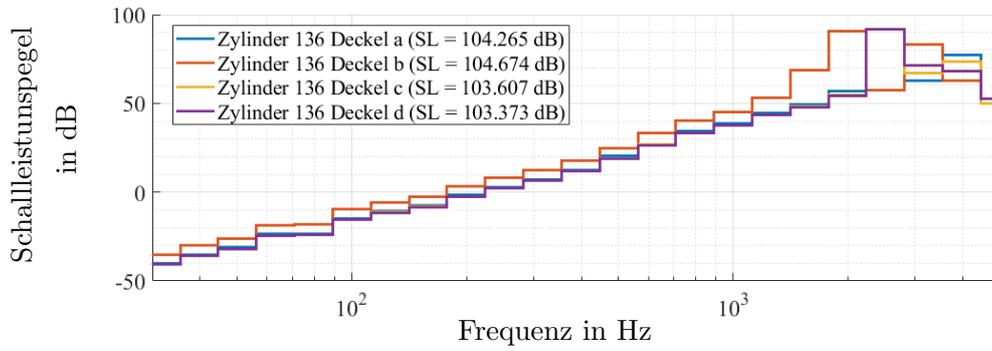


Abbildung 4.35: Terzpegel der Schalleistung des Zylinders 136 mit den Deckeln a, b, c und d bei breitbandiger Anregung.

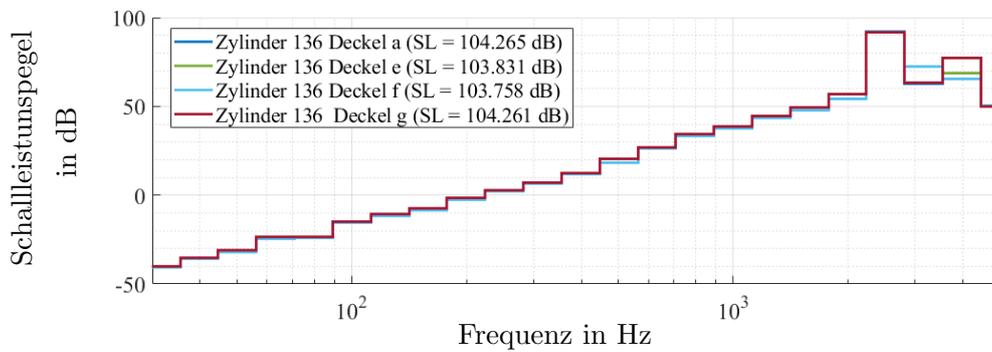


Abbildung 4.36: Terzpegel der Schalleistung des Zylinders 136 mit den Deckeln a, e, f und g bei breitbandiger Anregung.

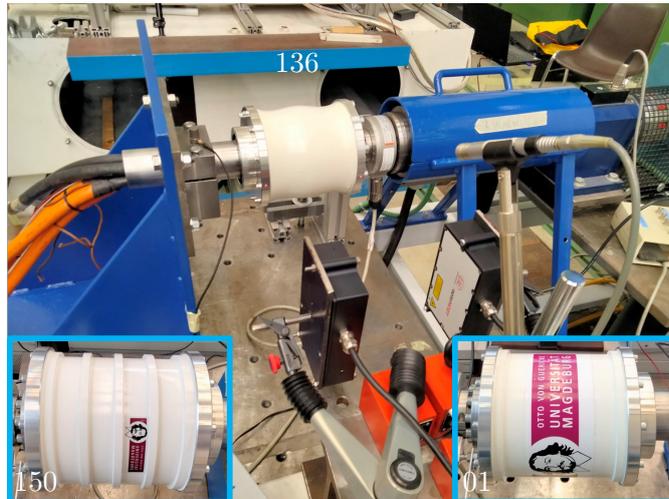


Abbildung 4.37: Verbesserter Motor 136 auf dem Prüfstand und sowie die Prototypen 150 und 01.

des Zylinders 136, 150 und 01.

#### 4.3.7 Bewertung des hinsichtlich der Schalleistung ausgewählten Motors

Für die Messung der Schallabstrahlung wird eine akustische Kamera mit Mikrofonarray (SoundCam Bionic M Mikrofonarray) verwendet. Der resultierende Schallpegel des originalen Deckels mit den Zylindern 01, 02, 136 und 150 bei einer Drehzahl von 1000 1/min ist in den Abbildungen 4.38 bis 4.41 dargestellt. Es ist gut zu sehen, dass Variante 136 die geringsten Amplituden aufweist. Speziell der numerisch untersuchte Bereich bis 5000 Hz weist, im Gegensatz zu den anderen Konfigurationen, keine auffälligen Frequenzen auf. Der Summenpegel konnte, gegenüber der originalen Konfiguration, um 5 dB gesenkt werden. Eine weitere Verbesserung konnte, wie in Abbildung 4.42 zu sehen ist, durch die Verwendung von granularem Material erzielt werden. Dieses wurde zwischen den Rippen platziert und mit einer Folie fixiert. Das Granulat verringert den Maximalpegel um über 10 dB gegenüber der originalen Version.

#### 4.3.8 Schwingungsverhalten des Antriebsstrangs

Ein weiterer Anwendungsfall der umgesetzten Methode ist die Beschreibung des Antriebsstrangs. Abbildung 4.43 zeigt beispielhaft die Schallabstrahlung des Speedbootes unter Nutzung des originalen Motors und benennt die akustisch relevanten Bereiche. Die Messung erfolgte an Land, wodurch das Wasser vernachlässigt wird, welches am Propeller eine erhöhte Last verursacht und die Schwingung des Boots (siehe Abbildung 1.3)

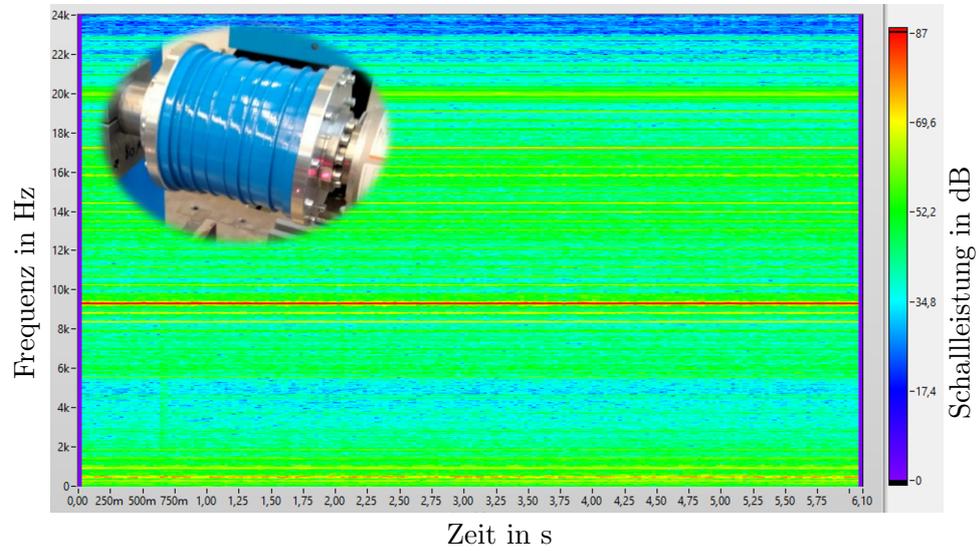


Abbildung 4.38: Schalleistungspegel der Konfiguration 02 bei einer Drehzahl von 1000 Hz.

