Theorie
der
Dimensionszeichen
nebst ihrer
Anwendung
auf
verschiedene Materien
aus der
Analysis endlicher Größen

von
Ernst Gottfried Fischer,
Professor der lateinischen Sprache an dem vereinigten Berlinischen und Cöllnischen Gymnasium zu Berlin.

Erster Theil,
welcher die Erklärung und allgemeine Theorie der Dimensionszeichen, eine allgemeine Potenziirungsmethode und eine allgemeine Auflösungsmethode durch unendliche Reihen enthält.

Halle,
in der Buchhandlung des Waisenhauses.
1792.

Vorrede.

Die erste Veranlassung zu den analytischen Untersuchungen, denen das gegenwärtige Werk sein Daseyn verdankt, war das so oft gefühlte Bedürfniß einer allgemeinen Auflösungsmethode durch unendliche Reihen. Was einige der scharfsinnigsten ältern Analysten, namentlich Newton und Moivre ꝛc., in Rücksicht dieses Problems geleistet hatten, war mir nicht unbekannt, befriedigte mich aber nicht, da ihre Auflösungen mühsam und zeitraubend, auch nicht allgemein genug waren. Ich nahm mir daher, anfänglich blos zu meiner eigenen Befriedigung, vor, zu versuchen, ob meine Kräfte zu einer bequemern Auflösung dieses Problems hinreichen würden. Denn warum, dachte ich, sollte nicht der Zaunkönig auf dem Rücken des Adlers höher fliegen können, als dieser? Ich fiel bey diesen Untersuchungen auf eine neue Bezeichnungsart, die ich in der Folge über meine ersten Erwartungen brauchbar fand, indem ich dadurch in dem Stand gesetzt wurde, nicht nur jenes Problem auf die allgemeinste, und für die Anwendung bequemste Art aufzulösen, sondern überhaupt fast alle analytische Arbeiten mit vielgliedrigen Größen, oder unendlichen Reihen, sehr abzukürzen und zu erleichtern, ohne weder bey jenem Problem, noch bey diesen Arbeiten die Rechnung des Unendlichen zu Hülfe nehmen zu dürfen. Die Theorie dieser Zeichen, die ich Dimensions-

Zeichen genennt habe, nebst mancherley Anwendungen derselben, machen nun den Gegenstand dieses gegenwärtigen Werkes aus. Vielleicht war es gut, daß ich damals, als ich mich zuerst mit dem oben erwähnten Problem beschäftigte, noch nicht wußte, daß der scharfsinnigste Analyst unseres Jahrhunderts, Herr de la Grange, eben dasselbe Problem, auf eine höchst scharfsinnige und allgemeine Art aufgelöset habe *). Ich würde mich vielleicht begnüget haben, mir die Methode dieses großen Mannes bekannt zu machen, ohne nach einem solchen Vorgänger neue Schritte zu versuchen; und so wäre wahrscheinlich die Veranlassung, welche mich auf jene Zeichen leitete, weggefallen. Weit bin ich indessen von dem Stolze entfernt, mich mit einem solchen, in seiner Art einzigen Manne messen zu wollen, in dessen Abhandlung über das obige Problem, so wie in allen Schriften desselben, ein Scharfsinn und eine Fruchtbarkeit des Genies herrscht, gegen welche alles, was ich zu leisten vermag, sehr weit zurückbleiben muß. Besonders lebhaft fühlte ich die Beschränkung meiner Kräfte, als ich sahe, daß Herr de la Grange den Beweis seiner Auflösungsreihe in aller Schärfe, deren die Analysis fähig ist, geführet hatte, da ich hingegen mich blos mit einer unvollständigen Induction hatte begnügen müssen. Da ich indessen auf einem ganz anderen Wege, als Herr de la Grange zu der Auflösung des Problems gelangt war, und es für die Wissenschaft nie anders als vortheilhaft seyn kann, wenn ein und derselbe Gegenstand aus verschiedenen Gesichtspuncten untersuchet wird, so hielt ich es für besser, diejenigen Abschnitte meines Werkes, welche eben den Gegenstand be-

*) Nouvelle methode pour resoudre les Equations litterales, par le moyen des series. Mem. de l'acad. roy. des Sc. et B. L. à Berlin. Tom. 24. pag. 251. Eine Uebersetzung dieser Abhandlung hat Herr Prof. Michelsen, im 3ten Bande der Eulerschen Einleitung geliefert, pag. 190.

betreffen, auch nach Durchlösung jener Abhandlung, ungeändert zu lassen, als ihnen durch Benutzung jener Meisterarbeit einen erborgten Anstrich von Scharfsinn zu geben. Nur einige Zusätze hat jene Abhandlung des Herrn de la Grange veranlasset, wohin namentlich der letzte Abschnitt des ersten Theils, und der Abschnitt von der Convergenz der Reihen im zweiten Theile gehören.

In der Folge fand ich auf eben dem Wege, wo ich anfänglich ganz einsam zu gehen wähnte, noch einen andern vortreflichen und achtungswürdigen Geometer, Herrn Prof. Hindenburg, der schon vor 11 Jahren in seinen primis lineis novi systematis permutationum, combinationum et variationum (Lipsiae 1781.), dem Publicum zu einem analytischen Werke Hofnung machte, dessen Vollendung gewiß manches schätzbare analytische Werk, und vielleicht auch diese meine geringe Arbeit entbehrlich machen würde. Bis jetzt ist aber, so viel mir bekannt ist, diese Hofnung nicht erfüllt worden, — vielleicht weil das scharfe Auge dieses vortreflichen Geometers ein für die Kräfte eines Menschen vielleicht zu weites, vielleicht in einem und dem andern Theil wohl gar ganz unzugängliches Feld, wie von einer Anhöhe, übersah, wo das geübteste Auge nicht immer im Stande ist, alle Schwierigkeiten und Hindernisse zu übersehen, die sich bey der wirklichen Durchmusterung aller einzelnen Gegenden vorfinden können. Täuscht mich indessen die Eigenliebe nicht gänzlich, so dürfte vielleicht, die einzige einfache und leichte Bezeichnungsart, deren ich mich in diesem Werke bedient habe, zur Auflösung aller der Probleme leiten können, die in jenem Entwurfe wirklich auflösbar seyn möchten.

Ich übergebe übrigens dieses Werk dem Publicum mit dem Bewußtseyn, daß ich keine Mühe gesparet habe, demselben alle die Vollkommenheit zu geben, die ich ihm nach Maaßgabe meiner Zeit, meiner Kenntnisse und Kräfte geben konnte. Die Mathematik hat von jeher stärkeren Reiz für mich gehabt, als irgend eine andere wissenschaftliche Beschäftigung. Ich erinnere mich selbst mancher Spiele meiner früheren Kindheit, die Verwandschaft mit Mathematik hatten, und den ersten Unterricht in der Geometrie, den ich erst in meinen 17ten Jahre erhalten konnte, verschlang ich mit einem Heißhunger, den ich bey keiner andern Wissenschaft empfand. Aber es gefiel der Vorsehung nicht, mich in eine Lage zu versetzen, wo ich diesen Hang ungestört hätte befriedigen können. Seit meinen Schuljahren, bis diesen Augenblick, konnte ich meiner Lieblingswissenschaft nur sparsame Nebenstunden widmen. Ich setze indessen zum Trost anderer, die sich vielleicht in einem ähnlichen Gedränge mit ihrer Lieblingswissenschaft befinden, hinzu, daß es mich nicht gereuet, in dieser Lage gewesen zu seyn, weil ich einsehe, daß die Nothwendigkeit sich mit mancherley ungleichartigen Dingen zu beschäftigen das sicherste Mittel ist, den Kopf vor einseitiger Schätzung anderer Wissenschaften zu bewahren, einem Fehler, in welchen Niemand leichter, als ein Mathematiker verfallen kann. Es sind mehr als vier Jahre verflossen, seitdem ich anfing mich mit den Untersuchungen zu beschäftigen, deren Resultate dieses Werk enthält, und seit dieser Zeit habe ich alle meine Nebenstunden, fast einzig diesem Werke gewidmet. Allein bey aller Sorgfalt, die ich darauf gewendet habe, bey einer zweimaligen völligen Umarbeitung des ganzen Manuscripts, und noch öfterer Umarbeitung mancher einzelnen Theile, sehe ich dennoch nur zu deutlich ein, wie unvollkommen hin und wieder meine Arbeit sey, hoffe aber, daß Kenner das Ganze der öffentlichen Bekanntmachung nicht unwerth finden, einige einzelne Stellen aber mit einiger Nachsicht beurtheilen werden, besonders da ich, auch bey größern Kräften, als die meinigen sind, in einer so beschränkten und zerstückelten Zeit, dennoch unmöglich etwas fehlerfreies hätte liefern können. Besonders muß ich um diese Nachsicht, in Rücksicht der nicht immer zweckmäßigsten Wahl der erläuternden Beispiele und Aufgaben, bitten.

Es würde überflüßig seyn, hier von dem Inhalt des ersten Theils noch etwas zu sagen, da sich derselbe ziemlich richtig aus der folgenden Inhaltsanzeige übersehen läßt. Was aber den zweiten Theil betrift, der mit dem ersten ein unzertrennliches Ganze ausmachen wird, so muß ich seinen Inhalt hier kürzlich anzeigen, da die Kürze der Zeit es nicht erlaubt hat, ihn nach meinen Wunsch und Absicht, mit dem ersten zugleich zu liefern. Die erstere Hälfte desselben beschäftigt sich blos mit endlichen Gleichungen, und ich werde zeigen, wie man ganz allgemein nicht nur die sämtlichen Wurzeln jeder Gleichung, einzeln, und zwar auf mehr als eine Art, durch Reihen darstellen, sondern auch, so bald die Coefficienten, nicht in Buchstaben, sondern Zahlen gegeben sind, die sämtlichen Wurzeln, die unmöglichen eben sowohl, als die möglichen, durch convergirende Reihen berechnen könne, und zwar in den meisten Fällen ganz direkt, und ohne alle Vorbereitung, oder, wo dies nicht angeht, nach einer leichten Umformung der Gleichung; so daß, wie es mir scheint, in diesem Puncte für das Practische wenig zu wünschen übrig bleiben wird. In der letzten Hälfte des zweiten Theils, beschäftige ich mich mit unendlichen Reihen, und zeige, welcher Gebrauch sich von den Dimensionszeichen, und überhaupt von der im ersten Theil vorgetragenen Theorie, bey ihrer Inversion, Umformung, Summirung u. dergl. m. machen lasse.

Der Leser, den ich mir bey Ausarbeitung des ganzen Werkes dachte, war nicht der erste Anfänger in der Analysis. Ich dachte mir ungefähr einen Analysten, der in allen Theilen der Analysis des Endlichen hinlänglich bewandert, und dem besonders auch dasjenige bekannt und geläufig wäre, was Euler in

seiner

seiner Einleitung vorgetragen hat. Namentlich setze ich bey dem Leser Bekanntschaft mit dem trigonometrischen Calcul, und mit denenjenigen Reihen voraus, durch welche die bekanntesten transcendenten Verhältnisse, die von dem Kreise und den Logarithmen hergenommen sind, ausgedrückt werden, und deren Entwickelung man außer dem genannten Eulerschen Werke, in den Kästnerschen, von Tempelhofischen, Karstenschen, Klügelschen, und allen andern guten Lehrbüchern findet. Die Rechnung des Unendlichen habe ich in den Hauptsachen geflissentlich vermieden, und wo sie gebraucht ist, da ist es durchgehends (nur eine Stelle im zweiten Theile ausgenommen) bey Nebensachen geschehen, die man allenfalls ohne Nachtheil des Ganzen überschlagen kann.

Eben die Nähe der Messe, die den Abdruck des zweiten Theils hinderte, hat es auch unmöglich gemacht, die zu dem ersten Theil gehörigen Tabellen schon jetzt zu liefern, welches mir um desto unangenehmer ist, da hierdurch der Gebrauch des Buches erschweret wird. Um den Mangel dieser Tabellen einigermaßen zu ersetzen, ersuche ich die Leser, welche mein Buch einer genauern Aufmerksamkeit würdigen wollen, sich vor der Hand wenigstens die allgemeine Potenzreihe S. 46. und die allgemeine Auflösungsreihe S. 68. auf ein besonderes Blatt abzuschreiben, und jene mit Taf. II. A., diese mit Taf. III. A. zu bezeichnen, um sie beym Lesen beständig vor Augen behalten zu können. Beides (der zweite Theil und die Tabellen) erfolgt ganz unfehlbar in der Michaelismesse dieses Jahres.

Inhalt.

Inhalt
des ersten Theils.

§. 95

Erster Theil.

Allgemeine Theorie
der
Dimensionszeichen,
nebst
Auflösung
einiger allgemeinen Aufgaben vermittelst derselben.

Erster Abschnitt.

Vorbereitungssätze, über Producte und Potenzen vielgliedriger Ausdrücke.

§. 1. Lehrsatz.

Wenn mehrere vielgliedrige endliche oder unendliche Ausdrücke in einander multipliciret werden; so bestehet das Product aus der algebraischen Summe aller möglichen Partialproducte, die sich aus den einzelnen Gliedern der gegebenen Reihen, unter der Bedingung machen lassen, daß man zu jedem Partialproduct aus jeder Reihe ein Glied nehme.

Beweis. Die gegebenen Ausdrücke mögen folgende seyn:

$$\begin{aligned} A &= a + b - c + d - \text{etc.} \\ B &= a^{I} - b^{I} + c^{I} + d^{I} - \text{etc.} \\ C &= a^{II} + b^{II} + c^{II} - d^{II} + \text{etc.} \\ D &= a^{III} + b^{III} - c^{III} - d^{III} + \text{etc.} \end{aligned}$$

u. s. w.

1) Wenn A und B nach den gewöhnlichen Regeln multipliciret werden, so fällt in die Augen, daß nach und nach **jedes Glied der ersten Reihe, mit jedem Gliede der zweiten Reihe** combiniret wird: also ist unser Satz von zwei Reihen richtig.

2) Wird ferner das Product von A und B, mit C multipliciret, so wird **jede Ambe**, oder Partialproduct, woraus AB bestehet, mit **jedem Gliede** der dritten Reihe combiniret. Es wird also keine Terne, welche man so zusammensetzet, daß ein Glied aus der ersten, eins aus der zweiten, und eins aus der dritten Reihe genommen wird, erdenklich seyn, die nicht in dem Product ABC vorkommen sollte. Der Satz ist also auch von drey Reihen richtig.

3) Wird ferner dieses Product ABC, mit D multipliciret, so wird **jede Terne** dieses Products, mit **jedem Gliede** der vierten Reihe combiniret. Unser Satz ist also auch von vier Reihen richtig.

Und da man dieselben Schlüsse fortsetzen kann, so weit man will, so ist der Satz allgemein richtig.

§. 2. Zusatz.

Siehet man die einzelnen Glieder jeder Reihe, als Größen von einer Dimension an, so enthält das Product aus zwei Reihen, lauter Glieder von zwei Dimensionen; das Product aus drei Reihen, lauter Glieder von drei Dimensionen *etc.*, und überhaupt das Product aus n Reihen, lauter Glieder von n Dimensionen.

§. 3. Lehrsatz.

Wenn n eine ganze und positive Zahl bedeutet, so ist die $n$te Potenz eines vielgliedrigen endlichen oder unendlichen Ausdrucks $A + B + C + D + E + F +$ *etc.*, der algebraischen Summe aller möglichen $n$gliedrigen Combinationen oder Partialproducte gleich, die sich aus den einzelnen Gliedern, A, B, C *etc.* machen lassen.

Beweis. Wenn n ganz und positiv, so ist die $n$te Potenz von $A + B + C + D +$ *etc.*, einem Product aus n solchen Reihen gleich. Dies Product ist aber (§. 1.) der Summe aller möglichen Partialproducte gleich, die man erhält, wenn man aus jeder Reihe ein Glied nimmt. Da aber hier alle zu multiplicirende Reihen gleich sind, so ist es einerley, ob ich sage, es soll aus jeder der n Reihen ein Glied, oder es sollen aus einer Reihe n Glieder genommen werden. Folglich *etc.*

§. 4. Anmerkung

Man übersehe nichts, was der Ausdruck, **alle mögliche $n$gliedrige Combinationen**, in sich schließet. Besonders bemerke man

1) daß dahin auch solche Combinationen gehören, in welchen ein oder mehr Buchstaben mehr als einmal vorkommen, als $AAAA$, $AAABB$, u. d. gl. m.

2) daß jede Combination zugleich nach allen ihren möglichen Versetzungen genommen werden muß; als AAB, ABA, BAA, oder kürzer $3AAB$, u. d. gl. m.

Erläuterung durch einige Beispiele.

§. 5. Beispiel. 1. 2.

Um das Quadrat von $A + B$ zu machen, muß man alle mögliche Amben formiren, die sich aus A und B machen lassen, nemlich

$$AA + AB + BA + BB = AA + 2AB + BB$$

Um das Quadrat von $A + B + C$ zu machen, muß man eben so alle aus A, B und C mögliche Amben machen, nemlich

$$\begin{array}{llllll} AA & + AB & + AC & & \\ & + BA & + BB & + BC & \\ & & + CA & + CB & + CC \end{array}$$

$$\text{oder } \begin{array}{llllll} AA & + 2AB & + 2AC & + 2BC & + CC \\ & & + BB & & \end{array}$$

§. 6. Zusatz.

Vermöge dessen, was §. 4. Nr. 2. bemerkt worden, läßt sich die Arbeit abkürzen. Es ist nemlich bey Formirung der Partialproducte nicht nothwendig auf die Ordnung der Buchstaben zu sehen, sondern man formire sie ohne diese Rücksicht, (z. B. nicht AB und BA, sondern blos AB: nicht AAB, ABA, BAA, sondern blos AAB,) und setze alsdenn jeder Combination die ihr zugehörige Versetzungszahl vor ($2AB$, oder $3AAB$).

§. 7. Beispiel. 3.

Die vierte Potenz von $A + B + C$ bestehet aus folgenden Quaternen:

$$\begin{array}{llllll}
AAAA & + & 4AAAB & + & 4AAAC \\
 & + & 6AABB & + & 12AABC \\
 & & & + & 6AACC \\
 & + & 4ABBB & + & 12ABBC \\
 & & & + & 12ABCC \\
 & & & + & 4ACCC \\
 & + & BBBB & + & 4BBBC \\
 & & & + & 6BBCC \\
 & & & + & 4BCCC \\
 & & & + & CCCC
\end{array}$$

§. 8. Zusatz.

Kommen in der Wurzel andere Zeichen als + vor, so richten sich die Zeichen der Partialproducte in der Potenz, nach den bekannten Regeln.

§. 9. Anmerkung.

Mehrere Beispiele hinzu zu setzen, halte ich für unnöthig; indem selbst die angeführten mehr zur Versinnlichung des Lehrsatzes (§. 3.), als zum Rechnungsgebrauch dienen sollen. Im dritten Abschnitt werden wir eine weit leichtere Methode dergleichen Potenzen zu formiren kennen lernen.

§. 10. Lehrsatz.

Wenn wiederum n eine ganze und positive Zahl, der gegebene vielgliedrige Ausdruck aber, welcher zu der $n$ten Potenz erhoben werden soll, nach Potenzen einer Größe x geordnet ist, nemlich

$$Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} + etc. = y;$$

so werden sich unter den Partialproducten, woraus nach §. 3., y^n bestehet, mehrere finden, welche einerley Potenz von x, z. B. x^t enthalten, und zwar wird jede Potenz x^t, so oft vorkommen, als vielmal sich t, aus n Gliedern der Exponentenreihe m, $m + r$, $m + 2r$, $m + 3r$ etc. durch Addition zusammensetzen läßt.

 Beweis.

Beweis. Die $n$te Potenz unseres Polynoms enthält alle mögliche Partialproducte, die sich aus n Gliedern des Polynoms machen lassen (§. 3.). Da nun alle Glieder desselben Potenzen von x enthalten, die Multiplication der Potenzen aber, durch Addition ihrer Exponenten geschiehet, so ist deutlich, daß in der Potenzreihe, irgend eine Potenz von x, nemlich x^t, auf so viele Arten vorkommen müsse, als vielmal sich nur t, aus n Exponenten der Wurzelreihe durch Addition zusammensetzen läßt.

§. 11. Erläuterung durch ein Beispiel.

Die dritte Potenz des Ausdrucks $Ax^2 + Bx^4 + Cx^6$, ist folgende:

$$AAAx^6 + 3AABx^8 + 3AACx^{10} + 6ABCx^{12} + 3ACCx^{14} + 3BCCx^{16} + CCCx^{18}$$
$$+ 3ABBx^{10} + BBBx^{12} + 3BBCx^{14}$$

Hier kommt x^{10} zweimal vor, weil sich 10, aus drei Exponenten der Wurzelreihe 2, 6, 8 auf zweierley Art zusammensetzen lässet, nemlich $10 = 2 + 2 + 6$, und $10 = 2 + 4 + 4$. Eben so kommt x^{12} zweimal vor, weil sowohl $2 + 4 + 6 = 12$, als $4 + 4 + 4 = 12$; desgleichen x^{14} zweimal, weil $2 + 6 + 6 = 14$, und $4 + 4 + 6 = 14$. Hingegen kommt x^8 nur einmal vor, weil blos $2 + 2 + 4 = 8$; x^7, x^9, x^{11}, x^{13}, x^{15}, x^{17}, x^{19}, x^{20} *etc.*, x^3, x^2, x^1, x^0 *etc. etc.* kommen gar nicht vor, weil sich keiner dieser Exponenten, aus den Zahlen 2, 4, 6, und zwar aus drei Stücken zusammensetzen läßt.

§. 12. Lehrsatz.

