Verfeinerung der Hausdorff-Dimension und Komplexität von ω-Sprachen

Dissertation

zu Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt der

Naturwissenschaftlichen Fakultät III
Agrar-, Geowissenschaften, Mathematik und Informatik
Institut für Informatik
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

von Herrn Jöran Mielke
geb. am 26.04.1980 in Wolfen

Halle (Saale), November 2009

1. Gutachter:

2. Gutachter:

Inhaltsverzeichnis

1

Einleitung

Das Ziel der Arbeit ist es, Beziehungen zwischen fraktaler Dimension, speziell der Hausdorff-Dimension, und algorithmischer Beschreibungskomplexität von einseitig unendlichen Wörtern (ω-Wörter) herzustellen. Einseitig unendliche Wörter können als reelle Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ angesehen werden. Fraktale Dimension ist ein Hilfsmittel um Mengen von ω-Wörtern zu messen und zu vergleichen, die bezüglich des Zählmaßes und des Lebesque–Maßes keine zufriedenstellende Maßzahl haben, d.h. Mengen, die unendlich viele Objekte enthalten aber Lebesque–Nullmengen sind. Ein bekanntes Beispiel für eine solche Menge ist das Cantor–Diskontinuum.

Beispiel 1.1 Das Cantor–Diskontinuum ist der Grenzwert des folgenden Iterationsverfahrens. Die Konstruktion startet mit dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ der reellen Zahlen, im ersten Schritt wird das mittlere Drittel $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ des Intervalls herausgeschnitten. In den beiden übrig gebliebenen Teilen werden wieder die mittleren Drittel entfernt, d.h. die Intervalle $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ und $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ werden aus der Menge entfernt. Der Grenzwert die-

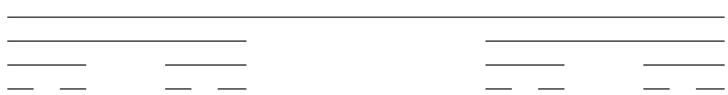

Abbildung 1.1: Cantor–Diskontinuum; 3 Iterationen der Konstruktion

ses Prozesses liefert eine unendlich große Menge isolierter Punkte. Sie hat daher das Zählmaß ∞ und das Längenmaß (Lebesque–Maß) Null. $\square$

Eine oft verwendete fraktale Dimension ist die Hausdorff–Dimension, eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. Es gibt aber auch Mengen, deren Maß auch für ihre Hausdorff–

Dimension 0 oder unendlich ist. Wir werden daher in dieser Arbeit eine Verallgemeinerung der HAUSDORFF–Dimension betrachten. Im zweiten Kapitel werden wir die dafür zugrunde liegenden Maße untersuchen, insbesondere wann eine Menge das Maß 0 hat.

Im dritten Kapitel stellen wir einen Zusammenhang zwischen dem verallgemeinerten HAUSDORFF–Maß und der KOLMOGOROV-Komplexität her. Mit Hilfe des verallgemeinerten Maßes werden untere Komplexitätsschranken für die maximal komplexen Elemente einer Menge aufgestellt. Wir geben auch obere Schranken für alle Elemente in einer Sprache an und untersuchen, wann in einer Menge Elemente enthalten sind, deren obere und untere Komplexitätsschranken übereinstimmen und welchem Grad an Zufälligkeit sie genügen.

Im vierten Kapitel werden wir eine Dimension einführen, die auf dem in Kapitel zwei eingeführten Maß basiert. Wir untersuchen Klassen von ω-Sprachen und stellen eine Verbindung zwischen algorithmischer Beschreibungskompexität und dieser Dimension her.

In diesem ersten Kapitel werden wir jetzt die wesentlichen Konzepte vorstellten, die wir in dieser Arbeit verwenden.

1.1 Notation

In diesem Abschnitt führen wir die Notation ein, die wir benutzen werden. Für die natürlichen Zahlen verwenden wir die Bezeichnung $\mathbb{N}$ (es gilt $0 \in \mathbb{N}$), die reellen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}$, die positiven reellen Zahlen mit $\mathbb{R}_+$. Mit X bezeichnen wir ein endliches Alphabet der Kardinalität $|X| = r$. In der gesamten Arbeit schreiben wir für $\log_r$ verkürzend log. Die Menge $X^* := \{x_0x_1 \ldots x_{n-1} \mid x_i \in X \wedge n \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge aller endlichen Wörter über diesem Alphabet, einschließlich des leeren Wortes e der Länge 0. Mit X^ω bezeichnen wir die Menge aller einseitig unendlichen Wörter (Sequenzen, ω–Wörter) über der Menge X. Für zwei Zeichenketten $w \in X^*$ und $\xi \in X^* \cup X^\omega$ heißt $w \cdot \xi$ die Verkettung der Wörter. Diese Verkettung erweitern wir auf Teilmengen $W \subseteq X^*$ und $F \subseteq X^* \cup X^\omega$ auf natürliche Weise: $W \cdot F = \{w \cdot \xi \mid w \in W \wedge \xi \in F\}$. Für eine Sprache $W \subseteq X^*$ bezeichnet $W^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W^n$ das von W erzeugten Untermonoid von X^* und mit $W^\omega = \{w_1w_2 \ldots w_i \ldots \mid w_i \in W \setminus \{e\}\}$ die Teilmenge von X^ω, die durch Verketten von Wörtern aus W erzeugt wird. Die Menge $V/w = \{\xi \mid w \cdot \xi \in V\}$ nennen wir den von w erzeugten Zustand einer Menge

$V \subseteq X^* \cup X^\omega$. Die Länge eines Wortes $w \in X^*$ bezeichnen wir mit $|w|$ und mit $\underline{l}(V) = \min\{|w| \mid w \in V\}$ die Länge eines kürzesten Wortes in V. Für eine Menge $F \subseteq X^* \cup X^\omega$ ist $\mathbf{pref}(F)$ die Menge aller endlichen Präfixe von Elementen aus F. Wir schreiben für $\mathbf{pref}(\{\xi\})$ kurz $\mathbf{pref}(\xi)$ und $w \sqsubseteq \xi$ für $w \in \mathbf{pref}(\xi)$. Für ein ω–Wort ξ wird das Präfix der Länge n mit $\xi[0..n]$ bezeichnet. Der δ-Limes $W^\delta = \{\xi \mid |\mathbf{pref}(\xi) \cap W| = \infty\}$ der Menge W ist die Menge aller ω–Wörter, die unendlich viele Präfixe in W haben.

Eine Menge $V \subseteq X^*$ heißt Code, falls jedes $w \in V^*$ eine eindeutige Zerlegung $w = v_1 \cdot v_2 \cdots v_n$ mit $v_i \in V$, für $1 \leq i \leq n$ hat. Ein Code heißt Präfix-Code, falls für alle $w, v \in V$ aus $w \sqsubseteq v$ auch $w = v$ folgt. Wenn $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots\} \subseteq X^*$ ein Präfix-Code ist und $|v_i| = l_i$, für alle $i \in \mathbb{N}$, so gilt $\sum_{i\in\mathbb{N}} |X|^{-l_i} \leq 1$. Ist umgekehrt die Ungleichung für eine Sequenz $(l_i)_{i\in\mathbb{N}}$ erfüllt, so existiert ein Präfix-Code V, so dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $v_i \in V$ existiert mit $|v_i| = l_i$ (Kraft'sche Ungleichung).

Die Funktion $s_V : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, mit $s_V(n) = |X^n \cap V|$, die für eine Menge $V \subseteq X^*$ die Anzahl der in V enthaltenen Wörter der Länge n angibt, heißt Strukturfunktion der Sprache V. Die zu s_V gehörende Potenzreihe $\mathfrak{s}_V(t) = \sum_{i\in\mathbb{N}} s_V(i) \cdot t^i$ heißt strukturerzeugende Funktion der Sprache V.

1.2 Fraktale Dimension

In diesem Abschnitt wollen wir eine Fraktale Dimension für Teilmengen eines (topologischen) Raumes herleiten. Wir definieren zunächst den topologischen Raum, in welchem wir uns in dieser Arbeit bewegen. Mit der Menge X^ω, wobei $|X| = r$ ist, definieren wir die Funktion $\varrho_r : X^\omega \times X^\omega \to \mathbb{R}$ als

$$\varrho_r(\zeta, \xi) := \inf\left\{r^{-|w|} \mid w \sqsubseteq \zeta \wedge w \sqsubseteq \xi\right\}$$

für $\zeta, \xi \in X^\omega$. Diese Funktion ist auch eine Ultrametrik, das heißt es gilt die ultrametrische Dreiecksungleichung:

$$\forall \xi, \eta, \zeta \in X^\omega \quad \varrho_r(\xi, \zeta) \leq \max\{\varrho_r(\xi, \eta), \varrho_r(\eta, \zeta)\}$$

Weiterhin gelten die folgenden Eigenschaften jeder Metrik. Für alle $\xi, \eta, \zeta \in X^\omega$ gilt

(i). $\varrho_r(\xi, \zeta) \geq 0$, und es gilt $\varrho_r(\xi, \zeta) = 0$ genau dann, wenn $\xi = \zeta$

(ii). $\varrho_r(\xi, \zeta) = \varrho_r(\zeta, \xi)$

(iii). $\varrho_r(\xi,\zeta) \leq \varrho_r(\xi,\eta) + \varrho_r(\eta,\zeta)$

Das Paar (X^ω, ϱ_r) ist ein *metrischer Raum*. Den Abschluss einer Menge $F \subseteq X^\omega$ bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(F) := \{\xi \mid \mathbf{pref}(\xi) \subseteq \mathbf{pref}(F)\}$. Die offene Kugel um $\xi \in X^\omega$ mit dem Radius $p \in \mathbb{R}$ ist die Menge $B_p(\xi) = \{\zeta \mid \zeta \in X^\omega \wedge \varrho_r(\xi,\zeta) < p\}$, die abgeschlossene Kugel um ξ mit Radius p ist die Menge $\overline{B}_p(\xi) = \{\zeta \mid \zeta \in X^\omega \wedge \varrho_r(\xi,\zeta) \leq p\}$. Die offenen (und gleichzeitig abgeschlossenen) Kugeln im Raum (X^ω, ϱ_r) haben die Form $w \cdot X^\omega$, für $w \in X^*$. Den Durchmesser einer Menge $F \subseteq X^\omega$ definieren wir als $\operatorname{diam}(F) = \sup\{\varrho_r(\xi,\zeta) \mid \xi,\zeta \in X^\omega\}$. Der Durchmesser (und gleichzeitig der Radius) einer Kugel ist dann $\operatorname{diam}(w \cdot X^\omega) := r^{-|w|}$. Kugeln dieses Raumes sind entweder ganz ineinander enthalten oder disjunkt zueinander. Ein Maß auf X^ω ist eine Funktion μ, die jeder Teilmenge von X^ω einen Wert aus $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, wobei $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) \leq \mu(B)$ für $A \subseteq B \subseteq X^\omega$, und $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$ für $A_i \subseteq X^\omega$ gilt.

1.2.1 Maße

In diesem Abschnitt betrachten wir Maße auf X^*. Wir verwenden nur Maße, bei denen sich das Maß eines Wortes auf seine Verlängerungen verteilt. Das bedeutet, das Maß von w bleibt innerhalb des von w definierten „Zylinders" $w \cdot X^*$. Solche Maße bezeichnen wir als zylindrische Maße (siehe [1]).

Definition 1.1 *Eine Funktion* $\mu : X^* \to \mathbb{R}_+$ *heißt* (zylindrisches) Maß*, falls* $\mu(e) = 1$ *und* $\mu(w) = \sum_{x\in X} \mu(wx)$ *für alle* $w \in X^*$ *gilt.*

Mittels $M(w \cdot X^\omega) := \mu(w)$ kann damit eine Funktion auf den Kugeln $w \cdot X^\omega$ definiert werden, die zu einem Maß $\overline{\mu}$ auf X^ω fortgesetzt werden kann.

Definition 1.2 *Eine Funktion* $\mu : X^* \to \mathbb{R}_+$ *heißt* (zylindrisches) Semimaß*, falls es eine Konstante* $0 < c < \infty$ *gibt, so dass gilt*

(i). $\mu(e) = c$

(ii). $\sum_{x\in X} \mu(wx) \leq \mu(w)$.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von Funktionen ist die Links- bzw. Rechtsberechenbarkeit.

Definition 1.3 *Eine Funktion* $f : X^* \to \mathbb{R}$ *heißt* linksberechenbar*, falls es eine berechenbare Funktion* $h : X^* \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *gibt, die im zweiten Parameter monoton wachsend ist und* $\lim\limits_{t\to\infty} h(w,t) = f(w)$*, für jedes* $w \in X^*$.

Analog nennen wir eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ linksberechenbar (bzw. rechtsberechenbar), falls es eine berechenbare Folge $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$ (bzw. $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$) und $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i = \alpha$ gibt. Eine Zahl α heißt berechenbar, falls sie links- und rechtsberechenbar ist. Levin zeigte 1970, dass in der Klasse aller linksberechenbaren Semimaße ein optimales Semimaß existiert.

Satz 1.1 [31] *Es existiert ein optimales linksberechenbares Semimaß* $\mathbf{M}$, *d.h. für jedes linksberechenbare Semimaß* m *existiert eine Konstante* c_m, *so dass*

$$\forall w(w \in X^* \to m(w) \leq c_m \cdot \mathbf{M}(w))$$

Ein optimales linksberechenbares Semimaß dominiert (bzw. majorisiert) also alle anderen linksberechenbaren Semimaße.
Es sei λ das Lebesque–Maß auf X^ω. Nach der üblichen Definition eines äußeren Maßes erhalten wir das α–dimensionale Hausdorff–Maß.

Definition 1.4 *Es sei* $0 \leq \alpha \leq 1$ *und* $F \subseteq X^\omega$. *Das* α–dimensionale Hausdorff–Maß *ist definiert als*

$$\mathbb{L}_\alpha(F) := \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \sum_{v\in V} (\lambda(v \cdot X^\omega))^\alpha \mid F \subseteq V \cdot X^\omega \wedge \underline{l}(V) \geq n \right\}$$

Beispiel 1.2 (Fortsetzung von Beispiel 1.1) Das Cantor–Diskontinuum hat für $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$ positives α–dimensionales Hausdorff–Maß (siehe [7]). □

Wir führen nun noch einige Eigenschaften des Hausdorff–Maßes an. Für die Translation $w \cdot F$ einer Sprache F mittels eines Wortes w ändert sich das α–dimensionale Hausdorff–Maß nur um eine multiplikative Konstante gegenüber dem Hausdorff–Maß der Sprache F.

Lemma 1.2 *Es seien* $F, F_0, F_1, F_2, \ldots \subseteq X^\omega$, $F_0, F_1, F_2, \ldots$ *Borel-Mengen und* $0 < \alpha \leq 1$. *Dann gilt*

(i). $\mathbb{L}_\alpha(w \cdot F) = r^{-\alpha\cdot|w|} \cdot \mathbb{L}_\alpha(F)$

(ii). Wenn $F_i \cap F_j = \emptyset$ *für* $i \neq j$, *dann ist* $\mathbb{L}_\alpha(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{L}_\alpha(F_i)$.

1.2.2 Hausdorff–Dimension

Das im vorangegangenen Kapitel eingeführte Hausdorff-Maß erfüllt die folgende bekannte Eigenschaft.

Satz 1.3 *Es sei $F \subseteq X^\omega$. Wenn $\mathbb{L}_\alpha(F) < \infty$, so ist $\mathbb{L}_{\alpha+\varepsilon}(F) = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$. Wenn $\mathbb{L}_\alpha(F) > 0$ ist, so gilt $\mathbb{L}_{\alpha-\varepsilon}(F) = \infty$ für jedes $\varepsilon > 0$.*

Betrachtet man $\mathbb{L}_\alpha(F)$ nun für festes $F \subseteq X^*$ als Funktion in α, so existiert genau ein Parameter α_0, so dass $\mathbb{L}_\alpha(F) = \infty$ für alle $\alpha < \alpha_0$, und $\mathbb{L}_\alpha(F) = 0$ für alle $\alpha > \alpha_0$. Dieser Verlauf wird in Abbildung 1.2 dargestellt. Diese „Sprungstelle" der Funktion

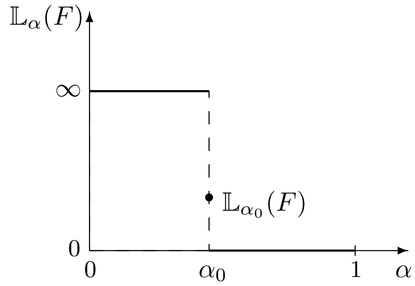

Abbildung 1.2: Graph von $\mathbb{L}_\alpha(F)$ als Funktion in α

heißt Hausdorff Dimension.

Definition 1.5 *Es sei $F \subseteq X^\omega$. Die* Hausdorff*–Dimension von F ist definiert als*

$$\dim_H(F) = \inf\{\alpha \mid \mathbb{L}_\alpha(F) = 0\} = \sup\{\alpha \mid \alpha = 0 \vee \mathbb{L}_\alpha(F) = \infty\}.$$

Wir führen jetzt einige weitere Eigenschaften der Hausdorff–Dimension an.
Die Hausdorff–Dimension ist stabil bezüglich abzählbarer Vereinigung und auch bezüglich der Translation einer Sprache F mittels eines Wortes w.

Lemma 1.4 *Es seien $F, F_1, F_2, \ldots \subseteq X^\omega$. Dann gilt:*

(i). $\dim_H \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i = \sup\{\dim_H F_i : i \in \mathbb{N}\}$

(ii). $\dim_H(w \cdot F) = \dim_H F$

1.3 Komplexität

1.3.1 Partielle Funktionen

In diesem Abschnitt zitieren wir bekannte Resultate, die zum Beispiel in [10] nachgelesen werden können. Algorithmische Beschreibungskomplexität kann unter Verwendung partiell-rekursiver Funktionen definiert werden. Hier kann die Komplexität eines Wortes w als Länge des kürzesten Parameters definiert werden, dessen Funktionswert w ist.

Definition 1.6 *Es sei $\varphi : X^* \to X^*$ eine partiell-rekursive Funktion. Die Komplexität eines Wortes $w \in X^*$ bezüglich φ ist dann definiert als*

$$\mathrm{K}_\varphi(w) := \min\{|\pi| \mid \varphi(\pi) = w\},$$

und $\mathrm{K}_\varphi(w) = \infty$, falls kein solches π existiert. D.h. es ist die Länge eines kürzesten Wortes, dessen Bild w ist.

Fasst man Funktionen zu Klassen zusammen, so existieren unter bestimmten Voraussetzungen optimale Funktionen bezüglich dieser Klasse:

Definition 1.7 *Eine Funktion φ heißt optimal bezüglich einer Klasse $\mathcal{D}$ von partiell-rekursiven Funktionen, falls $\varphi \in \mathcal{D}$ und für jede Funktion $\psi \in \mathcal{D}$ eine Konstante $c_{\varphi,\psi}$ existiert, so dass für jedes Wort $w \in X^*$ gilt:*

$$K_\varphi(w) \leq K_\psi(w) + c_{\varphi,\psi}$$

Die Konstante $c_{\varphi,\psi}$ hängt dabei von φ und ψ ab, jedoch nicht von w.

Solche optimalen Funktionen sind nicht eindeutig bestimmt. Jedoch existiert für zwei optimale Funktionen φ und ψ eine Konstante $c'_{\varphi,\psi}$ derart, dass $|\mathrm{K}_\varphi - \mathrm{K}_\psi| \leq c'_{\varphi,\psi}$ gilt. Wenn wir von der Komplexität (bzw. Entropie) einer Klasse sprechen, ist damit immer die Komplexität bezüglich eines (festgelegten) Repräsentanten aus der Menge der optimalen Funktionen gemeint. Wie in [30] sagen wir

Definition 1.8 *Die Komplexität (-sfunktion) bezüglich einer optimalen Funktion einer Klasse $\mathcal{D}$ heißt auch* Entropie von $\mathcal{D}$.

Wir werden jetzt auf die, unter anderem in [30] untersuchten, Komplexitäten eingehen, die in dieser Arbeit hauptsächlich eine Rolle spielen. Wir betrachten dazu die relevanten Klassen von partiell–rekursiven Funktionen. Es sei zunächst Φ die Menge aller partiell–rekursiven Funktionen. Es gilt der folgende Satz (siehe [10]).

Satz 1.5 *Es existiert eine optimale partiell-rekursive Funktion φ in Φ.*

Es sei mit φ_0 eine optimale partiell-rekursive Funktion fixiert. Die Komplexität bezüglich dieser Funktionen nennen wir (einfache) Kolmogorov–Komplexität.

Definition 1.9 *Es sei $w \in X^*$. Die (einfache)* Kolmogorov*–Komplexität von w ist definiert als* $\mathrm{KS}(w) := \mathrm{K}_{\varphi_0}(w)$.

Es sei Φ_p die Menge aller partiell-rekursiven Funktionen, deren Definitionsbereich ein Präfix-Code ist. Es gilt der folgende Satz (siehe [10]).

Satz 1.6 *Es existiert eine optimale Funktion φ_p in Φ_p.*

Auch hier fixieren wir eine optimale Funktion φ_p aus Φ_p. Die Komplexität bezüglich φ_p nennen wir Präfix–Komplexität.

Definition 1.10 *Es sei $w \in X^*$. Die Präfix–Komplexität von w ist definiert als* $\mathrm{KP}(w) := \mathrm{K}_{\varphi_p}(w)$.

Es sei Φ' die Menge aller partiell-rekursiven Funktionen $\varphi : X^* \times \mathbb{N} \to X^*$ und φ_b eine optimale Funktion in Φ'.

Definition 1.11 *Die längenbedingte* Kolmogorov*-Komplexität ist definiert als* $\mathrm{KS}(w \mid |w|) := \min\{|\pi| \mid \varphi_b(\pi, |w|) = w\}$.

Für jede Funktion $\varphi \in \Phi'$ sei

$$\mathrm{KR}_\varphi(w) := \min\{|\pi| \mid |\varphi(\pi, i)| = i \wedge \varphi(\pi, i) \sqsubseteq w \text{ für alle } i \in \{0, \ldots, |w|\}\},$$

und $\mathrm{KR}_\varphi(w) := \infty$, falls die Menge leer ist.