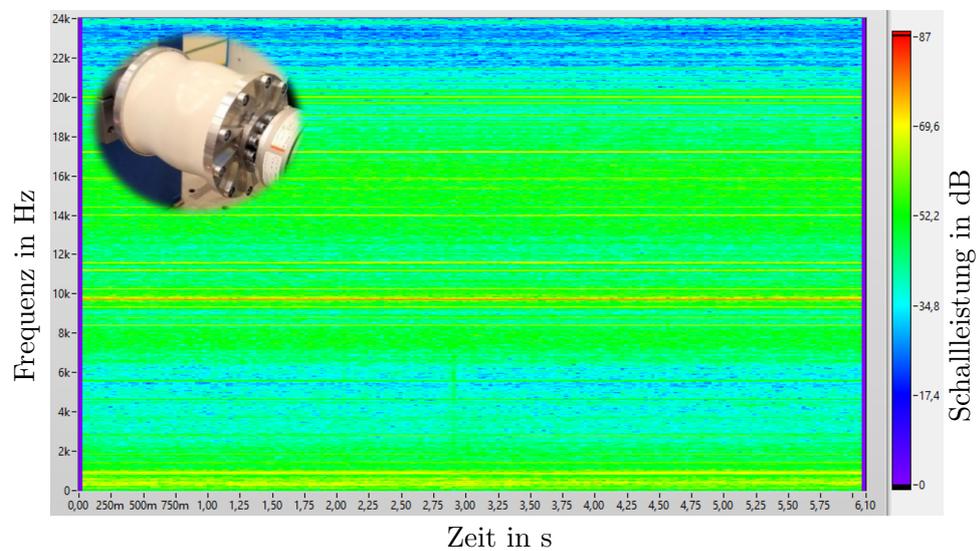


Abbildung 4.39: Schalleistungspegel der Konfiguration 136 bei einer Drehzahl von 1000 Hz.

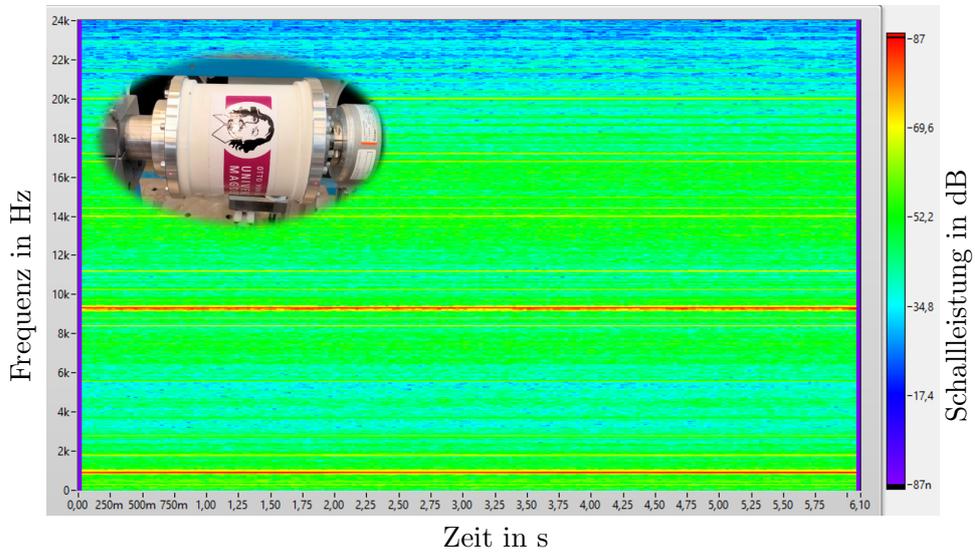


Abbildung 4.40: Schalleistungspegel der Konfiguration 01 bei einer Drehzahl von 1000 Hz.

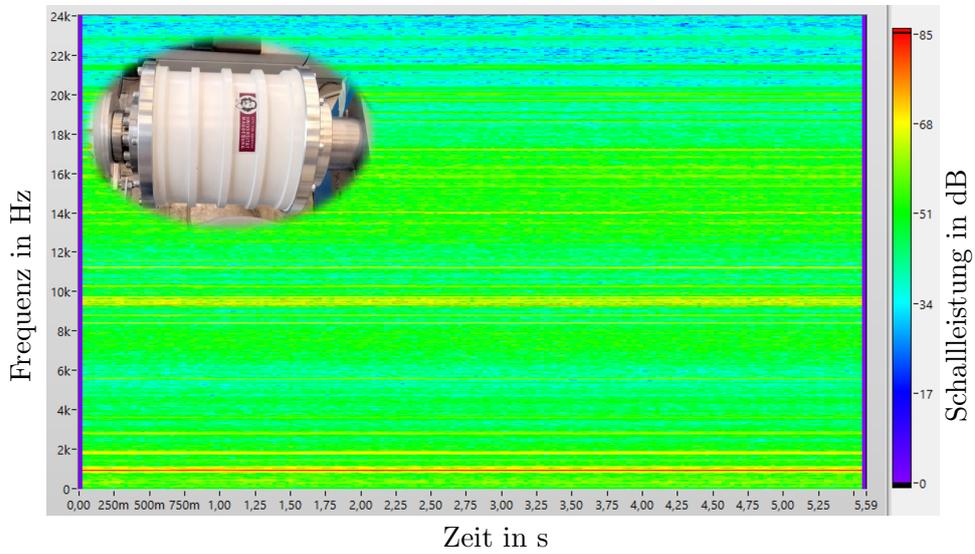


Abbildung 4.41: Schalleistungspegel der Konfiguration 150 bei einer Drehzahl von 1000 Hz.

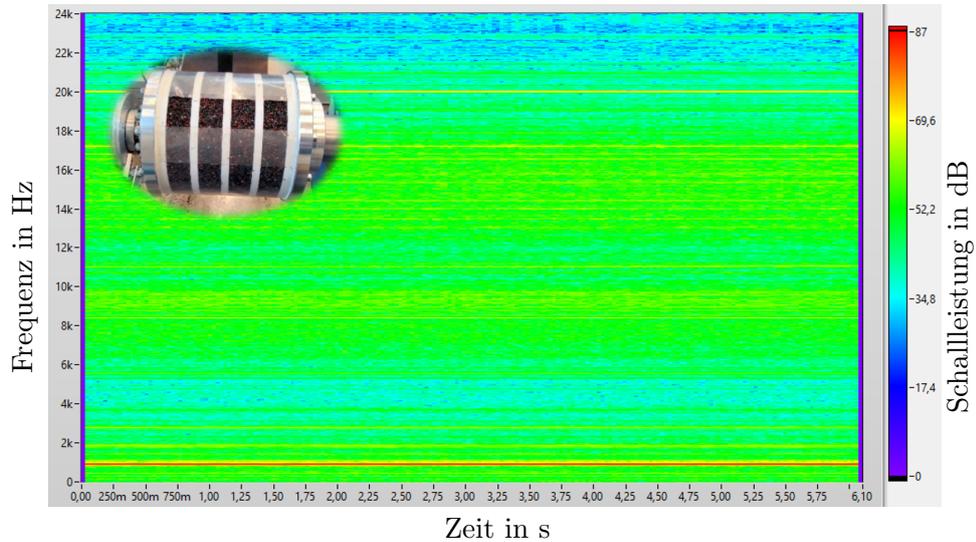


Abbildung 4.42: Schalleistungspegel bei einer Drehzahl von 1000 Hz von Konfiguration 150 mit Partikeldämpfern.