Wenn die Folge der Exponenten von x in einer gegebenen Reihe diese ist:

$$m,\ m + r,\ m + 2r,\ m + 3r,\ \ldots,\ m + vr$$

und wenn n wieder eine ganze und positive Zahl bezeichnet, so ist die Folge der Exponenten von x, in der $n$ten Potenzreihe folgende:

$$nm,\ nm + r,\ nm + 2r,\ nm + 3r,\ \ldots,\ nm + nvr$$

Beweis. 1) Die Reihe sey steigend und m sey der niedrigste Exponent in der Wurzelreihe, so ist offenbar, daß eine $n$malige Addition von m, d. i. nm, die kleinste Summe geben wird, welche sich aus n Exponenten der Wurzelreihe herausbringen läßt; die niedrigste Potenz von x in der Potenzreihe wird also x^{nm} seyn. Die nächste Potenz von x wird man erhalten, wenn man aus der Summe nm, ein m wegläßt, und statt desselben, den zweiten Exponenten der Wurzelreihe hinzusetzt; d. h. er wird seyn $(n - 1)\ m + (m + r) = nm + r$. Nach diesem Exponenten kann es keinen kleinern geben, als $(n - 1)\,m + (m + 2r) = nm + 2r$, u. s. w. Den höchsten Exponenten der Potenzreihe aber wird man durch $n$malige Addition des höchsten Exponenten der Wurzelreihe erhalten, d. h. er wird seyn $n\ (m + vr) = nm + nvr$.

2) Wäre die Reihe fallend, so darf man in dem Beweise nur die Wörter höchst und niedrigst, klein und groß verwechseln, so wird er Wort für Wort auch auf diesen Fall anwendbar seyn.

§. 13. Zusätze.

1) Die Exponentenreihe der $n$ten Potenz steigt oder fällt also, nach einerley Differenz r, mit der Wurzelreihe, hebt aber an, und schließt sich mit einer $n$mal größeren Zahl.

2) Wenn die Wurzelreihe endlich ist, so ist es auch jede Potenzreihe, von der ganzen und positiven Ordnung n. Ist aber jene unendlich, so ist es auch diese. Beides erhellet aus Vergleichung der letzten Exponenten $m + vr$, und $n(m + vr)$.

Zweiter Abschnitt.

Erklärung der Dimensionszeichen.

§. 14. Erklärung.

Dimensionszeichen der ersten Ordnung.

1) Das erste Dimensionszeichen (so will ich meine neuen Zeichen nennen,) ist I, und zeigt überhaupt eine Größe an, die ich als einen einfachen Factor, oder als eine Größe von einer Dimension ansehe. Um aber mehrere dergleichen Größen unterscheiden zu können, setze ich oben gerade über die I, (nicht seitwärts, zum Unterschied von Exponenten,) einen Index oder **Marke**, wozu ich nach Gutbefinden, bald kleine Ziffern, bald kleine Buchstaben brauche, z. B.

$$\overset{1}{\mathrm{I}},\ \overset{2}{\mathrm{I}},\ \overset{3}{\mathrm{I}},\ \overset{4}{\mathrm{I}}\ etc. \quad \text{oder auch}\quad \overset{0}{\mathrm{I}},\ \overset{-1}{\mathrm{I}},\ \overset{-2}{\mathrm{I}},\ \overset{-3}{\mathrm{I}},\ etc.$$

$$\overset{m}{\mathrm{I}},\ \overset{m+r}{\mathrm{I}},\ \overset{m+2r}{\mathrm{I}}\ etc. \qquad \overset{-m}{\mathrm{I}},\ \overset{-2m}{\mathrm{I}},\ \text{u. d. gl. m.}$$

Diese Marken sind an sich eben so willkührlich, als die einzelnen Buchstaben, womit man in gewöhnlichen algebraischen Rechnungen die einzelnen Größen bezeichnet; doch kann man in den meisten Fällen durch gute Auswahl wichtige Vortheile erhalten. Ich brauche z. B. diese Bezeichnungsart in gegenwärtiger Schrift, um Coefficienten gegebener endlicher oder unendlicher Reihen zu bezeichnen; eine solche Reihe sey:

$$y = Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + etc.$$

hier brauche ich statt A, B, C *etc.* diese Zeichen, und nehme zur Marke gewöhnlich die Anzahl des Gliedes, so daß ich $A = \overset{1}{\mathrm{I}}$; $B = \overset{2}{\mathrm{I}}$; $C = \overset{3}{\mathrm{I}}$ *etc.* setze, und die ganze Reihe also schreibe:

$$y = \overset{1}{\mathrm{I}}x^m + \overset{2}{\mathrm{I}}x^{m+r} + \overset{3}{\mathrm{I}}x^{m+2r} + etc.$$

Bis-

Bisweilen ist es auch vortheilhaft, die Exponenten der Potenzen von x, zugleich zu Marken der Dimensionszeichen zu machen, und $A = \overset{m}{1}$, $B = \overset{m+r}{1}$, $C = \overset{m+2r}{1}$ etc. zu setzen, so daß die ganze Reihe nun also geschrieben wird:

$$y = \overset{m}{1}\, x^m + \overset{m+r}{1}\, x^{m+r} + \overset{m+2r}{1}\, x^{m+2r} + \text{etc.}$$

2) Kommt mehr als eine Reihe in einer Rechnung vor, so brauche ich statt des ersten Dimensionszeichens 1, auch den ersten Buchstaben irgend eines Alphabets A, $\mathfrak{A}$, a, $\mathfrak{a}$, α, mit eben so darüber gesetzten Marken. Die obige Reihe können wir demnach auch so schreiben:

$$y = \overset{1}{A} x^m + \overset{2}{A} x^{m+r} + \overset{3}{A} x^{m+2r} + \text{etc.}$$

$$\text{oder } y = \overset{1}{\mathfrak{A}} x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + \text{etc.}$$

$$\text{oder } y = \overset{1}{a} x^m + \overset{2}{a} x^{m+r} + \overset{3}{a} x^{m+2r} + \text{etc.}$$

u. s. f.

Die darüber gesetzten Marken lassen keine Verwechselung mit der gewöhnlichen Bezeichnungsart befürchten.

§. 15. Anmerkungen.

1) Man bemerke, daß in obiger Erklärung nicht gesagt wird, daß die Dimensionszeichen der ersten Ordnung 1, A, $\mathfrak{A}$, a etc. solche Größen anzeigen, welche einfach oder von **einer Dimension sind**, sondern welche ich als einfach ansehe. An sich können sie jeden noch so zusammengesetzten Ausdruck, er sey in Factoren auflösbar, oder nicht, anzeigen, z. B.

$$\overset{1}{1} = \frac{a^2 - c^2}{(b-c)^2}, \text{ oder } = \frac{ay^2}{b-c}, \text{ oder } = \frac{ay}{(b-y)^2} + \frac{a^2y^2}{(b-y)^3}$$

u. d. gl. m. Aber indem ich jede dieser Formeln mit $\overset{1}{1}$, $\overset{2}{1}$ etc. $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$ etc. bezeichne, sehe ich sie als eine Größe an, die nicht in Factoren aufgelöset werden soll, sondern deren Werth ich als eine Größe von einer einzigen Dimension ansehen will.

2) Was die Vorzeichnung (+ und —) zu diesen Zeichen betrift, so kann man ihnen, so gut, wie den bloßen Buchstaben, das eine und das andere Zeichen geben. Doch ist es in den meisten Fällen bequem, sie blos mit + vorzuzeichnen, wenn gleich die Größe, welche sie vorstellen, — hat. Ist zum Beispiel die Reihe, $\log.(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \text{etc.}$ gegeben, so werden wir

$$+1 = +\overset{1}{1},\ -\tfrac{1}{2} = +\overset{2}{1},\ +\tfrac{1}{3} = +\overset{3}{1},\ -\tfrac{1}{4} = +\overset{4}{1} \text{ etc.}$$

setzen, und die ganze Reihe so schreiben können:

$$\log.(1+x) = \overset{1}{1} x + \overset{2}{1} x^2 + \overset{3}{1} x^3 + \overset{4}{1} x^4 + \text{etc.}$$

Auf

Auf diese Art erhält man den Vortheil, daß man oft während einer ganzen Rechnung seine Aufmerksamkeit gar nicht auf die Vorzeichnung zu richten braucht.

§. 16. Dimensionszeichen der zweiten Ordnung.

1) Das zweite Dimensionszeichen ist II, und zeigt ohne Marke unbestimmt Producte von zwei nach §. 14. bezeichneten Größen, oder Größen von zwei Dimensionen an.

Durch eine darüber gesetzte Marke n aber, erhält dieses Zeichen folgende bestimmte Bedeutung: $\overset{n}{II}$ begreift die Summe aller derjenigen Producte in sich, welche aus zwei nach §. 14. bezeichneten Factoren so gemacht werden können, daß die Summe ihrer beiden Marken $= n$ sey, und zwar jedes dieser Producte so oft gerechnet, als sich seine Factoren versetzen lassen.

2) Wenn die Größen der ersten Ordnung nicht mit I, sondern mit dem ersten Buchstaben eines Alphabets bezeichnet sind, so werden wir für die zweite Ordnung statt II, den zweiten Buchstaben eben des Alphabets brauchen. Sind also die Dimensionszeichen der ersten Ordnung A, $\mathfrak{A}$, a, $\mathfrak{a}$, so brauchen wir für die zweite Ordnung respective B, $\mathfrak{B}$, b, $\mathfrak{b}$, und geben ihnen, wie dem Zeichen II, durch Marken bestimmte Bedeutung.

§. 17. Erläuterung.

Gesetzt wir hätten blos folgende drei Größen der ersten Ordnung $\overset{1}{I} = a$, $\overset{2}{I} = b$, $\overset{3}{I} = c$; so zeigt II unbestimmt, Amben von a, b und c, oder $\overset{1}{I}$, $\overset{2}{I}$, $\overset{3}{I}$ an. Setzt man eine Marke n darüber, so zeigt $\overset{n}{II}$ die Summe aller derjenigen Amben an, welche sich aus $\overset{1}{I}$, $\overset{2}{I}$, $\overset{3}{I}$ so machen lassen, daß die beiden Marken jeder Ambe die Summe n geben. Man muß aber alle mögliche solche Amben machen, um den Werth von $\overset{n}{II}$ vollständig zu erhalten, und wenn man daher bey Formirung derselben nicht auf die Ordnung der Factoren in jeder Ambe siehet, so muß man ihr, nach Beschaffenheit der Factoren eine Versetzungszahl vorschreiben.

Für die obigen drei Dimensionszeichen der ersten Ordnung, ist in der zweiten Ordnung $\overset{1}{II} = 0$, weil sich aus $\overset{1}{I}$, $\overset{2}{I}$, $\overset{3}{I}$ keine Ambe machen läßt, deren beide Marken die Summe 1 gäben. Hingegen ist $\overset{2}{II} = \overset{1}{I}.\overset{1}{I} = aa$, weil $1 + 1 = 2$. Ferner ist $\overset{3}{II} = 2\,\overset{1}{I}.\overset{2}{I} = 2ab$; diese Ambe $\overset{1}{I}.\overset{2}{I}$ bekommt die Versetzungszahl zwei, weil sie aus zwei unterschiedenen Factoren bestehet, und also $1.2 = 2$ Versetzungen zuläßt. $\overset{4}{II} = 2\,\overset{1}{I}.\overset{3}{I} + \overset{2}{I}.\overset{2}{I} = 2ac + bb$. Diese Ambe enthält zwei Producte, weil sowohl $1 + 3 = 4$, als $2 + 2 = 4$; aber nur das erste Product bekommt eine Versetzungszahl. Weiter ist $\overset{5}{\mathrm{II}} = 2\,\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{3}{\mathrm{I}}$, und $\overset{6}{\mathrm{II}} = \overset{3}{\mathrm{I}}.\overset{3}{\mathrm{I}}$. Endlich $\overset{7}{\mathrm{II}}, \overset{8}{\mathrm{II}}, \overset{9}{\mathrm{II}}$ *etc.* sind sämtlich $= 0$, weil sich aus 1, 2, 3 gar keine Amben machen lassen, deren Summe größer als 6 wäre.

§. 18. Zusatz.

So bald die Marken in der ersten Ordnung bestimmt sind, so sind auch die Marken der zweiten Ordnung bestimmt. Wenn nemlich die Dimensionszeichen der ersten Ordnung folgende Marken haben:

$$m,\ m+r,\ m+2r,\ m+3r,\ \ldots\ m+vr$$

so ist die geringste Summe von zweien derselben $m + m = 2m$; die nächste ist $m + (m+r) = 2m + r$; dann $m + (m + 2r)$, oder auch $(m+r) + (m+r) = 2m + 2r$, u. s. f. Die höchste Summe von zweien ist $2\,(m + vr)$. Also die ganze Folge der Marken in der zweiten Ordnung:

$$2m,\ 2m+r,\ 2m+2r,\ \ldots\ldots\ 2\,(m+vr).$$

Brauchen wir also in der ersten Ordnung die Marken $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots n$, so haben wir für die zweite Ordnung die Marken:

$$2,\ 3,\ 4,\ 5\ \ldots\ldots\ 2n.$$

Hätten wir aber in der ersten Ordnung die Marken $2, 3, 4 \ldots n$. so würden die Marken der zweiten Ordnung $4, 5, 6 \ldots 2n$ seyn, u. d. gl. m.

Man ersiehet hieraus, daß nichts leichter sey, als zu einer gegebenen Reihe von Dimensionszeichen der ersten Ordnung, die sämtlichen Dimensionszeichen der zweiten Ordnung anzugeben. Und in der Folge, wenn wir diese Zeichen in wirklichen Rechnungen brauchen werden, wird sich zeigen, daß man während einer Rechnung selbst, gar nicht nöthig hat, sich um den Werth dieser Zeichen zu bekümmern. Erst am Ende einer Rechnung, oft sogar erst alsdenn, wenn eine Aufgabe auf einen ganz speciellen Fall angewendet werden soll, ist es Zeit an die Bedeutung dieser Zeichen zu denken. Aber auch diese Arbeit, oder die Uebersetzung unserer Zeichen in die gewöhnliche algebraische Sprache, hat gar keine Schwierigkeit. Was man in dieser Absicht, bei den D. Z. der zweiten Ordnung, von denen wir hier reden, zu thun habe, ergiebt sich sehr leicht, aus dem bisher vorgetragenen. Man muß nemlich, um den Werth eines vorgelegten D. Z. der zweiten Ordnung $\overset{n}{\mathrm{II}}$ zu bestimmen, die Marke desselben n, auf soviele Arten als möglich, aus zwei Marken der ersten Ordnung zusammensetzen. Hierdurch erhält man die Formen aller der Producte, welche $\overset{n}{\mathrm{II}}$ in sich begreift. Diejenigen unter den so gefundenen Producten, welche aus zwei unterschiedenen Factoren bestehen, bekommen alsdenn die Versetzungszahl 2, und die Summe aller so gefundenen Producte ist $= \overset{n}{\mathrm{II}}$.

§. 19. Beispiel.

Wenn also z. B. die Marken in der ersten Ordnung folgende sind: 1, 2, 3, 4, 5, 6 *etc. etc.*, und es wird der Werth von $\overset{8}{\mathrm{II}}$ verlangt, so ist zuerst 8 auf so viele Arten als möglich aus zwei Marken der ersten Ordnung zusammenzusetzen. Es ist aber $8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4$. Demnach wird $\overset{8}{\mathrm{II}}$, Producte von folgenden vier Formen enthalten:

$$\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{7}{\mathrm{I}};\quad \overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{6}{\mathrm{I}};\quad \overset{3}{\mathrm{I}}.\overset{5}{\mathrm{I}};\quad \overset{4}{\mathrm{I}}.\overset{4}{\mathrm{I}};$$

Die drei erstern bestehen aus zwei unterschiedenen Factoren, und lassen also zwei Versetzungen zu. Folglich ist

$$\overset{8}{\mathrm{II}} = 2\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{7}{\mathrm{I}} + 2\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{6}{\mathrm{I}} + 2\overset{3}{\mathrm{I}}.\overset{5}{\mathrm{I}} + \overset{4}{\mathrm{I}}.\overset{4}{\mathrm{I}}$$

wäre nun $\overset{1}{\mathrm{I}} = a$; $\overset{2}{\mathrm{I}} = b$; $\overset{3}{\mathrm{I}} = c$; $\overset{4}{\mathrm{I}} = d$; $\overset{5}{\mathrm{I}} = e$; $\overset{6}{\mathrm{I}} = f$; $\overset{7}{\mathrm{I}} = g$; *etc.* so wäre in der gewöhnlichen algebraischen Sprache:

$$\overset{8}{\mathrm{II}} = 2ag + 2bf + 2ce + dd$$

§. 20. Beispiel.

Sind die Marken in der ersten Ordnung folgende: m, $m + r$, $m + 2r$, $m + 3r$ *etc. etc.*, und es soll der Werth von $\overset{2m+5r}{\mathrm{II}}$ bestimmt werden, so ist zuerst die Marke $2m + 5r$ auf so viele Arten als möglich, aus zwei Marken der ersten Ordnung zusammenzusetzen. Es ist aber $2m + 5r = m + (m + 5r) = (m+r) + (m + 4r) = (m + 2r) + (m + 3r)$.

Demnach ist

$$\overset{2m+5r}{\mathrm{II}} = 2\overset{m}{\mathrm{I}}.\overset{m+5r}{\mathrm{I}} + 2\overset{m+r}{\mathrm{I}}.\overset{m+4r}{\mathrm{I}} + 2\overset{m+2r}{\mathrm{I}}.\overset{m+3r}{\mathrm{I}}$$

Wäre nun $\overset{m}{\mathrm{I}} = a$; $\overset{m+r}{\mathrm{I}} = b$; $\overset{m+2r}{\mathrm{I}} = c$; $\overset{m+3r}{\mathrm{I}} = d$; $\overset{m+4r}{\mathrm{I}} = e$; $\overset{m+5r}{\mathrm{I}} = f$; so wäre

$$\overset{2m+5r}{\mathrm{II}} = 2af + 2be + 2cd.$$

Bei dergleichen unbestimmten Marken ist die Arbeit im Grunde nicht schwerer, sondern nur unangenehmer, als bei bestimmten Marken. Wir werden aber in der Folge sehen, daß es selten oder niemals nöthig sey, dergleichen Marken zu brauchen. Nur in Beweisen einiger Sätze sind sie um der Allgemeinheit willen nützlich.

§. 21. Zusatz.

Nach diesen Erläuterungen wird, wie ich glaube, folgendes Schema, ohne weitere Erklärung verständlich seyn:

1ste Ordn.	2te Ordnung.	
$\overset{1}{\mathrm{I}} = a$	$\overset{2}{\mathrm{II}} = \overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{1}{\mathrm{I}}$	$= aa.$
$\overset{2}{\mathrm{I}} = b$	$\overset{3}{\mathrm{II}} = 2\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}}$	$= 2ab.$
$\overset{3}{\mathrm{I}} = c$	$\overset{4}{\mathrm{II}} = 2\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{3}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}}$	$= 2ac + bb.$
$\overset{4}{\mathrm{I}} = d$	$\overset{5}{\mathrm{II}} = 2\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{4}{\mathrm{I}} + 2\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{3}{\mathrm{I}}$	$= 2ad + 2bc.$
$\overset{5}{\mathrm{I}} = e$	$\overset{6}{\mathrm{II}} = 2\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{5}{\mathrm{I}} + 2\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{4}{\mathrm{I}} + \overset{3}{\mathrm{I}}.\overset{3}{\mathrm{I}}$	$= 2ae + 2bd + cc.$
$\overset{6}{\mathrm{I}} = f$	$\overset{7}{\mathrm{II}} = 2\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{6}{\mathrm{I}} + 2\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{5}{\mathrm{I}} + 2\overset{3}{\mathrm{I}}.\overset{4}{\mathrm{I}}$	$= 2af + 2be + 2cd.$
etc.	*etc.*	*etc.*

§. 22. Dimensionszeichen der dritten Ordnung.

1) Das dritte Dimensionszeichen III zeigt ohne Marke unbestimmt Producte von drei nach §. 14. bezeichneten Größen an.

Wird eine Marke n darüber gesetzt, so bedeutet $\overset{n}{\mathrm{III}}$, die Summe aller möglichen dreigliedrigen Producte oder Ternen, die sich aus den gegebenen, und nach §. 14. bezeichneten Größen der ersten Ordnung so machen lassen, daß die Summe ihrer drei Marken $= n$ sey. Auch hier muß man jedes dieser Producte nach allen möglichen Versetzungen nehmen, welche seine Factoren zulassen.

2) Das Zeichen III, wird nur alsdenn gebraucht, wenn die erste Ordnung mit I bezeichnet worden. Hat man aber in der ersten Ordnung A, 𝔄, a, a gebraucht (§. 14. Nr. 2.), so wird in der dritten Ordnung, statt III, respective C, ℭ, c, c gebraucht.

§. 23. Zusatz.

Da die Marke n, in der dritten Ordnung eine Summe von drei Marken der ersten Ordnung seyn muß, so sind die sämtlichen Marken für die dritte Ordnung bestimmt, so bald die Marken der ersten Ordnung gegeben sind.

Sind nemlich die Marken in der ersten Ordnung folgende:

$$m,\ m+r,\ m+2r,\ m+3r\ \ldots\ldots\ m+vr$$

so ist die erste Marke der dritten Ordnung $m + m + m = 3m$, die letzte aber $3(m+vr)$; zwischen diesen müssen die übrigen nach der Differenz r fortschreiten, und die ganze Folge der Marken in der dritten Ordnung wird seyn:

$$3m,\ 3m+r,\ 3m+2r,\ \ldots\ldots\ 3(m+vr).$$

Sind

Sind also die Marken der ersten Ordnung diese 1, 2, 3, 4, 5 .... n, so hat man in der dritten Ordnung die Marken:

3, 4, 5, 6, ... $3n$.

Eine Marke r über III, die in dieser Reihe nicht vorkommt, würde $\overset{r}{\text{III}} = 0$ machen.