Satz 1.7 (Loveland) *Es existiert eine Funktion $\varphi_r \in \Phi'$ derart, dass für jede Funktion $\varphi \in \Phi'$ eine Konstante c_φ existiert mit $\mathrm{KR}_{\varphi_r}(w) \leq \mathrm{KR}_\varphi(w) + c_\varphi$ für jedes $w \in X^*$.*

Die von Loveland [11] eingeführte Entscheidungskomplexität kann damit wie folgt definiert werden:

Definition 1.12 *Die Entscheidungskomplexität eines Wortes $w \in X^*$ ist definiert als* $\mathrm{KR}(w) := \mathrm{KR}_{\varphi_r}(w)$.

Zwischen der einfachen, der bedingten und der Entscheidungskomplexität gilt die folgende Ungleichung (siehe [10]).

Satz 1.8 *Es existieren Konstanten c und c' derart, dass für jedes $w \in X^*$ die Ungleichung*

$$\mathrm{KS}(w) \geq \mathrm{KR}(w) + c \geq \mathrm{KS}(w \mid |w|) + c'$$

erfüllt ist.

Wir geben jetzt eine weitere Charakterisierung der Komplexitätsfunktionen KS, KR und KP an, die nicht auf der Kodierung von Wörtern beruht.

Satz 1.9 [30]

(i). Für die Kolmogorov*–Komplexität ist $|\{w \mid \mathrm{KS}(w) = n\}| \leq |X|^n$, und für jede rechtsberechenbare Funktion $f : X^* \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft*

$$|\{w \mid f(w) = n\}| \leq |X|^n,$$

gilt $\mathrm{KS}(w) \leq f(w) + O(1)$.

(ii). Für die Präfix–Komplexität ist $\sum_{w \in X^*} |X|^{-\mathrm{KP}(w)} \leq 1$, und für jede rechtsberechenbare Funktion $f : X^* \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{w \in X^*} |X|^{-f(w)} \leq 1$$

gilt $\mathrm{KP}(w) \leq f(w) + O(1)$.

(iii). Für jeden Präfix-Code M mit $M \subseteq \{w \mid \mathrm{KR}(w) = n\}$ gilt $|M| \leq |X|^n$. Wenn $f : X^* \to \mathbb{N}$ eine rechtsberechenbare Funktion mit der Eigenschaft

$$M \subseteq \{w \mid f(w) = n\} \wedge M \text{ ist Präfix–Code } \rightarrow |M| \leq |X|^n$$

ist, so gilt $\mathrm{KR}(w) \leq f(w) + O(1)$.

1.3.2 Beschreibungsmodi

In [20] wurde das Konzept der Beschreibungsmodi als eine weitere Variante eingeführt, um Beschreibungskomplexität zu definieren (siehe auch [28; 30]).

Definition 1.13 *Eine rekursiv aufzählbare Menge $D \subseteq X^* \times X^*$ heißt* Beschreibungsmodus*. Ist $(p, w) \in D$, so nennen wir p eine Beschreibung von w bezüglich D. Wir definieren die Komplexität von w bezüglich D als*

$$K_D(w) = \min \{ |p| \mid (p, w) \in D \}$$

Fasst man Beschreibungsmodi zu Klassen zusammen, so existieren unter bestimmten Voraussetzungen optimale Beschreibungsmodi bezüglich dieser Klasse, das heißt:

Definition 1.14 *Es sei $\mathcal{D}$ eine Klasse von Beschreibungsmodi. Ein Beschreibungsmodus D_o heißt* optimal *bezüglich $\mathcal{D}$, falls $D_o \in \mathcal{D}$ und für jeden Beschreibungsmodus $D \in \mathcal{D}$ eine Konstante c_D derart existiert, dass für jedes $w \in X$*

$$K_{D_o}(w) \leq K_D(w) + c_D$$

gilt.

Wir definieren Klassen von Beschreibungsmodi über die folgende Eigenschaft. Es sei D ein Beschreibungsmodus. Wenn die Bedingung

$$(p_1, w_1) \in D \wedge (p_2, w_2) \in D \wedge (p_1, p_2) \in R_1 \ \rightarrow \ (w_1, w_2) \in R_2 \tag{1.1}$$

für Relationen $R_1, R_2 \subseteq X^* \times X^*$ gilt, so nennen wir D einen (R_1, R_2)-*Modus*. Der folgende Satz zeigt, unter welchen Bedingungen eine über Relationen mit der Eigenschaft (1.1) definierte Klasse von Beschreibungsmodi einen optimalen Beschreibungsmodus enthält.

Satz 1.10 ([30]) *Es seien R_1 und R_2 entscheidbare Relationen auf $X^* \times X^*$. Dann besitzt die Klasse der (R_1, R_2)-Modi einen optimalen Beschreibungsmodus.*

Die Relationen auf X^*, die wir in dieser Arbeit verwenden, sind die Gleichheitsrelation und die Vergleichbarkeit bezüglich $\sqsubseteq$, welche wir mit γ bezeichnen (siehe [28]). Es ist also $(v, w) \in \gamma$ genau dann, wenn $v \sqsubseteq w$ oder $w \sqsubseteq v$.
Für die einfache, Entscheidungs- und die Präfix–Komplexität existieren auch Klassen von Beschreibungsmodi, deren Entropien mit den Komplexitätsfunktionen KS, KR bzw. KP übereinstimmen.

Satz 1.11 ([28]) *(i). Die Komplexität bezüglich eines optimalen $(=,=)$–Beschreibungsmodus stimmt mit der* KOLMOGOROV*–Komplexität* KS *überein.*

(ii). Die Komplexität bezüglich eines optimalen $(\gamma,=)$–Beschreibungsmodus stimmt mit der Präfix–Komplexität KP *überein.*

(iii). Die Komplexität bezüglich eines optimalen $(=,\gamma)$–Beschreibungsmodus stimmt mit der Entscheidungskomplexität KR *überein.*

Schließlich wird auch mittels der (γ,γ)–Beschreibungsmodi eine Komplexität definieren, die monotone Komplexität.

Definition 1.15 *Es sei E_M ein optimaler (γ,γ)–Beschreibungsmodus. Für jedes Wort $w \in X^*$ ist die monotone Komplexität $\mathrm{Km}(w) := \min\{|p| \mid (p,w) \in E_M\}$.*

Die monotone Komplexität kann man mittels eines beliebigen berechenbaren zylindrischen Maßes auf X^* nach oben abschätzen.

Lemma 1.12 ([29]) *Es sei μ ein berechenbares Maß auf X^*. Dann existiert eine Konstante c_μ, so dass*

$$\mathrm{Km}(w) \leq -\log \mu(w) + c_\mu$$

für jedes $w \in X^*$ gilt.

1.3.3 Transformation mit partiell-rekursiven Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir untersuchen, wie sich die Komplexität von Wörtern unter Abbildung mittels partiell-rekursiver Funktionen verändert. Bekannt ist die folgende Abschätzung (siehe [10]).

Satz 1.13 *Es sei $\varphi : X^* \to X^*$ eine partiell-rekursive Funktion. Dann ist $\mathrm{K}(\varphi(w)) \leq \mathrm{K}(w) + c_\varphi$ für $\mathrm{K} \in \{\mathrm{KP}, \mathrm{KS}\}$ und $w \in X^*$.*

Für die Entscheidungskomplexität und die monotone Komplexität gilt diese Ungleichung im Allgemeinen nicht. Das zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 1.3 Für die Binärdarstellung einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir $\mathrm{bin}(n)$. Es seien $C = \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\varphi(0^n) = 0^n1\mathrm{bin}(n)$. Es existiert eine Konstante c, so dass für jedes $w \in C$ die Komplexität $\mathrm{KR}(w) \leq \mathrm{Km}(w) + c' \leq c$ ist. Die Menge $C_\varphi = \{\varphi(w) \mid w \in C\}$ ist ein Präfix-Code. Daher ist für jedes $M \subseteq \{\varphi(w) \mid w \in$

$C \wedge \mathrm{KR}(\varphi(w)) \leq n\}$ die Ungleichung $|M| \leq |X|^{n+1}$. Weil C_φ ein unendlicher Präfix-Code ist, gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $w \in C$ mit $\mathrm{Km}(\varphi(w)) + c \geq \mathrm{KR}(\varphi(w)) \geq n$.

□

Die im Beispiel 1.3 angeführte Funktion φ ist nicht präfix-treu. Für präfix-treue Funktionen $\varphi : X^* \to X^*$ lässt sich die Ungleichung aus Satz 1.13 auch im Fall der monotonen und der Entscheidungskomplexität zeigen.

Lemma 1.14 *Es sei $\varphi : X^* \to X^*$ eine partiell-berechenbare, präfix-treue Funktion. Dann existiert eine Konstante c, so dass $\mathrm{Km}(\varphi(w)) \leq \mathrm{Km}(w) + c$ für jedes $w \in X^*$ gilt.*

Der Vollständigkeit halber geben wir einen Beweis an.

Beweis. Es sei E_0 ein optimaler (γ, γ)-Beschreibungsmodus. Wir konstruieren einen Modus E_φ wie folgt:

$$E_\varphi \quad := \quad \{(\pi, v) \mid \exists w \, (\, v \sqsubseteq \varphi(w) \wedge (\pi, w) \in E_0 \,) \, \}$$

Wir zeigen jetzt, dass die Implikation (1.1) gilt. Es seien also $(\pi_1, v_1), (\pi_2, v_2) \in E_\varphi$ und $\pi_1 \sqsubseteq \pi_2$. Dann existieren nach Konstruktion w_1, w_2 mit $v_1 \sqsubseteq \varphi(w_1)$ und $v_2 \sqsubseteq \varphi(w_2)$, für die $(\pi_1, w_1), (\pi_2, w_2) \in E_0$ gilt. Da E_0 ein (γ, γ)–Modus ist und $\pi_1 \sqsubseteq \pi_2$, gilt $w_1 \sqsubseteq w_2$ oder $w_2 \sqsubseteq w_1$. Auf Grund der Präfix-Treue von φ ist dann auch $\varphi(w_1) \sqsubseteq \varphi(w_2)$ oder $\varphi(w_2) \sqsubseteq \varphi(w_1)$. Es sei o.B.d.A. $\varphi(w_1) \sqsubseteq \varphi(w_2)$. Dann ist $v_1 \sqsubseteq \varphi(w_2)$ und $v_2 \sqsubseteq \varphi(w_2)$, also ist auch $v_1 \sqsubseteq v_2$ oder $v_2 \sqsubseteq v_1$.
Da E_0 ein optimaler Beschreibungsmodus ist, kann für jedes $w \in X^*$ die Komplexität von $\varphi(w)$ wie folgt abgeschätzt werden

$$\mathrm{Km}(\varphi(w)) = K_{E_0}(\varphi(w)) \leq K_{E_\varphi}(\varphi(w)) + c_{E_\varphi} = K_{E_0}(w) + c_{E_\varphi} = \mathrm{Km}(w) + c_{E_\varphi}$$

□

Lemma 1.15 *Es sei $\varphi : X^* \to X^*$ eine partiell–rekursive und präfix-treue Funktion. Dann existiert eine Konstante c, so dass für jedes $w \in X^*$ die Ungleichung $\mathrm{KR}(\varphi(w)) \leq \mathrm{KR}(w) + c$ gilt.*

Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von Lemma 1.14, wobei E_0 ein optimaler $(=, \gamma)$–Modus ist.

1.3.4 *a priori* Komplexität

Schließlich betrachten wir die *a priori* Komplexität. Ihre Definition verwendet das im Satz 1.1 eingeführte optimale linksberechenbare Semimaß **M**.

Definition 1.16 *Es sei* **M** LEVIN*s optimales linksberechenbares Semimaß aus Satz 1.1. Für jedes $w \in X^*$ ist die* a priori *Komplexität definiert als* $\mathrm{KA}(w) = \lfloor -\log \mathbf{M}(w) \rfloor$.

Die *a priori* Komplexität besitzt die folgende Eigenschaft (siehe [28]).

Satz 1.16 *Die Funktion* KA *ist eine rechtsberechenbare totale Funktion mit*

$$\sum_{w \in M} r^{-\mathrm{KA}(w)} \leq 1, \qquad \text{für jede präfixfreie Menge } M \subseteq X^*. \tag{1.2}$$

Für jede rechtsberechenbare Funktion $f : X^* \to \mathbb{N}$, die die Bedingung (1.2) erfüllt, ist $\mathrm{KA}(w) \leq f(w) + O(1)$.

Ähnlich der monotonen Komplexität kann man also die *a priori* Komplexität wie folgt abschätzen: Für jedes linksberechenbare Semimaß μ existiert eine Konstante c_μ derart, dass

$$\mathrm{KA}(w) \leq -\log \mu(w) + c_\mu$$

für jedes $w \in X^*$ gilt.
Auch bei der *a priori* Komplexität kann die Komplexität von Bildern einer präfixtreuen, partiell-rekursiven Funktion $\varphi : X^* \to X^*$ wie bei der monotonen Komplexität in Lemma 1.14 abgeschätzt werden. Der Vollständigkeit halber geben wir auch hier einen Beweis an.
Es sei wie in [21] $\mathbf{U}_\varphi(w) := \mathrm{Min}_\sqsubseteq\{v : v \in \mathrm{dom}(\varphi) \wedge w \sqsubseteq \varphi(v)\}$ die Menge aller bezüglich $\sqsubseteq$ minimalen Wörter des Definitionsbereiches von φ, deren Funktionswert w als Präfix hat. Damit können wir wie folgt Semimaße konstruieren:

Lemma 1.17 *Wenn φ eine präfix-treue Funktion und μ ein Semimaß ist, dann ist die Funktion $\mu_\varphi : X^* \to \mathbb{R}_+$ mit*

$$\mu_\varphi(w) := \textstyle\sum_{v \in \mathbf{U}_\varphi(w)} \mu(v) \tag{1.3}$$

auch ein Semimaß.

Beweis. Die Mengen $\mathbf{U}_\varphi(w)$ sind präfix-frei und für $x, y \in X$, $x \neq y$, existiert kein Paar von Wörtern $v \in \mathbf{U}_\varphi(wx)$ und $u \in \mathbf{U}_\varphi(wy)$ mit $v \sqsubseteq u$ oder $u \sqsubseteq v$. Daher ist

$\bigcup_{x\in X} \mathbf{U}_\varphi(wx)$ eine disjunkte Vereinigung und präfix-frei.
Weiterhin existiert für jedes $v \in \mathbf{U}_\varphi(wx)$ ein $u \in \mathbf{U}_\varphi(w)$, so dass $u \sqsubseteq v$ ist. Weil μ ein Semimaß ist, gilt $\mu(u) \geq \sum_{v\in C} \mu(v)$, falls $C \subseteq u \cdot X^*$ ein Präfix-Code ist.
Also haben wir

$$\mu_\varphi(w) = \sum_{v\in\mathbf{U}_\varphi(w)} \mu(v) \geq \sum_{x\in X} \sum_{v\in\mathbf{U}_\varphi(wx)} \mu(v) = \sum_{x\in X} \mu_\varphi(wx)\,.$$

□

Um Satz 1.19 zu beweisen benötigen wir noch das folgende Ergebnis über linksberechenbare Semimaße.

Lemma 1.18 *Es sei $\mu : X^* \to \mathbb{R}_+$ ein linksberechenbares Semimaß. Dann gibt es eine berechenbare Funktion $h : X^* \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$, so dass für alle $w \in X^*$ und $t \in \mathbb{N}$ die folgenden Eigenschaften gelten:*

(i). $h(w,t) \leq h(w,t+1)$

(ii). $\lim\limits_{t\to\infty} h(w,t) = \mu(w)$

(iii). $h(w,t) \geq \sum_{x\in X} h(wx,t)$

Beweis. Da μ linksberechenbar ist, existiert eine Funktion $g : X^* \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$, die den Bedingungen (i) und (ii) genügt.
Es sei $\mathcal{P}_i := \{C : C \subseteq X^* \wedge C \text{ ist präfix-frei } \wedge \max\{|w| \mid w \in C\} \leq i\}$. Dann gilt

$$\mathcal{P}_{i+1} = \Big\{\bigcup_{x\in X} x \cdot C_x : C_x \in \mathcal{P}_i\Big\} \cup \big\{\{e\}\big\}\,. \tag{1.4}$$

Wir definieren

$$h(w,t) := \begin{cases} 0, & \text{falls } t < |w|\text{ , und} \\ \max_{C\in\mathcal{P}_{t-|w|}} \sum_{v\in C} g(w\cdot v,t), & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.5}$$

Zunächst ist wegen $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}_{i+1}$ und $g(w,t) \leq g(w,t+1)$ die Bedingung (i) erfüllt.
Bedingung (ii) folgt auf Grund der Ungleichungen $g(w,t) \leq h(w,t)$ und

$$h(w,t) = \max_{C\in\mathcal{P}_{t-|w|}} \sum_{v\in C} g(w\cdot v,t) \leq \max_{C\in\mathcal{P}_{t-|w|}} \sum_{v\in C} \mu(w\cdot v) \leq \mu(w)$$

für $t \geq |w|$.
Schließlich zeigen wir noch Bedingung (iii). Für $t \geq |w|$ gilt wegen Gleichung (1.4) die Ungleichung

$$h(w,t) = \max_{C\in\mathcal{P}_{t-|w|}} \sum_{v\in C} g(wv,t) \geq \sum_{x\in X} \max_{C_x\in\mathcal{P}_{t-|w|-1}} \sum_{v\in C_x} g(wxv,t) \geq \sum_{x\in X} h(wx,t)\,.$$

Im Fall $t < |w|$ ist die Bedingung (iii) trivialerweise erfüllt. $\square$

Die Bedingung (iii) aus Lemma 1.18 zeigt, dass jede Funktion $\nu_t(w) := h(w,t)$ ein berechenbares Semimaß mit $\{w \mid \nu_t(w) > 0\} \subseteq \{w \mid |w| \leq t\}$ ist. Damit können wir den folgenden Satz beweisen.

Satz 1.19 *Wenn $\mu : X^* \to \mathbb{R}_+$ ein linksberechenbares Semimaß und $\varphi : X^* \to X^*$ eine partiell berechenbare präfix-treue Funktion ist, dann ist die durch Gleichung (1.3) definierte Funktion $\mu_\varphi : X^* \to \mathbb{R}_+$ ein linksberechenbares Semimaß.*

Beweis. Aus Lemma 1.17 folgt, dass μ_φ ein Semimaß ist. Es bleibt also zu zeigen, dass μ_φ linksberechenbar ist. Dazu betrachten wir die Funktionen

$$\mu_\varphi^{(t)}(w) := \sum_{v \in \mathbf{U}_\varphi(w,t)} h(v,t) \text{ mit } \mathbf{U}_\varphi(w,t) := \mathrm{Min}_\sqsubseteq\{v : v \in \mathrm{dom}^{(t)}(\varphi) \wedge w \sqsubseteq \varphi(v)\}\,.$$

Dabei ist $\mathrm{dom}^{(t)}(\varphi)$ die Menge der ersten t Elemente in der Aufzählungsreihenfolge von $\mathrm{dom}(\varphi)$. Die Abbildungen $\mu_\varphi^{(t)} : X^* \to \mathbb{R}_+$ sind dann berechenbare Semimaße mit endlichem Definitionsbereich.

Wir zeigen jetzt, dass $\mu_\varphi^{(t)}(w) \leq \mu_\varphi^{(t+1)}(w)$ für $t \in \mathbb{N}$ und $w \in X^*$ gilt: Für jedes $v' \in \mathbf{U}_\varphi(w,t)$ existiert ein $v \sqsubseteq v'$ derart, dass $v \in \mathbf{U}_\varphi(w,t+1)$ gilt. Weiterhin sind die Mengen $\mathbf{U}_\varphi(w,t) \cap v \cdot X^*$ präfix-frei. Daher ist

$$\mu_\varphi^{(t)}(w) = \sum_{v \in \mathbf{U}_\varphi(w,t+1)} \sum_{v' \in \mathbf{U}_\varphi(w,t) \cap v \cdot X^*} h(v',t) \leq \sum_{v \in \mathbf{U}_\varphi(w,t+1)} h(v,t+1) = \mu_\varphi^{(t+1)}(w)\,,$$

da $\nu_t(w) := h(w,t)$ nach Lemma 1.18 ein Semimaß ist.

Schließlich bleibt zu zeigen, dass $\lim\limits_{t\to\infty} \mu_\varphi^{(t)}(w) = \mu_\varphi(w) = \sum_{v \in \mathbf{U}_\varphi(w)} \mu(v)$ gilt.

Dazu wählen wir für $\varepsilon > 0$ ein $\ell \in \mathbb{N}$ derart, dass $\sum_{v \in \mathbf{U}_\varphi(w), |v| \leq \ell} \mu(v) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \mu_\varphi(w)$, und ein $t_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $\mathbf{U}_\varphi(w,t) \supseteq \mathbf{U}_\varphi(w) \cap \{v : |v| \leq \ell\}$ und $h(v,t) \geq \mu(v) - \frac{\varepsilon}{2 \cdot |\mathbf{U}_\varphi(w) \cap \{v : |v| \leq \ell\}|}$ für $t \geq t_\varepsilon$. Daraus folgt schließlich $\mu_\varphi^{(t)}(w) \geq \mu_\varphi(w) - \varepsilon$ für $t \geq t_\varepsilon$. $\square$

Die Aussage von Satz 1.19 gilt auch für LEVINs optimales Semimaß $\mathbf{M}$. Zusammen mit Satz 1.1 erhalten wir unser Ergebnis über die *a priori* Komplexität.

Korollar 1.20 *Es sei $\varphi : X^* \to X^*$ eine partiell–rekursive, präfix-treue Funktion. Dann existiert eine Konstante c_φ, so dass $\mathrm{KA}(\varphi(w)) \leq \mathrm{KA}(w) + c_\varphi$ für jedes $w \in X^*$ gilt.*

Für Funktionen, die nicht präfix-treu sind, gilt diese Ungleichung nicht. Um dies zu zeigen verwenden wir dieselbe Funktion, wie in Beispiel 1.3.