beeinflusst. Es wurde ein Mikrofonarray (Bionic M-112) verwendet, wodurch eine Lokalisation der Schallquelle möglich ist. Im Frequenzbereich von 2 kHz bis 3 kHz sind (a) der Propeller, (b) die Kühlwasserpumpe, (c, d) die beiden Elektromotoren (inklusive Reflexionen am Boden) und (e) der Bugbereich des Schiffes als Schallabstrahler zu sehen. Diese Abstrahler gehen bis auf die Kühlwasserpumpe alle direkt auf den Antriebsstrang zurück. Die Schallabstrahlung des Motors wurde bereits untersucht und unter Nutzung der vorgestellten Methode verbessert. Der Propeller erzeugt den Schall durch seine Drehbewegung, welche seiner Funktion geschuldet ist und nicht weiter untersucht wird. Die Schwingung im Bugbereich wird durch den Motor hervorgerufen und kann mit der vorgestellten Methode im Detail analysiert werden. Die Schallabstrahlung resultiert dementsprechend aus der Interaktion von Antriebsstrang und Elektromotor, welche zur Schallabstrahlung des gesamten Fahrzeugs führt. Diese Wechselwirkung kann nur durch einen ganzheitlichen Ansatz, wie er in dieser Arbeit vorgestellt wurde, berücksichtigt werden. Ohne diese Kopplung könnte zwar die Schallabstrahlung des Motors, aber nicht die Anregung der Struktur über die Lager und berücksichtigt werden. Das mechanische System besitzt ohne die Kenntnis der elektromagnetischen Kräfte keine Anregung, wodurch diese für die Simulation unabdingbar sind.

Das Vorgehen bei der akustischen Analyse des Antriebsstrangs ist äquivalent mit Kapitel 4.3.3 und wird hier vorgestellt. Der Antriebsstrang ist in Abbildung 4.44 dargestellt (nicht maßstabsgetreu). Das Stevenrohr und die Klauenkupplung des

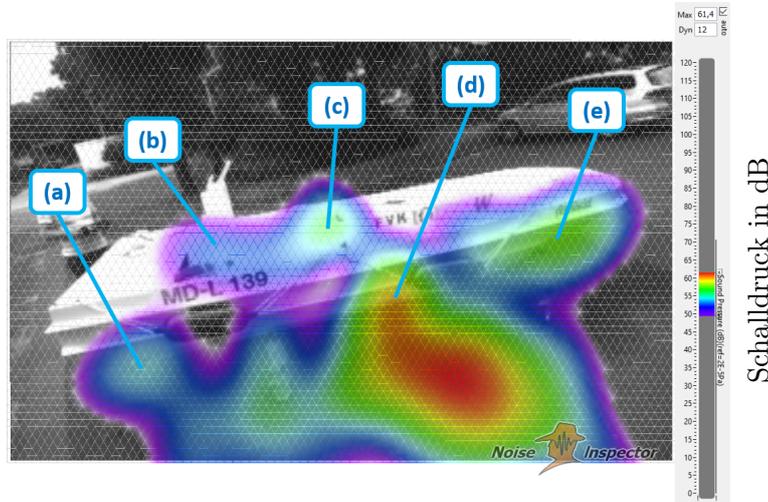


Abbildung 4.43: Ermittelte Schalldruckamplituden im Frequenzbereich 2 kHz bis 3 kHz, bei Mikrophonarraymessung des elektrischen Gleitboots an Land [89]

Antriebsstrangs werden in Anhang A.3 vorgestellt. Zwischen Motor und Propeller befindet sich eine 1800 mm lange Welle mit einem Durchmesser von 25 mm. Diese Welle ist propellerseitig mit einem Stevenrohr und antriebsseitig mit einem Kugellager gelagert. Zwischen Welle und Motor ist eine Elastomerkupplung (siehe Anhang A.3.1) verbaut, um axialen Versatz und Kippbewegungen auszugleichen und die Intensität von Drehmomentenstößen zu verringern. Abbildung 4.45 zeigt das verwendete Modell für eine Seite des Antriebsstrangs des Bootes. Tabelle 4.6 zeigt die verwendeten Massen und Trägheiten der Körper mit der Rotationsachse  $z$ . Das Stehlager (c), welches kugellagert ist, wird als Feder mit einer Federsteifigkeit von  $1 \cdot 10^7$  N/m angenommen. Für die Abbildung des Betriebs im Wasser ist die Kenntnis der über den Propeller eingeleiteten Lasten wichtig, um das System mit guter Genauigkeit beschreiben zu können. Diese sind nicht bekannt und sollten am Prototyp in weiteren Arbeiten gemessen werden. Durch den Motor werden über die Lagerung mechanische Lasten in das Boot eingeleitet und bringen dieses zum Schwingen. Die dünnwandige Struktur mit großen Flächen strahlen den Schall besonders stark ab.

Abbildung 4.46 zeigt das Spektrogramm der ermittelten Lagerkräfte des Stehlagers, Abbildung 4.47 des Stevenrohrs, Abbildung 4.48 das Loslager des Motors und Abbildung 4.49 das Festlager des Motors bei einem Hochlauf. Es ist gut zu sehen, dass bei allen Spektrogrammen zwei drehzahlunabhängige Frequenzen bei 200 Hz und 750 Hz auftreten. Die Superharmonischen, welche in den vorherigen Kapiteln beschrieben wurden, treten nicht auf, bzw. sind vergleichsweise klein. Das Schwingungsverhalten des Antriebsstrangs wird demzufolge von den Lagersteifigkeiten und den Trägheiten des

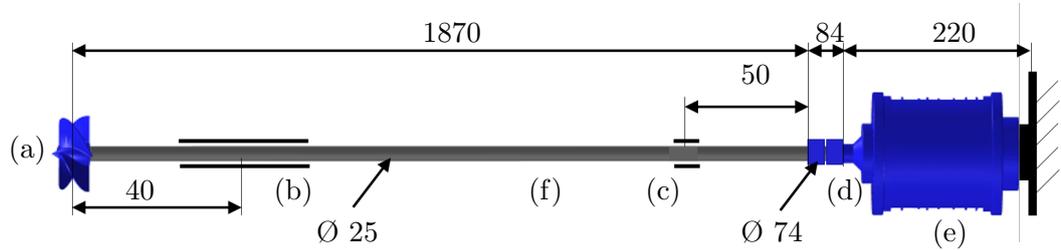


Abbildung 4.44: Abmessungen des Antriebsstrangs (Darstellung ist nicht maßstabsgetreu), mit dem Propeller (a), dem Stevenrohr (b), dem Lager (c), der Kupplung (d), dem Motor (e) und der Welle (f).