Wären die Marken der ersten Ordnung 2, 3, 4 ... n, so würden die der 3ten Ordn. 6, 7, 8 ... $3n$ seyn, u. d. gl. m.

§. 24. Zusatz.

Es ist also wieder nichts leichter, als zu einer gegebenen Reihe von Dim. Z. der ersten Ordnung, die zugehörigen D. Z. der dritten Ordnung anzugeben. Der Werth aber jedes solchen D. Z. der dritten Ordnung, läßt sich, so bald es verlangt wird, ohne Schwierigkeit bestimmen. Man muß nemlich die Marke desselben, auf so viele Arten als möglich, aus drei Marken der ersten Ordnung zusammensetzen. Jede solche Zusammensetzung giebt die Form eines von denen Producten, welche das vorgelegte D. Z. in sich schließet. Vor jedes dieser Producte schreibe man die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal sich seine Factoren versetzen lassen, und alsdenn wird die Summe aller so formirten Producte, den Werth des vorgelegten D. Z. ausdrücken.

§. 25. Beispiel. 1.

Die Marken der ersten Ordnung seyn 1, 2, 3, 4, 5, 6 *etc. etc.* und es soll der Werth von $\overset{6}{\text{III}}$ bestimmt werden.

Hier ist $6 = 1 + 1 + 4 = 1 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2$

unser Zeichen begreift demnach Producte von den drei Formen $\overset{1}{\text{I}}.\overset{1}{\text{I}}.\overset{4}{\text{I}}$; $\overset{1}{\text{I}}.\overset{2}{\text{I}}.\overset{3}{\text{I}}$; $\overset{2}{\text{I}}.\overset{2}{\text{I}}.\overset{2}{\text{I}}$. Die Factoren der ersten Form können $\frac{1.2.3}{1.2} = 3$mal versetzt werden; die von der zweiten Form $1.2.3 = 6$mal, und bey der dritten Form findet nur eine Stellung statt; also ist

$$\overset{6}{\text{III}} = 3\,\overset{1}{\text{I}}.\overset{1}{\text{I}}.\overset{4}{\text{I}} + 6\,\overset{1}{\text{I}}.\overset{2}{\text{I}}.\overset{3}{\text{I}} + \overset{2}{\text{I}}.\overset{2}{\text{I}}.\overset{2}{\text{I}}$$

wenn $\overset{1}{\text{I}} = a$; $\overset{2}{\text{I}} = b$; $\overset{3}{\text{I}} = c$; $\overset{4}{\text{I}} = d$, *etc.* so ist

$$\overset{6}{\text{III}} = 3aad + 6abc + b^3$$

§. 26. Beispiel. 2.

Wären in der ersten Ordnung blos zwei Größen, nemlich $\overset{1}{\mathrm{I}}$ und $\overset{2}{\mathrm{I}}$ vorhanden, so werden in dem Werthe von $\overset{6}{\mathrm{III}}$, und jedem andern alle diejenigen Producte $= 0$, in welchen höhere Marken als 2 vorkommen; so wäre hier blos

$$\overset{6}{\mathrm{III}} = \overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}} = a^3$$

§. 27. Beispiel. 3.

Die Marken der ersten Ordnung seyn m, $m+r$, $m+2r$, $m+3r$, $m+4r$ *etc. etc.*, und es soll der Werth von $\overset{3m+5r}{\mathrm{III}}$ bestimmt werden.

Hier ist $3m+5r = (m)+(m)+(m+5r) = m+(m+r)+(m+4r) = m+(m+2r)+(m+3r) = (m+r)+(m+r)+(m+3r) = (m+r)+(m+2r)+(m+2r)$, so daß unser Zeichen Producte von fünf Formen enthält. Zu der ersten, vierten und fünften Form, welche zwei gleiche Factoren enthalten, gehört die Versetzungszahl $\frac{1.2.3}{1.2} = 3$; zu der zweiten und dritten Form aber, welche aus lauter verschiedenen Factoren bestehen $1.2.3 = 6$. Folglich ist

$$\begin{aligned}\overset{3m+5r}{\mathrm{III}} &= 3\,\overset{m}{\mathrm{I}}.\overset{m}{\mathrm{I}}.\overset{m+5r}{\mathrm{I}} + 6\,\overset{m}{\mathrm{I}}.\overset{m+r}{\mathrm{I}}.\overset{m+4r}{\mathrm{I}}\\ &+ 6\,\overset{m}{\mathrm{I}}.\overset{m+2r}{\mathrm{I}}.\overset{m+3r}{\mathrm{I}} + 3\,\overset{m+r}{\mathrm{I}}.\overset{m+r}{\mathrm{I}}.\overset{m+3r}{\mathrm{I}}\\ &+ 3\,\overset{m+r}{\mathrm{I}}.\overset{m+2r}{\mathrm{I}}.\overset{m+2r}{\mathrm{I}}.\end{aligned}$$

Wäre $\overset{m}{\mathrm{I}} = a$; $\overset{m+r}{\mathrm{I}} = b$; $\overset{m+2r}{\mathrm{I}} = c$; $\overset{m+3r}{\mathrm{I}} = d$; $\overset{m+4r}{\mathrm{I}} = e$; $\overset{m+5r}{\mathrm{I}} = f$; *etc.* so ist:

$$\overset{3m+5r}{\mathrm{III}} = 3aaf + 6abe + 6acd + 3bbd + 3bcc$$

Hätte man aber in der ersten Ordnung nur folgende vier Größen:

$$\overset{m}{\mathrm{I}} = a;\ \overset{m+r}{\mathrm{I}} = b;\ \overset{m+2r}{\mathrm{I}} = c;\ \overset{m+3r}{\mathrm{I}} = d;$$

so würden in dem Werthe von $\overset{3m+5r}{\mathrm{III}}$ alle diejenigen Producte wegfallen, welche $\overset{m+4r}{\mathrm{I}}$, $\overset{m+5r}{\mathrm{I}}$ *etc.* enthalten. In diesem Falle wäre also

$$\begin{aligned}\overset{3m+5r}{\mathrm{III}} &= 6\,\overset{m}{\mathrm{I}}.\overset{m+2r}{\mathrm{I}}.\overset{m+3r}{\mathrm{I}} + 3\,\overset{m+r}{\mathrm{I}}.\overset{m+r}{\mathrm{I}}.\overset{m+3r}{\mathrm{I}} + 3\,\overset{m+r}{\mathrm{I}}.\overset{m+2r}{\mathrm{I}}.\overset{m+2r}{\mathrm{I}}.\\ &= 6acd + 3bbd + 3bcc\end{aligned}$$

§. 28. Zusatz.

Folgendes Schema wird aus den bisher gesagten verständlich seyn:

1ste Ordn.	3te Ordnung.
$\overset{1}{\mathrm{I}} = a$	$\overset{3}{\mathrm{III}} = \overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}} = a^3$
$\overset{2}{\mathrm{I}} = b$	$\overset{4}{\mathrm{III}} = 3\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}} = 3aab$
$\overset{3}{\mathrm{I}} = c$	$\overset{5}{\mathrm{III}} = 3\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} + 3\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}} = 3aac + 3abb$
$\overset{4}{\mathrm{I}} = d$	$\overset{6}{\mathrm{III}} = 3\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{4}{\mathrm{I}} + 6\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}} = 3aad + 6abc + b^3$
$\overset{5}{\mathrm{I}} = e$	$\overset{7}{\mathrm{III}} = 3\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{5}{\mathrm{I}} + 6\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{4}{\mathrm{I}} + 3\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} + 3\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}}$
$\overset{6}{\mathrm{I}} = f$	$= 3aae + 6abd + 3acc + 3bbc$
$\overset{7}{\mathrm{I}} = g$	$\overset{8}{\mathrm{III}} = 3\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{6}{\mathrm{I}} + 6\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{5}{\mathrm{I}} + 6\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}}\overset{4}{\mathrm{I}} + 3\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{4}{\mathrm{I}} + 3\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}}$
	$= 3aaf + 6abe + 6acd + 3bbd + 3bcc$
etc.	etc.

§. 29. Dimensionszeichen der vierten Ordnung.

Die Dimensionszeichen der vierten Ordnung IV, oder D, oder $\mathfrak{D}$, oder d, oder $\mathfrak{d}$, welche sich respective auf I, A, $\mathfrak{A}$, a, $\mathfrak{a}$ beziehen, zeigen ohne Marke unbestimmt Producte aus vier Größen der ersten Ordnung an.

$\overset{n}{\mathrm{IV}}$, $\overset{n}{D}$, $\overset{n}{\mathfrak{D}}$, $\overset{n}{d}$, $\overset{n}{\mathfrak{d}}$ aber bezeichnen die Summe aller derjenigen viergliedrigen Producte, deren vier Marken die Summe n geben. Auch hier muß jedes Product so oft gerechnet werden, als sich seine Factoren versetzen lassen.

§. 30. Zusatz.

Wenn die Marken der ersten Ordnung folgende sind:

$$m,\ m+r,\ m+2r,\ \ldots\ m+vr$$

so ergiebt sich durch ähnliche Schlüsse als §§. 18 und 23, daß die Marken der vierten Ordnung

$$4m,\ 4m+r,\ 4m+2r,\ \ldots\ 4(m+vr)$$

seyn werden. Eine Marke, welche in dieser Reihe nicht vorkommt, macht jedes D. Z. der vierten Ordnung, worüber sie stehet, $= 0$.

§. 31. Zusatz.

Sobald also die D. Z. der ersten Ordnung gegeben sind, so sind auch alle dazu gehörige D. Z. der vierten Ordnung gegeben. Um aber den eigentlichen Werth irgend eines vorgelegten D. Z. dieser Ordnung zu finden, muß man die Marke desselben auf so viele Arten als möglich, aus vier Marken der ersten Ordnung zusammensetzen; so erhält man alle Formen der Producte, die das gegebene D. Z. in sich schließet. Zu jeder Form muß man hierauf die Zahl schreiben, welche anzeigt, wie oft sich ihre Factoren versetzen lassen. Die Summe aller so formirten Producte drückt den gesuchten Werth aus.

§. 32. Beispiel.

Die D. Z. der ersten Ordnung seyn $\overset{1}{\mathrm{I}} = a$; $\overset{2}{\mathrm{I}} = b$; $\overset{3}{\mathrm{I}} = c$; $\overset{4}{\mathrm{I}} = d$; $\overset{5}{\mathrm{I}} = e$ *etc. etc.*, und es soll der Werth von $\overset{7}{\mathrm{IV}}$ bestimmt werden.

Hier ist $7 = 1 + 1 + 1 + 4 = 1 + 1 + 2 + 3 = 1 + 2 + 2 + 2$ also enthält unser D. Z. Producte von drei Formen; zu der ersten und dritten gehört die Versetzungszahl $\frac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$, zu der zweiten aber $\frac{1.2.3.4}{1.2} = 12$; also ist

$$\overset{7}{\mathrm{IV}} = 4\,\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{4}{\mathrm{I}} + 12\,\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{3}{\mathrm{I}} + 4\,\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}}$$
$$= 4\,a^3d + 12\,aabc + 4\,ab^3$$

Wäre in der ersten Ordnung $\overset{4}{\mathrm{I}} = 0$, $\overset{5}{\mathrm{I}} = 0$, $\overset{6}{\mathrm{I}} = 0$ *etc. etc.*, so würde in dem Werthe von $\overset{7}{\mathrm{IV}}$ das erste Product wegfallen.

§. 33. Zusatz.

Den Sinn und die Formirung von folgenden Schema, wird man nach dem bisherigen ohne Schwierigkeit einsehen:

1ste Ordn.	4te Ordnung.
$\overset{1}{\mathrm{I}} = a$	$\overset{4}{\mathrm{IV}} = \overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{1}{\mathrm{I}} = (\overset{1}{\mathrm{I}})^4 = a^4$
$\overset{2}{\mathrm{I}} = b$	$\overset{5}{\mathrm{IV}} = 4\,(\overset{1}{\mathrm{I}})^3.\overset{2}{\mathrm{I}} = 4\,a^3b$
$\overset{3}{\mathrm{I}} = c$	$\overset{6}{\mathrm{IV}} = 4\,(\overset{1}{\mathrm{I}})^3.\overset{3}{\mathrm{I}} + 6\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}} = 4\,a^3c + 6\,aabb$
$\overset{4}{\mathrm{I}} = d$	$\overset{7}{\mathrm{IV}} = 4\,(\overset{1}{\mathrm{I}})^3.\overset{4}{\mathrm{I}} + 12\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{3}{\mathrm{I}} + 4\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,(\overset{2}{\mathrm{I}})^3$
$\overset{5}{\mathrm{I}} = e$	$= 4\,a^3d + 12\,aabc + 4\,ab^3$
$\overset{6}{\mathrm{I}} = f$	$\overset{8}{\mathrm{IV}} = 4\,(\overset{1}{\mathrm{I}})^3.\overset{5}{\mathrm{I}} + 12\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{4}{\mathrm{I}} + 6\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{3}{\mathrm{I}}\,\overset{3}{\mathrm{I}} + 12\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{3}{\mathrm{I}} + (\overset{2}{\mathrm{I}})^4$
	$= 4\,a^3e + 12\,aabd + 6\,aacc + 12\,abbc + b^4$
etc.	*etc.*

§. 34.

§. 34. Dimensionszeichen von unbestimmter Ordnung.

Nach den bisherigen Erklärungen und Erläuterungen, wird jeder Leser im Stande seyn, die Bedeutung der höheren Dimensionszeichen, von jeder bestimmten Ordnung (nemlich V, VI, VII, VIII *etc.*, oder *E*, *F*, *G*, *H etc.*, oder 𝔈, 𝔉, 𝔊, ℌ *etc.*, oder *e*, *f*, *g*, *h etc.*, oder 𝔢, 𝔣, 𝔤, 𝔥 *etc.*) deutlich einzusehen, sie mögen mit oder ohne Marke vorkommen.

Ohne Marke zeigen sie nemlich unbestimmt Producte von soviel Größen der ersten Ordnung an, als der Exponent der Ordnung Einheiten hat. Mit einer Marke *n* aber begreift jedes solche Zeichen die Summe aller solchen Producte, deren Marken die Summe *n* geben.

Auf diese Art würde jede römische Ziffer, oder jeder Buchstabe aus den vier oben gebrauchten Alphabeten, irgend eine bestimmte Ordnung von D. Z. anzeigen; z. B. *M*, 𝔐, *m*, 𝔪 (als der 12te Buchstabe des Alphabets) würde die 12te Ordnung anzeigen.

Allein da die höheren Ordnungen (selbst die 8te, 9te *etc.*) selten vorkommen, so wird man, ohne Zweideutigkeit zu befürchten, die mittleren Buchstaben der obigen Alphabete, nemlich *M*, *N*, *P etc.*, 𝔐, 𝔑, 𝔓 *etc.*, *m*, *n*, *p etc.*, 𝔪, 𝔫, 𝔭 *etc.* als Dimensionszeichen der unbestimmten *m*ten, *n*ten, *p*ten Ordnung brauchen können. Diese eben genannten Zeichen beziehen sich respective auf die erste Ordnung *A*, 𝔄, *a*, 𝔞. Es fehlt uns also noch an einem unbestimmten Dimensionszeichen für den Fall, wenn die bestimmten Ordnungen mit römischen Ziffern, also die erste mit I bezeichnet ist. In diesem Falle werde ich die unbestimmte *m*te, *n*te, *p*te Ordnung, durch *IM*, *IN*, *IP etc.* bezeichnen.

Zu mehrerer Deutlichkeit wollen wir den Zusammenhang dieser Bezeichnungen in eine Tabelle bringen, wo alles, was in einer horizontalen Reihe steht, zusammen gehöret.

Bestimmte Ordnungen.						Unbestimmte Ordnungen.			
1ste	2te	3te	4te	5te		*m*te	*n*te	*p*te	
I	II	III	IV	V	*etc.*	*IM*	*IN*	*IP*	*etc.*
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*etc.*	*M*	*N*	*P*	*etc.*
𝔄	𝔅	ℭ	𝔇	𝔈	*etc.*	𝔐	𝔑	𝔓	*etc.*
a	*b*	*c*	*d*	*e*	*etc.*	*m*	*n*	*p*	*etc.*
𝔞	𝔟	𝔠	𝔡	𝔢	*etc.*	𝔪	𝔫	𝔭	*etc.*

Die genauere Erklärung des Sinnes jedes solchen unbestimmten Dimensionszeichens ist folgende:

IP (oder *P*, 𝔓, *p*, 𝔭) ohne Marke zeigt überhaupt Producte von *p* Gliedern der ersten mit I (*A*, 𝔄, *a*, 𝔞) bezeichneten Ordnung an.

$\overset{n}{IP}$ (oder $\overset{n}{P}$, $\overset{n}{𝔓}$, $\overset{n}{p}$, $\overset{n}{𝔭}$) aber begreifet die Summe aller möglichen *p* gliedrigen Producte, welche sich so machen lassen, daß ihre *p* Marken, die Summe *n* ge-

 ben,

ben, jedes solche Producte nach allen Versetzungen genommen, welche ihre Factoren zulassen.

Auf ähnliche Art werden wir ferner die Dimensionszeichen der $(n - 1)$ ten Ordnung durch $(IN - 1)$, $(N - A)$, $(\mathfrak{N} - \mathfrak{A})$, $(n - a)$, $(\mathfrak{n} - \mathfrak{a})$; desgleichen die $(m - n)$ te Ordnung durch $(IM - IN)$, $(M - N)$, $(\mathbb{M} - \mathbb{N})$, $(m - n)$, $(\mathfrak{m} - \mathfrak{n})$ bezeichnen, so daß sich diese Zeichen in der Ordnung, wie sie hier stehen, respective auf die Dimensionszeichen der ersten Ordnung I, A, $\mathfrak{A}$, a, $\mathfrak{a}$ beziehen.

Was dergleichen D. Z. bedeuten, wenn Marken darüber stehen, ist aus dem vorigen leicht einzusehen. So bedeutet z. B. $\overset{r}{(IP - III)}$ die S ....e aller Producte, welche sich aus $p - 3$ Gliedern der ersten durch I ausgedrückten Ordnung so machen lassen, daß die Summe ihrer $p - 3$ Marken $= r$ sey. $\overset{r}{(M - N)}$ ist die Summe aller möglichen $m - n$ gliedrigen Producte solcher Größen der ersten Ordnung A, deren $m - n$ Marken die Summe r geben, u. d. gl. m.

§. 35. Zusatz.

Wenn die Marken der ersten Ordnung folgende sind:

$$m,\ m + r,\ m + 2r,\ \ldots\ldots\ m + vr$$

so sind die Marken der $p$ten Ordnung

$$mp,\ mp + r,\ mp + 2r,\ \ldots\ldots\ p(m + vr)$$

Denn mp ist die kleinste und $p(m + vr)$ die größte Summe, die sich aus p Marken der ersten Ordnung machen lässet, die Zwischensummen aber müssen nach der Differenz r fortschreiten.

Für die Marken der ersten Ordnung $1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots n$, erhält man in der $p$ten Ordnung, die Marken:

$$p,\ p + 1,\ p + 2,\ p + 3,\ \ldots\ldots\ pn.$$

Jede Marke, die in der so bestimmten Reihe nicht vorkommt, macht das Dimensionszeichen, worüber sie stehet $= 0$.

Hätte man in der ersten Ordnung die Marken $2, 3, 4 \ldots\ldots n$, so sind die Marken der $p$ten Ordnung

$$2p,\ 2p + 1,\ 2p + 2,\ \ldots\ pn.$$

§. 36. Zusatz.

So bald also die Dimensionszeichen der ersten Ordnung gegeben sind, so kann man eben so leicht, als bei den bestimmten Ordnungen, die D. Z. jeder unbestimmten $p$ten Ordnung angeben.

Erste Ordn. $\overset{1}{I}, \overset{2}{I}, \overset{3}{I}, \overset{4}{I}, \overset{5}{I}$, *etc.* . . . $\overset{n}{I}$

$p$te Ordn. $\overset{p}{IP}, \overset{p+1}{IP}, \overset{p+2}{IP}, \overset{p+3}{IP}, \ldots \overset{np}{IP}$,

$p+1$te Ordn. $(\overset{p+1}{IP+I}), (\overset{p+2}{IP+I}), (\overset{p+3}{IP+I}), \ldots\ldots (\overset{np+n}{IP+I})$

$(p+q)$te Ordn. $(\overset{p+q}{IP+IQ}), (\overset{p+q+1}{IP+IQ}), (\overset{p+q+2}{IP+IQ}), \ldots\ldots\ldots (\overset{np+nq+n}{IP+IQ})$

Oder

1ste Ordn. $\overset{1}{\mathfrak{A}}, \overset{2}{\mathfrak{A}}, \overset{3}{\mathfrak{A}}, \overset{4}{\mathfrak{A}} \ldots\ldots \overset{n}{\mathfrak{A}}$

$p$te Ordn. $\overset{p}{\mathfrak{P}}, \overset{p+1}{\mathfrak{P}}, \overset{p+2}{\mathfrak{P}}, \overset{p+3}{\mathfrak{P}} \ldots\ldots\ldots \overset{np}{\mathfrak{P}}$

$(p+1)$te Ordn. $(\overset{p+1}{\mathfrak{P}+\mathfrak{A}}), (\overset{p+2}{\mathfrak{P}+\mathfrak{A}}), (\overset{p+3}{\mathfrak{P}+\mathfrak{A}}), \ldots\ldots (\overset{np+n}{\mathfrak{P}+\mathfrak{A}})$

$(p+q)$te Ordn. $(\overset{p+q}{\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}}), (\overset{p+q+1}{\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}}), (\overset{p+q+2}{\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}}), \ldots\ldots (\overset{np+nq+n}{\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}})$ u. d. gl. m.