Beispiel 1.4 Es seien wieder $C = \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\varphi(0^n) = 0^n 1\mathrm{bin}(n)$. Die Funktion φ ist nicht präfix-treu. Es existiert eine Konstante c, so dass für jedes $w \in C$ die *a priori* Komplexität $\mathrm{KA}(w) \leq c$ ist, weil KA von oben durch Km beschränkt ist. Da $C_\varphi = \{\varphi(w) \mid w \in C\}$ ein Präfix-Code ist und $\mathbf{M}$ ein Semimaß, gilt $\sum_{\varphi(w) \in C_\varphi} \mathbf{M}(\varphi(w)) \leq 1$. Also existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\varphi(w) \in C_\varphi$, so dass $\mathbf{M}(\varphi(w)) < \varepsilon$. Damit haben wir $\mathrm{KA}(\varphi(w)) \geq -\log \varepsilon$, aber $\mathrm{KA}(w) \leq c$. □

1.3.5 Vergleich zwischen den verschiedenen Komplexitäten

In [30] wurden die verschiedenen Komplexitäten anhand der Beschreibungsmodi mit einander verglichen. Es gelten die folgenden Ungleichungen.

$$\mathrm{KP} \geq \mathrm{Km}, \qquad \mathrm{KP} \geq \mathrm{KS}, \qquad \mathrm{Km} \geq \mathrm{KR}, \qquad \mathrm{KS} \geq \mathrm{KR}$$ [1]

Die *a priori* Komplexität lässt sich durch die Komplexitäten Km und KR einschachteln. Die Bedingung für die Entscheidungskomplexität aus Satz 1.9 ist schwächer als die für die *a priori* Komplexität aus Satz 1.16. Daher liegt die Entscheidungskomplexität nicht über der *a priori* Komplexität. Das diese unterhalb der monotonen Komplexität liegt wurde in [29] gezeigt.

Insgesamt lässt sich das Verhältnis zwischen den verschiedenen Komplexitäten im folgenden Diagramm darstellen.

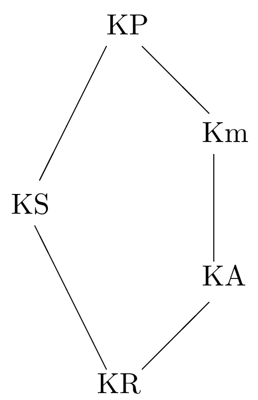

Abbildung 1.3: Uspensky–Shen–Pentagon

[1]das $\leq$-Zeichen ist asymptotisch zu verstehen

1.4 ε–Zufälligkeit

Wir gehen jetzt auf den Zufälligkeitsbegriff ein, der in dieser Arbeit verwendet wird. Dazu definieren wir zunächst MARTIN–LÖF–Tests.

Definition 1.17 *Ein sequentieller* MARTIN–LÖF*–Test ist eine aufzählbare Menge* $\mathcal{V} \subseteq X^* \times \mathbb{N}$*, mit den folgenden Eigenschaften*

(i). $\forall i\,(V_{i+1} \cdot X^\omega \subseteq V_i \cdot X^\omega)$*, wobei* $V_i := \{v \mid (v, i) \in \mathcal{V}\}$

(ii). $\lambda(V_i \cdot X^\omega) \leq |X|^{-i}$.

Ein ω-Wort heißt dann zufällig, falls sie jedem MARTIN–LÖF–Test widersteht:

Definition 1.18 *Ein* ω*–Wort* $\xi \in X^\omega$ *heißt* MARTIN–LÖF*–zufällig (ML-zufällig), falls es keinen sequentiellen* MARTIN–LÖF*–Test* $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *mit* $\xi \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} V_i \cdot X^\omega$ *gibt.*

MARTIN–LÖF–zufällige ω–Wörter kann man auch anhand der Präfix-Komplexität oder der *a priori* Komplexität charakterisieren.

Satz 1.21 *Es sei* $\xi \in X^\omega$*. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent.*

(i). ξ *ist* MARTIN–LÖF*–zufällig*

(ii). $\mathrm{KP}(\xi[0..n]) \geq_{\text{a.e.}} n - O(1)$

(iii). $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{KP}(\xi[0..n]) - n = \infty$

(iv). $\mathrm{KA}(\xi[0..n]) \geq_{\text{a.e.}} n - O(1)$

Wir wollen uns in dieser Arbeit mit ω-Wörtern beschäftigen, die nur bis zu einem bestimmten Grad $\varepsilon < 1$ zufällig sind. Das Konzept der MARTIN–LÖF–Tests kann auf verschiedene Weisen bezüglich $\varepsilon < 1$ relativiert werden. Tadaki verwendet dazu in [27] die Charakterisierung (iii) aus Satz 1.21.

Definition 1.19 [27] $\xi \in X^\omega$ *ist genau dann stark* CHAITIN*–*ε*–zufällig, wenn* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{KP}(\xi[0..n]) - \varepsilon \cdot n = \infty$ *gilt.*

In [27] wurden MARTIN–LÖF–Tests wie folgt verallgemeinert.

Definition 1.20 *Eine aufzählbare Menge* $\mathcal{V} \subseteq X^* \times \mathbb{N}$ *heißt* MARTIN–LÖF*–*ε*–Test wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind*

(i). $\forall i(V_{i+1} \cdot X^\omega \subseteq V_i \cdot X^\omega)$*, wobei* $V_i := \{v \mid (v, i) \in \mathcal{V}\}$ *und*

(ii). $\forall i\ \left(\sum_{v \in V_i} r^{-\varepsilon \cdot |v|} < r^{-i}\right)$

Wir nennen ein ω–Wort $\xi \in X^\omega$ Martin–Löf–ε–zufällig, *falls $\xi \notin \bigcap_{i \in \mathbb{N}} V_i \cdot X^\omega$ für alle* Martin–Löf*–ε–Tests gilt.*

Dazu findet man die folgende Charakterisierung mittels Präfix–Komplexität.

Satz 1.22 *Es sei $0 < \varepsilon \leq 1$ berechenbar. $\xi \in X^\omega$ ist genau dann* Martin–Löf*–ε–zufällig, wenn* $\mathrm{KP}(\xi[0..n]) \geq_{\text{a.e.}} \varepsilon \cdot n - O(1)$ *gilt.*

In dieser Arbeit verwenden wir die folgende Relativierung von Martin–Löf–Tests.

Definition 1.21 **[3]** *Eine aufzählbare Menge $\mathcal{V} \subseteq X^* \times \mathbb{N}$ heißt starker* Martin–Löf*–ε–Test wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i). $\forall i (V_{i+1} \cdot X^\omega \subseteq V_i \cdot X^\omega)$, *wobei* $V_i := \{v \mid (v, i) \in \mathcal{V}\}$ *und*

(ii). $\forall i \forall C \left(C \subseteq V_i \wedge C \text{ ist ein Präfix–Code} \rightarrow \sum_{v \in C} r^{-\varepsilon \cdot |v|} < r^{-i}\right)$

Wir nennen ein ω–Wort $\xi \in X^\omega$ stark Martin–Löf–ε–zufällig, *falls $\xi \notin \bigcap_{i \in \mathbb{N}} V_i \cdot X^\omega$ für alle starken* Martin–Löf*–ε–Tests.*

Bemerkung 1.5 Jeder starke Martin–Löf–ε–Test ist auch ein (schwacher) Martin–Löf–ε–Test. Aus diesem Grund ist umgekehrt jede stark Martin–Löf–ε–zufällige Sequenz auch schwach Martin–Löf–ε–zufällig. Die Umkehrung gilt nicht, was Reimann und Stefan in [16] gezeigt haben.

Vergleicht man die verschiedenen Verallgemeinerungen der Martin–Löf–Zufälligkeit, so erhält man die folgenden Implikationen.

$$\begin{array}{rll} & \xi & \text{ist stark Martin–Löf–}\varepsilon\text{–zufällig} \\ \rightarrow & \xi & \text{ist Chaitin–}\varepsilon\text{–zufällig} \\ \rightarrow & \xi & \text{ist schwach Martin–Löf–}\varepsilon\text{–zufällig} \end{array}$$

Die Umkehrungen dieser Implikationen gelten nicht (siehe [16]). Daher ist der Begriff des stark Martin–Löf–ε–zufälligen ω–Wortes der stärkste Begriff dieser drei Relativierungen. Für stark Martin–Löf–ε–zufällige ω–Wörter gilt die folgende Äquivalenz.

Satz 1.23 **[3]** *Es sei $0 < \varepsilon \leq 1$ berechenbar. $\xi \in X^\omega$ ist genau dann stark* Martin–Löf*–ε–zufällig, wenn* $\mathrm{KA}(\xi[0..n]) \geq_{\text{a.e.}} \varepsilon \cdot n - O(1)$ *gilt.*

2

Hausdorff–h–Maß

2.1 Einleitung

Der Begriff der HAUSDORFF–Dimension, wie er in Kapitel 1 betrachtet wurde, beruht auf den Exponentialfunktionen $h(t) = t^\alpha$ und den Maßen, die damit konstruiert werden. Es gibt aber auch ω-Sprachen F, deren $\dim_H F$-dimensionales Maß Null oder unendlich ist.

Beispiel 2.1 Wir betrachten die folgende Sprache F:

$$F := \{a, b\} \cdot \prod_{i=0}^{\infty} \left(\{a, b\}^{2^i - 1} \cdot a \right)$$

Diese Sprache hat HAUSDORFF–Dimension 1. Des weiteren gilt $s_{\mathbf{pref}F}(n) = 2^{n - \lfloor \log n \rfloor}$ und daher $\mathbb{L}_1(F) \leq \liminf_{n \to \infty} s_{\mathbf{pref}F}(n) \cdot 2^{-n} = 0$. □

Wie schon in [8] angedeutet, lässt sich dieser Begriff der HAUSDORFF-Dimension noch verfeinern, indem man für die Konstruktion der Maße eine größere Klasse von Funktionen zulässt. Aus dieser Verfeinerung ergeben sich dann in Kapitel 3 Schranken für die KOLMOGOROV–Komplexität von ω-Sprachen.

2.2 Definition und Eigenschaften

Wir betrachten hier nur Funktionen, die sich hinreichend „glatt“ in der Nähe des Nullpunktes verhalten. Dabei ist nur das Verhalten im positiven Bereich der reellen Zahlen relevant. Wir definieren also Dimensionsfunktionen wie in [8]:

Definition 2.1 *Eine Funktion $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ heißt* Dimensionsfunktion, *falls h rechtsseitig stetig, monoton und wachsend ist, und $h(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ gilt.*

Wie üblich nennen wir eine Funktion rechtsseitig stetig, falls für jede Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$ und $x_i \geq x$ die Gleichung $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_i) = f(x)$ erfüllt ist. Die Funktionsschar $h(t) = t^\alpha$ aus Kapitel 1 erfüllt die Bedingungen für Dimensionsfunktionen. Eine weitere Funktionenschar, die den Voraussetzungen von Definition 2.1 genügt, ist die Menge der Funktionen der logarithmischen Skala[1].

Beispiel 2.2 Es seien $\alpha, p_1, \ldots p_n \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ oder $\alpha = p_1 = \ldots = p_k = 0$ und $p_{k+1} > 0$. Dann sind die folgenden Funktionen Dimensionsfunktionen im Sinne von Definition 2.1:

$$h(t) = t^\alpha \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\log^i t^{-1}\right)^{-p_i}$$

Um hier für beliebig großes i einen definierten Wert zu erhalten, verwenden wir den folgenden modifizierten Logarithmus

$$\log^k t = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \log^{k-1} t \leq 1 \\ \log^k t & \text{, sonst} \end{cases}$$

Für hinreichend kleines t sind diese Funktionen h und ihre Ableitungen positiv (siehe [8]).

Mittels der Konstruktion eines äußeren Maßes wird wie in Definition 1.4 jetzt das h–dimensionale Maß einer Sprache $F \subseteq X^\omega$ eingeführt.

Definition 2.2 *Es sei $F \subseteq X^\omega$ und h eine Dimensionsfunktion. Das h–dimensionale Maß von F ist definiert als*

$$\mathcal{H}^h(F) = \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \sum_{v\in V} h\left(r^{-|v|}\right) \;\middle|\; F \subseteq V \cdot X^\omega \wedge \underline{l}(V) \geq n \right\}$$

Die Näherung für $\mathcal{H}^h(F)$ mit Überdeckungen durch Kugeln vom Durchmesser höchstens δ bezeichnen wir mit $\mathcal{H}^h_\delta(F) := \inf\left\{ \sum_{v\in V} h\left(r^{-|v|}\right) \mid F \subseteq V \cdot X^\omega \wedge \underline{l}(V) \geq -\log\delta \right\}$.

Wir werden zunächst untersuchen, was wir anhand der Funktionen h und g über die Maße $\mathcal{H}^g$ und $\mathcal{H}^h$ aussagen können.

[1] Die Bezeichnung hat Hausdorff in seinem Artikel [8] eingeführt.

Lemma 2.1 ([8]) *Es seien g, h Dimensionsfunktionen und $F \subseteq X^\omega$.*

(i). Wenn $\frac{h(t)}{g(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, dann folgt aus $\mathcal{H}^g(F) < \infty$ schon $\mathcal{H}^h(F) = 0$, und aus $\mathcal{H}^h(F) > 0$ folgt $\mathcal{H}^g(F) = \infty$.

(ii). Wenn $c_1 \cdot g(t) \leq h(t) \leq c_2 \cdot g(t)$ für Konstanten $c_1, c_2 > 0$ und hinreichend kleines t gilt, dann ist für jedes $F \subseteq X^\omega$ die Ungleichung $c_1 \cdot \mathcal{H}^g(F) \leq \mathcal{H}^h(F) \leq c_2 \cdot \mathcal{H}^g(F)$ erfüllt.

Beweis. Teil (i). Es seien $\varepsilon > 0$ beliebig und $\mathcal{H}^g(F) = c$. Wir wählen t_ε so, dass $\frac{h(t)}{g(t)} < \varepsilon$ für jedes $t \leq t_\varepsilon$. Sei $V \subseteq X^*$ mit $F \subseteq V \cdot X^*$, $\underline{l}(V) \geq -\log t_\varepsilon$ und $\sum_{v\in V} g(r^{-|v|}) < c + 1$. Dann gilt $h(r^{-|v|}) \leq \varepsilon \cdot g(r^{-|v|})$, für jedes $v \in V$. Damit folgt

$$\sum_{v\in V} h(r^{-|v|}) \leq \varepsilon \cdot \sum_{v\in V} g(r^{-|v|}) < \varepsilon \cdot (c+1)\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung.

Teil (ii). Weil $c_1 \cdot g(t) \leq h(t) \leq c_2 \cdot g(t)$ für alle $t \leq t_\varepsilon$ gilt, folgt für jedes $V \subseteq X^*$ mit $\underline{l}(V) > -\log t_\varepsilon$ auch

$$c_1 \cdot \sum_{v\in V} g(r^{-|v|}) \leq \sum_{v\in V} h(r^{-|v|}) \leq c_2 \cdot \sum_{v\in V} g(r^{-|v|})$$

□

Als nächstes werden wir ein Ergebnis für das α–dimensionale Maß $\mathbb{L}_\alpha$ aus Lemma 1.2 auf das h–dimensionale Maß übertragen. Allerdings kann die Gleichheit (bis auf eine multiplikative Konstante) der Maße von F und der Translation der Sprache $w \cdot F$ nicht bewahrt werden. Es gilt nur die folgende Ungleichung zwischen den Maßen:

Lemma 2.2 *Es sei h eine Dimensionsfunktion. Dann gilt für jede ω–Sprache $F \subseteq X^\omega$ und jedes $w \in X^*$ die Ungleichung*

$$\mathcal{H}^h(w \cdot F) \leq \mathcal{H}^h(F)$$

Beweis. Da h eine Dimensionsfunktion ist, muss $h(t) \xrightarrow{t\to 0} 0$ sein. Außerdem ist $r^{-|w|-|v|} < r^{-|v|}$ für jedes $v \in X^*$, und damit gilt dann $\sum_{v\in V} h(r^{-|w|-|v|}) \leq \sum_{v\in V} h(r^{-|v|})$, für jedes $V \subseteq X^*$. □

Eine Ungleichung der Form $c \cdot h(r^{-|v|}) \leq h(r^{-|wv|})$ kann nicht für beliebige Dimensionsfunktionen gezeigt werden. Daher kann eine Abschätzung $c \cdot \mathcal{H}^h(F) \leq \mathcal{H}^h(w \cdot F)$

des h–Maßes von $w \cdot F$ von unten nicht auf die gleiche Weise bewiesen werden, wie Lemma 2.2.
Wir geben jetzt ein Beispiel für eine Dimensionsfunktion an, bei der $\liminf_{n\to\infty} \frac{-\log h(r^{-n})}{n} < \limsup_{n\to\infty} \frac{-\log h(r^{-n})}{n}$ ist, und die Ungleichung $c \cdot h(r^{-|v|}) \leq h(r^{-|wv|})$ für kein $0 < c \leq 1$ erfüllt ist.

Beispiel 2.3 Es seien $0 < \varepsilon_- < \varepsilon^+ < 1$. Wir definieren jetzt eine Treppenfunktion mit den Sprungstellen r^{-x_i} für $x_0 \geq 2$ und $x_i = \left(\frac{\varepsilon^+}{\varepsilon_-}\right)^i \cdot x_0$ wie folgt:

$$h(r^{-x}) = r^{-\varepsilon^+ \cdot x_i} \qquad , \text{falls } x_i < x \leq x_{i+1}$$

und $h(t) = 1$, falls $t \geq r^{-x_0}$. Dann gilt

$$h(r^{-x_{i+1}}) = r^{-\varepsilon^+ \cdot x_i} = r^{-\varepsilon^+ \cdot (\frac{\varepsilon^+}{\varepsilon_-})^i \cdot x_0} = r^{-\varepsilon_- \cdot (\frac{\varepsilon^+}{\varepsilon_-})^{i+1} \cdot x_0} = r^{-\varepsilon_- \cdot x_{i+1}} .$$

Also ist $\liminf_{n\to\infty} \frac{-\log h(r^{-n})}{n} \leq \varepsilon_-$. Andererseits ist für jedes $\delta > 0$ der Funktionswert $h(r^{-(x_i+\delta)}) = r^{-\varepsilon^+ \cdot x_i}$, daher ist $\limsup_{n\to\infty} \frac{-\log h(r^{-n})}{n} \geq \varepsilon^+$.
Es sei jetzt $0 < c \leq 1$. Wir betrachten die linearen Funktionen

$$s_i(t) = \frac{h(r^{-x_i})}{r^{-x_i}} \cdot t \qquad \text{für } i \in \mathbb{N} .$$

Im offenen Intervall $(r^{-m}; r^{-x_i})$ mit $m = x_i \cdot (1 - \varepsilon_- + \varepsilon^+)$ ist $s_i(t) > h(t)$. Weil $(1 - \varepsilon_- + \varepsilon^+) > 1$ ist, existiert für jedes $w \in X^*$ ein $i \in \mathbb{N}$ so, dass $r^{-|w|-x_j}, r^{-x_j+\log c} \in (r^{-m}; r^{-x_j})$ für alle $j \geq i$ gilt. Dann ist

$$c \cdot h(r^{-x_j}) = s_j(r^{-x_j+\log c}) > h(r^{-x_j+\log c}) = h(r^{-|w|-x_j})$$

Also gilt die Ungleichung $h(r^{-|v|}) \cdot r^{-\varepsilon^+ \cdot |w|} \leq h(r^{-(|v|+|w|)})$ nicht für beliebige Dimensionsfunktionen. $\square$

Unter stärkeren Voraussetzungen an die Dimensionsfunktion können wir die Abschätzung aus Lemma 2.2 verfeinern und auch eine Abschätzung von unten angeben.

Lemma 2.3 *(i). Ist* $\frac{-\log h(r^{-n})}{n}$ *monoton wachsend und* $\lim_{n\to\infty} \frac{-\log h(r^{-n})}{n} = \varepsilon_-$, *so ist*

$$\mathcal{H}^h(w \cdot F) \leq r^{-\varepsilon_1 \cdot |w|} \cdot \mathcal{H}^h(F)$$

für jedes $\varepsilon_1 < \varepsilon_-$ *erfüllt.*

(ii). Ist $\frac{-\log h(r^{-n})}{n}$ *monoton fallend und* $\lim_{n\to\infty} \frac{-\log h(r^{-n})}{n} = \varepsilon^+$*, so ist*

$$r^{-\varepsilon_2 \cdot |w|} \cdot \mathcal{H}^h(F) \leq \mathcal{H}^h(w \cdot F)$$

für jedes $\varepsilon_2 > \varepsilon^+$ *erfüllt.*

Beweis. Wir beweisen nur den ersten Teil, der Beweis des zweiten Teils ist analog. Es sei $\delta > 0$. Weil $\lim_{n\to\infty} \frac{-\log h(r^{-n})}{n} = \varepsilon_-$ gilt, ist auch $\frac{-\log h(r^{-|v|})}{|v|} \geq \varepsilon_- - \delta$ für hinreichend großes $|v|$. Damit können wir abschätzen:

$$h(r^{-|wv|}) = r^{\frac{-\log h(r^{-|wv|})}{|wv|} \cdot (-|w|) + \frac{-\log h(r^{-|wv|})}{|wv|} \cdot (-|v|)} \leq r^{-(\varepsilon_- - \delta) \cdot |w| + \frac{-\log h(r^{-|wv|})}{|wv|} \cdot (-|v|)}$$

Und weil $\frac{-\log h(r^{-n})}{n}$ in n monoton wachsend ist gilt weiter:

$$r^{-(\varepsilon_- - \delta) \cdot |w| + \frac{-\log h(r^{-|wv|})}{|wv|} \cdot (-|v|)} \leq r^{-(\varepsilon_- - \delta) \cdot |w| + \left(\frac{\log h(r^{-|v|})}{|v|}\right) \cdot |v|} = r^{-(\varepsilon_- - \delta) \cdot |w|} \cdot h(r^{-|v|})$$

$\square$

2.3 Berechnung des Maßes

In diesem Abschnitt werden wir untersuchen, wie sich das Maß einer Menge $F \subseteq X^\omega$ berechnen lässt. Wir werden Abschätzungen mittels des Masseverteilungsprinzips (siehe [7, 4.2]) angeben.