Abbildung 4.45: Modell des Antriebsstrangs des Gleitboots

Tabelle 4.6: Massen und Massenträgheiten der rotierenden Körper

Name	$m$ in kg	$\hat{J}_{xx}$ in $\text{kgm}^2$	$\hat{J}_{yy}$ in $\text{kgm}^2$	$\hat{J}_{zz}$ in $\text{kgm}^2$
Propeller	0,5	$4,9 \cdot 10^{-4}$	$4,9 \cdot 10^{-4}$	$7,2 \cdot 10^{-4}$
Welle	7,2	2,1	2,1	$5,6 \cdot 10^{-4}$
Kupplung	0,43	$5,1 \cdot 10^{-4}$	$5,1 \cdot 10^{-4}$	$5,2 \cdot 10^{-4}$
Rotor	3	0,013	0,013	0,023

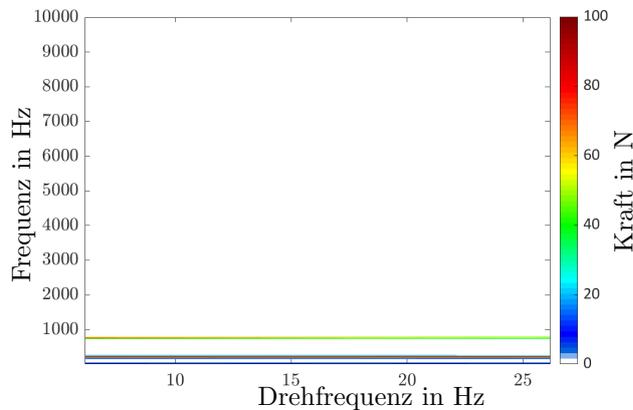


Abbildung 4.46: Spektrogramm des Stehlagers bei einem Hochlauf des Antriebsstrangs.

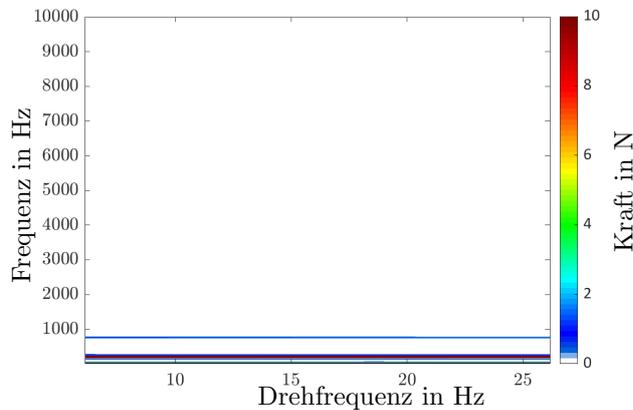


Abbildung 4.47: Spektrogramm des Stevenrohrs bei einem Hochlauf des Antriebsstrangs.

Systems definiert. Der Motor beeinflusst dieses System durch den UMP, welcher wie eine Feder mit negativer Steifigkeit wirkt.

Nachdem die Lagerkräfte mit Hilfe der Simulation bestimmt wurden, können diese als Anregung für eine harmonische Analyse genutzt werden, um Designvariationen durchführen zu können oder Körperschallpfade zu beeinflussen. Dieser Anwendungsfall sollte in späteren Untersuchungen betrachtet werden. Außerdem sollte aufgrund der verwendeten Batterie, Gleichung 2.41 verwendet werden, um die Spannungsquelle zu berücksichtigen. Wie in Kapitel 3.3.2 gezeigt wurde, hat der Regler großen Einfluss auf die angeregten Frequenzen. Dementsprechend sollte der Regler ebenfalls modelliert werden. Die genannten Einflüsse können mit der in dieser Arbeit vorgestellten ganzheitlichen Kopplung berücksichtigt werden.

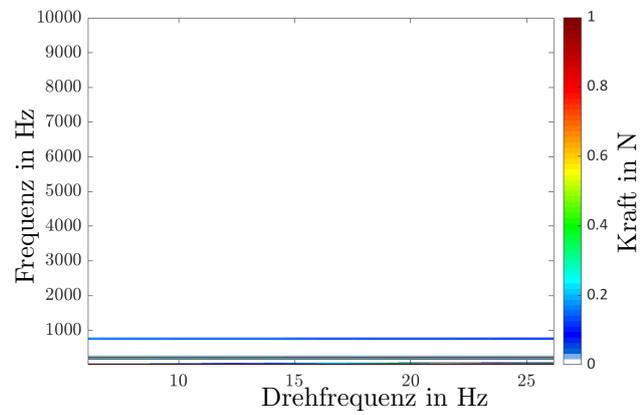


Abbildung 4.48: Spektrogramm des Loslagers bei einem Hochlauf des Antriebsstrangs.

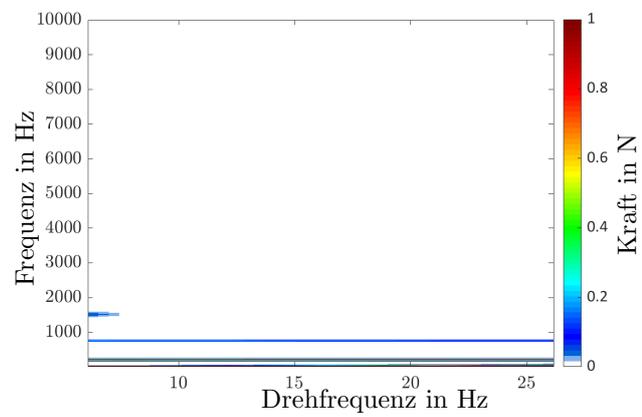


Abbildung 4.49: Spektrogramm des Festlagers bei einem Hochlauf des Antriebsstrangs.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Methode vorgestellt, die es erlaubt, die elektromagnetischen Lasten eines Motors für die Schwingungsuntersuchung des Gesamtsystems rückwirkungsbehaftet zu berücksichtigen. Für die Realisierung dieser ganzheitlichen Methode wurde ein MKS-Programm erweitert, sodass elektromagnetische Felder und die daraus resultierenden Kräfte und Momente berücksichtigt werden können. Diese Lasten werden im MKS-Programm als äußere Lasten, wie beispielsweise auch Feder- und Dämpferkräfte, behandelt und folglich in jedem Zeitschritt aufgerufen. Als Übergabewerte des MKS-Programms an die entwickelte Lastroutine werden unter anderem die aktuellen Verschiebungen und im Falle von dreidimensionalen Berechnungen ebenfalls die Verkippungen benötigt. Für die Bestimmung der elektromagnetischen Lasten wird die FEM genutzt. Auf diese Weise können Exzentrizitäten, Wirbelströme und Induktion berücksichtigt werden.

Diese ganzheitliche Betrachtung führt schnell zu hohen Rechenzeiten, da die FE-Modelle in jedem Zeitschritt gelöst werden müssen. Aus diesem Grund wurde besonders auf Möglichkeiten einer rechenzeiteffektiven Beschreibung eingegangen und mit Konvergenzstudien ein Modell ermittelt, welches so groß wie nötig aber so klein wie möglich ist. Es konnte gezeigt werden, dass die dreidimensionalen Berechnungen im Vergleich zu den zweidimensionalen deutlich zeitaufwändiger sind und nur geringe Vorteile bieten. Um die Verkippung des Motors abbilden zu können, wurde eine Möglichkeit mit mehreren zweidimensionalen Modellen vorgestellt und speziell auf die notwendige Anzahl dieser Modelle eingegangen. Durch die Verwendung höherwertiger Serendipity Elemente, konnten ein besseres Konvergenzverhalten und reduzierte Rechenzeiten realisiert werden. Lineare Elemente sind dagegen ungeeignet, da die resultierenden Lasten nur langsam konvergieren. Mit einer Konvergenzstudie wurde ein Modell ausgewählt, welches eine definierte Fehlerschranke unterschritt.