Auch ist es nicht schwerer, als bei den bestimmten Ordnungen, den Werth jedes einzelnen vorgelegten Dimensionszeichens zu bestimmen; obgleich die Zusammensetzung der unbestimmten Marken, aus den bestimmten Zahlen der ersten Ordnung beim ersten Anblick schwieriger scheinen kann. Ein Beispiel wird die Sache erläutern.

§. 37. Beispiel.

Die D. Z. der ersten Ordnung sollen seyn:

$$\overset{1}{I}=a;\quad \overset{2}{I}=b;\quad \overset{3}{I}=c;\quad \overset{4}{I}=d;\quad \overset{5}{I}=e; \text{ etc. etc.}$$

und es soll der Werth der unbestimmten D. Z. von der $p$ten Ordnung $\overset{p+4}{IP}$ bestimmt werden. Hier ist:

1) $p+4 = 1+1+1+$ *etc.* (bis zur Summe $p-1) + 5$
2) " $= 1+1+1+$ *etc.* (" " " $p-2) + 2 + 4$
3) " $= 1+1+1+$ *etc.* (" " " $p-2) + 3 + 3$
4) " $= 1+1+1+$ *etc.* (" " " $p-3) + 2 + 2 + 3$
5) " $= 1+1+1+$ *etc.* (" " " $p-4) + 2 + 2 + 2 + 2$

Zu 1) gehört die Versetzungszahl $\dfrac{1.2\ldots\ldots p}{1.2\ldots(p-1)} = p$

" 2) " " " $\dfrac{1.2\ldots\ldots p}{1.2\ldots(p-2)} = p(p-1)$

Zu 3) gehört die Versetzungszahl $\frac{1.2\ldots\ldots p}{1.2\ldots(p-2)\,1.2} = \frac{p(p-1)}{1.2}$

„ 4) „ „ „ $\frac{1.2\ldots\ldots p}{1.2\ldots(p-3)\,1.2} = \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2}$

„ 5) „ „ „ $\frac{1.2\ldots\ldots p}{1.2\ldots(p-4)\,1.2.3.4} = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.\;2.\;3.\;4.}$

Es ist also:

$$\overset{p+4}{IP} = p(\overset{1}{I})^{p-1}.\overset{5}{I} + p(p-1)(\overset{1}{I})^{p-2}.\overset{2}{I}.\overset{4}{I} + \frac{p(p-1)}{1.\;2.}(\overset{1}{I})^{p-2}\overset{3}{I}.\overset{3}{I}$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\;2}(\overset{1}{I})^{p-3}\overset{2}{I}.\overset{2}{I}.\overset{3}{I} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.\;2.\;3.\;4}(\overset{1}{I})^{p-4}.(\overset{2}{I})^{4}.$$

und in der gemeinen Bezeichnung:

$$\overset{p+4}{IP} = pa^{p-1}e + p(p-1)a^{p-2}bd + \frac{p(p-1)}{1.\;2}a^{p-2}.cc.$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\;2.}a^{p-3}bbc + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.\;2.\;3.\;4.}a^{p-4}b^{4}.$$

§. 38. Zusatz.

Die erste Ordnung sey, wie im vorigen §, so ergiebt sich überhaupt für die ersten Glieder der $p$ten Ordnung folgendes Schema:

$$\overset{p}{IP} = (\overset{1}{I})^{p} = a^{p}$$
$$\overset{p+1}{IP} = p(\overset{1}{I})^{p-1}\overset{2}{I} = pa^{p-1}b$$
$$\overset{p+2}{IP} = p(\overset{1}{I})^{p-1}\overset{3}{I} + \frac{p(p-1)}{1.\;2}(\overset{1}{I})^{p-2}\overset{2}{I}.\overset{2}{I} = pa^{p-1}c + \frac{p(p-1)}{1.\;2}a^{p-2}bb.$$
$$\overset{p+3}{IP} = p(\overset{1}{I})^{p-1}\overset{4}{I} + p(p-1)(\overset{1}{I})^{p-2}\overset{2}{I}.\overset{3}{I} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\;2.\;3.}(\overset{1}{I})^{p-3}(\overset{2}{I})^{3}.$$
$$= pa^{p-1}d + p(p-1)a^{p-2}bc + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\;2.\;3}a^{p-3}b^{3}.$$
$$\overset{p+4}{IP} = p(\overset{1}{I})^{p-1}\overset{5}{I} + p(p-1)(\overset{1}{I})^{p-2}\overset{2}{I}.\overset{4}{I} + \frac{p(p-1)}{1.\;2}(\overset{1}{I})^{p-2}\overset{3}{I}.\overset{3}{I}$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\;2}(\overset{1}{I})^{p-3}\overset{2}{I}.\overset{2}{I}.\overset{3}{I} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.\;2.\;3.\;4}(\overset{1}{I})^{p-4}(\overset{2}{I})^{4}.$$
$$= pa^{p-1}e + p(p-1)a^{p-2}bd + \frac{p(p-1)}{1,\;2}a^{p-2}cc$$

+

$$+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2}a^{p-3}bbc+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^{p-4}b^4.$$

$$\overset{p+5}{1^p}=p\,\overset{1}{(\mathrm{I})}{}^{p-1}\,\overset{6}{\mathrm{I}}+p(p-1)\,\overset{1}{(\mathrm{I})}{}^{p-2}\,\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{5}{\mathrm{I}}+p(p-1)\,\overset{1}{(\mathrm{I})}{}^{p-2}\,\overset{3}{\mathrm{I}}.\overset{4}{\mathrm{I}}$$

$$+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2}\overset{1}{(\mathrm{I})}{}^{p-3}\,\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{4}{\mathrm{I}}+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2}\overset{1}{(\mathrm{I})}{}^{p-3}\,\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{3}{\mathrm{I}}.\overset{3}{\mathrm{I}}$$

$$+\frac{p\ldots(p-3)}{1.\ 2.\ 3}\overset{1}{(\mathrm{I})}{}^{p-4}\,\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{3}{\mathrm{I}}+\frac{p\ldots(p-4)}{1.2\ldots5}\overset{1}{(\mathrm{I})}{}^{p-5}\,\overset{2}{(\mathrm{I})}{}^{5}.$$

$$=p\,a^{p-1}f+p(p-1)\,a^{p-2}be+p(p-1)\,a^{p-2}cd$$

$$+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2}a^{p-3}bbd+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2}a^{p-3}bcc$$

$$+\frac{p\ldots(p-3)}{1.\ 2.\ 3}a^{p-4}b^3c+\frac{p\ldots(p-4)}{1.\ 2\ldots5}a^{p-5}b^5.$$

u. s. w.

§. 39. Lehrsatz.

Vorausgesetzt, daß man zu den Marken der ersten Ordnung, keine andere, als eine vollständige arithmetische Reihe wählt, in der nirgends Glieder fehlen, so kann eine verschiedene Markirung der ersten Ordnung, in allen höhern bestimmten und unbestimmten Ordnungen, nichts als die Marken, nirgends aber den Werth eines Dimensionszeichens ändern.

Beweis. Man markire die erste Ordnung mit zwei verschiedenen arithmetischen Reihen, wie folget:

$$A)\ \overset{a}{\mathrm{I}},\ \overset{a+b}{\mathrm{I}},\ \overset{a+2b}{\mathrm{I}},\ \overset{a+3b}{\mathrm{I}}\ \ldots\ldots\ \overset{a+nb}{\mathrm{I}}$$

$$B)\ \overset{m}{\mathrm{I}},\ \overset{m+r}{\mathrm{I}},\ \overset{m+2r}{\mathrm{I}},\ \overset{m+3r}{\mathrm{I}}\ \ldots\ldots\ \overset{m+nr}{\mathrm{I}}$$

Da diese beiden Reihen blos verschieden markirt seyn sollen, so wird vorausgesetzt, daß alle correspondirende Glieder einander gleich sind; $\overset{a}{\mathrm{I}}=\overset{m}{\mathrm{I}};\ \overset{a+b}{\mathrm{I}}=\overset{m+r}{\mathrm{I}};$ *etc.* $\overset{a+nb}{\mathrm{I}}=\overset{m+nr}{\mathrm{I}}.$

Für A) sind die D. Z. der $p$ten Ordnung folgende:

$$C)\ \overset{pa}{1^p},\ \overset{pa+b}{1^p},\ \overset{pa+2b}{1^p},\ \overset{pa+3b}{1^p}\ \ldots\ldots\ \overset{pa+pnb}{1^p}\quad(\text{§. }35.)$$

Für B) sind die D. Z. eben der Ordnung:

$$D)\ \overset{pm}{1^p},\ \overset{pm+r}{1^p},\ \overset{pm+2r}{1^p},\ \overset{pm+3r}{1^p}\ \ldots\ldots\ \overset{pm+pnr}{1^p}\quad(\text{§. }35.)$$

Man nehme nun irgend zwei correspondirende Glieder aus C) und D):

$$\overset{pa+vb}{IP} \quad , \quad \overset{pm+vr}{IP}$$

so ist leicht einzusehen, daß sie gleich seyn müssen.

Denn $\overset{pa+vr}{IP}$ ($\overset{pm+vr}{IP}$) ist nach §. 34. gleich der Summe aller möglichen Producte, welche sich aus p Gliedern der ersten Ordnung der Reihe A, (B) so machen lassen, daß in jedem dieser Producte die Summe der p Marken, $= pa + vb$, $(pm + vr)$ sey.

Gesetzt nun, man hätte alle mögliche Arten gefunden, wie sich $pa + vb$, aus p Marken der Reihe A zusammensetzen läßt; und man schriebe überall m statt a, und r statt b, so fällt in die Augen, daß man zugleich alle mögliche Zusammensetzungen haben würde, durch welche $pm + vr$, aus p Marken der Reihe p zusammengesetzt werden kann.

Es kann demnach $\overset{pm+vr}{IP}$ nicht mehr und nicht weniger Producte, von p Gliedern der Reihe B, als $\overset{ma+vb}{IP}$ von der Reihe A, enthalten, und diese Producte werden sämtlich aus correspondirenden Gliedern von B und A bestehen. Da nun in A und B alle correspondirende Glieder gleich sind, so ist auch

$$\overset{pa+vb}{IP} = \overset{pm+vr}{IP}$$

§. 40. Zusatz.

Wir werden demnach die Freiheit haben, in jeder Rechnung, wenn wir es nützlich finden, die ganze Markirung der D. Z. durch alle Ordnungen zu ändern, wenn wir nur bei den höhern Ordnungen die Regeln beobachten, die in Absicht der Marken, bei jeder Ordnung der D. Z. in diesem Abschnitte erkläret sind.

§. 41. Lehrsatz.

1) Wenn die D. Z. der ersten Ordnung lauter **positive** Werthe haben, so findet eben dies durch alle Ordnungen statt.

2) Wenn die D. Z. der ersten Ordnung lauter **negative** Werthe haben, so haben die D. Z. aller geraden Ordnungen positive, aller ungeraden, negative Werthe.

3) Wenn die D. Z. der ersten Ordnung abwechselnd positive und negative Werthe haben, so findet eben dies durch alle Ordnungen statt, doch mit folgenden Unterschiede: wenn das erste D. Z. der 1sten Ordnung positiven Werth hat, so haben alle erste D. Z. aller Ordnungen positiven Werth; hat aber das erste D. Z. der ersten Ordnung negativen Werth, so haben alle erste D. Z., aller ungeraden Ordnungen negativen, aller geraden Ordnungen positiven Werth.

4) Die

4) Die Werthe der D. Z. mögen nun in der ersten Ordnung sämtlich einerley, oder abwechselnde Zeichen haben, so bleibt der absolute Werth jedes D. Z., jeder Ordnung ungeändert, wenn der absolute Werth aller D. Z. der ersten Ordnung ungeändert bleibt.

Beweis. 1) Der erste Theil unseres Satzes ist für sich klar.

2) Alle **gerade** Ordnungen enthalten Producte aus einer geraden Anzahl von Factoren, also lauter positive Producte, wofern die einzelnen Factoren einerley Zeichen, es sey + oder — haben. Jedes D. Z. einer **ungeraden** Ordnung hingegen, begreift lauter Producte aus einer ungeraden Anzahl von Factoren, die also sämtlich negativ sind, wenn alle einzelne Factoren derselben negativ sind.

3) Wenn in der ersten Ordnung die Zeichen abwechseln, so sind zweierley Folgen möglich, je nachdem das erste Glied + oder — hat, nemlich:

	1	2	3	4	5	6	*etc.*
A)	+	—	+	—	+	—	*etc.*
B)	—	+	—	+	—	+	*etc.*

Die obenstehenden Zahlen bedeuten die Anzahl der Glieder, oder auch die Marken der D. Z., durch welche jedes Glied bezeichnet wird. Zur Abkürzung des Vortrags, sey es uns erlaubt, jedes D. Z. der ersten Ordnung, das eine **gerade** Marke hat, oder vielmehr den Werth desselben, einen **geraden Factor**, ist aber die Marke ungerade, einen **ungeraden Factor** zu nennen.

Es sey nun $\overset{n}{lP}$ irgend ein D. Z. einer höheren *p*ten Ordnung: so sind folgende vier Fälle zu untersuchen:

a) Wenn Ordnung und Marke, also *p* und *n* gerade. In diesem Fall begreifet $\overset{n}{lP}$ lauter Producte aus einer **geraden** Anzahl Factoren, deren Marken in jeden solchen Product, die **gerade** Summe *n* geben (§. 34.). Soll aber eine gerade Summe *n*, aus einer geraden Anzahl ganzer Zahlen zusammengesetzt werden, so müssen entweder sämtliche Theile gerade Zahlen seyn, oder sind ungerade dabei, so müssen derer 2, 4, 6 *etc.* seyn, alsdenn aber ist auch die Anzahl der übrigen geraden Zahlen, entweder 2, oder 4, oder 6 *etc.* oder mit einem Worte gerade. Da nun jede gerade Anzahl, sowohl gerader als ungerader Factoren, sowohl bei der Folge *A*, als *B*, ein positives Product giebt, so bekommt der **Werth von** $\overset{n}{lP}$, **wenn** *n* **und** *p* **gerade**, **auf alle Fälle die Vorzeichnung +.**

b) Wenn die Ordnung gerade, die Marke aber ungerade ist, oder *p* gerade, *n* ungerade. In diesem Falle bestehet jedes Product, welches $\overset{n}{lP}$ in sich begreifet, aus einer geraden Anzahl von Factoren, dem Marken aber eine ungerade Summe geben. Soll diese Summe ungerade seyn, so müssen sich 1, oder 3, oder 5, oder *etc.* ungerade Marken darin befinden. Ist aber dies, so muß die Anzahl der geraden Marken, gleichfalls entweder 1, oder 3, oder 5, oder *etc.* seyn. Also sowohl die Anzahl der geraden, als der ungeraden Marken, ungerade. ließe man nun aus jedem Product einen geraden und einen ungeraden Factor weg, so bekäme das übrige Product auf alle Fälle +; also giebt hier das Product eines geraden, und eines ungeraden Factors den Ausschlag. Ein solches Product aber ist negativ, man mag die Folge *A* oder *B* voraussetzen. Folglich bekommt **der Werth eines geraden D. Z. mit einer ungeraden Marke, auf alle Fälle, die Vorzeichnung —.**

c) Wenn die Ordnung ungerade, die Marke aber gerade ist; oder *p* ungerade, *n* gerade. In diesem Falle begreift das D. Z. $\overset{n}{IP}$ lauter Producte, die aus einer ungeraden Anzahl von Factoren bestehen, deren Marken aber eine gerade Summe *n* geben müssen. Soll nun *n* gerade seyn, so dürfen die ungeraden Marken nicht anders, als Paarweise vorkommen, also muß ihre Anzahl 0, oder 2, oder 4, oder *etc.* seyn, und deswegen können die ungeraden Factoren für sich nichts anders als + geben. Also giebt bei jedem Product, welches $\overset{n}{IP}$ begreift, ein gerader Factor den Ausschlag.

Bei der Voraussetzung der Folge *A*, erhält also ein ungerades D. Z. mit einer geraden Marke das Zeichen —; bei der Folge *B*, das Zeichen +.

d) Wenn Ordnung und Marke, oder *p* und *n*, beides ungerade ist. In diesem Falle begreift $\overset{n}{IP}$ lauter Producte aus einer ungeraden Anzahl von Factoren, deren Marken eine ungerade Summe *n* geben. Diese Summe *n* kann aber hier nur alsdenn ungerade seyn, wenn die Anzahl der ungeraden Factoren ungerade, die Anzahl der geraden aber, gerade ist. Die letzten geben auf alle Fälle +. Also giebt ein ungerader Factor den Ausschlag.

Bei Voraussetzung der Folge *A* also, erhält ein ungerades D. Z., mit ungerader Marke, das Zeichen +; bei der Folge *B* aber, —.

Also wechseln in allen vier Fällen *a*, *b*, *c*, *d* in jeder Ordnung die Zeichen ab.

Und wenn die Folge *A* vorausgesetzt wird, so hat das erste Glied jeder ungeraden Ordnung $\overset{p}{IP}$, + (nach *d*). Auch jedes erste Glied jeder geraden Ordnung hat + (nach *a*).

Wird aber die Folge *B* vorausgesetzt, so hat jedes erste Glied jeder ungeraden Ordnung — (nach *d*), aber jedes erste Glied jeder geraden Ordnung + (nach *a*).

4) Aus dem für 1, 2, 3 gegebenen Beweisen ist klar, daß in jedem Falle, die Folge der Zeichen in der ersten Ordnung sey:

$$\begin{array}{lllllll} & + & + & + & + & + & etc. \\ \text{oder} & - & - & - & - & - & etc. \\ \text{oder} & + & - & + & - & + & etc. \\ \text{oder} & - & + & - & + & - & etc. \end{array}$$

daß, sage ich, in jedem dieser Fälle, die sämtlichen Producte, welche ein Dimensionszeichen $\overset{n}{IP}$ in sich begreift, in Absicht der Vorzeichnung **gleichartig** sind. Ist aber dies so bleibt der absolute Werth jederzeit ungeändert, welche von den obigen vier Folgen man voraussetzen mag.

§. 42. Zusatz.

Wenn man die Zeichen, welche den Werthen der D. Z. zukommen, vor die D. Z. selbst setzt, (z. B. wenn man statt $\overset{1}{\mathrm{I}} = +1$; $\overset{2}{\mathrm{I}} = -3$; $\overset{3}{\mathrm{I}} = +5$; $\overset{4}{\mathrm{I}} = -7$ *etc.* schreibt $-\overset{1}{\mathrm{I}} = 1$; $+\overset{2}{\mathrm{I}} = 3$; $-\overset{3}{\mathrm{I}} = 5$; $+\overset{4}{\mathrm{I}} = 7$; *etc.*) so werden eben dieselben Regeln, welche im vorigen § von den **Werthen** der D. Z. erwiesen sind, auf die D. Z. selbst angewendet werden können; indem schlechterdings in jedem Fall, aus $A = -B$, folget, daß $-A = +B$.

Ja da man jederzeit die Freiheit hat, sich unter einer mit — bezeichneten Größe $-A$, etwas positives, und unter einer mit + bezeichneten $+A$, etwas negatives zu denken, (wenn man sich nemlich unter A, an und für sich, und ohne Rücksicht auf das Zeichen etwas negatives denkt); so wird man in jedem Falle, ohne alle Rücksicht auf die wirklichen Werthe der D. Z., sie in der ersten Ordnung ganz willkührlich mit Zeichen versehen können, und wählt man dazu eine der vier im vorigen § erwähnten Folgen $++$ *etc.* $--$ *etc.* $+-$ *etc.* $-+$ *etc.*, so wird man ohne alle Mühe die richtige Folge der Zeichen für jede Ordnung bestimmen können. Folgende kleine Tabelle läßt die Sache mit einem Blick übersehen:

Folge 1.

Marken.	1	2	3	4	5	6	7	
Ordn. 1	+	+	+	+	+	+	+	etc.
2		+	+	+	+	+	+	etc.
3			+	+	+	+	+	etc.
4				+	+	+	+	etc.
5					+	+	+	etc.
6						+	+	etc.
7							+	etc.

Folge 2.

Marken.	1	2	3	4	5	6	7	
Ordn. 1	—	—	—	—	—	—	—	etc.
2		+	+	+	+	+	+	etc.
3			—	—	—	—	—	etc.
4				+	+	+	+	etc.
5					—	—	—	etc.
6						+	+	etc.
7							—	etc.

Folge 3.

Marken.	1	2	3	4	5	6	7	
Ordn. 1	+	—	+	—	+	—	+	etc.
2		+	—	+	—	+	—	etc.
3			+	—	+	—	+	etc.
4				+	—	+	—	etc.
5					+	—	+	etc.
6						+	—	etc.
7							+	etc.

Folge 4.

Marken.	1	2	3	4	5	6	7	
Ordn. 1	—	+	—	+	—	+	—	etc.
2		+	—	+	—	+	—	etc.
3			—	+	—	+	—	etc.
4				+	—	+	—	etc.
5					—	+	—	etc.
6						+	—	etc.
7							—	etc.

Alle diese Veränderungen der Zeichen aber ändern nichts in dem Werthe der höhern D. Z., wenn nur der Werth von den D. Z. der ersten Ordnung unverändert bleibt.

§. 43. Anmerkung.

Ohngeachtet es gar nicht schwer ist alle Producte, welche irgend ein höheres D. Z. in sich begreift, geradezu, und ohne ein weiteres Hülfsmittel zu entwickeln, und so den Werth desselben zu bestimmen; so habe ich doch, um den Gebrauch dieser Zeichen so bequem als möglich zu machen, am Ende dieser Schrift eine hinlänglich weit fortgesetzte Tafel derselben (man sehe Tafel 1) angehängt, die von sehr allgemeinen Gebrauche ist, worüber ich der Tafel selbst einige Anmerkungen beigefügt habe.