Lemma 2.4 (Untere Schranke I) *Es seien* $F \subseteq X^\omega$*,* μ *eine Maß mit* $\mu(F) = \mu(X^\omega)$ *und* h *eine Dimensionsfunktion. Wenn Konstanten* $c, \delta > 0$ *existieren, so dass*

$$\mu(U) \leq c \cdot h(\mathrm{diam}(U))$$

für alle $U \subseteq X^\omega$ *mit* $\mathrm{diam}(U) \leq \delta$ *gilt, dann gilt auch* $\mathcal{H}^h(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$.

Beweis. Es sei $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Mengenfamilie mit $F \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ und $\delta' \geq \mathrm{diam}(U_i)$ ($\delta' \leq \delta$). Dann gilt

$$0 < \mu(F) = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(U_i) \leq c \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} h(\mathrm{diam}(U_i)),$$

und daher gilt auch

$$0 < \mu(F) \leq c \cdot \inf_{(U_i)_{i\in\mathbb{N}}} \sum_{i\in\mathbb{N}} h(\mathrm{diam}(U_i)) = c \cdot \mathcal{H}^h_{\delta'}(F).$$

Mit $\delta' \to 0$ folgt dann $\mathcal{H}^h(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$. □

Das Maß kann ebenfalls von unten durch eine positive Konstante abgeschätzt werden, falls der obere Grenzwert des Quotienten des Maßes und der Dimensionsfunktion endlich ist.

Lemma 2.5 (Untere Schranke II) *Es seien $F \subseteq X^\omega$, μ ein Maß auf X^ω mit $\mu(F) = \mu(X^\omega)$ und $0 < c < \infty$ eine Konstante. Falls $\limsup\limits_{w \to \xi} \frac{\mu(w \cdot X^\omega)}{h(|X|^{-|w|})} < c$ für alle $\xi \in F$, so ist $\mathcal{H}^h(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$.*

Beweis. Für $\delta > 0$ sei:

$$F_\delta = F \cap \left\{ \xi \mid \mu(w \cdot X^\omega) < c \cdot h(|X|^{-|w|}) \text{ für alle } w \sqsubset \xi \text{ mit } |w| \geq -\log \delta \right\}$$

Weiter sei $W = \{w_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ mit $F \subseteq W \cdot X^\omega$ und $-\log \delta \leq \underline{l}(W)$. Weil $F_\delta \subseteq F$ gilt, ist auch $F_\delta \subseteq W \cdot X^\omega$. Enthält eine Kugel $w_i \cdot X^\omega$ ein ω–Wort $\xi \in F_\delta$, so ist $w_i \sqsubset \xi$, und nach Definition von F_δ gilt dann auch $\mu(w_i \cdot X^\omega) < c \cdot h(|X|^{-|w_i|})$. Also folgt

$$\mu(F_\delta) \leq \sum_{i \in I} \mu(w_i \cdot X^\omega) < c \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} h(|X|^{-|w_i|})$$

mit $I = \{i : w_i \in W \wedge w_i \in \mathbf{pref}(F_\delta)\}$. Da dies für beliebige W mit $F \subseteq W \cdot X^\omega$ und $-\log \delta \leq \underline{l}(W)$ gilt, haben wir auch $\mu(F_\delta) \leq c \cdot \inf_W \sum_{i \in \mathbb{N}} h(|X|^{-|w_i|}) = c \cdot \mathcal{H}^h_\delta(F)$. Weil $\limsup\limits_{w \to \xi} \frac{\mu(w \cdot X^\omega)}{h(|X|^{-|w|})} < c$ gilt, nähert sich F_δ mit $\delta \to 0$ an F an und $\lim\limits_{\delta \to 0} \mathcal{H}^h_\delta(F) = \mathcal{H}^h(F)$. Also ist $\frac{\mu(F)}{c} \leq \mathcal{H}^h(F)$. □

Können wir den oberen Grenzwert $\limsup\limits_{w \to \xi} \frac{\mu(w \cdot X^\omega)}{h(|X|^{-|w|})}$ für alle $\xi \in F$ durch eine Konstante c von unten begrenzen, so erhalten wir eine Abschätzung für das Maß von oben.

Lemma 2.6 (Obere Schranke) *Es seien $F \subseteq X^\omega$, μ ein Maß auf X^ω und $0 < c < \infty$ eine Konstante.*
Wenn $\limsup\limits_{w \to \xi} \frac{\mu(w \cdot X^\omega)}{h(|X|^{-|w|})} > c$ für alle $\xi \in F$ gilt, dann ist $\mathcal{H}^h(F) \leq \frac{\mu(X^\omega)}{c}$.

Beweis. Es sei $\delta > 0$ fixiert und es sei

$$C := \{w \mid 0 < |X|^{-|w|} < \delta \wedge \mu(w \cdot X^\omega) > c \cdot h(|X|^{-|w|}) \wedge \exists \xi \in F \, w \sqsubset \xi\}$$

Dann gilt $F \subseteq \bigcup_{w \in C} w \cdot X^\omega$, weil nach Voraussetzung $\limsup\limits_{w \to \xi} \frac{\mu(w \cdot X^\omega)}{h(|X|^{-|w|})} > c$, für alle $\xi \in F$ gilt. Da entweder $w_1 \cdot X^\omega \cap w_2 \cdot X^\omega = \emptyset$ oder $w_1 \cdot X^\omega \subseteq w_2 \cdot X^\omega$ gilt, kann $C' \subseteq C$

so gewählt werden, dass $w_1 \cdot X^\omega \cap w_2 \cdot X^\omega = \emptyset$ für alle $w_1, w_2 \in C'$ mit $w_1 \neq w_2$ gilt und $\bigcup_{w \in C} w \cdot X^\omega = \bigcup_{w \in C'} w \cdot X^\omega$ ist. Damit lässt sich abschätzen:

$$\mathcal{H}^h_\delta(F) \leq \sum_{w \in C'} h(|X|^{-|w|}) \leq c^{-1} \cdot \sum_{w \in C'} \mu(w \cdot X^\omega) \leq \frac{\mu(X^\omega)}{c}$$

□

Eine obere Schranke für das h–dimensionale Maß einer ω–Sprache kann auch mittels einer Folge von Sprachen endlicher Wörter wie folgt erreicht werden:

Korollar 2.7 *Es sei $F \subseteq X^\omega$. Für jede Folge $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $F \subseteq V_i \cdot X^\omega$ und $\underline{l}(V_i) \geq i$ gilt*

$$\mathcal{H}^h(F) \leq \lim_{i \to \infty} \sum_{v \in V_i} h\left(r^{-|v|}\right) .$$

Wir betrachten jetzt das in der Einleitung angeführte Beispiel 2.1 und finden eine Dimensionsfunktion, so dass das Maß der Sprache positiv und endlich ist.

Beispiel 2.4 Sei jetzt die Dimensionsfunktion $h(t) = t \cdot \left(\frac{1}{\log \frac{1}{t}}\right)^{-1} = t \cdot \log \frac{1}{t}$ gewählt und das Alphabet sei $X = \{a, b\}$. Wir werden jetzt das h–dimensionale Maß für die Menge

$$F := \{a, b\} \cdot \prod_{i=0}^{\infty} \left(\{a, b\}^{2^i - 1} \cdot a\right)$$

berechnen. F ist die Menge aller Wörter, die an den Positionen 2^i für alle i den Buchstaben a haben und sonst beliebige Buchstaben. Hier gilt $s_{\mathbf{pref}(F)}(n) = 2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor}$ und mit Theorem 4 aus [22] ist bekannt, dass $\dim_H F = \liminf_{n \to \infty} \frac{\log_2 s_{\mathbf{pref}(F)}(n)}{n} = 1$ und $\mathbb{L}_{\dim_H F}(F) = 0$.

(i). Für die obere Abschätzung das h–Maßes von F verwenden wir eine Folge von Überdeckungen nach Korollar 2.7. Als Überdeckung mit Mindestlänge n verwenden wir die Menge aller Präfixe von F der Länge n:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^h(F) &= \lim_{n \to \infty} \inf \left\{ \sum_{v \in V} h(2^{-|v|}) : V \cdot X^\omega \supseteq F \wedge \underline{l}(V) \geq n \right\} \\
&= \lim_{n \to \infty} \inf \left\{ \sum_{v \in V} 2^{-|v|} \cdot \log \frac{1}{2^{-|v|}} : V \cdot X^\omega \supseteq F \wedge \underline{l}(V) \geq n \right\} \\
&\leq \lim_{n \to \infty} s_{\mathbf{pref}(F)}(n) \cdot 2^{-n} \cdot \log \frac{1}{2^{-n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2^{\lfloor \log n \rfloor}} \cdot 2^{-n} \cdot \log 2^n = 1
\end{aligned}$$

(ii). Um eine untere Schranke für das h–Maß zu erhalten, benutzen wir Lemma 2.4 und definieren das folgende Maß auf X^ω: $\mu(X^\omega) = 1$ und

$$\mu(wx \cdot X^\omega) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } wx \notin \mathbf{pref}(F) \\ \frac{\mu(w \cdot X^\omega)}{2} & \text{, falls } |w| \neq 2^k - 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } wx \in \mathbf{pref}(F) \\ \mu(w \cdot X^\omega) & \text{, falls } |w| = 2^k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \text{ und } wx \in \mathbf{pref}(F) \end{cases}$$

Dabei wird die Masse einer Kugel $w \cdot X^\omega$ mit dem Durchmesser r^{-n} gleichmäßig auf alle Kugeln $wx \cdot X^\omega$ innerhalb von $w \cdot X^\omega$ (mit dem Durchmesser $r^{-(n+1)}$) verteilt. Falls ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|w| = 2^k$ existiert und $w \in \mathbf{pref}(F)$, ergibt sich für das Maß

$$\mu(w \cdot X^\omega) = 2^{-(|w| - \log|w|)} = 2^{-|w|} \cdot |w| = h\left(2^{-|w|}\right).$$

Ist $w \in \mathbf{pref}(F)$ und es existiert kein $k \in \mathbb{N}$ mit $|w| = 2^k$, so ist

$$\mu(w \cdot X^\omega) = 2^{-(|w| - \lfloor \log|w| \rfloor)} = 2^{-|w|} \cdot 2^{\lfloor \log|w| \rfloor} \leq 2^{-|w|} \cdot |w| = h\left(2^{-|w|}\right).$$

Für Wörter $w \notin \mathbf{pref}(F)$ gilt $\mu(w \cdot X^\omega) = 0 \leq 2^{-|w|} \cdot |w| = h(2^{-|w|})$. Also ist $\mu(w \cdot X^\omega) \leq h(2^{-|w|})$ und daher gilt nach Lemma 2.4 auf Seite 23 die Abschätzung $1 = \mu(F) \leq \mathcal{H}^h(F) \leq 1$.

Wir wollen nun untersuchen, wann eine ω-Sprache F das h-Maß 0 hat. Dazu zeigen wir zunächst, dass der δ-Limes einer Sprache $V \subseteq X^*$ unter bestimmten Voraussetzungen eine h-Nullmenge ist.

Lemma 2.8 *Es seien $V \subseteq X^*$ und h eine Dimensionsfunktion. Wenn die Ungleichung $\sum_{v \in V} h\left(r^{-|v|}\right) < \infty$ gilt, so ist $\mathcal{H}^h(V^\delta) = 0$.*

Beweis. Es sei $V^{(i)} := \{v \mid v \in V \wedge |\mathbf{pref}(v) \cap V| = i + 1\}$. In $V^{(i)}$ sind genau die Wörter aus V enthalten, die in V genau $i+1$ Präfixe haben. Damit gilt $V^{(i)} \cdot X^\omega \supseteq V^\delta$ und V ist die disjunkte Vereinigung der $V^{(i)}$ (d.h. $V = \dot{\bigcup}_{i \in \mathbb{N}} V^{(i)}$), und es gilt

$$\mathcal{H}^h(V^\delta) \leq \lim_{j \to \infty} \sum_{v \in V^{(j)}} h(r^{-|v|}) \qquad \text{nach Korollar 2.7.}$$

Nach Voraussetzung gilt aber

$$\sum_{v \in V} h(r^{-|v|}) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{v \in V^{(j)}} h(r^{-|v|}) < \infty$$

und deswegen muss auch $\lim\limits_{j \to \infty} \sum_{v \in V^{(j)}} h\left(r^{-|v|}\right) = 0$ sein. Daher gilt die Behauptung $\mathcal{H}^h(V^\delta) = 0$. □

Für die in Beispiel 2.2 eingeführten Funktionen der logarithmischen Skala kann man umgekehrt auch zeigen, dass eine Menge mit h-Maß 0 immer im δ-Limes einer Sprache enthalten ist, die die Summenbedingung aus Lemma 2.8 erfüllt. Für die Funktionsschar $h(t) = t^\alpha$ wurde die Behauptung in [23] gezeigt.

Lemma 2.9 *Es sei* $h(t) = t^\alpha \cdot \prod_{i=1}^{n} (\log^i t^{-1})^{-p_i}$ *nicht die identische Funktion. Wenn* $\mathcal{H}^h(F) = 0$*, dann existiert ein* $V \subseteq X^*$*, so dass* $F \subseteq V^\delta$ *und*

$$\sum_{v \in V} h(r^{-|v|}) < \infty.$$

Beweis. Es sei also $h(t) = t^\alpha \cdot \prod_{i=1}^{n} (\frac{1}{\log^i \frac{1}{t}})^{p_i}$ nicht die identische Funktion. Definiere die folgende Mengenfamilie $\left\{V_i \mid i \in \mathbb{N} \wedge F \subseteq V_i \cdot X^\omega \wedge \sum_{v \in V_i} h(r^{-|v|}) < r^{-i}\right\}$. Für diese Mengen V_i gilt dann auch $h(r^{-\underline{l}(V_i)}) < r^{-i}$, und damit

$$\begin{aligned} h(r^{-\underline{l}(V_i)}) < r^{-i} \quad &\leftrightarrow \quad r^{-\alpha \cdot \underline{l}(V_i)} \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\log^j r^{\underline{l}(V_i)}} \right)^{p_j} < r^{-i} \\ &\leftrightarrow \quad -\alpha \cdot \underline{l}(V_i) + \log \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\log^j r^{\underline{l}(V_i)}} \right)^{p_j} \leq -i \\ &\leftrightarrow \quad -\alpha \cdot \underline{l}(V_i) + \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \left(-\log^{j+1} r^{\underline{l}(V_i)} \right) \leq -i \\ &\leftrightarrow \quad \underline{l}(V_i) - \frac{1}{\alpha} \cdot \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \left(-\log^{j+1} r^{\underline{l}(V_i)} \right) \geq \frac{i}{\alpha} \qquad (2.1) \end{aligned}$$

Für die Menge $V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ gilt dann

$$\sum_{v \in V} h(r^{-|v|}) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{v \in V_i} h(r^{-|v|}) < \sum_{i \in \mathbb{N}} r^{-i} < \infty\,.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $F \subseteq V^\delta$ gilt. Nach Konstruktion gilt $V_i \cdot X^\omega \supseteq F$ und wegen Ungleichung (2.1) gibt es eine Folge $(i_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\underline{l}(V_{i_1}) > \underline{l}(V_{i_2}) > \ldots$ Also hat jedes $\xi \in F$ beliebig lange Präfixe in V. □

Zusammengefasst haben wir jetzt eine notwendige und hinreichende Bedingung für Nullmengen bzgl. des h-Maßes gefunden.

Satz 2.10 *Es sei* $h(t) = t^\alpha \cdot \prod_{i=1}^{n} (\log^i t^{-1})^{-p_i}$ *und* $F \subseteq X^\omega$*. Es gilt genau dann* $\mathcal{H}^h(F) = 0$*, wenn ein* $V \subseteq X^*$ *existiert mit* $F \subseteq V^\delta$ *und* $\sum_{v \in V} h(r^{-|v|}) < \infty$.

Beweis. Es seien zunächst $V \subseteq X^*$ mit $\sum_{v \in V} h(r^{-|v|}) < \infty$ und $F \subseteq V^\delta$. Wegen Lemma 2.8 ist dann $\mathcal{H}^h(V^\delta) = 0$. Also folgt $\mathcal{H}^h(F) = 0$.

Die umgekehrte Richtung ist genau die Aussage von Lemma 2.9. $\square$

3

Komplexitätsschranken

Die Komplexität eines ω-Wortes ξ verstehen wir als Funktion, die jeder natürlichen Zahl n die Komplexität des Präfixes von ξ der Länge n zuordnet. Das ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

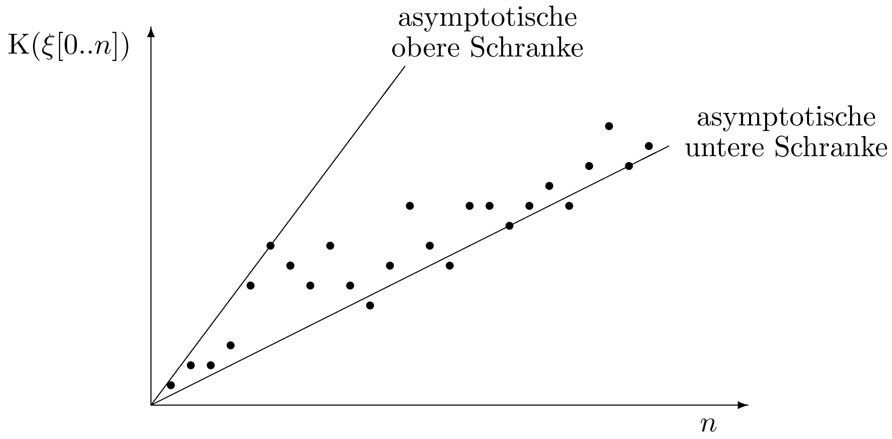

Abbildung 3.1: Komplexität eines ω-Wortes ξ

Die Anstiege der eingezeichneten linearen oberen bzw. unteren asymptotischen Schranke der Komplexität sind dabei

$$\underline{\kappa}(\xi) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathrm{K}(\xi[0..n])}{n} \qquad \text{und} \qquad \kappa(\xi) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathrm{K}(\xi[0..n])}{n}\,.$$

Dabei sind die Werte $\kappa(\xi)$ und $\underline{\kappa}(\xi)$ unabhängig von der verwendeten Komplexität, weil sich $\mathrm{KR}(\xi[0..n])$ und $\mathrm{KP}(\xi[0..n])$ höchstens um einen logarithmischen Summanden unterscheiden. In diesem Kapitel werden wir mit Hilfe des Hausdorff–h–Maßes

Schranken für verschiedene Arten der algorithmischen Beschreibungskomplexität herleiten. Wir werden zeigen, dass in Mengen mit positivem h–Maß Elemente enthalten sind, deren Komplexität nicht unter bestimmte von h abhängige Schranken fallen. Genauer gesagt ist es sogar so, dass das Maß einer solchen Menge hauptsächlich auf den Elementen mit hoher Komplexität konzentriert ist.

Für konstruktiv beschreibbare ωSprachen werden wir obere Schranken für die Komplexität aller Elemente zeigen. Wir betrachten dabei insbesondere ω-Potenzen V^ω einer Sprache V.

Und schließlich werden wir beide Schranken kombinieren und untersuchen, wann in der ω-Potenz einer Sprache ein Element enthalten ist, dessen Komplexität von oben und von unten durch dieselbe Funktion (bis auf eine additive Konstante) beschränkt ist.

3.1 Untere Schranken

3.1.1 Einfache Kolmogorov-Komplexität und Entscheidungskomplexität

Wir untersuchen jetzt die Schranke für die im Kapitel 1.3 eingeführte KOLMOGOROV–Komplexität. Mittels des α–dimensionalen Maßes wurde in [23] eine untere Schranke für die KOLMOGOROV–Komplextiät der komplexesten Elemente einer Menge von ω–Wörtern hergeleitet.

Lemma 3.1 ([23]) *Es sei $F \subseteq X^\omega$ mit $\mathbb{L}_\alpha(F) > 0$ und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion mit $\sum_{i\in\mathbb{N}} r^{-f(i)} < \infty$. Dann existiert ein $\xi \in F$ derart, dass $\mathrm{KS}(\xi[0..n] \mid n) \geq_{\text{a.e.}} \alpha \cdot n - f(n)$.*

Die Bedingung, die in Lemma 3.1 an die Funktion f gestellt wird, bedeutet, dass f ,,schnell genug" wächst. Die Bedingung ist zum Beispiel für jede Funktion erfüllt, die mindestens so schnell wächst, wie $(1 + \varepsilon) \cdot \log i$. Also liegt die Komplexität $\mathrm{KS}(w)$ höchstens $f(|w|)$ unterhalb der linearen Funktion $\alpha \cdot |w|$. Diese Schranke lässt sich auch für beliebige HAUSDORFF–h–Maße verallgemeinern.