Die Drehbewegung des Rotors gegenüber dem Stator würde ohne eine geeignete Anpassung zu hohen Elementverzerrungen der finiten Elemente führen und so große Fehler hervorrufen. Zur Realisierung der Drehbewegung wurden verschiedene Methoden vorgestellt, von denen die regelmäßige Neuvernetzung aufgrund guter Ergebnisse umgesetzt wurde. Demgegenüber verschlechtert sich die Kondition der Matrix bei der Penaltykopplung und die positive Definitheit der Steifigkeitsmatrix ging bei der Nutzung von Lagrangischen-Multiplikatoren verloren. Die Rechenzeit konnte massiv reduziert werden, indem die Matrizen in veränderliche und unveränderliche Bereiche aufgeteilt wurden, wodurch nur ein kleiner Teil des Gesamtsystems in jedem Zeitschritt aufgebaut werden

muss. Der überwiegende Teil der Matrizen blieb während der Simulation unverändert und kann damit rechenzeiteffizient implementiert werden.

Unter Nutzung der FEM konnte gezeigt werden, dass das Spektrum des Drehmoments und die darin auftretenden Superharmonischen vom Spektrum der Stromanregung abhängen. Der Einfluss des UMP ist dagegen sehr gering, was auf die kleine Bauform und die hohe Steifigkeit der verwendeten Lager zurückgeführt werden kann. Bei anderen Lagerkonzepten kann der Einfluss allerdings deutlich relevanter sein.

Als möglicher Anwendungsfall, der allgemeingültigen Methode, wurde ein Elektromotor eines Gleitboots untersucht. Es wurde gezeigt, dass die ermittelten elektromagnetischen Kräfte beispielsweise für die Bestimmung des akustischen Verhaltens genutzt werden können, wodurch es möglich ist, sowohl den Motor als auch die zum Antriebsstrang gehörenden Komponenten wie Lager und Wellen so auszuwählen, dass sie den gewünschten Anforderungen entsprechen. Die Nutzbarkeit dieser Methode wurde zum einen mit Hilfe von numerischen Werkzeugen verifiziert und zum anderen mit Experimenten sichergestellt. Anschließend wurden verschiedene Designkonfigurationen untersucht und bewertet. Dazu wurden die berechneten Lasten, die auf die Magnete wirken, an eine harmonische Analyse übergeben und die resultierende Schallabstrahlung verglichen.

In zukünftigen Arbeiten sollte die Rechenzeit durch verbesserte Algorithmen reduziert werden. Beispielsweise wird im Laufe der Simulation immer mehr Arbeitsspeicher benötigt, wodurch diese langsamer wird. Dieser Fehler konnte noch nicht behoben werden. Die Simulationsgenauigkeit kann weiter verbessert werden, indem die Stromquelle, wie sie in der Simulation derzeit genutzt wird, durch eine Spannungsquelle, die dem tatsächlichen Anwendungsfall im Boot entspricht, ersetzt wird. Außerdem kann unter Kenntnis des Widerstandes in den elektrischen Leitern, welcher unter anderem von der Motordrehzahl abhängig ist, über die angelegte Spannung der Strom in den Leitern berechnet werden. In diesem Zuge sollte auch ein virtueller Regler umgesetzt werden, dessen Regelverhalten die Strukturschwingung und damit auch die Akustik beeinflusst. Weiterhin könnte der Temperatureinfluss beispielsweise an stationären Drehzahlen untersucht werden. Dieser ändert zum einen die geometrischen Abmessungen durch Ausdehnung und zum anderen die Materialeigenschaften. Auch die Berücksichtigung der Hysterese könnte die Simulationsgenauigkeit erhöhen. Auf diese wurde in dieser Arbeit aufgrund der erhöhten Rechenzeit verzichtet.

Neben dem vorgestellten Anwendungsfall eines Elektromotors im Speedboot kann die vorgestellte und umgesetzte Methodik auch für den Antriebsstrang von elektrischen oder hybriden Fahrzeugen verwendet werden, um beispielsweise die Akustik zu verbessern. Weitere Anwendungsfälle, bei denen zu erwarten ist, dass der UMP nicht vernachlässigbar ist, sind elektrifizierte Turbolader [90], welche aufgrund ihrer hohen Drehzahl gleitgelagert sind. Dieser UMP könnte dann die Stabilität des Turboladers negativ beeinflussen.

# Literatur

- [1] Gemeinsame Pressemitteilung mit dem Bundesministerium für Bildung und Forschung. “Weltklimarat IPCC zeigt zukünftige Risiken auf”. In: Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit, Pressemitteilung 147/11, 2011.
- [2] Marsh McLennan u. a. *The global risks report 2022*. World Economic Forum, 2022.
- [3] Sven Titz. *Die Unwetter in Deutschland: Ein Zusammenspiel von Wetterlage, Klimawandel und geografischen Eigenschaften der Region*. 17.07.2021.
- [4] Albert Kloss. *Von der Electricität zur Elektrizität: Ein Streifzug durch die Geschichte der Elektrotechnik, Elektroenergetik und Elektronik*. Springer, 1987.
- [5] Benjamin Frieske, Matthias Kloetzke und Florian Mauser. “Trends in vehicle concept and key technology development for hybrid and battery electric vehicles”. In: *2013 World Electric Vehicle Symposium and Exhibition (EVS27)*. IEEE. 2013, S. 1–12.
- [6] Andreas Binder. *Elektrische Maschinen und Antriebe*. Springer-Verlag, 2012.
- [7] Ulrich Riefenstahl. *Elektrische Antriebstechnik*. Springer-Verlag, 2013.
- [8] Eberhard Seefried und O. Mildenerger. “Elektrische Maschinen und Antriebstechnik”. In: *Wiesbaden: Vieweg* (2001).
- [9] Hermann Linse. *Elektrotechnik für Maschinenbauer*. Springer-Verlag, 2013.
- [10] Edwin Kiel. *Antriebslösungen*. Springer-Verlag, 2007.
- [11] Dierk Schröder. *Elektrische Antriebe: Grundlagen*. Bd. 4. Springer, 1994.
- [12] Norman Borchardt, Roland Kasper und Wolfgang Heinemann. “Design of a wheel-hub motor with air gap winding and simultaneous utilization of all magnetic poles”. In: *2012 IEEE International Electric Vehicle Conference*. IEEE. 2012, S. 1–7.
- [13] Andreas Zörnig. “Methodische Konstruktion elektrischer Radnabenmotoren für Fahrzeuge”. Diss. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Maschinenbau, 2021.
- [14] Norman Borchardt. “Modellierung, elektromechanische Auslegung und Validierung eines Radnabenmotors mit nutenloser Luftspaltwicklung und hoher gravimetrischer Leistungsdichte”. Diss. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Maschinenbau, 2014.