Uebrigens ist die bisher vorgetragene Erklärung und Theorie dieser Zeichen schon hinlänglich einige allgemeine Aufgaben aufzulösen, die ich blos nennen darf, um für den Nutzen, und die äußerst weit sich erstreckende Anwendbarkeit dieser Zeichen, ein günstiges Vorurtheil zu erregen. Es sind dieser Aufgaben eigentlich nur dreie, für deren jede ich einen eigenen Abschnitt bestimmt habe.

1) Jeden vielgliedrigen Ausdruck zu jeder ganzen und positiven Potenz zu erheben. Abschn. III.

2) Jeden vielgliedrigen Ausdruck ganz allgemein zu jeder Potenz zu erheben, der Exponent sey, was er wolle. Abschn. IV.

3) Aus jeder nur erdenkbaren Function, oder Gleichung, den Werth irgend einer darin enthaltenen Größe durch eine unendliche Reihe darzustellen. Abschn. V.

Es wird sich zeigen, daß alle Schwierigkeit bei diesen drei Aufgaben, blos in der ein für allemal zu verrichtenden **allgemeinen** Auflösung derselben liegt; daß hingegen der Gebrauch und die Anwendung derselben auf wirkliche Fälle, oder besondere Calculs, in weiter nichts als einer äußerst leichten Substitution bestehet. Auch wird man finden, daß das Fortschreitungsgesetz der Reihen, durch welche die obigen Aufgaben aufgelöset werden, vermittelst unserer Zeichen, so einfach und deutlich vor Augen liegt, daß man bei jeder einzelnen Anwendung, die Rechnung so weit treiben kann, als man will.

Diese drei Abschnitte und der ganze erste Theil dieser Schrift, haben es blos mit allgemeiner Theorie zu thun. Die Anwendungen auf mehrere Theile der Analysis, werden wir im zweiten Theile liefern. Doch werde ich auch schon im ersten Theile, um das Ermüdende blos allgemeiner Untersuchungen zu vermeiden, und die Theorie selbst anschaulicher zu machen, einige Anwendungen, unter dem Namen von Erläuterungsaufgaben, einschieben.

Dritter Abschnitt.

Erhebung vielgliedriger Ausdrücke zu jeder Potenz, deren Exponent eine ganze und positive Zahl ist.

§. 44. Aufgabe.

Jeden vorgelegten vielgliedrigen, endlichen oder unendlichen Ausdruck

$$y = Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + \ldots + Px^{m+vr}$$

zu der $n$ten Potenz zu erheben, vorausgesetzt, daß n eine ganze und positive Zahl sey.

Auflösung. Man bezeichne zuerst die Coefficienten der gegebenen Reihe mit Dimensionszeichen der ersten Ordnung, und nehme zu Marken dieser Zeichen, die Exponenten von x. Nemlich $A = \overset{m}{\mathrm{I}}$; $B = \overset{m+r}{\mathrm{I}}$; $C = \overset{m+2r}{\mathrm{I}}$ *etc.* $P = \overset{m+vr}{\mathrm{I}}$, so daß

$$y = \overset{m}{\mathrm{I}}x^m + \overset{m+r}{\mathrm{I}}x^{m+r} + \overset{m+2r}{\mathrm{I}}x^{m+2r} + \ldots\ldots + \overset{m+vr}{\mathrm{I}}x^{m+vr}$$

Man formire nun eine Reihe, welche mit einer $n$mal höhern Potenz von x anhebt und schließet, und wovon die Exponenten der Zwischenglieder nach eben der Differenz r, als in der gegebenen Reihe fortschreiten. Diesen Potenzen von x gebe man die Dimensionszeichen der unbestimmten $n$ten Ordnung (§. 34. 35. 36.), nach der Reihe zu Coefficienten, so wird

$$y^n = \overset{nm}{IN}\,x^{nm} + \overset{nm+r}{IN}\,x^{nm+r} + \overset{nm+2r}{IN}\,x^{nm+2r}$$
$$+ \ldots\ldots + \overset{n(m+vr)}{IN}\,x^{n(m+vr)}$$

die verlangte $n$te Potenz seyn.

Beweis. Die Folge der Potenzen von x ist §. 12. erwiesen: also ist nur noch zu zeigen, daß jede ihren richtigen Coefficienten erhalten habe.

Die ganze Potenzreihe ist gleich der Summe aller möglichen Producte, nach allen ihren Versetzungen, die sich aus n Gliedern der Wurzelreihe machen lassen (§. 3.); folglich wird jeder Coefficient der Potenzreihe, von der Form IN seyn (§. 34.).

Da in der Wurzelreihe die Marken der D. Z. und die Exponenten der Potenzen gleich sind, so wird in der Potenzreihe (wenn sie geradezu durch Multiplication formiret wäre,) jedes einzelne Product, welches eine Potenz von x, z. B. x^{nm+pr} enthält, einen Coefficienten bekommen, dessen n Marken die Summe $nm+pr$ geben; d. h. der Coefficient wird seyn von der Form $\overset{nm+pr}{IN}$ (§. 34).

Jedes solche einzelne Product wird die Versetzungszahl bekommen müssen, die seinen Factoren zukommt (§. 4.).

Unter allen so formirten, und mit ihren Versetzungszahlen versehenen Producten, werden sich so viele finden, welche die Potenz x^{nm+pr} enthalten, als vielmal sich $nm+pr$ aus n Exponenten der Wurzelreihe zusammensetzen läßt (§. 10.).

Zieht man demnach alle diese Glieder zusammen, so wird der Coefficient der Potenz x^{nm+pr}, alle mögliche Producte enthalten, die sich aus n Coefficienten der Wurzelreihe so machen lassen, daß in jedem die Summe der n Marken $= nm+pr$ sey, jedes dieser Producte nach allen seinen möglichen Versetzungen genommen; d. h. der Coefficient von x^{nm+pr} wird seyn $= \overset{nm+pr}{IN}$ (§. 34.).

Setzt man hier für p nach und nach 0, 1, 2, 3 . . . v, so ist die Richtigkeit aller einzelnen Glieder erwiesen.

§. 45. Anmerkung.

Diese Aufgabe ist der Fundamentalsatz für die ganze Theorie der D. Z., daher ich jeden Leser ersuchen muß, ihn einer besondern Aufmerksamkeit zu würdigen. Alles was in dieser ganzen Schrift im folgenden vorkommen wird, hängt von der Wahrheit dieses einzigen Satzes ab.

§. 46. Zusatz.

Daß wir die Exponenten von x zugleich zu Marken der D. Z. gewählt haben, erleichtert den Beweis.

Allein vermöge dessen was §. 39. und 40. erwiesen worden, hätten wir über die D. Z. der ersten Ordnung jede andere arithmetische Reihe, als Marken setzen können, z. B.

$$y = \overset{a}{I}\, x^m + \overset{a+b}{I}\, x^{m+r} + \overset{a+2b}{I}\, x^{m+2r} + etc.$$

und dann würde man vermöge der a. a. O. in Absicht der Marken erwiesenen Sätze jede höhere $n$te Potenz, eben so leicht formiren können. Es ist nemlich

$$y^n = \overset{an}{IN}\, x^{nm} + \overset{an+b}{IN}\, x^{nm+r} + \overset{an+2b}{IN}\, x^{nm+2r} + etc.$$

Für die Anwendung wird es aber immer bequemer seyn, die Anzahl jedes Gliedes der Wurzelreihe, zur Marke des D. Z., welches seinen Coefficienten vorstellt, zu wählen.

Wenn also

$$y = \overset{1}{I}\, x^m + \overset{2}{I}\, x^{m+r} + \overset{3}{I}\, x^{m+2r} + \ldots + \overset{p}{I}\, x^{m+(p-1)r}$$

so ist

$$y^n = \overset{n}{IN}\, x^{nm} + \overset{n+1}{IN}\, x^{nm+r} + \overset{n+2}{IN}\, x^{nm+2r} +$$

$$\ldots\ldots + \overset{np}{IN}\, x^{n(m+(p-1)r)}. \quad (§. 39. 40.)$$

Setzt man nun in dieser Formel für n und IN bestimmte Zeichen, nemlich 2, 3, 4, 5 *etc.* für n, und respective II, III, IV, V *etc.* für IN, so erhält man die Formeln für die zweite, dritte, vierte *etc.* Potenz der gegebenen Reihe.

Wenn also, wie oben

$$y = \overset{1}{\mathrm{I}}\, x^{m} + \overset{2}{\mathrm{I}}\, x^{m+r} + \overset{3}{\mathrm{I}}\, x^{m+2r} + \ldots + \overset{p}{\mathrm{I}}\, x^{m+(p-1)r}$$

so ist

$$y^2 = \overset{2}{\mathrm{II}}\, x^{2m} + \overset{3}{\mathrm{II}}\, x^{2m+r} + \overset{4}{\mathrm{II}}\, x^{2m+2r} + \ldots + \overset{2p}{\mathrm{II}}\, x^{2(m+(p-1)r)}$$

$$y^3 = \overset{3}{\mathrm{III}}\, x^{3m} + \overset{4}{\mathrm{III}}\, x^{3m+r} + \overset{5}{\mathrm{III}}\, x^{3m+2r} + \ldots + \overset{3p}{\mathrm{III}}\, x^{3(m+(p-1)r)}$$

$$y^4 = \overset{4}{\mathrm{IV}}\, x^{4m} + \overset{5}{\mathrm{IV}}\, x^{4m+r} + \overset{6}{\mathrm{IV}}\, x^{4m+2r} + \ldots + \overset{4p}{\mathrm{IV}}\, x^{4(m+(p-1)r)}$$

$$y^5 = \overset{5}{\mathrm{V}}\, x^{5m} + \overset{6}{\mathrm{V}}\, x^{5m+r} + \overset{7}{\mathrm{V}}\, x^{5m+2r} + \ldots + \overset{5p}{\mathrm{V}}\, x^{5(m+(p-1)r)}$$

etc. *etc.*

Nächst diesem Falle, wo man in der ersten Ordnung das D. Z. I, und die Marken 1, 2, 3, 4 *etc.* braucht, wird in der Folge nichts häufiger vorkommen, als der Fall, wo in der ersten Ordnung das D. Z. $\mathfrak{A}$, und die Marken 2, 3, 4, 5 *etc.* vorkommen; wenn also

$$y = \overset{2}{\mathfrak{A}}\, x^{m} + \overset{3}{\mathfrak{A}}\, x^{m+r} + \overset{4}{\mathfrak{A}}\, x^{m+2r} + \overset{5}{\mathfrak{A}}\, x^{m+3r} + etc.$$

so ist

$$y^2 = \overset{4}{\mathfrak{B}}\, x^{2m} + \overset{5}{\mathfrak{B}}\, x^{2m+r} + \overset{6}{\mathfrak{B}}\, x^{2m+2r} + \overset{7}{\mathfrak{B}}\, x^{2m+3r} + etc.$$

$$y^3 = \overset{6}{\mathfrak{C}}\, x^{3m} + \overset{7}{\mathfrak{C}}\, x^{3m+r} + \overset{8}{\mathfrak{C}}\, x^{3m+2r} + \overset{9}{\mathfrak{C}}\, x^{3m+3r} + etc.$$

$$y^4 = \overset{8}{\mathfrak{D}}\, x^{4m} + \overset{9}{\mathfrak{D}}\, x^{4m+r} + \overset{10}{\mathfrak{D}}\, x^{4m+2r} + \overset{11}{\mathfrak{D}}\, x^{4m+3r} + etc.$$

etc. *etc.*

$$y^n = \overset{2n}{\mathfrak{N}}\, x^{nm} + \overset{2n+1}{\mathfrak{N}}\, x^{nm+r} + \overset{2n+2}{\mathfrak{N}}\, x^{nm+2r} + \overset{2n+3}{\mathfrak{N}}\, x^{nm+3r} + etc.$$

$$y^{n+1} = \overset{2n+2}{(\mathfrak{N}+\mathfrak{A})}\, x^{(n+1)m} + \overset{2n+3}{(\mathfrak{N}+\mathfrak{A})}\, x^{(n+1)m+r} + \overset{2n+4}{(\mathfrak{N}+\mathfrak{A})}\, x^{(n+1)m+2r} + etc.$$

u. d. gl. m.

Die letzten Glieder habe ich weggelassen, theils weil sie leicht zuzusetzen sind, und weil man sie in sehr vielen Fällen selbst bei endlichen Reihen, aus der Acht lassen kann.

Man wird schon aus dem einzigen hier vorgetragenen Satze beurtheilen können, wie nützlich der Gebrauch unserer D. Z. sey; da die sonst so verwickelte Potenziirung vielgliedriger Ausdrücke auf die einfachste Arbeit, die sich denken läßt, reduciret wird; und vermöge dessen, was im vorigen Abschnitte vorgetragen worden, wird es in jedem Falle nicht schwer seyn, jede verlangte Potenz, wenn ihre Reihe aus wenig Gliedern bestehet, ganz, wo nicht, soviele Glieder, und welche Glieder man will, aus unsern Zeichen in die gewöhnliche algebraische Sprache zu übersetzen. Der größte Vortheil bestehet aber darin, daß man unsere so einfache Zeichen während jeder Rechnung beibehalten kann, ohne sich um ihren eigentlichen Werth zu bekümmern. Erst am Ende der Rechnung, oder wenn ein Satz auf einen ganz bestimmten Fall angewendet werden soll, ist es Zeit an die Uebersetzung zu denken.

§. 47. Zusatz.

Man setze §. 46, $x = 1$, so wird

$$y = \overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}} + \overset{3}{\mathrm{I}} + \ldots\ldots + \overset{p}{\mathrm{I}}.$$

$$y^2 = \overset{2}{\mathrm{II}} + \overset{3}{\mathrm{II}} + \overset{4}{\mathrm{II}} + \ldots\ldots + \overset{2p}{\mathrm{II}}.$$

$$y^3 = \overset{3}{\mathrm{III}} + \overset{4}{\mathrm{III}} + \overset{5}{\mathrm{III}} + \ldots\ldots + \overset{3p}{\mathrm{III}}.$$

$$y^4 = \overset{4}{\mathrm{IV}} + \overset{5}{\mathrm{IV}} + \overset{6}{\mathrm{IV}} + \ldots\ldots + \overset{4p}{\mathrm{IV}}.$$

etc. *etc.*

$$y^n = \overset{n}{IN} + \overset{n+1}{IN} + \overset{n+2}{IN} + \ldots\ldots + \overset{np}{\mathrm{IV}}.$$

d. h. die Summe aller Dimensionszeichen der $n$ten Ordnung, ist gleich der $n$ten Potenz, von der Summe aller Dimensionszeichen der ersten Ordnung.

Uebrigens ersiehet man aus dem bisher vorgetragenen leicht, daß die Werthe der höhern D. Z, eigentlich nichts anders sind, als die Coefficienten der höhern Potenzen irgend einer endlichen oder unendlichen Reihe; und daß wir im vorigen Abschnitte, da wir den Sinn und die Entwickelung der höhern D. Z. zergliederten, eigentlich nichts gethan haben, als daß wir das allgemeine Gesetz entwickelt haben, dem die Coefficienten einer Reihe, in jeder höhern Potenz, deren Exponent ganz und positiv ist, folgen.

Diese Bemerkung trägt viel zur deutlichern Vorstellung von dem Sinn dieser Zeichen, und zum richtigen Gebrauch derselben bei, und giebt in manchen speciellen Fällen Mittel an die Hand, die Werthe der höhern D. Z. fast ohne alle Arbeit zu finden.

Ein Paar der leichtesten Fälle dieser Art sind folgende:

Wenn in der ersten Ordnung nur ein D. Z. da wäre $\overset{n}{\mathrm{I}} = a$; so ist in jeder Ordnung auch nur eines, das wirklichen Werth hat, nemlich

$$\overset{2n}{\mathrm{II}} = a^2;\ \overset{3n}{\mathrm{III}} = a^3;\ \overset{4n}{\mathrm{IV}} = a^4;\ etc.\ \overset{mn}{IM} = a^m$$

Sind

Sind in der ersten Ordnung nur zwei D. Z. da, z. B. $\overset{1}{\mathrm{I}} = a$; $\overset{2}{\mathrm{I}} = -b$; so sind die D. Z. jeder Ordnung nach der Reihe, die Glieder der binomischen Potenzen von $a - b$, z. B.

$$\overset{2}{\mathrm{II}} = a^2;\ \overset{3}{\mathrm{II}} = -2ab;\ \overset{4}{\mathrm{II}} = b^2$$

$$\overset{3}{\mathrm{III}} = a^3;\ \overset{4}{\mathrm{III}} = -3a^2b;\ \overset{5}{\mathrm{III}} = 3ab^2;\ \overset{6}{\mathrm{III}} = -b^3$$

etc.

$$\overset{n}{1N} = a^n;\ \overset{n+1}{1N} = -\frac{n}{1}a^{n-1}b;\ \overset{n+2}{1N} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2;\ etc.$$

§. 48. Zusatz.

Aus §. 47. folgt, daß die vielgliedrigen Ausdrücke, deren Potenzen man machen will, gar nicht nothwendig, nach Potenzen einer Größe x geordnet seyn müssen; sondern wenn man mehrere Größen, von welcher Beschaffenheit und Anordnung sie seyn mögen, mit $\overset{1}{\mathrm{I}}, \overset{2}{\mathrm{I}}, \overset{3}{\mathrm{I}}, \overset{4}{\mathrm{I}}$, *etc.* bezeichnet, so kann man durch unsere D. Z. alle ganze und positive Potenzen ihrer Summe eben so leicht finden, als wenn sie nach einer Größe x geordnet wären.

Wir setzen einige Beispiele und Aufgaben hinzu, um den Gebrauch, und Nutzen unserer Methode zu erläutern.

§. 49. Beispiel. 1.

Die zweite Potenz von $A + B + C$ zu finden. Man setze

$$y = A + B + C = \overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}} + \overset{3}{\mathrm{I}}$$

so ist $y^2 = \overset{2}{\mathrm{II}} + \overset{3}{\mathrm{II}} + \overset{4}{\mathrm{II}} + \overset{5}{\mathrm{II}} + \overset{6}{\mathrm{II}}$.

Es ist aber $\overset{2}{\mathrm{II}} = \overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}} = AA$; $\overset{3}{\mathrm{II}} = 2\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}} = 2AB$;

$\overset{4}{\mathrm{II}} = 2\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}} = 2AC + BB$; $\overset{5}{\mathrm{II}} = 2\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} = 2BC$;

und $\overset{6}{\mathrm{II}} = \overset{3}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} = CC$, (§. 21. oder Taf. 1.); also

$$y^2 = AA + 2AB + 2AC + 2BC + CC \\ + BB.$$

§. 50. Beispiel. 2.

Die dritte Potenz eben der Wurzel zu finden. Sie ist

$$y^3 = \overset{3}{\mathrm{III}} + \overset{4}{\mathrm{III}} + \overset{5}{\mathrm{III}} + \ldots\ldots + \overset{9}{\mathrm{III}}.$$

Es ist aber $\overset{3}{\mathrm{III}} = \overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}} = A^3$; $\overset{4}{\mathrm{III}} = 3\,\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}} = 3\,AAB$;

$$\overset{5}{\mathrm{III}} = 3\,\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} + 3\,\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}} = 3\,AAC + 3\,ABB;$$

$$\overset{6}{\mathrm{III}} = 6\,\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}} = 6\,ABC + B^3$$

$$\overset{7}{\mathrm{III}} = 3\,\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} + 3\,\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} = 3\,ACC + 3\,BBC$$

$$\overset{8}{\mathrm{III}} = 3\,\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} = 3\,BCC;\ \overset{9}{\mathrm{III}} = \overset{3}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} = C^3;$$

also

$$\begin{aligned} y^3 = A^3 + 3\,AAB &+ 3\,AAC + 6\,ABC + 3\,ACC + 3\,BCC + C^3 \\ &+ 3\,AAB + \quad B^3 \quad + 3\,BBC. \end{aligned}$$

Bei höheren Potenzen oder sehr vielgliedrigen Wurzeln, würde die Uebersetzung weitläuftiger, und verwickelter werden, wovon aber der Grund in der Natur der Sache liegt, und durch keine Methode gehoben werden kann. Indessen ist schon öfter als einmal bemerkt worden, daß diese Uebersetzungsarbeit seltener nöthig ist, als man bei dem erstem Blick glauben sollte. Auch wird man in der Folge mehrere Hülfsmittel finden, dieselbe sehr zu erleichtern. Bei den ersten Gliedern jeder Potenz sind nie Schwierigkeiten, und gerade dies kommt am häufigsten.

§. 51. Beispiel. 3.

Die vier ersten Glieder der fünften Potenz von $A - Bx + Cx^2 - Dx^3$ zu finden.

Man setze $\overset{1}{\mathrm{I}} = A$; $\overset{2}{\mathrm{I}} = -B$; $\overset{3}{\mathrm{I}} = C$; $\overset{4}{\mathrm{I}} = -D$; also

$$y = A - Bx + Cx^2 - Dx^3 = \overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}}\,x + \overset{3}{\mathrm{I}}\,x^2 + \overset{4}{\mathrm{I}}\,x^3;$$

daher $y^5 = \overset{5}{\mathrm{V}} + \overset{6}{\mathrm{V}}\,x + \overset{7}{\mathrm{V}}\,x^2 + \overset{8}{\mathrm{V}}\,x^3 + etc.$

Die Werthe der vier ersten Coefficienten sind:

$$\overset{5}{\mathrm{V}} = \overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}} = A^5;\ \overset{6}{\mathrm{V}} = 5\,\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}} = -5\,A^4B;$$

$$\overset{7}{\mathrm{V}} = 5\,\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} + 10\,\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}} = 5\,A^4C + 10\,A^3B^2;$$

$$\begin{aligned} \overset{8}{\mathrm{V}} &= 5\,\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{4}{\mathrm{I}} + 20\,\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} + 10\,\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}} \\ &= -5\,A^4D - 20\,A^3BC - 10\,A^2B^3 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} y^5 = A^5 &- 5\,A^4Bx + 5\,A^3(AC + 2\,B^2)\,x^2 \\ &- 5\,A^2(A^2D + 4\,ABC + 2\,B^3)\,x^3 + etc. \end{aligned}$$

§. 52. Beispiel. 4.