Satz 3.2 *Es seien $F \subseteq X^\omega$ und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion mit $\sum_{i\in\mathbb{N}} r^{-f(i)} < \infty$. Wenn $\mathcal{H}^h(F) > 0$, dann existiert ein $\xi \in F$ mit $\mathrm{KS}(\xi[0..n] \mid n) \geq_{\text{a.e.}} -\log(h(r^{-n})) - f(n)$.*

Beweis. Wir definieren die Menge aller Sequenzen mit hoher Komplexität bezüglich Dimensionsfunktion h und Funktion f als

$$E(h,f) := \{\xi \mid \mathrm{KS}(\xi[0..n] \mid n) \geq_{\text{a.e.}} -\log h(r^{-n}) - f(n)\}\,.$$

Das Komplement dieser Menge besteht aus allen ω-Wörtern, die unendlich viele Präfixe w mit einer Komplexität kleiner als $-\log(h(r^{-|w|})) - f(|w|))$ haben. Damit ergibt sich die Menge aller Sequenzen mit geringer Komplexität als δ–Limes der Menge $V := \{v \mid \mathrm{KS}(v \mid |v|) < -\log(h(r^{-n})) - f(n)\}$, das heißt $X^\omega \setminus E(h,f) = V^\delta$. Betrachtet man die Menge aller Wörter der Länge n in V, so ergibt sich

$$\left|\{w \mid |w| = n \wedge \mathrm{KS}(w \mid n) < -\log(h(r^{-n})) - f(n)\}\right| \leq r^{-\log(h(r^{-n}))-f(n)}\,,$$

da es höchstens r^k Wörter mit $\mathrm{KS}(w \mid |w|) < k$ gibt. Damit gilt für die Strukturfunktion von V die Abschätzung $s_V(i) \leq r^{-\log(h(r^{-i}))-f(i)}$, woraus

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in V} h(r^{-|v|}) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} s_V(i)\cdot h(r^{-i})\\
&\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} r^{-\log(h(r^{-i}))-f(i)}\cdot h(r^{-i})\\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} r^{-f(i)} < \infty
\end{aligned}$$

folgt. Wegen Lemma 2.8 ist dann $\mathcal{H}^h(V^\delta) = \mathcal{H}^h(X^\omega \setminus E(h,f)) = 0$ und somit $\mathcal{H}^h(F) = \mathcal{H}^h(F \cap E(h,f))$ für jede ω-Sprache $F \subseteq X^\omega$.
Wenn also nach Voraussetzung $\mathcal{H}^h(F) > 0$ ist, so ist damit $F \cap E(h,f) \neq \emptyset$, womit die Aussage bewiesen ist. □

Ist $\mathbb{L}_{\dim_H F}(F) = 0$, so existiert nach Lemma 3.1 ein $\xi \in F$ mit $\mathrm{KS}(\xi[0..n]) \geq_{\text{a.e.}} (\dim_H F - \varepsilon)\cdot n - f(n)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Kann man eine Dimensionsfunktion h mit $\mathcal{H}^h(F) > 0$ finden, deren Konvergenzgeschwindigkeit zwischen $r^{-\dim_H F\cdot n}$ und $r^{-(\dim_H F-\varepsilon)\cdot n}$ für $\varepsilon > 0$ liegt, so erhält man mit Satz 3.2 eine genauere Abschätzung, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3.1 Es sei jetzt $X = \{a,b\}$, $F = \{a,b\}\cdot\prod_{i\in\mathbb{N}}\left(\{a,b\}^{2^i-1}\cdot a\right)$ die Sprache aus Beispiel 2.4 und f eine Funktion mit $\sum_{i\in\mathbb{N}} r^{-f(i)} < \infty$ fixiert. Hier ist $\dim_H F = 1$, $\mathbb{L}_1(F) = 0$ und $\mathbb{L}_{1-\varepsilon}(F) = \infty$ für alle $\varepsilon > 0$. Daher existiert ein $\xi \in F$, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\mathrm{KS}(\xi[0..n] \mid n) \geq_{\text{a.e.}} (1-\varepsilon)\cdot n - f(n) \qquad \text{gilt.}$$

Wir betrachten jetzt die Dimensionsfunktion $h(r^{-|w|}) = r^{-|w|} \cdot |w|$. Das HAUSDORFF–$h$–Maß ist $\mathcal{H}^h(F) = 1$. Also existiert wegen Satz 3.2 ein $\xi \in F$, so dass

$$\mathrm{KS}(\xi[0..n] \mid n) \geq_{\text{a.e.}} -\log(r^{-n} \cdot n) - f(n) = n - \log n - f(n)$$

Diese Schranke ist fast überall echt größer als $(1-\varepsilon) \cdot n - f(n)$ für jedes $\varepsilon > 0$. □

Im Fall $0 < \mathbb{L}_{\dim_H F}(F) < \infty$ erhalten wir nach Lemma 2.1 für jede Dimensionsfunktion h, mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{h(r^{-n})}{r^{-\dim_H F \cdot n}} = 0$ das h–Maß 0 und damit keine Verbesserung für die Komplexitätsschranke.
Auf Grund von Satz 1.8 gilt die Schranke aus Satz 3.2 auch für die Entscheidungskomplexität und die einfache Komplexität.

Korollar 3.3 *Es sei $F \subseteq X^\omega$ und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion mit $\sum_{i\in\mathbb{N}} r^{-f(i)} < \infty$. Wenn $\mathcal{H}^h(F) > 0$, so gelten die folgenden Aussagen.*

(i). Es existiert ein $\xi \in F$ mit $\mathrm{KS}(\xi[0..n]) \geq_{\text{a.e.}} -\log(h(r^{-n})) - f(n)$.

(ii). Es existiert ein $\xi \in F$ mit $\mathrm{KR}(\xi[0..n]) \geq_{\text{a.e.}} -\log(h(r^{-n})) - f(n)$.

3.1.2 Präfix–Komplexität

Die Definition der Präfix–Komplexität benutzt nur Funktionen, deren Definitionsbereich ein Präfix-Code ist. Daher ist die Anzahl der Wörter einer festen Länge, für die eine solche Funktion definiert ist, geringer als bei den Funktionen, die bei der einfachen KOLMOGOROV–Komplexität betrachtet werden.
Also ist die Präfix-Komplexität größer als die einfache oder bedingte KOLMOGOROV-Komplexität. In [3] wurde eine Schranke für die Präfix-Komplexität gezeigt, falls das α–dimensionale Maß einer ω–Sprache größer als 0 ist. In diesem Fall existiert ein Element in der ω–Sprache, dessen Präfix–Komplexität höchstens um eine Konstante kleiner als die Funktion $\alpha \cdot |w|$ ist.

Lemma 3.4 ([3]) *Es seien $F \subseteq X^\omega$ mit $\mathbb{L}_\alpha(F) > 0$ und c eine beliebige Konstante. Dann existiert ein $\xi \in F$ mit* $\mathrm{KP}(\xi[0..n]) \geq_{\text{a.e.}} \alpha \cdot n - c$.

Mittels des $\mathcal{H}^h$-Maßes erhalten wir die folgende Verfeinerung dieser Schranke.

Satz 3.5 *Es seien $F \subseteq X^\omega$, $\mathcal{H}^h(F) > 0$ und c eine Konstante. Dann gibt es ein $\xi \in F$ mit* $\mathrm{KP}(\xi[0..n]) \geq_{\text{a.e.}} -\log(h(r^{-n})) - c$.

Beweis. Wir zeigen, dass die Mengen $W_c^\delta = \{w \mid \mathrm{KP}(w) \leq -\log(h(r^{-|w|})) - c\}^\delta$ für alle Konstanten c das h-Maß 0 haben. Damit gilt auch für die Vereinigung dieser Mengen $\mathcal{H}^h\left(\bigcup_{c\in\mathbb{Z}} W_c^\delta\right) = 0$. Also existiert mindestens ein Element $\xi \in F$ mit $\xi \notin \bigcup_{c\in\mathbb{N}} W_c^\delta$, und damit ist die Behauptung bewiesen.
Unter Ausnutzung der Ungleichung von Kraft erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$\infty > \sum_{w\in X^*} r^{-\mathrm{KP}(w)} > \sum_{w\in W_c} r^{-\mathrm{KP}(w)} \geq \sum_{w\in W_c} r^c \cdot r^{\log h(r^{-|w|})} \geq c' \cdot \sum_{w\in W_c} h(r^{-|w|})$$

Mit Lemma 2.8 können wir aus $\infty > \sum_{w\in W_c} h(r^{-|w|})$ folgern, dass das Maß $\mathcal{H}^h(W_c^\delta) = 0$ ist. □

Weil Satz 3.5 für alle Konstanten gilt, und eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, haben wir:

Korollar 3.6 *Es seien $F \subseteq X^\omega$ und $\mathcal{H}^h(F) > 0$.*

(i). $\mathcal{H}^h\left(\bigcup_{c\in\mathbb{N}}\{\xi \mid \mathrm{KP}(\xi[0..n]) \leq_{\text{i.o.}} -\log(h(r^{-|w|})) + c\}\right) = 0$

(ii). Es existiert ein $\xi \in F$ derart, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{KP}(\xi[0..n]) - (-\log(h(r^{-|w|}))) = \infty$

3.1.3 Monotone und *a priori* Komplexität

Wir betrachten in diesem Abschnitt die rechte Seite des Uspensky–Shen–Pentagons (siehe Abb. 1.3). Auch für die *a–priori*–Komplexität kann gezeigt werden, dass die Komplexität der komplexesten Elemente von der Funktion $-\log(h(r^{-n}))$ nach unten höchstens um eine Konstante abweicht.

Satz 3.7 *Es seien $F \subseteq X^\omega$ und $\mathcal{H}^h(F) > 0$. Dann existiert für jede Konstante $c > -\log \mathcal{H}^h(F)$*[1] *ein $\xi \in F$ mit*

$$\mathrm{KA}(\xi[0..n]) \geq_{\text{a.e.}} -\log(h(r^{-n})) - c\,.$$

Beweis.
Für $c \in \mathbb{R}$ setzen wir analog zum Beweis von Satz 3.5 $W_c^\delta = \{\xi \mid \mathrm{KA}(\xi[0..n]) \leq_{\text{i.o.}} -\log(h(r^{-n})) - c\}^\delta$ und

$$V_{m,c} = \{w \mid |w| \geq m \wedge \mathrm{KA}(w) \leq -\log(h(r^{-|w|})) - c\} \subseteq W_c.$$

[1] Dabei ist $-\log\infty = -\infty$.

Dann ist $\overline{V}_{m,c} = V_{m,c} \setminus V_{m,c} \cdot X^+$ die Menge aller bezüglich $\sqsubseteq$ minimalen Wörter in $V_{m,c}$ ein Präfix-Code und $\overline{V}_{m,c} \cdot X^\omega = V_{m,c} \cdot X^\omega \supseteq W_c$. Mit Satz 1.16 können wir abschätzen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^h(W_c^\delta) &= \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \sum_{v \in V} h(r^{-|v|}) \mid V \cdot X^\omega \supseteq W_c^\delta \wedge \underline{l}(V) \geq n \right\} \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \sum_{v \in \overline{V}_{m,c}} h(r^{-|v|}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{v \in \overline{V}_{m,c}} r^{\log h(r^{-|v|})} \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \sum_{v \in \overline{V}_{m,c}} r^{-\mathrm{KA}(v)-c} \leq r^{-c} \cdot \lim_{m\to\infty} 1 = r^{-c} < \infty
\end{aligned}$$

Wählen wir jetzt $c > -\log \mathcal{H}^h(F)$, so ist $r^{-c} < \mathcal{H}^h(F)$ und $\mathcal{H}^h(W_{-\log \mathcal{H}^h(F)}) < \mathcal{H}^h(F)$. Also existiert ein $\xi \in F$ mit größerer Komplexität als $-\log(h(r^{-n})) - c$. $\square$
Da Km von unten durch KA beschränkt ist, gilt diese Schranke auch für die monotone Komplexität.

Korollar 3.8 *Es sei $F \subseteq X^\omega$ und $\mathcal{H}^h(F) > 0$. Dann existiert für jede Konstante $c > -\log \mathcal{H}^h(F)$ ein $\xi \in F$ mit* $\mathrm{Km}(\xi[0..n]) \geq_{\text{a.e.}} -\log(h(r^{-n})) - c$.

Im Unterschied zu Satz 3.5 gilt die Schranke für KA nicht für jede beliebige Konstante. Sie hängt vom $\mathcal{H}^h$-Maß der jeweiligen ω-Sprache ab. Das folgende Beispiel zeigt, dass es Fälle gibt in denen die Differenz zwischen KA und $-\log(h(r^{-n}))$ nicht unbeschränkt wächst.

Beispiel 3.2 Es sei $X = \{0, 1, 2\}$ und $F = (X \cdot 0)^\omega$. Für diese Sprache ist $\mathbb{L}_{\frac{1}{2}}(F) = 1$. Daher existiert ein $\xi \in F$ mit $\mathrm{KA}(\xi[0..n]) \geq_{\text{a.e.}} \frac{1}{2} \cdot n - c$ für beliebige Konstanten $c > 0$. Andererseits gilt nach Korollar 1.20

$$\mathrm{KA}(x_1 0 x_2 0 \ldots x_{\frac{n}{2}} 0) \leq \mathrm{KA}(x_1 x_2 \ldots x_{\frac{n}{2}}) + c_F \leq \frac{1}{2} \cdot n + c' + c_F$$

Also ist $-c \leq \mathrm{KA}(\xi[0..n]) - (-\log r^{\frac{1}{2} \cdot n}) \leq c' + c_F$. Daher kann ein ähnliches Ergebnis wie der zweite Teil von Korollar 3.6 für KA nicht bewiesen werden.
Es seien jetzt $V = \{1, 2\}^* \cdot 0$ und $F' = V \cdot F$. Weil V ein Präfix-Code ist gilt

$$\mathbb{L}_{\frac{1}{2}}(F') = \sum_{v \in V} |X|^{-\frac{1}{2} \cdot |v|} \cdot \mathbb{L}_{\frac{1}{2}}(F) = \sum_{v \in V} |X|^{-\frac{1}{2} \cdot |v|} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} \cdot (\sqrt{3})^n = \infty$$

Weiterhin ist für jedes $\varepsilon > 0$ das Maß $\mathbb{L}_{\frac{1}{2}+\varepsilon}(F') = 0$. Wegen $\mathrm{KA}(v \cdot \xi[0..n]) \leq \mathrm{KA}(\xi[0..n]) + c_v$ gilt auch für jedes ω–Wort ξ' aus F' eine obere Schranke der Form $\mathrm{KA}(\xi'[0..n]) \leq \frac{1}{2} \cdot n + c_{\xi'}$. Daher kann selbst für ω-Sprachen mit unendlichem Maß die untere Schranke aus Satz 3.7 für KA im Allgemeinen nicht verbessert werden. $\square$

3.2 Obere Schranken

In diesem Abschnitt wollen wir obere Schranken für bestimmte Arten von ω-Sprachen finden. Im Gegensatz zu den Existenzaussagen aus Abschnitt 3.1 für die unteren Schranken, sollen hier Schranken gefunden werden, die für alle Elemente der Sprache gelten. Auch Mengen kleiner Dimension können Objekte hoher Komplexität enthalten, wie Beispiel 3.3 zeigt. Daher verwenden wir die Berechenbarkeit der ω–Sprache um obere Schranken für die Komplexität zu zeigen.

Beispiel 3.3 Sei $\xi \in X^\omega$ ein ML-zufälliges ω-Wort und $F = \{0^\omega, \xi\}$. Hier ist $\mathbb{L}_0(F) = 2$, aber $\mathrm{KA}(\xi[0..n]) \geq_{\text{a.e.}} n - O(1)$. □

Für eine Sprache $V \subseteq X^*$ nennen wir $\sum_{v \in V/w} r^{-\alpha \cdot |v|}$ das α-Residuum von V bezüglich w. In [25] wurde mit Hilfe der α-Residuen ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für positives α–dimensionales Maß von ω-Potenzen von Präfix-Codes bewiesen.

Satz 3.9 ([25]) *Es sei $V \subseteq X^*$ ein Präfix-Code und $\sum_{v \in V} r^{-\alpha|v|} = 1$. Dann ist $\alpha = \dim V^\omega$, und es gilt genau dann $\mathbb{L}_\alpha(V^\omega) > 0$, wenn die α-Residuen von V von oben beschränkt sind.*

Zusammen mit Satz 3.7 erhält man damit auch eine untere Schranke für die *a priori* Komplexität, wenn die α–Residuen von V von oben beschränkt sind. Mit Hilfe der Werte der α-Residuen kann man auch obere Schranken für die *a priori* und die monotonen Komplexität erhalten.

3.2.1 *a priori* Komplexität

Sind die α–Residuen eines Präfix-Code $V \subseteq X^*$ von oben beschränkt, so ist das α–dimensionale Maß von V^ω positiv. Wenn wir die Residuen für $w \in \mathbf{pref}(V)$ dagegen von unten durch eine Konstante größer als 0 beschränken können, so erhalten wir eine obere Komplexitätsschranke für alle Elemente der Sprache $\mathcal{C}(V^\omega)$, falls V konstruktiv beschreibbar ist.

Lemma 3.10 *Es seien $V \subseteq X^*$ ein rekursiv aufzählbarer Präfix-Code und α rechtsberechenbar mit $\sum_{v \in V} r^{-\alpha \cdot |v|} = a \leq 1$. Wenn die α-Residuen von V bezüglich $w \in \mathbf{pref}(V)$ von unten beschränkt sind, so existiert eine Konstante c derart, dass für jedes $\xi \in \mathcal{C}(V^\omega)$ die Ungleichung*

$$\mathrm{KA}(\xi[0..n]) \leq \alpha \cdot n + c \qquad \textit{gilt.}$$

Beweis. Wir konstruieren ein linksberechenbares Semimaß μ mit $\mu(w) \geq c \cdot r^{-\alpha \cdot |w|}$ und verwenden die Ungleichung aus Satz 1.1 für LEVINs optimales linksberechenbares Semimaß. Wir setzen

$$\mu(w) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } w \notin \mathbf{pref}(V^*) \\ \sum_{wv \in V} r^{-\alpha|wv|} & \text{, falls } w \in \mathbf{pref}(V) \\ r^{-\alpha \cdot |w|} & \text{, falls } w \in V^* \\ \mu(u) \cdot \mu(v) & \text{, falls } w = u \cdot v \text{ mit } u \in V^* \text{ und } v \in \mathbf{pref}(V) \setminus V \,. \end{cases} \tag{3.1}$$

Da V ein Präfix-Code ist, ist die Zerlegung in der letzten Zeile der Konstruktion eindeutig. Es sei jetzt $c_{\text{inf}} := \inf \left\{ \sum_{v \in V/w} r^{-\alpha \cdot |v|} \mid w \in \mathbf{pref}(V) \right\}$. Wenn $w \in \mathbf{pref}(V)$, so ist $\mu(w) = r^{-\alpha \cdot |w|} \cdot \sum_{v \in V/w} r^{-\alpha \cdot |v|} \geq r^{-\alpha \cdot |w|} \cdot c_{\text{inf}}$. Falls $w = u \cdot v$ mit $u \in V^*$ und $v \in \mathbf{pref}(V) \setminus V$, so gilt $\mu(w) = r^{-\alpha \cdot |u|} \cdot r^{-\alpha \cdot |v|} \cdot \sum_{w' \in V/v} r^{-\alpha \cdot |w'|} \geq r^{-\alpha \cdot |w|} \cdot c_{\text{inf}}$.
Wir zeigen jetzt, dass μ ein Semimaß ist. Für Wörter $w \in \mathbf{pref}(V) \setminus V$ folgt die Gleichung $\mu(w) = \sum_{x \in X} \mu(wx)$ direkt aus der zweiten Zeile der Konstruktion. Für $w \in V$ gilt die folgende Ungleichung:

$$\sum_{x \in X} \mu(wx) = \mu(w) \cdot \sum_{x \in X} \sum_{xv \in V} r^{-\alpha \cdot |xv|} = \mu(w) \cdot \sum_{v \in V} r^{-\alpha \cdot |v|} = \mu(w) \cdot a \leq \mu(w) \tag{3.2}$$

Auf Grund der induktiven Definition im Fall $w = u \cdot v$ mit $u \in V^*$ und $v \in \mathbf{pref}(V) \setminus V$ gilt die Ungleichung auch in den restlichen Fällen.
Um zu zeigen, dass μ linksberechenbar ist geben wir eine Approximation von unten an. Es seien $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Näherungen für α von rechts und $V_i \subseteq V$, für $i \in \mathbb{N}$, die Mengen der ersten i Wörter in einer wiederholungsfreien Aufzählung von V. Wir beginnen mit der Näherung $\mu^{(0)}(w) := 0$ für jedes $w \in X^*$ und $\mu^{(j)}(e) := 1$ für jedes $j > 0$. Zur Berechnung von $\mu^{(j)}(w)$ seien die Werte $\mu^{(j)}(v)$ schon für alle v mit $|v| < |w|$ berechnet. Wenn ein $v \in V_j$ mit $w = v \cdot w'$ und $w' \neq e$ existiert, so setzen wir $\mu^{(j)}(w) = \mu^{(j)}(v) \cdot \mu^{(j)}(w')$. Andernfalls ist $\mu^{(j)}(w) = \sum_{v \in V_j \wedge w \sqsubseteq v} r^{-\alpha_j \cdot |v|}$.
Weil μ ein linksberechenbares Semimaß ist, gilt die folgende Ungleichung:

$$\mathbf{M}(w) \cdot c_\mu \;\geq\; \mu(w) \;\geq\; r^{-\alpha|w|} \cdot c_{\text{inf}}$$

Also haben wir $\text{KA}(w) \leq \alpha \cdot |w| + \log \frac{c_\mu}{c_{\text{inf}}}$ für jedes $w \in \mathbf{pref}(V^*)$ □

Das folgende Beispiel 3.4 zeigt, dass die Voraussetzung bezüglich der unteren Schranke für die α–Residuen in der Formulierung von Lemma 3.10 nicht weggelassen werden kann. Dazu verwenden wir einen Präfix-Code, der in Beispiel (6.4) von [23] konstruiert wurde.

Beispiel 3.4 Wir betrachten $W := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} x^{i+1} \cdot y \cdot X^{i+1} \cdot x^{m\cdot(i+1)-1}$ mit $X = \{x, y\}$ und $m \geq 3$. Diese Sprache ist entscheidbar und präfix-frei. Weiterhin ist $\alpha = \dim W^\omega = \dim \mathcal{C}(W^\omega) = \frac{2}{m+2}$ und $\mathbb{L}_{\dim W^\omega}(W^\omega) = \mathbb{L}_{\dim W^\omega}\mathcal{C}(W^\omega)$. Weil für jedes $w \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} x^{i+1} \cdot y \cdot X^{i+1} \subseteq \mathbf{pref}(W)$ die Beziehung $W/w = \{0^{m\cdot(i+1)-1}\}$ gilt, folgt für das α-Residuum $\sum_{v\in W/w} r^{-\alpha\cdot|v|} = r^{-\alpha\cdot m\cdot(i+1)-1}$, also $\inf\{\sum_{v\in W/w} r^{-\alpha\cdot|v|} \mid w \in \mathbf{pref}(W)\} = 0$.
In Proposition 6.15 aus [23] ist nun $\sup\limits_{\xi\in W^\omega} \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{KA}(\xi[0..n])}{n} \geq \frac{1}{2} > \frac{2}{m+2} = \dim W^\omega$, für $m \geq 3$ gezeigt. □

Andererseits zeigt das folgende Beispiel, dass die Residuenbedingung aber nicht notwendig ist.