- [15] Martin Schmidt, Andreas Zörnig und Roland Kasper. “Messung von Verlustanteilen eines elektrischen Motors mit Radialfluss-Luftspaltwicklung und FEM-basierter Validierung der Elektrodynamik”. In: *Symposium Esslingen*. 2019.
- [16] Jörg Sauerhering u. a. “Einfluss der Kühlkanalgeometrie und der Thermal Interface Materials auf die thermische Belastung eines Elektromotors mit Luftspaltwicklung”. In: *14. Magdeburger Maschinenbau-Tage 2019 - Magdeburger Ingenieurtage : 24. und 25. September 2019 : Tagungsband*. Otto von Guericke University Library, Magdeburg, Germany, 2019.
- [17] Olena Stamann u. a. “Untersuchung von doppelseitig klebenden Elektroisolierfolien mit wärmeleitfähigen Klebstoffschichten zum Fügen der Luftspaltwicklung von Leichtbau-Elektroantrieben”. In: Otto von Guericke University Library, Magdeburg, Germany, 2019.
- [18] Martin Schmidt. “Untersuchung charakteristischer Kenngrößen von permanenterregten Synchronmaschinen mit Luftspaltwicklung und messtechnischer Validierung”. Diss. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Maschinenbau, 2020.
- [19] A.C. Smith und D.G. Dorrell. “Calculation and measurement of unbalanced magnetic pull in cage induction motors with eccentric rotors. Part 1: Analytical model”. In: *IEE Proceedings-Electric Power Applications* 143.3 (1996), S. 193–201.
- [20] J. Früchtenicht, H. Jordan und H.O. Seinsch. “Exzentrizitätsfelder als ursache von lauffinstabilitäten bei asynchronmaschinen”. In: *Archiv für Elektrotechnik* 65.4 (1982), S. 271–281.
- [21] P Pennacchi und L Frosini. “Dynamical behaviour of a three-phase generator due to unbalanced magnetic pull”. In: *IEE Proceedings-Electric Power Applications* 152.6 (2005), S. 1389–1400.
- [22] Paolo Pennacchi und Lucia Frosini. *Computational model for calculating the dynamical behaviour of generators caused by unbalanced magnetic pull and experimental validation*. Bd. 48027. 2007, S. 1313–1326.
- [23] Alexander Gray und J. G. Pertsch. “Critical Review of the Bibliography on Unbalanced Magnetic Pull in Dynamo-Electric Machines”. In: *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* XXXVII.2 (1918), S. 1417–1424.
- [24] MJ DeBortoli u. a. “Effects of rotor eccentricity and parallel windings on induction machine behavior: A study using finite element analysis”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 29.2 (1993), S. 1676–1682.
- [25] Yogeshwarsing Calleecharan und J-O Aidanpää. “Stability analysis of an hydro-power generator subjected to unbalanced magnetic pull”. In: *IET science, measurement & technology* 5.6 (2011), S. 231–243.

- 
- [26] Andrej Burakov und Antero Arkkio. “Comparison of the unbalanced magnetic pull mitigation by the parallel paths in the stator and rotor windings”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 43.12 (2007), S. 4083–4088.
- [27] U Werner und A Binder. “Rotor dynamic analysis of asynchronous machines including the finite-element-method for engineering low vibration motors”. In: *International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion*. IEEE. 2006, S. 88–96.
- [28] Shanle Li u. a. “Primary Resonance Analysis of Permanent Magnet Synchronous Motors Caused by Unbalanced Magnetic Pull”. In: *IEEE Access* 9 (2021), S. 64054–64064.
- [29] Felix Boy und Hartmut Hetzler. “An asymptotic approximation of the magnetic field and forces in electrical machines with rotor eccentricity”. In: *Electrical Engineering* 100.2 (2018), S. 389–399.
- [30] Lin Wang u. a. “Finite-element analysis of unbalanced magnetic pull in a large hydro-generator under practical operations”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 44.6 (2008), S. 1558–1561.
- [31] Mattias Wallin, Martin Ranlof und Urban Lundin. “Reduction of unbalanced magnetic pull in synchronous machines due to parallel circuits”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 47.12 (2011), S. 4827–4833.
- [32] Asmo Tenhunen. “Finite-element calculation of unbalanced magnetic pull and circulating current between parallel windings in induction motor with non-uniform eccentric rotor”. In: *Proceedings of Electromotion* 1 (2001), S. 19–24.
- [33] David G Dorrell, Alexander Hermann und Bogi Bech Jensen. “Analysis of unbalanced magnetic pull in wound rotor induction machines using finite element analysis-Transient, motoring and generating modes”. In: *IECON 2013-39th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. IEEE. 2013, S. 7307–7312.
- [34] Antero Arkkio u. a. *Analysis of induction motors based on the numerical solution of the magnetic field and circuit equations*. Helsinki University of Technology, 1987.
- [35] Melanie Michon u. a. “Unbalanced magnetic pull in permanent magnet machines”. In: *7th IET International Conference on Power Electronics, Machines and Drives*. IET. 2014, S. 1–6.
- [36] Yinquan Yu u. a. “3D influence of Unbalanced Magnetic Pull induced by misalignment rotor in PMSM motor”. In: *2012 Digest APMRC*. IEEE. 2013, S. 1–2.
- [37] Chong Di u. a. “Modeling and analysis of unbalanced magnetic pull in cage induction motors with curved dynamic eccentricity”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 51.8 (2015), S. 1–7.

- [38] Jean-Baptiste Dupont und Henri Saucy. “Noise radiated by electric motors—simulation process and overview of the optimization approaches”. In: *Automotive Acoustics Conference 2017*. Springer. 2019, S. 107–121.
- [39] Fabian Duvigneau u. a. “NVH in der Elektromobilität-Schwingungsanalyse mit Derotator”. In: *ATZ-Automobiltechnische Zeitschrift* 121.6 (2019), S. 68–73.
- [40] Janne Roivainen u. a. “Unit-wave response-based modeling of electromechanical noise and vibration of electrical machines”. Diss. Helsinki University of Technology, 2009.
- [41] A.J. Ellison und C.J. Moore. “Acoustic noise and vibration of rotating electric machines”. In: *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*. Bd. 115. 11. IET. 1968, S. 1633–1640.
- [42] Peter Huck, Daniel Jung und Stefan Lobmeyer. “Numerische Berechnung des akustischen Verhaltens elektrischer Maschinen”. In: *Proc. Conf. on Acoustics, AIA-DAGA*. 2015.
- [43] C. Wang, J.C.S. Lai und A. Astfalck. “Sound power radiated from an inverter driven induction motor II: Numerical analysis”. In: *IEE proceedings-electric power applications* 151.3 (2004), S. 341–348.
- [44] David Franck, Thomas Herold und Kay Hameyer. “Transient acoustic simulations of electrical drive-trains”. In: *Proc. Conf. on Acoustics, AIA-DAGA*. 2013.
- [45] Yechen Qin u. a. “Noise and vibration suppression in hybrid electric vehicles: State of the art and challenges”. In: *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 124 (2020), S. 109782.
- [46] Stefan Ringwelski, Tommy Luft und Ulrich Gabbert. “Piezoelectric controlled noise attenuation of engineering systems”. In: *Journal of Theoretical and applied mechanics* 49.3 (2011), S. 859–878.
- [47] Ugur Aridogan und Ipek Basdogan. “A review of active vibration and noise suppression of plate-like structures with piezoelectric transducers”. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 26.12 (2015), S. 1455–1476.
- [48] Alexander Taratorkin, Victor Derzhanskii und Igor Taratorkin. “Optimization of transport vehicle transmission vibroacoustic characteristics”. In: *MATEC Web of Conferences*. Bd. 287. EDP Sciences. 2019, S. 03004.
- [49] Steffen Marburg. “Developments in structural-acoustic optimization for passive noise control”. In: *Archives of computational methods in engineering* 9.4 (2002), S. 291–370.
- [50] Alberto Diez-Ibarbia u. a. “Comparison between transfer path analysis methods on an electric vehicle”. In: *Applied Acoustics* 118 (2017), S. 83–101.