Von der fünften Potenz eben der Wurzel dasjenige Glied zu finden, welches x^8 enthält. Die fünfte Potenz ist $y^5 = \overset{5}{V} + \overset{6}{V}x + \overset{7}{V}x^2 + \ldots + \overset{n+5}{V}x^n + \ldots etc.$, zu x^8 wird also der Coefficient $\overset{13}{V}$ gehören. Es läßt sich aber 13, aus fünf Zahlen der natürlichen Zahlenreihe auf folgende achtzehn Arten zusammensetzen:

$13 =$

1) $1+1+1+1+9$; 2) $1+1+1+2+8$; 3) $1+1+1+3+7$
4) $1+1+1+4+6$; 5) $1+1+1+5+5$; 6) $1+1+2+2+7$
7) $1+1+2+3+6$; 8) $1+1+2+4+5$; 9) $1+1+3+3+5$
10) $1+1+3+4+4$; 11) $1+2+2+2+6$; 12) $1+2+2+3+5$
13) $1+2+2+4+4$; 14) $1+2+3+3+4$; 15) $1+3+3+3+3$
16) $2+2+2+2+5$; 17) $2+2+2+3+4$; 18) $2+2+3+3+3$

Für unsern Fall aber sind alle diejenigen Zusammensetzungen unbrauchbar, in welchen Zahlen, die größer als 4 sind, vorkommen. Es bleiben also blos Nr. 10. 13. 14. 15. 17. 18. übrig, und es ist $\overset{13}{V} = 30\,\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{3}{I}\overset{4}{I}\overset{4}{I} + 30\,\overset{1}{I}\overset{2}{I}\overset{2}{I}\overset{4}{I}\overset{4}{I} + 60\,\overset{1}{I}\overset{2}{I}\overset{3}{I}\overset{3}{I}\overset{4}{I}$ $+ 5\,\overset{1}{I}\overset{3}{I}\overset{3}{I}\overset{3}{I}\overset{3}{I} + 20\,\overset{2}{I}\overset{2}{I}\overset{2}{I}\overset{3}{I}\overset{4}{I} + 10\,\overset{2}{I}\overset{2}{I}\overset{3}{I}\overset{3}{I}\overset{3}{I}$.

$$= 30A^2CD^2 + 30AB^2D^2 + 60ABC^2D + 5AC^4 + 20B^3CD + 10B^2C^3.$$

§. 53. Beispiel. 5.

Von der unendlichen Reihe $y = x - 3x^3 + 5x^5 - 7x^7 + 9x^9 - etc.$ die vierte Potenz bis zu dem Gliede, welches nächst höher als x^9, zu finden.

Man setze $1 = \overset{1}{I}$; $-3 = \overset{2}{I}$; $+5 = \overset{3}{I}$; $-7 = \overset{4}{I}$; $+9 = \overset{5}{I}$; etc. so ist:

$$y = \overset{1}{I}x + \overset{2}{I}x^3 + \overset{3}{I}x^5 + \overset{4}{I}x^7 + etc.$$

folglich, $y^4 = \overset{4}{IV}x^4 + \overset{5}{IV}x^6 + \overset{6}{IV}x^8 + \overset{7}{IV}x^{10} + etc.$

Wir haben also vier Glieder zu berechnen. Es ist aber

$\overset{4}{IV} = \overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{1}{I} = +1$; $\overset{5}{IV} = 4\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{2}{I} = -12$; $\overset{6}{IV} = 4\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{3}{I} + 6\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{2}{I}\overset{2}{I} = +74$;
$\overset{7}{IV} = 4\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{4}{I} + 12\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{2}{I}\overset{3}{I} + 4\overset{1}{I}\overset{2}{I}\overset{2}{I}\overset{2}{I} = -316$;
also $y^4 = x^4 - 12x^6 + 74x^8 - 316x^{10} + etc.$

Anstatt mehr dergleichen allgemeine Beispiele anzuführen, wollen wir die Anwendbarkeit unserer Methode, in einigen bestimmteren Erläuterungsaufgaben, zeigen.

§. 54. Erläuterungsaufgabe. 1.

Den Ausdruck $y = \frac{\text{Sin.}\,x}{1 + \text{Sin.}\,x^2}$ in eine unendliche Reihe zu verwandeln, die nach Potenzen von x selbst fortschreitet.

Auflösung. Man verwandle zuerst den Ausdruck durch Division, in eine Reihe nach Sin. x; nemlich

$$y = \frac{\text{Sin.}\,x}{1 + \text{Sin.}\,x^2} = \text{Sin.}\,x - \text{Sin.}\,x^3 + \text{Sin.}\,x^5 - \text{Sin.}\,x^7 + etc.$$

Es ist aber bekanntlich $\text{Sin.}\,x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + etc.$ und wenn man die Coefficienten dieser Reihe mit Dimensionszeichen bezeichnet, so ist es eine sehr leichte Arbeit, diesen Werth von Sin. x, in der obigen Reihe zu substituiren. Es sey also $\overset{1}{\text{I}} = 1$; $\overset{2}{\text{I}} = -\frac{1}{1.2.3}$; $\overset{3}{\text{I}} = +\frac{1}{1.2\ldots5}$; $\overset{4}{\text{I}} = -\frac{1}{1.2\ldots7}$; *etc. etc.*

Daher nach §. 46:

$$\begin{array}{rclllll}
\text{Sin.}\,x & = & \overset{1}{\text{I}}x & + \overset{2}{\text{I}}x^3 & + \overset{3}{\text{I}}x^5 & + \overset{4}{\text{I}}x^7 & + etc. \\
-\text{Sin.}\,x^3 & = & & -\overset{3}{\text{III}}x^3 & -\overset{4}{\text{III}}x^5 & -\overset{5}{\text{III}}x^7 & - etc. \\
+\text{Sin.}\,x^5 & = & & & +\overset{5}{\text{V}}x^5 & +\overset{6}{\text{V}}x^7 & + etc. \\
-\text{Sin.}\,x^7 & = & & & & -\overset{7}{\text{VII}}x^7 & - etc. \\
\hline
\end{array}$$

$$y = \frac{\text{Sin.}\,x}{1 + \text{Sin.}\,x^2} = \overset{1}{\text{I}}x + (\overset{2}{\text{I}} - \overset{3}{\text{III}})\,x^3 + (\overset{3}{\text{I}} - \overset{4}{\text{III}} + \overset{5}{\text{V}})\,x^5$$
$$+ (\overset{4}{\text{I}} - \overset{5}{\text{III}} + \overset{6}{\text{V}} - \overset{7}{\text{VII}})\,x^7 + etc.\ etc.$$

Das Fortschreitungsgesetz dieser Reihe liegt einfach und deutlich vor Augen, und da wir in dem vorigen Abschnitte gezeigt haben, wie man für jede gegebene Reihe von Größen, welche mit D. Z. der ersten Ordnung bezeichnet sind, die Werthe der höhern D. Z. so weit man will, finden könne, so ist offenbar, daß die Glieder unserer hier gefundenen Reihe, so weit als man will, berechnet werden können.

Da übrigens die Coefficienten der Sinusreihe in unzähligen Rechnungen vorkommen, so ist es bequem, die Berechnung der höheren Ordnungen, die sich auf dieselben beziehen, ein für allemal, bis auf eine hinlänglich große Anzahl von Gliedern zu verrichten. Ich habe daher unter denen diesem Werke angehängten Tabellen, Tafel VI. A., diese Berechnung weiter getrieben, als für die gewöhnlichsten Fälle nöthig seyn möchte. Mit Hülfe dieser Tabelle wird man ohne Mühe, mehrere Glieder der gefundenen Reihe berechnen können. Es ist nemlich

1)

$$1)\ \overset{1}{\mathrm{I}} = +1;\quad 2)\ \overset{2}{\mathrm{I}} - \overset{3}{\mathrm{III}} = -\frac{1}{1.2.3} - 1 = -\frac{7}{1.2.3}$$

$$3)\ \overset{3}{\mathrm{I}} - \overset{4}{\mathrm{III}} + \overset{5}{\mathrm{V}} = \frac{1}{1.2..5} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{181}{1...5}$$

$$4)\ \overset{4}{\mathrm{I}} - \overset{5}{\mathrm{III}} + \overset{6}{\mathrm{V}} - \overset{7}{\mathrm{VII}} = -\frac{1}{1.2...7} - \frac{78}{1...6} - \frac{100}{1...5} - 1 = -\frac{9747}{1...7}$$

$$5)\ \overset{5}{\mathrm{I}} - \overset{6}{\mathrm{III}} + \overset{7}{\mathrm{V}} - \overset{8}{\mathrm{VII}} + \overset{9}{\mathrm{IX}} = \frac{1}{1...9} + \frac{1640}{3.1...8} + \frac{25760}{1...7} + \frac{840}{1...6} + 1$$

$$= +\frac{2\,645\,881}{1.....9}$$

u. s. f. Demnach

$$\frac{\mathrm{Sin.}\,x}{1+\mathrm{Sin.}\,x^2} = x - \frac{7}{1.2.3}x^3 + \frac{181}{1...5}x^5 - \frac{9747}{1...7}x^7 + \frac{2645881}{1...9}x^9 - etc.$$

Für die Coefficienten der Cosinusreihe findet man eine ähnliche Tabelle, Tafel VII. A.

§. 55. Anmerkung.

So lange die Coefficienten der im vorigen §. gefundenen Reihe durch Dim. Z. ausgedrückt werden, fällt das Fortschreitungsgesetz höchst einfach und deutlich in die Augen, verbirgt sich aber in Zahlen gänzlich. Es ist dies ein wichtiger Vortheil, den unsere Zeichen gewähren, daß sie das Gesetz **jeder Reihe**, die vermittelst derselben entwickelt wird, sichtbar machen, so daß man nicht nur die Reihe so weit man will fortsetzen, sondern auch jedes einzelne Glied, unabhängig von allen übrigen, berechnen kann. Wir werden indessen im folgenden einen Versuch machen, das Gesetz vieler verwickelten Reihen auch in Zahlzeichen sichtbar zu machen, wohin unter andern alle Reihen gehören, welche aus den Reihen für Sinus und Cosinus abgeleitet werden können; als die Reihen für alle übrige trigonometrische Functionen eines Bogens, nebst ihren Logarithmen, u. d. gl. m.

§. 56. Erläuterungsaufgabe. 2.

Den natürlichen Logarithmen des Sinus eines Bogens x, durch eine Reihe auszudrücken, die nach Potenzen von x fortschreitet.

Auflösung. Man setze log. Sin. $x = y$, und löse Sin. x in seine Reihe auf, so hat man $y = \log.\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1...5} - \frac{x^7}{1...7} + etc.\right)$

$$= \log.x + \log.\left(1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1...5} - \frac{x^6}{1...7} + etc.\right)$$

man setze ferner $z = -\frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1...5} - \frac{x^6}{1...7} + etc.$

also $y = \log.x + \log.(1+z) = \log.x + z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + etc.$

Für

Für z ist endlich sein Werth zu substituiren, und dieses geschieht vermittelst der D. Z. Man setze also $-\frac{1}{1.2.3} = \overset{2}{\mathfrak{A}}$; $+\frac{1}{1\ldots5} = \overset{3}{\mathfrak{A}}$; $-\frac{1}{1\ldots7} = \overset{4}{\mathfrak{A}}$; *etc.* so daß $z = \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^4 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^6 + \overset{5}{\mathfrak{A}}x^8 + etc.$

Nunmehr haben wir (nach §. 46.)

$$\begin{array}{rcl} \log. x & = & \log. x \\ + \quad z & = & \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^4 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^6 + \overset{5}{\mathfrak{A}}x^8 + etc. \\ -\ \tfrac{1}{2}z^2 & = & \qquad\quad -\tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}}x^4 - \tfrac{1}{2}\overset{5}{\mathfrak{B}}x^6 - \tfrac{1}{2}\overset{6}{\mathfrak{B}}x^8 - etc. \\ +\ \tfrac{1}{3}z^3 & = & \qquad\qquad\qquad\quad +\tfrac{1}{3}\overset{6}{\mathfrak{C}}x^6 + \tfrac{1}{3}\overset{7}{\mathfrak{C}}x^8 + etc. \\ -\ \tfrac{1}{4}z^4 & = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -\tfrac{1}{4}\overset{8}{\mathfrak{D}}x^8 - etc. \\ etc. & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad etc. \end{array}$$

$$y = \log.\mathrm{Sin}.x = \log.x + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 + (\overset{3}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}})\,x^4 + (\overset{4}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1}{2}\overset{5}{\mathfrak{B}} + \tfrac{1}{3}\overset{6}{\mathfrak{C}})\,x^6 + (\overset{5}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1}{2}\overset{6}{\mathfrak{B}} + \tfrac{1}{3}\overset{7}{\mathfrak{C}} - \tfrac{1}{4}\overset{8}{\mathfrak{D}})\,x^8 + etc.$$

welches die verlangte Reihe ist.

§. 57. Zusatz.

Um die Coefficienten der gefundenen Reihe in Zahlen zu verwandeln, kann man sich nicht wie §. 54. der Tafel VI. A. bedienen, obgleich $\overset{2}{\mathfrak{A}}$, $\overset{3}{\mathfrak{A}}$, $\overset{4}{\mathfrak{A}}$ *etc.* gleichfalls die Coefficienten der Sinusreihe, und den dortigen $\overset{2}{\mathrm{I}}$, $\overset{3}{\mathrm{I}}$, $\overset{4}{\mathrm{I}}$, *etc.* gleich sind. Der Grund liegt darin, weil hier der Coefficient von dem ersten Gliede der Sinusreihe 1 (§. 51. $\overset{1}{\mathrm{I}}$) gar nicht mit in Rechnung kommt. Wir haben um dieses bemerkbarer zu machen, hier, zu den Marken der ersten Ordnung, nicht die Reihe 1, 2, 3 *etc.* sondern 2, 3, 4 *etc.* gewählt, auch eben deswegen nicht die D. Z. I, II, III, *etc.* sondern $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *etc.* gebraucht. $\overset{1}{\mathfrak{A}}$ welches §. 54, = 1 war, ist hier = 0, indem es gar nicht in Rechnung kommt; und dies muß natürlich einen Einfluß auf alle höhere D. Z. haben. Wir werden zwar in der Folge zeigen, wie man dergleichen D. Z., $\overset{2}{\mathfrak{A}}$, $\overset{3}{\mathfrak{A}}$, $\overset{4}{\mathfrak{A}}$ *etc.*, die sich auf die Coeff. irgend einer Reihe (hier Sinusreihe) nur vom zweiten Gliede an, beziehen, auf solche ($\overset{1}{\mathrm{I}}$, $\overset{2}{\mathrm{I}}$, $\overset{3}{\mathrm{I}}$ *etc.*) reduciren könne, die das erste Glied mit in sich begreifen: da indessen die Coefficienten der Sinusreihe in vielen Rechnungen, ohne das erste Glied vorkommen, so haben wir auch für diesen Fall eine Tabelle (Tafel VI. B.) berechnet, vermittelst deren man sehr leicht, einige Glieder unserer Reihe in Zahlen berechnen kann.

Zu Folge dieser Tabelle ist in der gefundenen Reihe

der Coeff. von $x^2 = \frac{-1}{1.\,2.\,3}$; der Coeff. von $x^4 = \frac{-2}{3.1\ldots5}$

„ „ „ $x^6 = \frac{-16}{9.1\ldots7}$; „ „ „ $x^8 = \frac{-48}{5.1\ldots9}$

Also $\log.\mathrm{Sin}.\,x = \log.\,x - \frac{x^2}{1.\,2.\,3} - \frac{2x^4}{3.1\ldots5} - \frac{16x^6}{9.1\ldots7} - \frac{48x^8}{5.1\ldots9} - etc.$

§. 58. Erläuterungsaufgabe. 3.

Den natürlichen Logarithmen von Cosin. x durch eine Reihe, die nach x fortschreitet, auszudrücken.

Aufl. Man setze $\log.\mathrm{Cos}.\,x = y$, und löse Cos. x in seine Reihe auf, so ist

$$y = \log.\left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + etc.\right)$$

Man setze $-\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + etc. = z$

also $y = \log.(1 + z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + etc.$

Um in diese Reihe für z seinen Werth zu substituiren, bezeichne man die Coefficienten der Reihe z, mit D. Z., nemlich

$$-\frac{1}{1.2} = \overset{2}{\mathfrak{A}};\; +\frac{1}{1\ldots4} = \overset{3}{\mathfrak{A}};\; -\frac{1}{1\ldots6} = \overset{4}{\mathfrak{A}};\; +\frac{1}{1\ldots8} = \overset{5}{\mathfrak{A}};\; etc.$$

Alsdenn hat man

$$\begin{array}{rcccccc}
z = & \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 & + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^4 & + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^6 & + \overset{5}{\mathfrak{A}}x^8 & + etc. \\
-\frac{1}{2}z^2 = & & -\frac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}}x^4 & -\frac{1}{2}\overset{5}{\mathfrak{B}}x^6 & -\frac{1}{2}\overset{6}{\mathfrak{B}}x^8 & - etc. \\
+\frac{1}{3}z^3 = & & & +\frac{1}{3}\overset{6}{\mathfrak{C}}x^6 & +\frac{1}{3}\overset{7}{\mathfrak{C}}x^8 & + etc. \\
-\frac{1}{4}z^4 = & & & & -\frac{1}{4}\overset{8}{\mathfrak{D}}x^8 & - etc. \\
\hline
\end{array}$$

$$y = \log.\mathrm{Cos}.\,x = \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 + (\overset{3}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}})x^4 + (\overset{4}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1}{2}\overset{5}{\mathfrak{B}} + \tfrac{1}{3}\overset{6}{\mathfrak{C}})x^6$$
$$+ (\overset{5}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1}{2}\overset{6}{\mathfrak{B}} + \tfrac{1}{3}\overset{7}{\mathfrak{C}} - \tfrac{1}{4}\overset{8}{\mathfrak{D}})x^8 + etc.$$

welches die verlangte Reihe ist.

§. 59. Zusatz.

Die Coeff. $\overset{2}{\mathfrak{A}}, \overset{3}{\mathfrak{A}}, \overset{4}{\mathfrak{A}}$, *etc.* sind die Coefficienten der Cosinusreihe, aber ohne den Coefficienten des ersten Gliedes. Die Glieder der gefundenen Reihe können also nicht nach Tafel VII. A. berechnet werden, sondern nach der für diesen Fall berechneten Tafel VII. B.

Zu Folge dieser Tafel, findet man für die entwickelte Reihe log. Cos. x, den Coeff. von $x^2 = \frac{-1}{2}$; den Coeff. von $x^4 = \frac{-2}{1\,.\,.\,4}$;

" " " $x^6 = \frac{-16}{1\ldots 6}$; " " " $x^8 = \frac{-16.17}{1\ldots 8}$; *etc.*

$$\text{Also log. Cos.}\, x = -\frac{x^2}{1.2} - \frac{2x^4}{1\,.\,.\,4} - \frac{16x^6}{1\ldots 6} - \frac{16.17x^8}{1\ldots 8} - etc.$$

§. 60. Zusatz.

Da $\text{tang.}\, x = \frac{\text{Sin.}\, x}{\text{Cos.}\, x}$; also $\text{log. tang.}\, x = \text{log. Sin.}\, x - \text{log. Cos.}\, x$;

ferner $\text{Cot.}\, x = \frac{1}{\text{tang.}\, x}$; " $\text{log. Cot.}\, x = -\text{log. tang.}\, x$;

" $\text{Sec.}\, x = \frac{1}{\text{Cos.}\, x}$; " $\text{log. sec.}\, x = -\text{log. Cos.}\, x$;

" $\text{Cosec.}\, x = \frac{1}{\text{Sin.}\, x}$; " $\text{log. Cosec.}\, x = -\text{log. Sin.}\, x$;

so geben die beiden gefundenen Reihen, die Logarithmen aller trigonometrischen Linien, nemlich

$$\text{log. Sin.}\, x = \text{log.}\, x - \frac{x^2}{1.\,2.\,3} - \frac{2x^4}{3.1\ldots 5} - \frac{16.x^6}{9.1\ldots 7} - \frac{48.x^8}{5.1\ldots 9} - etc.$$

$$\text{log. Cos.}\, x = -\frac{x^2}{1.2} - \frac{2x^4}{1\ldots 4} - \frac{16.x^6}{1\ldots 6} - \frac{16.17.x^8}{1\ldots 8} - etc.$$

$$\text{log. tang.}\, x = \text{log.}\, x + \frac{2x^2}{1.\,2.\,3} + \frac{2^2.7.x^4}{3.1\ldots 5} + \frac{2^5.31.x^6}{9.1\ldots 7} + \frac{3.2^5.127.x^8}{5.1\ldots 9} + etc.$$

$$\text{log. Cot.}\, x = -\text{log.}\, x - \frac{2x^2}{1.\,2.\,3} - \frac{2^2.7.x^4}{3.1\ldots 5} - \frac{2^5.31.x^6}{9.1\ldots 7} - \frac{3.2^5.127.x^8}{5.1\ldots 9} - etc.$$

$$\text{log. sec.}\, x = +\frac{x^2}{1.2} + \frac{2x^4}{1\ldots 4} + \frac{16.x^6}{1\ldots 6} + \frac{16.17.x^8}{1\ldots 8} + etc.$$

$$\text{log. Cosec.}\, x = -\text{log.}\, x + \frac{x^2}{1.\,2.\,3} + \frac{2x^4}{3.1\ldots 5} + \frac{16.x^6}{9.1\ldots 7} + \frac{48.x^8}{5.1\ldots 9} + etc.$$

§. 61. Erläuterungsaufgabe. 4.