Beispiel 3.5 Es sei $X = \{0, 1\}$. Die Łukasiewicz Sprache $L := 0 \cup 1 \cdot L^2$ ist ein Präfix-Code und es sei $C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} 0^n 1 0^n$ ein Präfix-Code, der die Residuenbedingung verletzt. Wir betrachten jetzt die ω-Potenz des Präfix-Codes $V := 0 \cdot L \cup 1 \cdot C$.
Kuich zeigte in [9], dass $\sum_{v\in L} 2^{-\alpha\cdot|v|} = \infty$ für $\alpha < 1$ und $\sum_{v\in L} 2^{-|v|} = 1$. Weil V ein Präfix-Code ist, gilt $\sum_{v\in V} 2^{-|v|} \leq 1$, und wegen $\sum_{v\in V} 2^{-\alpha\cdot|v|} = (\frac{1}{2})^\alpha \cdot \sum_{v\in L} 2^{-\alpha\cdot|v|} + (\frac{1}{2})^\alpha \cdot \sum_{w\in C} 2^{-\alpha\cdot|w|}$ ist $\sum_{v\in V} 2^{-\alpha\cdot|v|} = \infty$ für $\alpha < 1$. Die Komplexitätsschranke $\mathrm{KA}(\xi[0..n]) \leq n + c$ ist aber für alle ω–Wörter erfüllt. □

3.2.2 Monotone Komplexität

Ein ähnliches Ergebnis lässt sich auch für die monotone Komplexität zeigen. Hierfür leiten wir die folgende Beziehung zwischen der Berechenbarkeit von V und der von α her.

Proposition 3.11 *(i). Wenn V rekursiv aufzählbar ist und $\sum_{v\in V} r^{-\alpha|v|} = 1$, dann ist α links-berechenbar.*

(ii). Wenn V rekursiv aufzählbar ist, α rechtsberechenbar und $\sum_{v\in V} r^{-\alpha|v|} = 1$, dann ist V auch entscheidbar und α ist berechenbar.

Beweis. Der Beweis von Teil (i) ist klar.
Die Linksberechenbarkeit von α in Teil (ii) folgt direkt aus Teil (i). Um die Entscheidbarkeit von V zu beweisen, geben wir einen Algorithmus an, der entscheidet, ob ein eingegebenes Wort $w \in X^*$ in der Menge V liegt oder nicht.
Es sei V_j die Menge der ersten j Elemente in der Aufzählung von V und α_j sei die j-te rechtsseitige Approximation von α, wobei $\alpha_{j+1} \leq \alpha_j$.

```
Input w
j := 0
  repeat
    j := j + 1
    if w ∈ V_j then accept and exit
  until r^(−α_j|w|) + Σ_{v∈V_j} r^(−α_j|v|) > 1
reject
```

Falls $w \notin V$ ist, so stoppt die repeat-until-Schleife, sobald $\sum_{v\in V_j} r^{-\alpha_j|v|} > 1 - r^{-\alpha_j|w|} \geq 1 - r^{-\alpha|w|}$ gilt, da $\sum_{v\in V_j} r^{-\alpha_j|v|}$ für $j \to \infty$ gegen 1 konvergiert. $\square$

Das Ergebnis für die obere Schranke der monotonen Komplexität gilt nur für eine kleinere Klasse von ω-Potenzen.

Lemma 3.12 *Es sei $V \subseteq X^*$ aufzählbar und präfix-frei. Weiterhin sei $\alpha > 0$ rechtsberechenbar mit $\sum_{v\in V} r^{-\alpha|v|} = 1$.*
Wenn die α-Residuen von V bezüglich $w \in \mathbf{pref}(V)$ von unten beschränkt sind existiert eine Konstante $c > 0$ derart, dass für alle $\xi \in \mathcal{C}(V^\omega)$ gilt

$$\mathrm{Km}(\xi[0..n]) \leq \alpha \cdot n + c$$

Beweis. Wegen Proposition 3.11 können wir annehmen, dass α berechenbar und V entscheidbar ist. Wir konstruieren ein berechenbares Maß μ mittels Gleichung (3.1). Weil $a = 1$ ist, gilt die Gleichheit in (3.2). Daher ist μ ein linksberechenbares Maß, und $\mu(v)$ ist berechenbar für jedes $v \in V^*$. Weil V entscheidbar ist, kann für jedes $w \in X^*$ die eindeutige Zerlegung $w = v \cdot w'$ mit $v \in V^*$ und $w' \notin V \cdot X^*$ berechnet werden. Aus der Gleichung

$$\mu(w) = \mu(v) \cdot \left(1 - \sum_{v' \in V \wedge w \not\sqsubseteq vv'} r^{-\alpha|v'|}\right)$$

folgt nun, dass μ auch rechtsberechenbar ist. Wenn $w' \notin \mathbf{pref}(V^*)$ gilt, so ist der letzte Faktor gleich null.
Es sei wieder $c_{\inf} := \inf\left\{\sum_{v\in V/w} r^{-\alpha\cdot|v|} \mid w \in \mathbf{pref}(V)\right\}$. Dann erhalten wir mittels Lemma 1.12:

$$\mathrm{Km}(w) \leq -\log\mu(w) + c_\mu \leq \alpha \cdot |w| + c_\mu - \log c_{\inf},$$

für $w \in \mathbf{pref}(V^*)$. $\square$

3.3 Oszillationsfreie ε-Zufälligkeit

Wir betrachten die verschiedenen Komplexitäten entlang eines (1-)zufälligen Wortes ξ. Die Komplexität $\mathrm{KS}(\xi[0..n])$ fällt unendlich oft unter $n - \log n$, liegt aber auch unendlich oft über n (siehe [10]). Die Präfix-Komplexität $\mathrm{KP}(\xi[0..n])$ oszilliert ebenfalls zwischen n und $n + \log n$ (siehe ebenfalls in [10]). Jedoch ist der Abstand zwischen der Komplexität $\mathrm{Km}(\xi[0..n])$ bzw. $\mathrm{KA}(\xi[0..n])$ und der Funktion $f(n) = n$ von einer Konstanten beschränkt (siehe [29]). Für ε–zufällige ω–Wörter gilt dies nicht unbedingt (vgl. [3; 12]). Hier kann auch die Komplexität KA beliebig weit über die Funktion $f(n) = \varepsilon \cdot n$ ansteigen, bzw. zwischen einer beliebigen oberen Schranke und f oszillieren. Des Weiteren geht aus den Charakterisierungen von ε–zufälligen ω–Wörtern mittels ihrer Komplexität in Definition 1.19, Satz 1.23 und Satz 1.22 hervor, dass für $\varepsilon' \leq \varepsilon$ ein ε–zufälliges ω–Wort auch ε'–zufällig ist. Wir wollen daher jetzt ε–zufällige ω–Wörter untersuchen, für die der Abstand ihrer *a priori* Komplexität zu der Funktion $\varepsilon \cdot n$ durch eine Konstante beschränkt ist, wie im Fall der 1–Zufälligkeit.

Definition 3.1 *Ein ω-Wort $\xi \in X^\omega$ heißt* oszillationsfrei stark ML-ε-zufällig, *falls ξ stark ML-ε-zufällig ist und* $\mathrm{KA}(\xi[0..n]) \leq_{\text{a.e.}} \varepsilon \cdot n + c$.

Oszillationsfreie ε–zufällige ω–Wörter ergeben sich zum Beispiel im Falle maximal komplexer ω–Wörter in bestimmten ω–Sprachen (siehe [26]). Kombinieren wir Theorem 3.9, Lemma 3.10 und Theorem 3.7, so erhalten wir die folgende Aussage über oszillationsfrei ε–zufällige ω–Wörter in ω-Potenz Sprachen.

Proposition 3.13 *Es seien $V \subseteq X^*$ ein aufzählbarer Präfix-Code. Weiterhin sei ε rechtsberechenbar, so dass $\sum_{v \in V} r^{-\varepsilon \cdot |v|} = 1$ und die ε–Residuen von V bezüglich der Wörter $w \in \mathbf{pref}(V)$ sowohl von unten als auch von oben beschränkt sind.*
Dann existiert ein oszillationsfreies stark ML-ε-zufälliges ω-Wort in V^ω.

In [26] wurde schon gezeigt, dass die Aussage aus Proposition 3.13 für Präfix-Codes $V \subseteq X^*$, die auch reguläre Sprachen sind, gilt. Wir geben jetzt ein Beispiel für eine nicht-reguläre Sprache an, deren ω–Potenz ebenfalls oszillationsfreie ε–zufällige Elemente enthält.

Beispiel 3.6 Es sei $X = \{a, b\}$ und $L = \{aa\} \cup bb \cdot L^2$. Dann ist $\varepsilon = \dim L^\omega = \frac{1}{2}$, $\sum_{v \in L} r^{-\frac{1}{2} \cdot |v|} = 1$ und L ist präfix-frei. Die Präfixmenge von L ist $\mathbf{pref}(L) = (bb \cup bb \cdot L)^* \cdot \mathbf{pref}\{aa, bb\}$. Also ist für jedes $w \in \mathbf{pref}(L)$ der Zustand $L/w = w' \cdot L^k$, für ein

$k \in \mathbb{N}$ und ein $w' \in \{a, b\}$. Daher sind die ε-Residuen von L von unten und von oben beschränkt. □

3.3.1 Konstruktion mittels Dilution

Eine weitere Möglichkeit oszillationsfreie ε–zufällige ω–Wörter zu erhalten ist eine 'Konstruktion' ausgehend von ML–zufälligen ω–Wörtern. Dazu wurden in [26] Dilutionsfunktionen eingeführt.

Definition 3.2 *Eine Funktion $\varphi : X^* \to X^*$ heißt* Dilutionsfunktion*, falls φ präfixtreu, eineindeutig ist und $|\varphi(v)| = |\varphi(w)|$ für alle $v, w \in X^*$ mit $|v| = |w|$ gilt.*
Eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt Modulus-*Funktion für φ, falls $g(|w|) = |\varphi(w)|$ für jedes $w \in X^*$.*

Für eine Dilutionsfunktion φ ist wegen der Präfix-Treue und der Eineindeutigkeit außerdem $|\varphi(wx)| - |\varphi(w)| > 0$, für jedes $x \in X$ und $w \in X^*$. Weil Dilutionsfunktionen eineindeutig sind und Bilder von Wörtern gleicher Länge ebenfalls gleiche Länge haben, sind für $v, w \in X^*$ mit $|v| = |w|$ die Wörter $\varphi(v)$ und $\varphi(w)$ nicht vergleichbar bezüglich der Präfixrelation. Durch eine solche Dilutionsfunktion wird auch eine sequentielle Abbildung $\overline{\varphi} : X^\omega \to X^\omega$ definiert (vgl. [21]): $\mathbf{pref}(\overline{\varphi}(\xi)) = \mathbf{pref}(\varphi(\mathbf{pref}(\xi)))$. Die Abbildung $\overline{\varphi}$ ist stetig und abgeschlossen. Insbesondere ist $\overline{\varphi}(X^\omega)$ eine abgeschlossene Menge im Raum (X^ω, ϱ).
Auf Grund der Unvergleichbarkeit der Bilder von Wörtern gleicher Länge ist auch die Funktion $\overline{\varphi}$ eineindeutig. Wir sind im Folgenden an Dilutionsfunktionen interessiert, die Wörter nur um einen linearen Faktor verlängern.

Definition 3.3 *Es sei $0 < \varepsilon < 1$. Eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt genau dann ε-Modulus, wenn es eine Konstante $c > 0$ mit $|\varepsilon \cdot g(n) - n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.*

Für einen ε-Modulus mit Konstante c gilt auch $|g(n+1) - g(n)| \leq \frac{2 \cdot c + 1}{\varepsilon}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 3.7 Die Funktion $g(n) = \lceil \frac{n}{\varepsilon} \rceil$ ist ein ε–Modulus. □

In [26] wurde gezeigt, dass die *a-priori*-Komplexität eines ω-Wortes nicht zu stark von der Komplexität seines Bildes bezüglich einer Dilutionsfunktion abweicht.

Lemma 3.14 ([26]) *Es sei ε eine berechenbare Zahl, $0 < \varepsilon < 1$. Dann existiert eine berechenbare Dilutionsfunktion φ mit (wachsendem) ε-Modulus so, dass*

$$|\mathrm{KA}(\overline{\varphi}(\xi)[0..n]) - \mathrm{KA}(\xi[0..\lfloor \varepsilon \cdot n \rfloor])| \leq O(1)$$

für jedes $\xi \in X^\omega$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Ist also $\xi \in X^\omega$ ein (1-)zufälliges ω-Wort, so ist dessen Bild $\overline{\varphi}(\xi)$ ein oszillationsfreies stark ML-ε-zufälliges ω-Wort. Auch die monotone Komplexität des Bildes eines Wortes w unterscheidet sich von der Komplexität von w nur um eine Konstante.

Lemma 3.15 *Es sei $0 < \varepsilon < 1$ eine berechenbare Zahl. Wenn φ eine berechenbare Dilutionsfunktion φ mit ε-Modulus ist, dann gilt $|\mathrm{Km}(\overline{\varphi}(\xi)[0..n]) - \mathrm{Km}(\xi[0..\lfloor \varepsilon \cdot n \rfloor])| \leq O(1)$ für jedes $\xi \in X^\omega$ und $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Die Ungleichung $\mathrm{Km}(\overline{\varphi}(\xi)[0..n]) \leq \mathrm{Km}(\xi[0..\lfloor \varepsilon \cdot n \rfloor]) + c$ folgt aus Lemma 1.14. Wir konstruieren für die umgekehrte Ungleichung einen (γ, γ)–Beschreibungsmodus E' aus einem optimalen Beschreibungsmodus E_0 :

$$E' = \{(\pi, w) \mid (\pi, \varphi(w)) \in E_0\}$$

Wir zeigen jetzt, dass E' ein (γ, γ)–Modus ist, d.h. wenn $(\pi_1, w_1), (\pi_2, w_2) \in E'$ und $\pi_1 \,\gamma\, \pi_2$, dann ist $w_1 \,\gamma\, w_2$.
Es seien $(\pi_1, w_1), (\pi_2, w_2) \in E'$ mit $|w_1| < |w_2|$ und o.B.d.A. $\pi_1 \sqsubseteq \pi_2$. Dann ist $(\pi_1, \varphi(w_1)), (\pi_2, \varphi(w_2)) \in E_0$ und daher ist o.B.d.A $\varphi(w_1) \sqsubseteq \varphi(w_2)$. Angenommen es gilt $w_1 \not\sqsubseteq w_2$. Dann sei $w' \sqsubseteq w_2$ mit $|w_1| = |w'|$. Da φ eine Dilutionsfunktion ist, haben wir $|\varphi(w_1)| = |\varphi(w')|$ und $\varphi(w') \sqsubseteq \varphi(w_2)$. Also muss $\varphi(w') = \varphi(w_1)$ gelten. Auf Grund der Eineindeutigkeit von φ ist dann auch $w' = w_1$. Damit ist $w_1 \sqsubseteq w_2$. Es gilt die folgende Komplexitätsabschätzung:

$$\mathrm{Km}(w) = \mathrm{K}_{E_0}(w) \leq \mathrm{K}_{E'}(w) + c_{E'} = \mathrm{K}_{E_0}(\varphi(w)) + c_{E'} = \mathrm{Km}(\varphi(w)) + c_{E'}$$

□

3.3.2 Das Maß der Menge aller oszillationsfreien ε–zufälligen ω–Wörter

Die Hausdorff-Dimension der Menge aller ε–zufälligen ω–Wörter ist 1, weil für jedes $\varepsilon < 1$ auch alle 1–zufälligen ω–Wörter ε–zufällig sind. Damit ist für $\varepsilon < 1$ das

ε–dimensionale Maß der Menge aller ε–zufälligen ω–Wörter unendlich. Für oszillationsfreie ε–zufällige ω–Wörter können wir diese Schlussfolgerung nicht ziehen. Daher wollen wir jetzt das Maß der Menge

$$F_\varepsilon := \Big\{ \xi \mid \xi \in X^\omega \wedge \xi \text{ ist oszillationsfrei } \varepsilon\text{–zufällig} \Big\}$$

bestimmen. Im Abschnitt 3.3.1 haben wir gesehen, dass sich solche ω–Wörter mittels Dilutionsfunktionen 'konstruieren' lassen. Wir werden daher jetzt untersuchen, wie sich das Maß einer Menge F zum Maß des Bildes $\overline{\varphi}(F)$ bezüglich einer Dilutionsfunktion φ verhält.

Lemma 3.16 *Es seien $0 < \varepsilon' \leq 1$, $F \subseteq X^\omega$, $0 < \varepsilon < 1$ und φ eine Dilutionsfunktion mit ε-Modulus. Dann existieren Konstanten $c_1, c_2 > 0$ derart, dass die Ungleichung*

$$c_1 \cdot \mathbb{L}_{\varepsilon'}(F) \leq \mathbb{L}_{\varepsilon\cdot\varepsilon'}(\overline{\varphi}(F)) \leq c_2 \cdot \mathbb{L}_{\varepsilon'}(F) \qquad \textit{gilt.}$$

Beweis. Es sei $\delta > 0$. Wir wählen ein $W \subseteq X^*$ mit $W \cdot X^\omega \supseteq \overline{\varphi}(F)$, $\underline{l}(W) \geq n$ und $\sum_{w\in W} r^{-\varepsilon\cdot\varepsilon'\cdot|w|} \leq \mathbb{L}_{\varepsilon\cdot\varepsilon'}(\overline{\varphi}(F)) + \delta$. Für jedes $w \in W$ sei v_w dasjenige eindeutig bestimmte Wort mit $\varphi(v_w) \sqsubseteq w \sqsubset \varphi(v_w x)$ für ein geeignetes $x \in X$. Weil φ eine Funktion mit ε-Modulus ist, gilt

$$|v_w| - c \leq \varepsilon \cdot |w| \leq |v_w x| + c = |v_w| + 1 + c$$

Für die Menge $V = \{v_w \mid w \in W\}$ gilt dann $V \cdot X^\omega \supseteq F$. Damit können wir jetzt $\mathbb{L}_{\varepsilon\cdot\varepsilon'}(\overline{\varphi}(F))$ wie folgt abschätzen.

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{\varepsilon\cdot\varepsilon'}(\overline{\varphi}(F)) + \delta \geq \sum_{w\in W} r^{-\varepsilon\cdot\varepsilon'\cdot|w|} &\geq \sum_{w\in W} r^{-\varepsilon'\cdot(|v_w|+1+c)} \\ &= r^{-\varepsilon'\cdot(1+c)} \sum_{v\in V} r^{-\varepsilon'\cdot|v|} \geq c' \cdot \mathbb{L}_{\varepsilon'}(F)\end{aligned}$$

Damit ist die erste Ungleichung gezeigt.
Es sei nun wieder $\delta > 0$. Wir wählen jetzt $V \subseteq X^*$ mit $V \cdot X^\omega \supseteq F$, $\underline{l}(V) \geq n$ und $\sum_{v\in V} r^{-\varepsilon'\cdot|v|} \leq \mathbb{L}_{\varepsilon'}(F) + \delta$. Für die Menge $W = \{\varphi(v) \mid v \in V\}$ ist dann $W \cdot X^\omega \supseteq \overline{\varphi}(F)$. Es gilt die folgende Ungleichung

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{\varepsilon'}(F) + \delta \geq \sum_{v\in V} r^{-\varepsilon'\cdot|v|} &\geq \sum_{v\in V} r^{-\varepsilon'\cdot(\varepsilon\cdot|\varphi(v)|+c)} \\ &= r^{-\varepsilon'\cdot c} \cdot \sum_{v\in V} r^{-\varepsilon'\cdot\varepsilon\cdot|\varphi(v)|} \geq c' \cdot \mathbb{L}_{\varepsilon'\cdot\varepsilon}(\overline{\varphi}(F))\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage bewiesen. $\square$

Da die Konstanten c_1, c_2 aus dem vorangegangenen Lemma positiv sind, lässt sich für das ε–dimensionale HAUSDORFF–Maß einer ω–Sprache die folgende Aussage treffen.

Korollar 3.17 *Es seien $F \subseteq X^\omega$, $0 < \varepsilon \leq 1$ und $0 < \varepsilon' < 1$. Für jede Dilutionsfunktion $\varphi : X^* \to X^*$ mit ε'-Modulus sind Maße $\mathbb{L}_\varepsilon(F)$ und $\mathbb{L}_{\varepsilon\cdot\varepsilon'}(\overline{\varphi}(F))$ immer gleichzeitig null, positiv oder unendlich.*

Wir wollen jetzt für berechenbare ε zeigen, dass F_ε HAUSDORFF–Dimension ε und unendliches ε–dimensionales Maß hat. Dazu benötigen wir noch das folgende Ergebnis von Ryabko (siehe [19]):

$$\dim_H \left\{ \xi \mid \xi \in X^\omega \wedge \underline{\kappa}(\xi) \leq \varepsilon \right\} = \varepsilon \tag{3.3}$$

Satz 3.18 *Es sei $0 < \varepsilon < \infty$ berechenbar und F_ε sei die Menge aller oszillationsfreien stark ML-ε-zufälligen ω-Wörter. Dann ist $\dim_H F_\varepsilon = \varepsilon$ und $\mathbb{L}_\varepsilon(F_\varepsilon) = \infty$.*

Beweis. Weil $\mathrm{KA}(\xi[0..n]) \leq_{\text{a.e.}} \varepsilon \cdot n + c$ für jedes $\xi \in F_\varepsilon$ ist, gilt nach Gleichung (3.3) $\dim_H F_\varepsilon \leq \varepsilon$. Es sei nun F_1 die Menge aller (1-)zufälligen ω-Wörter. Weiterhin sei φ eine Dilutionsfunktion mit ε-Modulus, nach Korollar 3.14. Dann ist $\overline{\varphi}(F_1) \subseteq F_\varepsilon$. Weil F_1 positives, endliches LEBESQUE-Maß hat, ist das ε–dimensionale Maß von $\overline{\varphi}(F_1)$ ebenfalls positiv und endlich. Insbesondere gilt auch $\varepsilon = \dim_H \overline{\varphi}(F_1) \leq \dim_H F_\varepsilon$.