- 
- [51] Fabian Duvigneau u. a. “Vergleich verschiedener Konzepte zur passiven Reduktion der Schallabstrahlung eines Verbrennungsmotors”. In: *Motor- und Aggregateakustik, Tagungsband des 9. Magdeburger Symposiums*.
- [52] Fabian Duvigneau u. a. “An effective vibration reduction concept for automotive applications based on granular-filled cavities”. In: *Journal of Vibration and Control* 24.1 (2018), S. 73–82.
- [53] Sebastian Koch u. a. “Partial filling of a honeycomb structure by granular materials for vibration and noise reduction”. In: *Journal of Sound and Vibration* 393 (2017), S. 30–40.
- [54] Sebastian Koch u. a. “Vibration reduction in automotive applications based on the damping effect of granular material”. In: *Automotive Acoustics Conference 2017*. Springer, 2019, S. 43–57.
- [55] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 3*. Bd. 3. Springer, 1991.
- [56] João Pedro A Bastos und Nelson Sadowski. *Electromagnetic modeling by finite element methods*. CRC press, 2003.
- [57] Olek C Zienkiewicz, Robert L Taylor und Jian Z Zhu. *The finite element method: its basis and fundamentals*. Elsevier, 2005.
- [58] Gérard Meunier. *The finite element method for electromagnetic modeling*. John Wiley & Sons, 2010.
- [59] Anastasis C Polycarpou. “Introduction to the finite element method in electromagnetics”. In: *Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics* 1.1 (2005), S. 1–126.
- [60] Sascha Duczek. “Higher order finite elements and the fictitious domain concept for wave propagation analysis”. Diss. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2014.
- [61] Sascha Duczek, Christian Willberg und Ulrich Gabbert. “Higher order finite element methods”. In: *Lamb-Wave Based Structural Health Monitoring in Polymer Composites*. Springer, 2018, S. 117–159.
- [62] Alexander Düster. “High order finite elements for three-dimensional, thin-walled nonlinear continua”. Diss. Technische Universität München, 2002.
- [63] Özlem Özgün und Mustafa Kuzuoğlu. *MATLAB<sup>®</sup>-based Finite Element Programming in Electromagnetic Modeling*. CRC Press, 2018.
- [64] S Duczek u. a. “Numerical analysis of Lamb waves using the finite and spectral cell methods”. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 99.1 (2014), S. 26–53.

- [65] S Duczek, S Liefold und U Gabbert. “The finite and spectral cell methods for smart structure applications: transient analysis”. In: *Acta Mechanica* 226.3 (2015), S. 845–869.
- [66] Antonio Pantano und Ronald C Averill. “A penalty-based finite element interface technology”. In: *Computers & structures* 80.22 (2002), S. 1725–1748.
- [67] Peter Wriggers. *Nichtlineare finite-element-methoden*. Springer-Verlag, 2013.
- [68] Stefan Lutzenberger und H. Grundmann. “Gekoppelte Probleme der Fahrzeug-Fahrweg Interaktion”. habilitation. 2006.
- [69] Ivo Babuška. “The finite element method with Lagrangian multipliers”. In: *Numerische Mathematik* 20.3 (1973), S. 179–192.
- [70] Robert Gasch, Klaus Knothe und Robert Liebich. “Substrukturtechniken”. In: *Strukturodynamik: Diskrete Systeme und Kontinua*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012, S. 563–598. ISBN: 978-3-540-88977-9.
- [71] Uwe Kiencke, Michael Schwarz und Thomas Weickert. *Signalverarbeitung: Zeit-Frequenz-Analyse und Schätzverfahren*. Oldenbourg Verlag, 2009.
- [72] Sebastian Koch u. a. “FE-Implementierung für die elektrodynamische Analyse von E-Maschinen”. In: *14. Magdeburger Maschinenbau-Tage 2019 - Magdeburger Ingenieurtag : 24. und 25. September 2019 : Tagungsband*. Otto von Guericke University Library, Magdeburg, Germany, 2019.
- [73] Sebastian Koch, Cornelius Irmischer und Elmar Woschke. “Entwicklung und Erprobung eines flexiblen Messverfahrens mithilfe FEM-gestützter Positionierung von Dehnungsmessstreifen”. In: *13. Magdeburger Maschinenbau-Tage 2017 - Magdeburger Ingenieurtag : 27. und 28. September 2017 : Tagungsband*. 2017.
- [74] Andreas Kremser. *Elektrische Maschinen und Antriebe: Grundlagen, Motoren und Anwendungen*. Springer-Verlag, 2007.
- [75] Simon Haykin. “Communication Systems, Civilian”. In: *Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition)*. Hrsg. von Robert A. Meyers. Third Edition. New York: Academic Press, 2003, S. 409–432. ISBN: 978-0-12-227410-7.
- [76] Elmar Woschke. “Simulation gleitgelagerter Systeme in Mehrkörperprogrammen unter Berücksichtigung mechanischer und thermischer Deformationen”. Diss. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2013.
- [77] Christian Daniel. “Simulation von gleit- und wälzgelagerten Systemen auf Basis eines Mehrkörpersystems für rotordynamische Anwendungen”. Diss. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2013.
- [78] Steffen Nitzschke. “Instationäres Verhalten schwimmbuchengelagerter Rotoren unter Berücksichtigung masseerhaltender Kavitation”. Diss. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2017.