Die Sinus zweier Kreisbogen x und y, haben ein gegebenes Verhältniß $1 : n$. Man soll den einen dieser Bogen durch eine Reihe ausdrücken, welche nach Potenzen des andern Bogens fortschreitet; oder mit andern Worten: Es ist die Gleichung

Sin.

$\mathrm{Sin}.\,y = n.\,\mathrm{Sin}.\,x$ gegeben; es soll y selbst, durch n und x ausgedrückt werden.

Aufl. Bekanntlich ist $y = \mathrm{Sin}.\,y + \frac{\mathrm{Sin}.\,y^3}{1.\,2.\,3} + \frac{3^2.\,\mathrm{Sin}.\,y^5}{1\ldots5} + \frac{3^2.\,5^2.\,\mathrm{Sin}.\,y^7}{1\ldots7}$
$+ \frac{3^2.\,5^2.\,7^2.\,\mathrm{Sin}.\,y^9}{1\ldots9} + \frac{3^2.\,5^2.\,7^2.\,9^2.\,\mathrm{Sin}.\,y^{11}}{1\ldots11} + etc.$

(Man findet diese Reihe fast in allen guten Lehrbüchern der Analysis, unter andern, obgleich in einer etwas veränderten Gestalt in Kästners Anal. d. Unendl. (1761) S. 184 ff.; desgl. in Klügels anal. Trig. S. 138.).

Da nun nach unserer Voraussetzung $\mathrm{Sin}.\,y = n.\,\mathrm{Sin}.\,x$, so haben wir

$$y = n\,\mathrm{Sin}.\,x + \frac{n^3.\,\mathrm{Sin}.\,x^3}{1.\,2.\,3} + \frac{3^2.\,n^5.\,\mathrm{Sin}.\,x^5}{1\ldots5} + \frac{3^2.\,5^2.\,n^7.\,\mathrm{Sin}.\,x^7}{1\ldots7} + etc.$$

In diese Reihe bringe man nun statt $\mathrm{Sin}.\,x$, seinen Werth durch x, nemlich

$$\mathrm{Sin}.\,x = x - \frac{x^3}{1.\,2.\,3} + \frac{x^5}{1\ldots5} + \frac{x^7}{1\ldots7} + etc.$$

zu dem Ende setze man $1 = \overset{1}{\mathrm{I}};\ -\frac{1}{1.2.3} = \overset{2}{\mathrm{I}};\ +\frac{1}{1\ldots5} = \overset{3}{\mathrm{I}};\ -\frac{1}{1\ldots7} = \overset{4}{\mathrm{I}};\ etc.$
so erhalten wir

$$\begin{array}{lcl}
n\ \mathrm{Sin}.\,x & = & n\overset{1}{\mathrm{I}}\,x + n\overset{2}{\mathrm{I}}\,x^3 + n\overset{3}{\mathrm{I}}\,x^5 + n\overset{4}{\mathrm{I}}\,x^7 + etc. \\
\frac{n^3\ \mathrm{Sin}.\,x^3}{1.\,2.\,3} & = & \frac{n^3}{1.2.3}\overset{3}{\mathrm{III}}\,x^3 + \frac{n^3}{1.\,2.\,3}\overset{4}{\mathrm{III}}\,x^5 + \frac{n^3}{1.\,2.\,3}\overset{5}{\mathrm{III}}\,x^7 + etc. \\
\frac{3^2.\,n^5\ \mathrm{Sin}.\,x^5}{1\ldots5} & = & \frac{3^2.\,n^5}{1\ldots5}\overset{5}{\mathrm{V}}\,x^5 + \frac{3^2.\,n^5}{1\ldots5}\overset{6}{\mathrm{V}}\,x^7 + etc. \\
\frac{3^2.\,5^2.\,n^7\ \mathrm{Sin}.\,x^7}{1\ldots7} & = & \frac{3^2.\,5^2.\,n^7}{1\ldots7}\overset{7}{\mathrm{VII}}\,x^7 + etc. \\
etc. & & etc.
\end{array}$$

$$y = n\overset{1}{\mathrm{I}}\,x + \left(n\overset{2}{\mathrm{I}} + \frac{n^3}{1.\,2.\,3}\overset{3}{\mathrm{III}}\right)x^3 + \left(n\overset{3}{\mathrm{I}} + \frac{n^3}{1.\,2.\,3}\overset{4}{\mathrm{III}} + \frac{3^2.\,n^5}{1\ldots5}\overset{5}{\mathrm{V}}\right)x^5 + etc.$$

welches die verlangte Reihe ist.

§. 62. Zusatz.

Da die D. Z. der ersten Ordnung, die vollständigen Coefficienten der Sinusreihe vom ersten Gliede an sind, so können wir zur Uebersetzung der D. Z. die Tafel VI. A. brauchen. Auf diese Art findet man

$$
\begin{array}{llllll}
y = nx & - \dfrac{n}{1.2.3}\,x^3 & + \dfrac{n}{1\ldots5}\,x^5 & - \dfrac{n}{1\ldots7}\,x^7 & + \dfrac{n}{1\ldots9}\,x^9 & - etc. \\
 & + \dfrac{n^3}{1.2.3} \;'' & - \dfrac{10.n^3}{1\ldots5} \;'' & + \dfrac{7.13.n^3}{1..7} \;'' & - \dfrac{4.5.41.n^3}{1\ldots9} \;'' & + etc. \\
 & & + \dfrac{3^2.n^5}{1\ldots5} \;'' & - \dfrac{5.3^2.7.n^5}{1\ldots7} \;'' & + \dfrac{2.3^3.7.23.n^5}{1\ldots9} \;'' & - etc. \\
 & & & + \dfrac{3^2.5^2.n^7}{1\ldots7} \;'' & - \dfrac{2^2.3^3.5^2.7.n^7}{1\ldots9} \;'' & + etc. \\
 & & & & + \dfrac{3^2.5^2.7^2.n^7}{1\ldots9} \;'' & - etc.
\end{array}
$$

Oder $y = nx + \dfrac{n(n^2 - 1)}{1.\,2.\,3}\,x^3 + \dfrac{n(3^2 n^4 - 10 n^2 + 1)}{1\,.\,.\,.\,5}\,x^5 + etc.$

Da diese Reihe eine solche Function von x seyn muß, daß für $n = \pm 1$, die ganze Reihe oder $y = nx$ werde, folglich alle Glieder vom zweiten an $= 0$ werden müssen, so läßt sich voraussehen, daß alle Coefficienten vom zweiten an, die Factoren $n - 1$, und $n + 1$, oder den Factor $nn - 1$ enthalten werden. Sondert man diesen Factor durch Division wirklich ab, so wird $y = nx + \dfrac{n(n^2 - 1)}{1.\,2.\,3}\,x^3$

$$
+ \frac{n(n^2 - 1)(3^2 n^2 - 1)}{1\,.\,.\,.\,5}\,x^5 + \frac{n(n^2 - 1)(3^2.5^2 n^4 - 10.3^2 n^2 + 1)}{1\,.\,.\,.\,7}\,x^7
$$
$$
+ \frac{n(n^2 - 1)(3^2.5^2.7^2.n^6 - 3^2.5^3.7 n^4 + 3^2.7.13.n^2 - 1)}{1\,.\,.\,.\,.\,9}\,x^9 + etc.
$$

§. 63. Zusatz.

Um x, auf ähnliche Art durch y auszudrücken, darf man nur x und y verwechseln, und für n, überall $\frac{1}{n}$ schreiben; denn wenn $\text{Sin.}\,y = n\,\text{Sin.}\,x$, so ist $\text{Sin.}\,x = \frac{1}{n}\,\text{Sin.}\,y$.

§. 64. Zusatz.

Unsere Rechnung setzt voraus, daß die Bogen x und y in Theilen des Halbmessers ausgedrückt seyn. Sind sie aber, wie gewöhnlich in Graden, Min. und Sec. ausgedrückt, so ist eine Reduction nöthig, und diese kann allgemein in der Reihe selbst gemacht werden. Die Bogen x und y, sollen in der Gradabtheilung ausgedrückt, α und β heißen. Jede Reduction auf eine andere Einheit kann durch Multiplication mit einer beständigen Zahl m verrichtet werden; setzt man also $y = m\alpha$ und $x = m\beta$, so wird

$$
m\alpha = n.\,m\beta + \frac{n(n^2 - 1)}{6}\,m^3\beta^3 + \frac{n(n^2 - 1)(9n^2 - 1)}{6.\;\;20}\,m^5\beta^5 + etc.
$$

A) oder

$A)$ oder $\alpha = n\beta\left(1 + \frac{n^2-1}{6} m^2\beta^2 + \frac{n^2-1}{6} \cdot \frac{9n^2-1}{20} m^4\beta^4 + etc.\right)$

Wenn α und β, ausgedrückt sind.

1) In Graden; so ist $m = 0,017\,453\,292$, und $\log. m = 8,241\,871\,3 - 10$
2) in Min. " " $m = 0,000\,290\,888$, " $\log. m = 6,463\,726\,0 - 10$
3) in Sec. " " $m = 0,000\,004\,848$, " $\log. m = 4,685\,574\,1 - 10$

Man kann auch jede Reduction, durch Division mit einer beständigen Zahl p verrichten, wenn man nemlich p so nimmt, daß $m = \frac{1}{p}$, oder $p = \frac{1}{m}$ wird. Es ist alsdenn $y = \frac{\alpha}{p}$ und $x = \frac{\beta}{p}$, daher

$B)$ $\alpha = n\beta\left(1 + \frac{n^2-1}{6} \frac{\beta^2}{p^2} + \frac{n^2-1}{6} \cdot \frac{9n^2-1}{20} \frac{\beta^4}{p^4} + etc.\right)$

und wenn α und β ausgedrückt sind,

1) In Graden; so ist $p = 57,295\,779$; und $\log. p = 1,758\,122\,6$
2) in Min. " " $p = 3437,7468$, " $\log. p = 3,536\,274\,0$
3) in Sec. " " $p = 206\,265,81$, " $\log. p = 5,314\,425\,1$

§. 65. Zusatz.

Da bei geometrischen Arbeiten nichts häufiger vorkommt, als daß das Verhältniß zweier Sinus gegeben ist, so ist leicht zu erachten, daß von der gefundenen Reihe, die selbst für ein ziemlich großes β noch stark convergiret, mancherley Anwendungen gemacht werden können, wovon wir ein Paar Beispiele anführen wollen.

1) Es sey β der Winkel, welchen ein Lichtstrahl in der Luft mit einem Einfallslothe macht, und α sey der gebrochne Winkel im Glase, so ist für Glas ohngefehr Sin. $\alpha = \frac{2}{3}$ Sin. β, also $n = \frac{2}{3}$, und (§. 64. A)

$$\alpha = \tfrac{2}{3}\beta\left(1 - \tfrac{5}{54} m^2\beta^2 - \tfrac{1}{72} m^4\beta^4 + etc.\right)$$

Wenn β in **Graden** ausgedrückt ist, so ist (64. A. 1) $m^2 = 0,000\,304\,61$; $m^4 = 0,000\,000\,092\,787$, daher

$$\alpha = \tfrac{2}{3}\beta\left(1 - 0,000\,028\,20\,\beta^2 - 0,000\,000\,001\,289\,\beta^4 + etc.\right)$$

Hier fällt es sogleich in die Augen, daß die Reihe so stark zusammenläuft, daß man auch für ziemlich große β, blos $\alpha = \frac{2}{3}\beta$, oder allgemein $\alpha = n\beta$ wird setzen dürfen. Der Fehler beträgt 1 Min.; wenn das 2te Glied, $\frac{2}{3} \cdot 0,000\,028\,20\,\beta^3 = 0,000\,018\,8\,\beta^3 = \frac{1}{60}$ Grad, d. h. wenn $\beta^3 = \frac{1}{0,001\,128}$; oder $\beta = 9,60646$ Grade $= 9^\circ.\,36'.\,22\frac{1}{4}''$.

Zieht man das 2te Glied mit in Rechnung, und setzt

$$\alpha = \tfrac{2}{3}\beta\left(1 - 0,000\,028\,2.\,\beta^2\right)$$

so kann die Formel bis zu $\beta = 30^\circ$ und drüber, d. h. für alle bei optischen Instrumenten vorkommende Fälle gebraucht werden; denn setzt man das weggelassene 3te Glied

$$\tfrac{2}{3} \cdot 0,\ 000\ 000\ 001\ 289\ \beta^5 = 0,\ 000\ 000\ 000\ 859 \cdot \beta^5 = \tfrac{1}{60}$$

d. h. $\beta^5 = \frac{1}{0,\ 00000005154}$; so erhält man $\beta = 28,\ 6795^\circ = 28^\circ.\ 52'.\ 46''$.

2) Es sey P die Horizontalparallaxe eines Gestirns; p aber eine Höhenparallaxe, welche zu der scheinbaren Höhe A gehöret; so wird p bekanntlich durch die Formel $p = P.\ \mathrm{Cos}.\ A$ berechnet.

Eigentlich ist $\mathrm{Sin}.p = \mathrm{Cos}.\ A.\ \mathrm{Sin}.\ P$: folglich wenn man in der Reihe A §. 64, $n = \mathrm{Cos}.\ A$ setzt, und für α und β; p und P schreibt,

$$p = P.\ \mathrm{Cos}.\ A \left(1 - \frac{m^2}{6}\ \mathrm{Sin}.\ A^2.\ P^2 + etc.\right)$$

Der Fehler der Formel $p = P.\ \mathrm{Cos}.\ A$, beträgt also $-\frac{m^2}{6}\ \mathrm{Cos}.\ A.\ \mathrm{Sin}.\ A^2.\ P^3$. Dieser Fehler aber ist selbst bei der Mondparallaxe, sogar wenn er am größten ist, ganz unbedeutend. Die Formel $-\frac{m^2}{6}\ \mathrm{Cos}.\ A.\ \mathrm{Sin}.\ A^2.\ P^2$ ist nemlich da m und P beständige Größen sind, ein Maximum, wenn $\mathrm{Cos}.A.\ \mathrm{Sin}.\ A^2$ ein Maximum ist. Man setze also $v = \mathrm{Cos}.\ A.\ \mathrm{Sin}.\ A^2$; daher $\frac{dv}{dA} = 2\ \mathrm{Sin}.\ A.\ \mathrm{Cos}.\ A^2 - \mathrm{Sin}.\ A^3$; also, wenn $\frac{dv}{dA} = 0$, $2\ \mathrm{Cos}.A^2 - \mathrm{Sin}.\ A^2 = 0$, oder $2 - 3\ \mathrm{Sin}.\ A^2 = 0$; also $\mathrm{Sin}.\ A = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$, welches $A = 54^\circ.\ 44'$ giebt. Für den Fall des Maximi ist:

$$-\frac{m^2}{6}\ \mathrm{Cos}.\ A.\ \mathrm{Sin}.\ A^2.\ P^2 = -P^2.\ m^2\ \tfrac{1}{6} \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Setzt man nun, daß P in Minuten ausgedrückt sey, also $m = 0,000\ 290\ 888$ (§. 64. A. Nr. 2.), so ist:

$$-P^2.\ \frac{m^2}{9\sqrt{3}} = -0,\ 000\ 000\ 005,\ 424.\ P^2.$$

Setzen wir nun, um eine runde Zahl zu haben, die größte Horizontalparallaxe des Mondes $= 60'$, so beträgt der eben ausgedrückte Fehler dennoch nicht mehr, als

$$-0,\ 000\ 019\ 541\ \text{Minuten} = -0,\ 001\ 172\ ..\ \text{Secunden},$$

so daß man bei der abgekürzten Formel $p = P.\ \mathrm{Cos}.\ A$ bei weiten um keine ganze Secunde, in keinem Falle fehlet.

Es würde nicht schwer seyn, eine Menge ähnlicher Rechnungen anzuführen. Um des Raumes zu schonen, begnügen wir uns überhaupt zu bemerken, daß fast überall, wo trigonometrische Rechnungen, sie mögen ebene, oder sphärische Dreiecke betreffen, vorkommen, die entwickelte Reihe oft mit Vortheil gebraucht werden könne.

§. 66. Anmerkung.

Es lassen sich viele andere ähnliche Reihen berechnen, z. B. wenn das Verhältniß zweier Tangenten gegeben ist, so läßt sich ein Bogen durch den andern, und die Verhältnißzahl ausdrücken; oder ganz allgemein, wenn $F.y$, und $\Phi.x$ irgend zwei trigonometrische Functionen der Bogen y, und x bedeuten, und es ist $F.y = n\,\Phi.x$, so kann jederzeit y, durch n und x, vermittelst einer Reihe, die nach Potenzen von x fortschreitet, ausgedrückt werden. Doch würde zu einigen dieser Aufgaben, die bisherige Theorie nicht hinreichen. Ueberdem sollen die bisher aufgelöseten Aufgaben nur zur Erläuterung des Gebrauchs der Dimensionszeichen dienen. Eine zu große Weitläuftigkeit über eine einzelne Gattung von Aufgaben, hieße die Nebensache zur Hauptsache machen.

Vierter Abschnitt.

Erhebung vielgliedriger Ausdrücke zu Potenzen von unbestimmten Exponenten.

§. 67. Aufgabe.

Den vielgliedrigen, endlichen oder unendlichen Ausdruck

$$y = 1 + Bx^r + Cx^{2r} + Dx^{3r} + Ex^{4r} + etc.$$

zu der $n$ten Potenz zu erheben; n bedeute, was man irgend wolle.

Aufl. Man setze $Q = Bx^r + Cx^{2r} + Dx^{3r} + Ex^{4r} + etc.$ oder mit Dimensionszeichen:

$$A)\ Q = \overset{2}{\mathfrak{A}}x^r + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^{2r} + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^{3r} + \overset{5}{\mathfrak{A}}x^{4r} + etc.$$

so hat man $y = 1 + Q$, daher nach den Binomialsatz:

$$y^n = 1 + \frac{n}{1}Q + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,Q^2 + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,Q^3 + etc.$$

oder wenn wir zur Abkürzung $\frac{n}{1} = \alpha$; $\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2} = \beta$; $\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3} = \gamma$; etc. etc. setzen

$$B)\ y^n = 1 + \alpha Q + \beta Q^2 + \gamma Q^3 + \delta Q^4 + etc.$$

Für Q setze man in $B)$ seinen Werth $A)$, so haben wir

$$
\begin{array}{lllll}
1 = +1 & & & & \\
\alpha\, \mathfrak{Q} = +\alpha \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{r} & + \alpha \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{2r} & + \alpha \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{3r} & + \alpha \overset{5}{\mathfrak{A}} x^{4r} & + \text{etc.} \\
\beta\, \mathfrak{Q}^2 = & + \beta \overset{4}{\mathfrak{B}} x^{2r} & + \beta \overset{5}{\mathfrak{B}} x^{3r} & + \beta \overset{6}{\mathfrak{B}} x^{4r} & + \text{etc.} \\
\gamma\, \mathfrak{Q}^3 = & & + \gamma \overset{6}{\mathfrak{C}} x^{3r} & + \gamma \overset{7}{\mathfrak{C}} x^{4r} & + \text{etc.} \\
\delta\, \mathfrak{Q}^4 = & & & + \delta \overset{8}{\mathfrak{D}} x^{4r} & + \text{etc.} \\
\text{etc.} & & & \text{etc.} & \\
\hline
\end{array}
$$

$$y^n = 1 + \alpha \overset{2}{\mathfrak{A}} x + (\alpha \overset{3}{\mathfrak{A}} + \beta \overset{4}{\mathfrak{B}})\, x^{2r} + (\alpha \overset{4}{\mathfrak{A}} + \beta \overset{5}{\mathfrak{B}} + \gamma \overset{6}{\mathfrak{C}})\, x^{3r} + \text{etc.}$$

oder wenn man die Binomialcoefficienten selbst setzt

$$y^n = 1 + \frac{n}{1} \overset{2}{\mathfrak{A}} x^r + \left(\frac{n}{1} \overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{1} \overset{4}{\mathfrak{B}}\right) x^{2r}$$

$$+ \left(\frac{n}{1} \overset{4}{\mathfrak{A}} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \overset{5}{\mathfrak{B}} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \overset{6}{\mathfrak{C}}\right) x^{3r} + \text{etc. etc.}$$

welches die verlangte Potenz ist.

§. 68. Lehrsatz.

Wenn irgend eine Reihe von Dim. Z. der ersten Ordnung $\overset{1}{\mathrm{I}}, \overset{2}{\mathrm{I}}, \overset{3}{\mathrm{I}}, \overset{4}{\mathrm{I}}, \overset{5}{\mathrm{I}}$, *etc*, Glied vor Glied mit einer Größe P multipliciret werden, so bestehet der Einfluß, den dies auf die höheren Ordnungen hat, darin, daß die sämtlichen D. Z. der zweiten Ordnung jedes mit P^2, der 3ten Ordnung jedes mit P^3, der 4ten Ordnung jedes mit P^4, u. s. f. multipliciret werden.

Beweis. Man setze $y = P\overset{1}{\mathrm{I}} + P\overset{2}{\mathrm{I}} + P\overset{3}{\mathrm{I}} + P\overset{4}{\mathrm{I}} + \text{etc.} = P(\overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}} + \overset{3}{\mathrm{I}} + \overset{4}{\mathrm{I}} + \text{etc.})$ so ist (§. 47.) $y^2 = P^2 (\overset{2}{\mathrm{II}} + \overset{3}{\mathrm{II}} + \overset{4}{\mathrm{II}} + \overset{5}{\mathrm{II}} + \text{etc.}) = P^2\, \overset{2}{\mathrm{II}} + P^2 . \overset{3}{\mathrm{II}} + P^2\, \overset{4}{\mathrm{II}} + \text{etc.}$
Ferner $y^3 = P^3 (\overset{3}{\mathrm{III}} + \overset{4}{\mathrm{III}} + \overset{5}{\mathrm{III}} + \text{etc.}) = P^3\, \overset{3}{\mathrm{III}} + P^3\, \overset{4}{\mathrm{III}} + P^3\, \overset{5}{\mathrm{III}} + \text{etc.}$
u. s. w.