Um zu zeigen, dass F_ε unendliches ε–dimensionales Maß hat konstruieren wir eine unendliche Familie disjunkter Teilmengen von F_ε, deren ε–dimensionales Maß durch eine (gemeinsame) Konstante c von unten beschränkt ist. Es seien $a, b \in X$, $a \neq b$ und $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $k(n) := \lceil \frac{n+1}{\varepsilon} \rceil - \lceil \frac{n}{\varepsilon} \rceil - 1$. Für jedes $w \in X^*$ und $x \in X$ definieren wir die Dilutionsfunktion φ_i wie folgt durch

$$\begin{aligned} \varphi_i(e) &= e \text{ und} \\ \varphi_i(wx) &= \begin{cases} \varphi_i(w) a^{k(|w|)} x & \text{, falls } |w| \neq i \\ \varphi_i(w) b^{k(|w|)} x & \text{, falls } |w| = i\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Dabei ist $|\varphi_i(w)| = \lceil \frac{|w|}{\varepsilon} \rceil = g(|w|)$ der ε-Modulus aus Beispiel 3.7. Weil $\varepsilon < 1$ ist, ist die Menge $K := \{i \mid k(i) > 0\}$ unendlich. Für $i, j \in K$ und $i \neq j$ sind die Mengen $\overline{\varphi}_i(X^\omega)$ und $\overline{\varphi}_j(X^\omega)$ disjunkt. Weil F_1 eine Borel-Menge ist und $\overline{\varphi}$ eineindeutig und stetig ist, sind auch die Mengen $\overline{\varphi}(F_1)$ Borel-Mengen. Auf Grund von Lemma 3.16 ergibt sich $\mathbb{L}_\varepsilon(\overline{\varphi}_j(F_1)) \geq c \cdot \mathbb{L}_1(F_1) > 0$, und somit

$$\mathbb{L}_\varepsilon(F_\varepsilon) \geq \mathbb{L}_\varepsilon\Big(\bigcup_{i\in K} \overline{\varphi}_i(F_1)\Big) = \sum_{i\in K} \mathbb{L}_\varepsilon(\overline{\varphi}_i(F_1)) = \infty$$

$\square$

4

Verfeinerung der Dimension

4.1 Definition und Eigenschaften

Die klassische HAUSDORFF–Dimension basiert auf der Funktionsschar der Exponentialfunktionen $h(t) = t^\alpha$, wobei der Parameter α zwischen 0 und 1 liegt. Die Dimension ist dann ein Parameter α_0. Als Verfeinerung kann man Funktionsscharen verwenden, die mehr als einen Parameter besitzen. Als Dimension einer ω–Sprache erhält man dann ein Parameter-Tupel einer Funktion dieser Schar.
Wir führen zunächst einige Eigenschaften von Funktionsscharen an, die wir benötigen um eine Dimension zu definieren.

Definition 4.1 *Für zwei Dimensionsfunktionen f und g schreiben wir $f \prec g$, falls $\frac{g(t)}{f(t)} \to 0$ für $t \to 0$.*

Die Funktionenschar, die wir verwenden, ist die in Beispiel 2.2 angeführte logarithmische Skala. Wir nennen

$$h_p(t) = t^{p_0} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\log^i t^{-1}\right)^{-p_i}$$

die *zu dem Tupel* $(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *gehörende Funktion.* Wir definieren die folgende Ordnung auf Tupeln der Länge $n+1$.

Definition 4.2 *Es sei*

$$P_{n+1} := \left\{(p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq p_0 \leq 1 \wedge p_j > 0 \text{ falls } p_i = 0 \text{ für alle } i < j\right\} .$$

Für $(p_0, \ldots, p_n), (q_0, \ldots, q_n) \in P_{n+1}$ gilt $(p_0, \ldots, p_n) >_{lex} (q_0, \ldots, q_n)$ genau dann, wenn ein $k \leq n+1$ existiert mit $p_i = q_i$, für jedes $i < k$, und $p_k > q_k$. D.h. die Tupel sind lexikographisch geordnet.

Die Ordnung ist so definiert, dass je größer das Tupel, desto schneller strebt die zugehörige Funktion mit t gegen Null, d.h.:

Bemerkung 4.1 Sind h_p und h_q die zu den Tupeln $(p_0, p_1, \ldots, p_n), (q_0, q_1, \ldots, q_n)$ gehörenden Funktionen, so gilt $h_p \succ h_q$, falls $(p_0, p_1, \ldots, p_n) >_{lex} (q_0, q_1, \ldots, q_n)$.

Mit dieser Ordnung auf P_{n+1} (und damit auch auf den Dimensionsfunktionen) können wir jetzt eine verallgemeinerte Hausdorff–Dimension definieren.

Definition 4.3 *Die* verallgemeinerte Hausdorff–n–Dimension *wird definiert als:*

$$\begin{aligned} \dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} F &= \sup\{(\alpha, p_1, p_2, \ldots, p_n) \mid \mathcal{H}^{(\alpha, p_1, p_2, \ldots, p_n)}(F) = \infty\} \\ &= \inf\{(\alpha, p_1, p_2, \ldots, p_n) \mid \mathcal{H}^{(\alpha, p_1, p_2, \ldots, p_n)}(F) = 0\}, \end{aligned}$$

wobei

$$\mathcal{H}^{(\alpha, p_1, p_2, \ldots, p_n)}(F) = \lim_{j \to \infty} \inf \left\{ \sum_{v \in V} h(r^{-|v|}) \mid F \subseteq V \cdot X^\omega \wedge \underline{l}(V) \geq j \right\},$$

mit $h(r^{-|v|}) = r^{-\alpha|v|} \cdot \prod_{i=1}^{n} (\log^i r^{|v|})^{-p_i}$*, das* $(\alpha, p_1, p_2, \ldots, p_n)$*–dimensionale Maß von* F *ist.*

Beweis. Wir zeigen jetzt, dass $p_{\sup} := \sup\{p \mid \mathcal{H}^{h_p}(F) = \infty\} = \inf\{p \mid \mathcal{H}^{h_p}(F) = 0\} =: p_{\inf}$ ist. Dazu zeigen wir: für jedes Tupel $p >_{lex} p_{\sup}$ gilt $\mathcal{H}^{h_p}(F) = 0$, und für jedes $p <_{lex} p_{\inf}$ ist $\mathcal{H}^{h_p}(F) = \infty$. Angenommen, $\mathcal{H}^{h_p}(F) > 0$ für ein $p >_{lex} p_{\sup}$, dann gilt nach Lemma 2.1 $\mathcal{H}^{h_{p'}}(F) = \infty$ für alle $p >_{lex} p' >_{lex} p_{\sup}$, das ist ein Widerspruch zu $p_{\sup} = \sup\{p \mid \mathcal{H}^{h_p}(F) = \infty\}$.
Angenommen, $\mathcal{H}^{h_p}(F) < \infty$ für ein $p <_{lex} p_{\inf}$, dann gilt wieder nach Lemma 2.1 $\mathcal{H}^{h_{p'}}(F) = 0$ für alle $p <_{lex} p' <_{lex} p_{\inf}$, was aber ein Widerspruch zu $p_{\inf} = \inf\{p \mid \mathcal{H}^{h_p}(F) = 0\}$ ist. □

Bemerkung 4.2 Ein Tupel $(p_0, \ldots, p_k)$ der Länge $k+1$ kann aufgefasst werden als Tupel $(p_0, \ldots, p_k, p_{k+1}, \ldots, p_n)$ der Länge $n+1$ mit $p_{k+1} = \ldots = p_n = 0$. Die zu diesen Tupeln gehörenden Dimensionsfunktionen sind identisch.

Als erste Eigenschaft der verallgemeinerten Dimension zeigen wir, dass die Dimension der Translation $w \cdot F$ einer ω–Sprache F entlang eines Wortes w nicht größer ist als die Dimension von F.

Lemma 4.1 *Es seien $E, F \subseteq X^\omega$, mit $E \subseteq F$, und $w \in X^*$. Dann gilt*

$$\dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} w \cdot F \leq \dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} F \quad \textit{und} \quad \dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} E \leq \dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} F$$

Beweis. Wegen Lemma 2.2 folgt aus $\mathcal{H}^h(F) = 0$ auch $\mathcal{H}^h(w \cdot F) = 0$, also ist $\inf\{p \mid \mathcal{H}^{h_p}(w \cdot F) = 0\} \leq \inf\{p \mid \mathcal{H}^{h_p}(F) = 0\}$. Damit ist der erste Teil gezeigt.
Wenn $E \subseteq F$, so gilt für jede Dimensionsfunktion h die Ungleichung $\mathcal{H}^h(E) \leq \mathcal{H}^h(F)$. Also folgt aus $\mathcal{H}^h(E) = \infty$ auch $\mathcal{H}^h(F) = \infty$. Damit ist auch der zweite Teil gezeigt. □

Wie die klassische HAUSDORFF–Dimension, ist auch die verallgemeinerte n–Dimension stabil bezüglich einer abzählbaren Vereinigung von Sprachen.

Lemma 4.2 *Es seien $F_0, F_1 \ldots \subseteq X^\omega$. Dann gilt*

$$\dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i = \sup_{i \in \mathbb{N}} \dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} F_i$$

Beweis. Es seien $p^{(j)} \in P_{n+1}$ mit $\dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} F_j = p^{(j)}$, für $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt wegen $F_j \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$ und der Monotonie der Dimension, dass $\dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \geq \dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} F_j$. Angenommen, $p_{\dim} = \dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i > \dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} F_i$, für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann ist aber nach Lemma 2.1 $\mathcal{H}^{p_{\dim}}(F_i) = 0$ und daher $\mathcal{H}^{p_{\dim}}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^{p_{\dim}}(F_i) = 0$. Daher gilt auch die Ungleichung $\dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} F_i$. □

4.2 Berechnung der Dimension

In diesem Abschnitt wollen wir Möglichkeiten finden, die verallgemeinerte Dimension abzuschätzen und Beispiele für ω–Sprachen zu finden, die positives, endliches Maß bezüglich ihrer verallgemeinerten Dimension haben. Wir beginnen mit einer Aussage über die Beziehung der Strukturfunktion einer ω–Sprache und ihrer Dimensionsfunktion.

Lemma 4.3 *Sei $F \subseteq X^\omega$ und h eine Dimensionsfunktion mit $h(r^{-n}) \in O([s_{\mathbf{pref}(F)}(n)]^{-1})$. Dann ist $\mathcal{H}^h(F) < \infty$, d.h. $\dim_{\mathrm{GH}}(F) \leq (p_0, \ldots, p_k)$, falls h die zu $(p_0, \ldots, p_k)$ gehörende Funktion ist.*

Beweis. Sei $h(r^{-n}) \in O([s_{\mathbf{pref}(F)}(n)]^{-1})$, d.h. es gibt ein $c > 0$, so dass $h(r^{-n}) \leq c \cdot [s_{\mathbf{pref}(F)}(n)]^{-1}$. Damit kann man abschätzen:

$$\mathcal{H}^h(F) \leq \lim_{n \to \infty} s_{\mathbf{pref}(F)}(n) \cdot h(r^{-n}) \leq \lim_{n \to \infty} s_{\mathbf{pref}(F)}(n) \cdot c \cdot [s_{\mathbf{pref}(F)}(n)]^{-1} = c < \infty$$

□

Als nächstes werden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine ω–Sprache finden, die positives, endliches Maß bzgl. ihrer jeweiligen HAUSDORFF–n–Dimension hat.

Beispiel 4.3 Wir wollen jetzt für jedes der Tupel $t_1 = (\frac{1}{2}, 1)$, $t_2 = (\frac{1}{2}, 1, 1)$, $t_3 = (\frac{1}{2}, 1, 1, 1)$, ... eine Sprache F_{t_i} finden, so dass $0 < \mathcal{H}^{t_i}(F_{t_i}) < \infty$ ist. Grundlage für die Konstruktion bildet die Sprache $F_{\frac{1}{2}} = (\{a, b\} \cdot a)^{\omega}$ [1] mit HAUSDORFF-Dimension $\frac{1}{2}$ und endlichem, positivem $\frac{1}{2}$–dimensionalem Maß.

- Eine Sprache F_{t_1} für das Paar $(\frac{1}{2}, 1)$ konstruieren wir aus $F_{\frac{1}{2}}$, indem wir auf den Ebenen 2^n im Baum der Sprache $F_{\frac{1}{2}}$ (vollständige) Verzweigungen hinzufügen:

$$F_{(\frac{1}{2},-1)} = \left\{ \xi \mid \xi \in \{a,b\}^2 \cdot \prod_{i \in \mathbb{N}} \Big(\{a,b\} \cdot (a \cdot \{a,b\})^{2^i - 1} \cdot \{a,b\} \Big) \right\}$$

Die Strukturfunktion diese Sprache ist $s_{\mathbf{pref}(F_{t_1})}(n) = 2^{\frac{n}{2} + \lfloor \log n \rfloor}$. Damit erreichen wir mit der Dimensionsfunktion $h_1(t) = t^{\frac{1}{2}} \cdot (\log t^{-1})^{(-1)}$ ein endliches, positives h_1-Maß.

<u>obere Schranke:</u> $\mathcal{H}^{t_1}(F) \leq \lim_{n\to\infty} s_{\mathbf{pref}(F_{t_1})}(n) \cdot h_1(2^{-n}) = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{n}{2}+\lfloor \log n \rfloor} \cdot 2^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{n}{2}+\lfloor \log n \rfloor} \cdot 2^{-\frac{n}{2} - \log n} = 1$

<u>untere Schranke:</u> Hier wird wieder das Masseverteilungsprinzip (siehe [7, 4.2]) verwendet. Die Verteilung erfolgt ,,natürlich", d.h. an jeder Verzweigung des Baumes wird die vorhandene Masse gleichmäßig auf die Teilbäume verteilt. Die Masse einer Kugel $w \cdot X^{\omega}$ lässt sich also wie folgt berechnen:

$$\mu(w \cdot X^{\omega}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{|w|}{2} + \lfloor \log |w| \rfloor} & \text{, falls } |w| \text{ gerade} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{|w|+1}{2} + \lfloor \log |w| \rfloor} & \text{, falls } |w| \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dabei gilt $\mu(w \cdot X^{\omega}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{|w|}{2} + \lfloor \log |w| \rfloor} \leq 2^{-\frac{|w|}{2}} \cdot \frac{1}{|w|} = h_1(r^{-|w|})$.

Also ist $\mathcal{H}^{t_1}(F) = 1$.

- Für das Tripel $(\frac{1}{2}, 1, 1)$ vergrößern wir die Sprache $F_{(\frac{1}{2},1)}$ wie folgt. Es sei $F_{t_2} = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ mit

$$X_i = \begin{cases} \{a,b\}, & \text{falls } i \text{ ungerade, oder } i \in \{2^n \mid n \geq 0\} \cup \{2^{2^n} + 2 \mid n \geq 1\} \\ a, & \text{sonst} \end{cases}$$

[1] Binärbaum, der genau auf jeder ungeraden Tiefe vollständig verzweigt

Es werden also zur Sprache $F_{(\frac{1}{2},1)}$ alle diejenigen Sequenzen hinzugefügt, die an beliebig vielen, aber mindestens einer der Positionen $\{2^{2^n}+2 \mid n \geq 1\}$ ein b haben und an allen anderen Positionen den Restriktionen von $F_{(\frac{1}{2},1)}$ unterliegen.

Dann ist die Strukturfunktion $s_{\mathbf{pref}(F_{t_2})}(n) = 2^{\frac{n}{2}+\lfloor \log n \rfloor + \lfloor \log^2(n-2) \rfloor}$. Analog zur Berechnung von $\mathcal{H}^{t_1}(F_{t_1})$ kann hier gezeigt werden, dass $\mathcal{H}^{t_2}(F_{t_2}) = 1$ ist.

- Eine Sprache F_{t_3} mit verallgemeinerter Dimension $(\frac{1}{2}, 1, 1, 1)$ kann konstruiert werden, indem zur Sprache F_{t_2} alle die ω–Wörter hinzu gefügt werden, die an beliebig vielen, aber mindestens einer der Positionen aus der Menge $\{2^{2^{2^n}}+4 \mid n \geq 1\}$ ein b haben und an allen anderen Positionen den Restriktionen von F_{t_2} unterliegen.

  Das liefert die Strukturfunktion $s_{\mathbf{pref}(F_{t_3})}(n) = 2^{\frac{n}{2}+\lfloor \log n \rfloor + \lfloor \log^2(n-2) \rfloor + \lfloor \log^3(n-4) \rfloor}$. Hier gilt ebenfalls $\mathcal{H}^{t_3}(F_{t_3}) = 1$.

- Setzt man diesen Prozess fort, so erhält man für ein beliebig langes Tupel $t_i = (\frac{1}{2}, 1, \ldots, 1)$ die Sprache $F_{t_i} = \prod_{j=0}^{\infty} X_j$ mit

$$X_j = \begin{cases} \{a, b\}, & \text{falls } i \text{ ungerade, oder } j \in \bigcup_{k \leq i} \left\{ k\left\{ 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}} \right. + 2 \cdot k \mid n \geq 0 \right\} \\ a, & \text{sonst} \end{cases}$$

  und der Strukturfunktion $s_{\mathbf{pref}(F_{t_i})}(n) = 2^{\frac{n}{2}+\sum_{j=1}^{i} \log^j(n-2\cdot(j-1))}$. Dass das t_i–dimensionale Maß $\mathcal{H}^{t_i}(F_{t_i}) = 1$ ist, lässt sich analog zum Tupel t_1 und der Sprache F_{t_1} zeigen.

□

Im Fall der klassischen HAUSDORFF–Dimension, und damit der Exponentialfunktionen, ist bekannt, dass $\dim_H(F) \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\log s_{\mathbf{pref}(F)}(k)}{k}$ (siehe [23]).
Im Folgenden untersuchen wir, wie das Verhalten der Strukturfunktion Einfluss auf die verallgemeinerte Dimension hat, also wie das Verhalten vom exponentiellen Wachstum abweicht.

Lemma 4.4 *Es seien* $0 \leq \alpha \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ *und* $F \subseteq X^\omega$, $\beta(k) = \log \prod_{i<n} (\log^i r^k)^{-p_i}$. *Wenn* $\liminf_{k\to\infty} \frac{\log s_{\mathbf{pref}(F)}(k) - \alpha\cdot k + \beta(k)}{\log^n(k)} < p_n$, *so ist* $\dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} F < (\alpha, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n)$.

Beweis. Nach den Voraussetzungen ist $\liminf_{k\to\infty} \frac{\log s_{\mathbf{pref}(F)}(k)-\alpha\cdot k+\beta(k)}{\log^n(k)} < p_n$, daher gilt für ein $\varepsilon > 0$ auch $\frac{\log s_{\mathbf{pref}(F)}(k)-\alpha\cdot k+\beta(k)}{\log^n(k)} <_{\text{i.o.}} p_n - \varepsilon$. Das ist äquivalent zu
$s_{\mathbf{pref}(F)}(k) \cdot r^{-\alpha\cdot k} \cdot \prod_{i<n}(\log^i r^k)^{-p_i} \cdot (\log^n(r^k)^{-p_n-\varepsilon}) <_{\text{i.o.}} 1$.
Also kann das Maß bzgl. $(\alpha, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n - \varepsilon)$ wie folgt abgeschätzt werden:

$$\mathcal{H}^{(\alpha,p_1,\ldots,p_{n-1},p_n-\varepsilon)}(F) \leq \lim_{k\to\infty} s_{\mathbf{pref}(F)}(k) \cdot r^{-\alpha\cdot k} \cdot \prod_{i<n}(\log^i r^k)^{-p_i} \cdot (\log^n(r^k)^{-p_n-\varepsilon}) < 1$$

Also ist auch $\dim_{\text{GH}}^{(\text{n})} F < (\alpha, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n)$. □

Beispiel 4.4 Wir betrachten die Sprache F_{t_2} aus Beispiel 4.3. Die Strukturfunktion dieser Sprache ist $s_{\mathbf{pref}(F_{t_2})}(n) = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \log n \rfloor + \lfloor \log^2(n-2) \rfloor}$. Für $\alpha = \frac{1}{2}$ und $p_1 = 1$ gilt dann

$$\frac{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lfloor \log k \rfloor + \lfloor \log^2(k-2) \rfloor - \frac{1}{2} \cdot k - \log k}{\log^2 k} = \frac{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - \frac{k}{2}}{\log^2 k} + \frac{\lfloor \log k \rfloor - \log k}{\log^2 k} + \frac{\lfloor \log^2(k-2) \rfloor}{\log^2 k}$$

Dieser Term geht mit $k \to \infty$ gegen 1. Also ist $\dim_{\text{GH}}^{(2)}(F_{t_2}) < (\frac{1}{2}, 1, 1+\varepsilon)$, für jedes $\varepsilon > 0$. □

4.3 Aussagen zu Sprachklassen

In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, wann es möglich ist, eine genauere Dimension als die klassische Hausdorff–Dimension zu finden. Für das h-Maß der ω-Potenz einer Sprache $W \subseteq X^*$ erhalten wir zunächst die folgende Aussage.

Lemma 4.5 *Es seien $W \subseteq X^*$ und h eine Dimensionsfunktion. Wenn die Ungleichung $\sum_{v\in W^*} h(r^{-|v|}) < \infty$ gilt, so ist $\mathcal{H}^h(W^\omega) = 0$.*

Beweis. Mit Lemma 2.8 folgt, dass das Maß $\mathcal{H}^h((W^*)^\delta) = 0$ ist. Die Behauptung folgt, weil $W^\omega \subseteq (W^*)^\delta$ gilt. □

Folglich ist für jedes $p = (p_0, \ldots, p_n) \in P_{n+1}$ mit $\sum_{v\in W^*} h_p(r^{-|v|}) < \infty$, die Ungleichung $\dim_{\text{GH}}^{(\text{n})}(W^\omega) \leq (p_0, \ldots, p_n)$ erfüllt, wobei h_p die zu $(p_0, \ldots, p_n)$ gehörende Funktion ist.
Wir werden jetzt zeigen, dass jede Teilmenge einer Vereinigung von Sprachen mit endlichem h–Maß, das Maß 0 bezüglich jeder größeren Dimensionsfunktion hat.