- 
- [79] Dietmar Gross u. a. *Technische Mechanik* 3. Bd. 10. Springer, 1995.
- [80] Lawrence F Shampine und Mark W Reichelt. “The matlab ode suite”. In: *SIAM journal on scientific computing* 18.1 (1997), S. 1–22.
- [81] Eckhard Kirchner. *Leistungsübertragung in Fahrzeuggetrieben: Grundlagen der Auslegung, Entwicklung und Validierung von Fahrzeuggetrieben und deren Komponenten*. Springer-Verlag, 2007.
- [82] *Mechanische Schwingungen - Auswuchten von Rotoren - Teil 11: Verfahren und Toleranzen für Rotoren mit starrem Verhalten*. Norm. 2017.
- [83] Heinrich Dubbel. *DUBBEL: Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer-Verlag, 2013.
- [84] F Duvigneau, M Hoechstatter und U Gabbert. “Objektivierung der auditiven Wahrnehmung von Fahrzeuggeräuschen”. In: *Laermbekaempfung* 11.3 (2016).
- [85] Theodora Kokkinou und Efthimios Zervas. “Comparative analysis of noise emissions of new European passenger cars”. In: *Energy, environment, ecosystems, development and landscape architecture*. 2008.
- [86] Michael Möser. *Technische Akustik*. Bd. 8. Springer, 2005.
- [87] Hugo Fastl. “Advanced procedures for psychoacoustic noise evaluation”. In: *Proc. 6th Europ. Conf. on Noise Control 2006, Tampere, Finland*. 2006.
- [88] Sebastian Schneider, Tommy Luft und Hermann Rottengruber. “Psychoacoustic evaluation of internal combustion engine noises”. In: *Automotive and Engine Technology* 6.3 (2021), S. 261–274.
- [89] Fabian Duvigneau u. a. “Rückwirkungsbehaftete gekoppelte Analyse der Elektrodynamik, vibroakustischen Strukturschwingungen und Rotordynamik des elektrischen Antriebsstranges eines Gleitbootes”. In: *Fortschritte der Akustik - DAGA 2021*. 2021.
- [90] Woongkul Lee u. a. “Overview of Electric Turbocharger and Supercharger for Downsized Internal Combustion Engines”. In: *IEEE Transactions on Transportation Electrification* 3.1 (2017), S. 36–47.
- [91] Vladimir Ivanovich Krylov und Arthur H Stroud. *Approximate calculation of integrals*. Courier Corporation, 2006.
- [92] Wilhelm Matek u. a. *Roloff/Matek Maschinenelemente: Normung Berechnung Gestaltung*. Springer-Verlag, 2013.
- [93] Tao He u. a. “Mixed-lubrication analysis of marine stern tube bearing considering bending deformation of stern shaft and cavitation”. In: *Tribology International* 73 (2014), S. 108–116.

- [94] Engao Peng u. a. “Study on nonlinear friction-induced vibration in water-lubricated rubber stern tube bearings”. In: *The Open Mechanical Engineering Journal* 6.1 (2012).

# A Anhang

## A.1 B-H-Kennlinie des Stators

Tabelle A.1: B-H-Kennlinie von No20

B in T	H in A/m
0.0	0
0.1	29
0.2	36
0.3	42
0.4	46
0.5	51
0.6	55
0.7	61
0.8	68
0.9	78
1.0	91
1.1	111
1.2	145
1.3	214
1.4	411
1.5	1280
1.6	2970
1.7	5380
1.8	9390
1.9	18000
2.0	28000

Tabelle A.2: Gaußpunkte und zugehörige Gewichte [91]

Gaußpunkt	Koordinate $\xi_i$	Wichtung $w_i$
$n_{\text{Gauß}} = 1$		
1	0	2
$n_{\text{Gauß}} = 2$		
1	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	1
2	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	1
$n_{\text{Gauß}} = 3$		
1	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
2	0	$\frac{8}{9}$
3	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$

## A.2 Gauß-Integration

Die Gauß-Integration wird an verschiedenen Stellen der Arbeit verwendet und an dieser Stelle vorgestellt [91]. Dieses numerische Verfahren wird zur Bestimmung des Integrals einer Funktion  $f$  im Bereich von  $a$  bis  $b$  genutzt

$$\int_a^b f(x) dx. \tag{A.1}$$

Dafür werden die Wichtungsfunktion  $w$  und die Stützstellen  $\xi$  verwendet. Das Integral ergibt sich zu

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n_{\text{Gauß}}} f\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{a+b}{2}\right) w_i. \tag{A.2}$$

Mit  $b$  und  $a$  werden die Grenzen des zu integrierenden Abschnitts berücksichtigt. Die Genauigkeit des Integrals ist von der Anzahl der Gausspunkte  $n_{\text{Gauß}}$  abhängig, wobei Polynome exakt integriert werden, wenn der Polynomgrad  $p$

$$p \leq 2n_{\text{Gauß}} - 1 \tag{A.3}$$

ist [91]. Tabelle A.2 gibt die Wichtungen  $w_i$  und Gaußpunkte  $\alpha_i$  bis zu  $n_{\text{Gauß}} = 3$  an. Eine höhere Anzahl an Gaußpunkten und die zugehörigen Wichtungen können [91] entnommen werden.

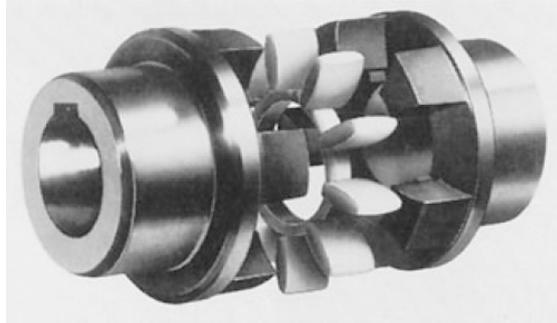


Abbildung A.1: Elastische Klauenkupplung [92]

### A.3 Funktionsweise ausgewählter Bauteile

Nachfolgend werden die verwendete Konstruktionselemente vorgestellt, um deren Nutzen im System, sowie den Einfluss auf das Schwingungsverhalten zu erläutern.

#### A.3.1 Klauenkupplung mit Elastomer

Die Klauenkupplung mit Elastomer, auch Elastomerkupplung, erlaubt es, das Drehmoment einer Welle auf eine andere zu übertragen und dabei axialen, lateralen und angularen Versatz auszugleichen. Sie besteht, wie in Abbildung A.1 dargestellt, aus zwei Naben, die auf den Wellenzapfen befestigt werden und auf einer Stirnseite Klauen besitzen, welche ineinander greifen. Zwischen den Klauen befindet sich ein Zahnkranz aus einem Elastomer, dessen Steifigkeits- und Dämpfungsverhalten über den Härtegrad variiert werden. Diese Kupplungen eignen sich zum Ausgleich von Wellenverlagerungen und Drehmomentenstößen bspw. beim Anfahren und überträgt das Drehmoment spielfrei [92]. Für die Modellierung einer Elastomerkupplung wird im weiteren Verlauf der Arbeit davon ausgegangen, dass sie, abgesehen vom Moment um die Drehachse, keine Drehmomente überträgt. Die beiden Wellen können sich also ungehindert gegeneinander verkippen. Außerdem werden keine Längskräfte übertragen. Das Drehmoment wird durch eine Drehfeder mit der Drehsteifigkeit  $c_\varphi$

$$M_t = \Delta\varphi c_\varphi \quad (\text{A.4})$$

übertragen. Ihre Steifigkeit kann aus dem Datenblatt der Kupplung entnommen werden.

#### A.3.2 Stevenrohr (engl. stern tube)

Das Stevenrohr wird hauptsächlich in der Schifffahrt zur Lagerung der Antriebswelle in der Nähe des Propellers verwendet. Es ist ein relativ langes Gleitlager mit Wasser oder Öl als Schmiermittel. Für die numerische Beschreibung stehen verschiedene Methoden



Abbildung A.2: Beispiel eines Stevenrohrs mit 175 mm Länge und einem Durchmesser von 150 mm [94].

zur Verfügung. Beispielsweise kann das Lager als Feder Dämpfersystem betrachtet werden, wobei diese auch nicht linear sein können. Alternativ kann die Reynoldsgleichung z. B. mit Hilfe der Finiten-Differenzen-Methode gelöst [93] werden. Beispielhaft zeigt Abbildung A.2 ein Stevenrohr mit einem Durchmesser von 175 mm.