Satz 4.6 *Es seien $F \subseteq X^\omega$ und $\overline{F} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i \subseteq X^\omega$ mit $F \subseteq \overline{F}$ und $\mathcal{H}^h(F_i) \leq c < \infty$, für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann existiert keine Dimensionsfunktion g mit $g \succ h$ und $0 < \mathcal{H}^g(F) < \infty$.*

Beweis. Weil $F \subseteq \overline{F} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ ist, gilt

$$\mathcal{H}^g(F) \leq \mathcal{H}^g(\overline{F}) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^g(F_i)$$

Weil $\mathcal{H}^h(F_i) < \infty$ und $g \succ h$ (d.h. $\frac{g(t)}{h(t)} \to 0$, für $t \to 0$) gilt nach Lemma 2.1, dass $\mathcal{H}^g(F_i) = 0$ ist. Also ist $\mathcal{H}^g(F) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^g(F_i) = 0$ für jede Dimensionsfunktion $g \succ h$. □

Mit Hilfe dieser Aussagen können wir für reguläre und kontextfreie ω–Sprachen zeigen, dass es keine genauere Dimension als die klassische HAUSDORFF–Dimension gibt.

Korollar 4.7 *Ist $F \subseteq X^\omega$ eine reguläre oder eine kontextfreie ω-Sprache, so existiert keine Dimensionsfunktion g mit $g \succ t^{\dim_H F}$ oder $g \prec t^{\dim_H F}$ und $0 < \mathcal{H}^g(F) < \infty$.*

Um diese Aussage zu beweisen benötigen wir ein Ergebnis über das Maß der ω-Potenz einer Sprache aus [23].

Proposition 4.8 *Es sei $W \subseteq X^*$. Dann ist $\mathbb{L}_{\dim_H W^\omega}(W^\omega) \leq 1$.*

Die regulären bzw. kontextfreien ω-Sprachen können wie folgt durch ω-Potenzen von Sprachen charakterisiert werden (vgl. [18]).

Lemma 4.9 *Eine ω-Sprache $F \subseteq X^\omega$ ist genau dann regulär (kontextfrei), falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und reguläre (kontextfreie) Sprachen $W_i, V_i \subseteq X^*$ $(1 \leq i \leq n)$ gibt mit $F = \bigcup_{i=1}^n W_i \cdot V_i^\omega$.*

Damit können wir jetzt die Aussage aus Korollar 4.7 wie folgt beweisen.

Beweis. (Korollar 4.7) Es sei $F = \bigcup_{i=1}^n W_i \cdot V_i^\omega$. Nach Lemma 1.4 und Lemma 4.8 ist daher $\dim_H F = \max_{1\leq i\leq n} V_i^\omega$. Wegen Proposition 4.8 ist $\mathbb{L}_{\dim_H F} V_i^\omega \leq 1$. Also lässt sich F als Vereinigung von Mengen endlichen Maßes schreiben: $F = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{w\in W_i} w \cdot V_i^\omega$. Nach Satz 4.6 existiert also keine Funktion $g \succ t^{\dim_H F}$, so dass $0 < \mathcal{H}^g(F) < \infty$.
Weil $w \cdot V_i^\omega \subseteq F$ für jedes $w \in W_i$, gilt $\mathcal{H}^g(w \cdot V_i^\omega) \leq \mathcal{H}^g(F)$ für jede Dimensionsfunktion g. Wenn $g < t^{\dim_H F}$, so ist nach Lemma 2.1 $\mathcal{H}^g(w \cdot V_i^\omega) = \infty$. Also existiert auch keine Dimensionsfunktion $g \prec t^{\dim_H F}$ mit $0 < \mathcal{H}^g(F) < \infty$. □

Die Aussage von Korollar 4.7 gilt unabhängig vom $\dim_H F$–dimensionalen Maß von F, d.h. sie gilt insbesondere auch für die Fälle $\mathbb{L}_{\dim_H F}(F) = 0$ und $\mathbb{L}_{\dim_H F}(F) = \infty$.

Das Ergebnis von Ryabko in Gleichung (3.3) zeigt, dass die Menge aller ω–Wörter, deren lineares Wachstum der Komplexität nicht größer ist als $\varepsilon \cdot n$, HAUSDORFF–Dimension ε hat.

Mit Hilfe der verallgemeinerten HAUSDORFF-Dimension können wir jetzt eine feiner Abstufung zwischen den ω–Wörtern finden. Zunächst zeigen wir für beliebige Parametertupel eine obere Schranke für die verallgemeinerte HAUSDORFF-n-Dimension. Dazu zerlegen wir den Logarithmus der Dimensionsfunktion wie schon in Lemma 4.4 in den linearen Anteil und die Verfeinerung.

Lemma 4.10 *Es sei* $h(r^{-k}) = r^{-\alpha\cdot k+\beta(k)}\cdot(\log^n(r^k))^{-p_n}$ *mit* $\beta(k) = \log\prod_{i<n}(\log^i r^k)^{-p_i}$ *die zu* $(\alpha, p_1, \ldots, p_n)$ *gehörende Dimensionsfunktion. Dann ist*

$$\dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})}\left\{\xi \mid \xi \in X^\omega \wedge \liminf_{k\to\infty} \frac{\mathrm{KA}(\xi[0..k]) - \alpha\cdot k + \beta(k)}{\log^n(k)} < p_n\right\} \leq (\alpha, p_1, \ldots, p_n)$$

Beweis. Wir bezeichnen $F_{\alpha,\beta} := \left\{\xi \mid \xi \in X^\omega \wedge \liminf_{k\to\infty} \frac{\mathrm{KA}(\xi[0..k])-\alpha\cdot k+\beta(k)}{\log^n(k)} < p_n\right\}$.
Für jedes Element ξ aus $F_{\alpha,\beta}$ gilt $\mathrm{KA}(\xi[0..k]) \leq_{\text{i.o.}} \alpha\cdot k - \beta(k) + p_n\cdot\log^n(k) = -\log h(r^{-k})$. Für eine zu einem Tupel $(q_0, q_1, \ldots, q_n) >_{lex} (\alpha, p_1, \ldots, p_n)$ gehörende Funktion g gilt dann wegen Satz 3.7, dass $\mathcal{H}^g(F_{\alpha,\beta}) = 0$ ist. Also ist $\dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} F_{\alpha,\beta} \leq (\alpha, p_1, \ldots, p_n)$. $\square$

Lassen wir als Parameter der Dimensionsfunktionen ausschließlich rationale Parameter zu, so können wir beweisen, dass die n–Dimension der Menge aus Lemma 4.10 sogar gleich dem Parametertupel ist.

Satz 4.11 *Es sei* h *die zu* $\left(\frac{a}{b}, p_1, \ldots, p_n\right) \in P_{n+1}$ *gehörende Dimensionsfunktion mit* $a, b \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ *und* $\beta(k) = \log\prod_{i<n}(\log^i r^k)^{-p_i}$, *d.h.* $h(r^{-k}) = r^{-\frac{a}{b}\cdot k+\beta(k)}\cdot(\log^n r^k)^{-p_n}$. *Dann gilt*

$$\dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})}\left\{\xi \mid \xi \in X^\omega \wedge \liminf_{k\to\infty} \frac{\mathrm{KA}(\xi[0..k]) - \frac{a}{b}\cdot k + \beta(k)}{\log^n(k)} < p_n\right\} = \left(\frac{a}{b}, p_1, \ldots, p_n\right)$$

Beweis. Es sei wieder $F_{\frac{a}{b},\beta} := \left\{\xi \mid \xi \in X^\omega \wedge \liminf_{k\to\infty} \frac{\mathrm{KA}(\xi[0..k])-\frac{a}{b}\cdot k+\beta(k)}{\log^n(k)} \leq p_n\right\}$, wie im Beweis von Lemma 4.10.
Aufgrund von Lemma 4.10 genügt es, die Ungleichung $\dim_{\mathrm{GH}}^{(\mathrm{n})} F_{\frac{a}{b},\beta} \geq \left(\frac{a}{b}, p_1, \ldots, p_n\right)$ zu beweisen. Dazu konstruieren wir eine Teilmenge $F \subseteq F_{\frac{a}{b},\beta}$ mit positivem h–Maß. Es lässt sich leicht zeigen, dass für $i, j, b_0 \in \mathbb{N}$ mit $i, b_0 \geq 1$ und $j \geq 2$ die Ungleichung $|\log^i((j-1)\cdot b_0) - \log^i(j\cdot b_0)| \leq \log 2$ gilt. Daher können wir $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $|\beta((j-1)\cdot b_0) + \log^n((j-1)\cdot b_0)^{-p_n} - \beta(j\cdot b_0) - \log^n(j\cdot b_0)^{-p_n}| \leq \min\{a_0, b_0 - a_0\}$ und $\frac{a_0}{b_0} = \frac{a}{b}$.

Wir definieren $\Delta(1) := a_0 - \lfloor \beta(b_0) + \log^n(b_0)^{-p_n} \rfloor$ und

$$\Delta(j) := a_0 - \lfloor \beta\,(j \cdot b_0) + \log^n(j \cdot b_0)^{-p_n} \rfloor + \lfloor \beta\,((j-1) \cdot b_0) + \log^n((j-1) \cdot b_0)^{-p_n} \rfloor$$

für $j \geq 2$.
Die Teilsprache wird dann wie folgt konstruiert:

$$F := \prod_{i \geq 1} \left(X^{\Delta(i)} \cdot x^{b_0 - \Delta(i)} \right),$$

für ein festes $x \in X$. Diese Sprache hat die Strukturfunktion $s_{\mathbf{pref}(F)}(n) = r^{\frac{a_0}{b_0} \cdot n - \beta(n)} \cdot (\log^n r^k)^{p_n}$ und ist so konstruiert, dass $s_{\mathbf{pref}(F)}(n) = |X| \cdot s_{\mathbf{pref}(F)}(n-1)$, falls $s_{\mathbf{pref}(F)}(n) \neq s_{\mathbf{pref}(F)}(n-1)$.
Zum Nachweis, dass F positives Maß hat, benutzen wir das Masseverteilungsprinzip und die „natürliche" Masseverteilung. Wir definieren $\mu(e) := 1$ und

$$\mu(wz) := \begin{cases} \mu(w) \cdot |X|^{-1} & \text{, falls } wz \in \mathbf{pref}(F_{\frac{a}{b},\beta}) \\ & \quad \text{und } s_{\mathbf{pref}(F_{\frac{a}{b},\beta})}(|wz|) \neq s_{\mathbf{pref}(F_{\frac{a}{b},\beta})}(|w|) \\ \mu(w) & \text{, falls } wz \in \mathbf{pref}(F_{\frac{a}{b},\beta}) \\ & \quad \text{und } s_{\mathbf{pref}(F_{\frac{a}{b},\beta})}(|wz|) = s_{\mathbf{pref}(F_{\frac{a}{b},\beta})}(|w|) \\ 0 & \text{, falls } wz \notin \mathbf{pref}(F_{\frac{a}{b},\beta})\,. \end{cases}$$

Damit ist $\mu(w) \leq r^{-\frac{a_0}{b_0} \cdot |w| + \beta(|w|)} \cdot (\log^n r^{|w|})^{-p_n}$, für jedes $w \in X^*$, und Lemma 2.4 ist anwendbar.

Wir zeigen jetzt, dass jedes $\xi \in F$ die Komplexitätsschranke von $F_{\frac{a}{b},\beta}$ erfüllt, d.h. dass $F \subseteq F_{\frac{a}{b},\beta}$ ist. Betrachtet man den Baum der Sprache F, so existieren bis zur Ebene k genau $\frac{a}{b} \cdot k - \beta(k) + p_n \cdot \log^n(k)$ vollständig verzweigte Ebenen, alle anderen Ebenen sind nicht verzweigt. D.h. jedes Wort $w \in \mathbf{pref}(F)$ der Länge k hat nach Konstruktion an $k - (\frac{a}{b} \cdot k - \beta(k) + p_n \cdot \log^n(k))$ Positionen den fest gewählten Buchstaben x und an den anderen Stellen einen beliebigen Buchstaben aus X. Wir definieren $\psi(e) := e$ und

$$\psi(wz) := \begin{cases} \psi(w) & \text{, falls } s_{\mathbf{pref}(F_{\frac{a}{b},\beta})}(|wz|) = s_{\mathbf{pref}(F_{\frac{a}{b},\beta})}(|w|) \\ \psi(w)z & \text{, falls } s_{\mathbf{pref}(F_{\frac{a}{b},\beta})}(|wz|) \neq s_{\mathbf{pref}(F_{\frac{a}{b},\beta})}(|w|) \end{cases}$$

Jetzt definieren wir ein Semimaß m mittels $m(e) := 1$, $m(w) := \mathbf{M}(\psi(w))$, falls $w \in \mathbf{pref}(F_{\frac{a}{b},\beta})$, und $m(w) := 0$, sonst. Weil die Parameter von h rational sind, ist $\mathbf{pref}(F_{\frac{a}{b},\beta})$ entscheidbar, und weil $\mathbf{M}$ außerdem linksberechenbar ist, ist auch m linksberechenbar.

Dann gilt $\mathbf{M}(w) \cdot c_m \geq m(w) = \mathbf{M}(\psi(w))$. Also gilt für die *a priori* Komplexität die folgende Ungleichung

$$\mathrm{KA}(w) \leq \mathrm{KA}(\psi(w)) + \log c_m \leq |\psi(w)| + \log c_m = \frac{a_0}{b_0} \cdot |w| - \beta(|w|) + p_n \cdot \log^n(|w|) + \log c_m$$

$\square$

Bemerkung 4.5 Die Sprache F im Beweis von Satz 4.11 kann auch mittels X^* und der folgenden Dilutionsfunktion (siehe Abschnitt3.3) φ konstruiert werden:

$$\varphi(wz) := \begin{cases} \varphi(w)z & \text{, falls } wx \notin X^{\Delta(i)} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \\ \varphi(w)z \cdot x^{b_0 - \Delta(i)} & \text{, falls } wx \in X^{\Delta(i)} \end{cases}$$

Damit ist $F = \overline{\varphi}(X^\omega)$. Die Funktion $\psi : \mathbf{pref}(F) \to X^*$ im Beweis von Satz 4.11 ist dann die Umkehrfunktion zur Dilutionsfunktion φ:

$$\psi(w) := \begin{cases} w'x & \text{, falls } \varphi(w') \sqsubset w \sqsubseteq \varphi(w'x) \\ \text{n. def.} & \text{, sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\psi(\varphi(w)) = w$ für alle $w \in X^*$. $\square$

Das h–Maß der Menge $F_{\frac{a}{b},\beta}$ von Sequenzen mit einer Komplexität von höchstens $-\log h(r^{-k}) = \frac{a}{b} \cdot k - \beta(k) + p_n \cdot \log^n(k)$ ist ebenfalls unendlich, falls h ausschließlich rationale Parameter hat.

Lemma 4.12 *Es sei $|X| \geq 2$. Weiterhin sei h die zu $\left(\frac{a}{b}, p_1, \ldots, p_n\right) \in P_{n+1}$ gehörende Funktion und $h(r^{-k}) = r^{-\frac{a}{b} \cdot k + \beta(k)} \cdot (\log^n r^k)^{-p_n}$ mit $\beta(k) = \log \prod_{i<n} (\log^i r^k)^{-p_i}$. Dann gilt $\mathcal{H}^h(F_{\frac{a}{b},\beta}) = \infty$.*

Beweis. Sei $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Die Funktion Δ sei definiert wie im Beweis von Satz 4.11. Weiterhin sei

$$F_j = \left(\prod_{i<j} \left(X^{\Delta(i)} \cdot x^{b_0 - \Delta(i)} \right) \right) \cdot \left(X^{\Delta(j)} \cdot y^{b_0 - \Delta(j)} \right) \cdot \left(\prod_{j<i} \left(X^{\Delta(i)} \cdot x^{b_0 - \Delta(i)} \right) \right)$$

Die Menge $J = \{j \mid b_0 - \Delta(j) > 0\}$ ist unendlich. Für alle $j_1, j_2 \in J$ mit $j_1 \neq j_2$ ist $F_{j_1} \cap F_{j_2} = \emptyset$ und es gilt $\dot{\bigcup}_{j \in J} F_j \subseteq F_{\frac{a}{b},\beta}$. Wie im Beweis von Satz 4.11 haben die Mengen F_j das h-Maß $\mathcal{H}^h(F_j) = 1$. Also ist $\infty = \sum_{j \in J} \mathcal{H}^h(F_j) \leq \mathcal{H}^h(F_{\frac{a}{b},\beta})$. $\square$

Literatur

[1] J. Berstel und D. Perrin. *Theory of Codes*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 1985. 4

[2] C. S. Calude. *Information and Randomness: An Algorithmic Perspective*. Springer–Verlag, 2nd Revised and Extended Edition, 2002.

[3] C. S. Calude, L. Staiger, und S. A. Terwijn. On partial randomness. *Annals of Pure and Applied Logic*, 138:20–30, 2006. 18, 32, 39

[4] C. Caratheodory. Über das lineare Maß von Punktemengen – eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs. 1914.

[5] R. P. Daley. The extent and density of sequences within the minimal–program complexity hierarchies. *J. Comput. System Sci.*, (9):151–163, 1974.

[6] G. A. Edgar. *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 1990.

[7] K. J. Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, 1990. 5, 23, 48

[8] F. Hausdorff. Dimension und äußeres Maß. *Math. Annalen*, 79:157–179, 1919. 19, 20, 21

[9] W. Kuich. On the Entropy of Context-Free Languages. *Information and Control*, 16(2):173–20, 1970. 37

[10] M. Li und P. Vitányi. *An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications*. Springer Verlag, New York, 2nd Edition, 1997. 7, 8, 9, 11, 39

[11] D. W. Loveland. A Variant of the Kolmogorov Concept of Complexity. *Information and Control*, 15(6):510–526, 1969. 8

[12] J. H. Lutz. The dimensions of individual strings and sequences. *Inf. Comput.*, 187(1):49–79, 2003. 39

[13] P. Martin-Löf. The Definition of Random Sequences. *Inform. and Control*, (9):602–619, 1966.

[14] W. Merzenich und L. Staiger. Fractals, Dimension, and Formal Languages. *RAIRO Inf. théor. Appl.*, 28(3–4):361–386, 1994.

[15] J. Reimann. *Computability and Fractal Dimension*. PhD thesis, Ruprecht–Karls–University, 2004.

[16] J. Reimann und F. Stephan. Hierarchies of Randomness Tests. Aus *Proceedings of the 9th Mathematical Logic in Asia Conference*. World Scientific, 2006. 18

[17] C. A. Rogers. *Hausdorff Measures*. Cambridge University Press, 1970.

[18] G. Rozenberg und A. Salomaa. *Handbook of Formal Languages, Vol 3*. 1997. 51

[19] B. Y. Ryabko. Coding of combinatorial sources and Hausdorff dimension. *Soviet. Math. Dokl.*, 30(1):219–222, 1984. 43

[20] A. Shen. Algorithmic variants of the notion of entropy. *Soviet Math. Dokl.*, 29(3):569–573, 1984. (Translated from the Russian version.). 10

[21] L. Staiger. Sequential Mappings of omega-Languages. *ITA*, 21(2):147–173, 1987. 13, 40

[22] L. Staiger. Combinatorial properties of the Hausdorff dimension. *J. Statist. Plann. Inference*, 23:95–100, 1989. 25

[23] L. Staiger. Kolmogorov complexity and Hausdorff dimension. *Inform. and*

Comp., 103(2):159–194, 1993. 27, 30, 36, 37, 49, 51

[24] L. Staiger. The Hausdorff Measure of Regular ω–languages is Computable. Technical Report 30, Fachbereich Mathematik und Informatik, Martin–Luther–Universität Halle–Wittenberg, 1998.

[25] L. Staiger. Infinite Iterated Function Systems in Cantor Space. *Int. Journ. of Foundations of Computer Sciene*, 16(4):787–802, 2005. 35

[26] L. Staiger. On Oscillation-free epsilon-random Sequences. *Electr. Notes Theor. Comput. Sci.*, 221:287–297, 2008. 39, 40, 41

[27] K. Tadaki. A generalisation of Chaitin's halting probability Ω and halting self-similar sets. *Hokkaido Math. J.*, (31):219–253, 2002. 17

[28] V. A. Uspensky. *Kolmogorov Complexity and Computational Complexity*, Kapitel Complexity and Entropy: An Introduction to the Theory of Kolmogorov Complexity, Seiten 85–102. 1992. Editor: Osamu Watanabe. 10, 11, 13

[29] V. A. Uspensky, A. L. Semenov, und A. Shen. Can an (individual) sequence of zeroes and ones be random? *Uspekhi Mat. Nauk*, 45(1):105–162, 1990. [Russian]. 11, 16, 39

[30] V. A. Uspensky und A. Shen. Relations Between Varieties of Kolmogorov Complexities. *Math. Systems Theory*, 29:271–292, 1996. 7, 8, 9, 10, 16

[31] A. K. Zvonkin und L. A. Levin. The Complexity of finite objects and the Development of the Concepts of Information and Randomness by means of the Theory of Algorithms. *Russian Math. Surveys*, 25(6):83–124, 1970. 5

Persönliche Daten

Name:	Mielke
Vorname:	Jöran
vorhandener akademischer Grad:	Diplom-Informatiker
Geburtsdatum, -ort:	26.04.1980, Wolfen
Geschlecht:	männlich
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Anschrift:	Röderberg 8 06114 Halle

Schulbildung

1986 - 1990	Comenius-Schule Bitterfeld
1990 - 1998	Walther-Rathenau-Gymnasium Bitterfeld, abgeschlossen mit Abitur

Zivildienst

Jul. 1998 - Aug. 1999	Evangelische Kirchgemeinde Bitterfeld

Studium

Okt. 1999 - Mrz. 2005	Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Studiengang Diplom Informatik mit Nebenfach Mathematik, Abschluss als Diplom-Informatiker

Berufliche Tätigkeit

Apr. 2005 - Sep. 2009	Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für theoretische Informatik

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst, keine anderen als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Halle, November 2009 Jöran Mielke