Schreibt man demnach	$P . \mathrm{I}$,	statt	I;
so muß man	$P^2 . \mathrm{II}$	"	II;
	$P^3 . \mathrm{III}$	"	III;
	$P^4 . \mathrm{IV}$	"	IV; etc.

schreiben.

§. 69. Zusatz.

Hieraus folgt zugleich, daß wenn man

$\frac{\mathrm{I}}{P}$ statt I, in der 1sten Ordnung schreibe, man auch

$\frac{\mathrm{II}}{P^2}$ = II, in der 2ten Ordn.

$\frac{\mathrm{III}}{P^3}$ = III, in der 3ten Ordn.

$\frac{\mathrm{IV}}{P^4}$ = IV, in der 4ten Ordn., u. s. f.

schreiben müsse.

§. 70. Aufgabe.

Den vielgliedrigen, endlichen oder unendlichen Ausdruck

$$y = Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} + etc.$$

zu der $n$ten Potenz zu erheben, was auch n bedeuten mag.

Aufl. Man bezeichne die Coefficienten der gegebenen Reihe mit D. Z., aber nur vom zweiten Gliede an, so daß

$$y = Ax^m + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^{m+2r} + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^{m+3r} + etc.$$

Nun ist $y = Ax^m\left(1 + \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{A}x^r + \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{A}x^{2r} + \frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{A}x^{3r} + etc.\right)$

Demnach (§. 67. und 69.), wenn wir statt der Binomialcoefficienten wieder, wie §. 67, α, β, γ, etc. setzen:

$$A)\; y^n = A^n x^{mn}\left(\begin{array}{llll} 1 + \alpha\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{A}x^r & + \alpha\frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{A}x^{2r} & + \alpha\frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{A}x^{3r} & + etc. \\ & + \beta\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{A^2} = & + \beta\frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{A^2} = & + etc. \\ & & + \gamma\frac{\overset{6}{\mathfrak{C}}}{A^3} = & + etc. \end{array}\right]$$

$$\text{oder } B)\; y^n = A^n x^{nm} + \alpha A^{n-1}\overset{2}{\mathfrak{A}}x^{nm+r} + \begin{array}{l} \alpha A^{n-1}\overset{3}{\mathfrak{A}}x^{nm+2r} \\ + \beta A^{n-2}\overset{4}{\mathfrak{B}} = \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
+ \alpha A^{n-1} \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{nm+3r} & + \alpha A^{n-1} \overset{5}{\mathfrak{A}} x^{nm+4r} & + \text{etc.} \\
+ \beta A^{n-2} \overset{5}{\mathfrak{B}} \;″ & + \beta A^{n-2} \overset{6}{\mathfrak{B}} \;″ & + \text{etc.} \\
+ \gamma A^{n-3} \overset{6}{\mathfrak{C}} \;″ & + \gamma A^{n-3} \overset{7}{\mathfrak{C}} \;″ & + \text{etc.} \\
 & + \delta A^{n-4} \overset{8}{\mathfrak{D}} \;″ & + \text{etc.}
\end{array}$$

oder endlich, wenn wir die Binomialcoefficienten selbst brauchen wollen,

$$\text{C)}\; y^n = A^n x^{nm} + \frac{n}{1} A^{n-1} \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{nm+r} + \frac{n}{1} A^{n-1} \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{nm+2r}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} A^{n-2} \overset{4}{\mathfrak{B}} \;″$$

$$\begin{array}{llll}
+ \frac{n}{1} A^{n-1} \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{nm+3r} & + \frac{n}{1} A^{n-1} \overset{5}{\mathfrak{A}} x^{nm+4r} & + \text{etc.} \\
+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} A^{n-2} \overset{5}{\mathfrak{B}} \;″ & + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} A^{n-2} \overset{6}{\mathfrak{B}} \;″ & + \text{etc.} \\
+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3} A^{n-3} \overset{6}{\mathfrak{C}} \;″ & + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3} A^{n-3} \overset{7}{\mathfrak{C}} \;″ & + \text{etc.} \\
 & + \frac{n\;.\;.\;.\;(n-3)}{1\;.\;.\;.\;4} A^{n-4} \overset{8}{\mathfrak{D}} \;″ & + \text{etc.}
\end{array}$$

Wenn man die Glieder dieser Reihe vom 2ten an zählet, so ist das $p$te Glied derselben

$$\begin{array}{lll}
+ & \frac{n}{1} & A^{n-1} \overset{p+1}{\mathfrak{A}} x^{nm+pr} \\
+ & \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} & A^{n-2} \overset{p+2}{\mathfrak{B}} \;″ \\
+ & \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2\;.\;3} & A^{n-3} \overset{p+3}{\mathfrak{C}} \;″ \\
+ & \frac{n(n-1)\,(n-2)(n-3)}{1.\;2\;.\;3\;.\;4} & A^{n-4} \overset{p+4}{\mathfrak{D}} \;″ \\
+ & \text{etc.} & \\
+ & \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.\;2\;.\;.\;.\;p} & A^{n-p} \overset{2p}{\mathfrak{P}} \;″
\end{array}$$

welches das allgemeine Glied (terminus generalis) unserer Reihe ist.

§. 71. Anmerkungen.

1) Ob man gleich in dieser Reihe, die höhern D. Z., vermittelst der im 2ten Abschnitt vorgetragenen Theorie, oder blos nach Taf. 1. in D. Z. der ersten Ordnung auflösen, und dann in die gewöhnliche algebraische Sprache übersetzen könnte, s

würd

würde dies doch eine ganz unnütze Arbeit seyn, theils weil das einfache Gesetz der Reihe verlohren ginge, theils weil es, wie wir schon öfters erinnert, und im vorigen Abschnitt gesehen haben, weit vortheilhafter ist, in jeder Rechnung die D. Z. bis zu Ende beizubehalten, und sie nicht eher zu übersetzen, als bis bestimmte Anwendungen von einer gefundenen Reihe gemacht werden sollen.

2) Da n hier ohne Einschränkung bedeuten kann, was man will, so kann es auch ganz und positiv seyn, und in diesem Falle muß unter der Voraussetzung von einerley Wurzelreihe, die hier gefundene Potenzreihe, mit der §. 46. gefundenen völlig identisch seyn. Daß aber dies, in Absicht der Coefficienten nicht sogleich in die Augen fällt, rühret daher, weil nach der Methode des vorigen Abschnitts auch der Coefficient des ersten Gliedes mit einem D. Z. bezeichnet werden mußte, hier aber dies nicht geschehen darf. Dies ändert aber die Werthe aller höhern D. Z. ohne Ausnahme. Denn man lasse aus Tafel 1, das D. Z. $\overset{1}{\mathrm{I}}$ weg, d. h. man setze dasselbe $= 0$, so fällt in die Augen, daß kein einziges der höhern D. Z. seinen vorigen Werth behält. Eben deswegen haben wir auch hier (wie schon in einigen Beispielen des vorigen Abschnitts, und aus ähnlicher Ursache) nicht die D. Z., I, II, III, IV, *etc.* *IN*, *IP*, u. d. gl., sondern 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, *etc.* und in den unbestimmten Ordnungen 𝔑 oder 𝔓 gebraucht, welcher Unterschied sehr sorgfältig zu beobachten ist, wenn Zweideutigkeiten vermieden werden sollen. Wir werden daher auch künftig, in allen Fällen, wo nicht ausdrücklich etwas anders bestimmt wird, die D. Z. I, II, III, *etc.* alsdenn brauchen, wenn die Coeff. einer Reihe, vom **ersten** Gliede an, mit D. Z. bezeichnet werden sollen, und dazu in der ersten Ordnung die Markenreihe 1, 2, 3, 4 *etc.* nehmen. Sollen aber die Coeff. eben derselben Reihe, nur vom 2ten Gliede an, mit D. Z. bezeichnet werden, so werden wir dazu die D. Z. 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, *etc.* und in der ersten Ordnung die Marken 2, 3, 4, 5 *etc.* brauchen.

3) Die im vorigen § zum Grunde gelegte Wurzelreihe $y = Ax^m + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^{m+2r} + etc.$ werden wir im folgenden, **die allgemeine Wurzelreihe**, oder das allgemeine Schema einer Wurzelreihe, und eben so die entwickelte Potenzreihe, **die allgemeine Potenzreihe**, oder das allgemeine Schema einer Potenzreihe, nennen. Beide habe ich Taf. II. A. besonders abdrucken lassen, um das öftere Nachschlagen zu vermeiden. Der dort gebrauchte Ausdruck, **verkürzte** D. Z., thut nichts zur Sache. Er wird unten im 7ten Abschnitt erklärt werden, doch kann ich schon hier mit wenig Worten bemerken, daß verkürzte D. Z. solche sind, die sich auf den Coefficienten des ersten Gliedes einer Reihe nicht mit beziehen, beziehen sie sich aber auf diesen mit, so heißen sie vollzählig.

4) Was man zu beobachten habe, wenn die vorgetragene Aufgabe auf einen einzelnen gegebenen Fall angewendet werden soll, ist leicht einzusehen.

Man bezeichnet die Coefficienten der gegebenen Formel (oder, wenn sie nicht nach Potenzen einer Größe x geordnet wäre, die Glieder selbst,) vom **zweiten** Gliede an, mit D. Z. Dann vergleicht man sie mit der allgemeinen Wurzelreihe, so ergiebt sich der Werth von y, A, x, m und r, und wenn die Potenz bestimmt ist, zu welcher die Function erhoben werden soll, auch n. Diese Werthe substituirt man in der allgemeinen Potenzreihe, so erhält man die verlangte Potenz. Wir wollen einige Beispiele und Erläuterungsaufgaben hinzusetzen.

§. 72. Beispiel.

Die Quadratwurzel aus $y = x^2 + ax^4 + bx^6 + cx^8 + etc.$ durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Aufl. Man setze $a = \overset{2}{\mathfrak{A}}$; $b = \overset{3}{\mathfrak{A}}$; $c = \overset{4}{\mathfrak{A}}$; $etc.$ also $y = x^2 + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^4 + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^6 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^8 + etc.$ Vergleicht man diesen Ausdruck mit der allg. Wurzelreihe

$$y = Ax^m + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^{m+2r} + etc.$$

so ist y und x hier, wie dort: aber $A = 1$; $m = 2$; $r = 2$; und weil die Quadratwurzel gesucht wird $n = \frac{1}{2}$. Diese Werthe substituire man in der allgemeinen Potenzreihe, so erhält man

$$\begin{array}{llllll}
\sqrt{y} = x & + \frac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}}x^3 & + \frac{1}{2}\overset{3}{\mathfrak{A}}x^5 & + \frac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{A}}x^7 & + \frac{1}{2}\overset{5}{\mathfrak{A}}x^9 & + etc. \\
 & & - \frac{1.1}{2.4}\overset{4}{\mathfrak{B}}\,{''} & - \frac{1.1}{2.4}\overset{5}{\mathfrak{B}}\,{''} & - \frac{1.1}{2.4}\overset{6}{\mathfrak{B}}\,{''} & \\
 & & & + \frac{1.1.3}{2.4.6}\overset{6}{\mathfrak{C}}\,{''} & + \frac{1.1.3}{2.4.6}\overset{7}{\mathfrak{C}}\,{''} & \\
 & & & & - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\overset{8}{\mathfrak{D}}\,{''} &
\end{array}$$

Verlangt man das allgemeine $p$te Glied dieser Reihe (von 2ten an gezählt), so substituire man eben die Werthe in dem term. gen. der Potenzreihe, so erhält man

$$\left(\tfrac{1}{2}\overset{p+1}{\mathfrak{A}} - \frac{1.1}{2.4}\overset{p+2}{\mathfrak{B}} + \frac{1.1.3}{2.4.6}\overset{p+3}{\mathfrak{C}} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\overset{p+4}{\mathfrak{D}} + \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\overset{p+5}{\mathfrak{E}} + \right.$$
$$\left. \ldots \mp \frac{1.1.3.5.7\ \ldots\ (2p-3)}{2.4.6.8.10\ \ldots\ 2p}\overset{2p}{\mathfrak{P}}\right) x^{2p+1}$$

Das obere Zeichen gilt für ein gerades p, das untere für ein ungerades.

§. 73. Zusatz.

Wäre im vorigen §. blos $y = x^2 + ax^4$ gegeben gewesen, so wäre

$$\overset{2}{\mathfrak{A}} = a;\quad \overset{4}{\mathfrak{B}} = a^2;\quad \overset{6}{\mathfrak{C}} = a^3;\quad \overset{8}{\mathfrak{D}} = a^4,\ \text{u. s. f.}\ (\S.47.)$$

alle übrige D. Z. aber $= 0$, also

$\sqrt{y}$

$$\sqrt{y} = x + \tfrac{1}{2} a x^3 - \frac{1.1}{2.4} a^2 x^5 + \frac{1.1.3}{2.4.6} a^3 x^7 + \frac{1.1.3.5}{2\,..\,8} a^4 x^7 + etc.$$

wie es auch der Binomialsatz unmittelbar geben würde.

Wäre die Gleichung $y = x^2 + a x^4 + b x^6$

so ist $\overset{2}{\mathfrak{A}} = a$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = b$

$\overset{4}{\mathfrak{B}} = a^2$; $\overset{5}{\mathfrak{B}} = 2ab$; $\overset{6}{\mathfrak{B}} = b^3$

$\overset{6}{\mathfrak{C}} = a^3$; $\overset{7}{\mathfrak{C}} = 3a^2 b$; $\overset{8}{\mathfrak{C}} = 3ab^2$; $\overset{9}{\mathfrak{C}} = b^3$

u. s. f. (man vergl. §. 47.) also:

$$\begin{aligned}\sqrt{y} = x + \tfrac{1}{2} a x^3 &+ \tfrac{1}{2} b x^5 \\ &- \frac{1.1}{2.4} a^2 x^5 - \frac{1.1}{2.4} 2abx^7 - \frac{1.1}{2.4} b^2 x^9 \\ &+ \frac{1.1.3}{2.4.6} a^3 x^2 + \frac{1.1.3}{2.4.6} 3a^2 b x^9 + \frac{1.1.3}{2.4.6} 3ab^2 x^{11} + etc. \\ &- \frac{1.1.3.5}{2\,..\,8} a^4 x^9 - \frac{1\,..\,5}{2\,..\,8} 4a^3 b x^9 \\ &+ \frac{1.1\,..\,7}{2.4\,..\,10} a^5 x^9\end{aligned}$$

wo das Fortschreitungsgesetz noch immer leicht zu übersehen ist. Sind aber in der ersten Ordnung mehr als zwei D. Z., so wird zwar der Ausdruck in der gewöhnlichen Bezeichnung verwickelter, doch läßt sich die Reihe vermittelst der D. Z. so weit man will fortsetzen.

§. 74. Zusatz.

In den vorigen §§. war in der gegebenen Reihe, die Folge der Exponenten, 2, 4, 6, 8 *etc.* wäre statt deren irgend eine andere Folge, (doch müssen es immer Glieder einer arithmetischen Reihe seyn,) so wird in der Potenzreihe nichts als die Folge der Exponenten geändert. Man darf nur die allgemeine Potenzreihe betrachten, so fällt in die Augen, daß m und r weder in den Coefficienten, noch in den Marken der D. Z., sondern blos in den Exponenten vorkommen. Nehmen wir daher statt der Gleichung §. 72. folgende:

$$y = x + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^3 + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^5 + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^7 + etc.$$

so ist $m = 1$; $r = 2$. Da nun die Folge der Exponenten, in der allgemeinen Potenzreihe, diese ist: nm; $nm + r$; $nm + 2r$; *etc.* so haben wir für die gegenwärtigen Werthe von m und r, und für $n = \frac{1}{2}$ diese Folge: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} + 2$; $\frac{1}{2} + 4$; $\frac{1}{2} + 6$, *etc.* oder $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{13}{2}$, *etc.* alles übrige bleibt so wie in der §. 72. gefundenen Reihe.

Wäre $y = x + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^3 + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^4 + etc.$ so ist $m = 1$; $r = 1$; also in der Reihe für $\sqrt{y}$, die Folge der Exponenten:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+1, \frac{1}{2}+2, \frac{1}{2}+3, \frac{1}{2}+4$, *etc.* oder $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$, *etc.* alles übrige wieder wie §. 72. u. d. gl. m.

§. 75. Beispiel. 1.

Aus der Reihe $\varphi = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - etc.$ (welche einen Kreisbogen, durch seine Tangente ausdrückt,) den Werth von $\frac{1}{\varphi^3}$ zu finden.

Aufl. Man setze $-\frac{1}{3} = \overset{2}{\mathfrak{A}}$; $+\frac{1}{5} = \overset{3}{\mathfrak{A}}$; $-\frac{1}{7} = \overset{4}{\mathfrak{A}}$; *etc.*, also:

$$\varphi = t + \overset{2}{\mathfrak{A}}t^3 + \overset{3}{\mathfrak{A}}t^5 + \overset{4}{\mathfrak{A}}t^7 + etc.$$

vergleicht man dies mit der allg. Wurzelreihe, so haben wir $y = \varphi$; $x = t$; $A = 1$; $m = 1$; $r = 2$, und weil $\frac{1}{\varphi^3} = \varphi^{-3}$ gesucht wird, $n = -3$.

Man bringe diese Werthe in die allgemeine Auflösungsreihe, so erhält man

$$\begin{array}{lllll} \frac{1}{\varphi^3} = t^{-3} & -\frac{3}{1}\overset{2}{\mathfrak{A}}t^{-1} & -\frac{3}{1}\overset{3}{\mathfrak{A}}t & -\frac{3}{1}\overset{4}{\mathfrak{A}}t^3 & - etc. \\ & & +\frac{3.4}{1.2}\overset{4}{\mathfrak{B}}\,{=} & +\frac{3.4}{1.2}\overset{5}{\mathfrak{B}}\,{=} & \\ & & & -\frac{3.4.5}{1.2.3}\overset{6}{\mathfrak{C}}\,{=} & \end{array}$$

wo das Fortschreitungsgesetz deutlich vor Augen liegt.

Sollen einige Glieder dieser Reihe in Zahlen ausgedrückt werden, so haben wir

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{3}$	Daher	
$\overset{3}{\mathfrak{A}} = +\frac{1}{5}$	$\overset{4}{\mathfrak{B}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = +\frac{1}{3.3}$	
$\overset{4}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{7}$	$\overset{5}{\mathfrak{B}} = 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = -\frac{2}{3.5}$	$\overset{6}{\mathfrak{C}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{3.3.3}$
$\overset{5}{\mathfrak{A}} = +\frac{1}{9}$	$\overset{6}{\mathfrak{B}} = 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = +\frac{71}{3.5.5.7}$	$\overset{7}{\mathfrak{C}} = 3\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = +\frac{1}{3.5}$
$\overset{6}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{11}$	$\overset{7}{\mathfrak{B}} = 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{5}{\mathfrak{A}} + 2\overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{A}} = -\frac{124}{3.5.7.9}$	$\overset{8}{\mathfrak{C}} = 3\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{A}} + 3\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = -\frac{46}{3.5.5.7}$
etc.	*etc.*	*etc.*

$\overset{8}{\mathfrak{D}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = +\frac{1}{3^4}$	
$\overset{9}{\mathfrak{D}} = 4\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = -\frac{4}{3.3.3.5}$	$\overset{10}{\mathfrak{E}} = (\overset{2}{\mathfrak{A}})^5 = -\frac{1}{3^5}$
etc.	*etc.*

Sub:

Substituiret man diese Werthe, so erhält man

$$-3\overset{2}{\mathfrak{A}} = +1$$

$$-3\overset{3}{\mathfrak{A}} + 6\overset{4}{\mathfrak{B}} = -\tfrac{3}{5} + \tfrac{2}{3} = +\frac{1}{3.5}$$

$$-3\overset{4}{\mathfrak{A}} + 6\overset{5}{\mathfrak{B}} - 10\overset{6}{\mathfrak{C}} = +\tfrac{3}{7} - \tfrac{4}{5} + \tfrac{10}{27} = -\frac{4}{3.5.7.9}$$

$$-3\overset{5}{\mathfrak{A}} + 6\overset{6}{\mathfrak{B}} - 10\overset{7}{\mathfrak{C}} + 15\overset{8}{\mathfrak{D}} = -\tfrac{1}{3} + \frac{142}{5.5.7} - \tfrac{2}{3} + \frac{5}{3.3.3} = -\frac{16}{5.3.5.7.9}$$

$$-3\overset{6}{\mathfrak{A}} + 6\overset{7}{\mathfrak{B}} - 10\overset{8}{\mathfrak{C}} + 15\overset{9}{\mathfrak{D}} - 21\overset{10}{\mathfrak{E}} = +\tfrac{3}{11} - \frac{248}{5.7.9} + \frac{92}{3.5.7} - \tfrac{4}{9} + \frac{7}{3.3.9} = -\frac{8}{3.3.5.7.9}$$

etc.

Also $\frac{1}{\varphi^3} = \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t} + \frac{t}{3.5} - \frac{t^3}{3.5.7.9} - \frac{16\,t^5}{5.3.5.7.9} - \frac{8\,t^7}{3.3.5.7.9}$ *etc.*

Ich glaube, daß die beiden Beispiele, die ich gegeben habe, hinreichend seyn werden zu zeigen, was bey dem Gebrauch der allgemeinen Potenzreihe zu beobachten sey. Um auch sogleich den Nutzen unserer Methode einigermaßen zu zeigen, setze ich noch einige erläuternde Aufgaben hinzu.

§. 76. Erläuterungsaufgabe. 1.

Eine Reihe für die Cosecante des Kreisbogens x zu finden.

Aufl. Aus der Trigonometrie weiß man, daß $\mathrm{Cosec}.\,x = \frac{1}{\mathrm{Sin}.\,x} = (\mathrm{Sin}.\,x)^{-1}$. Die ganze Arbeit wird also darin bestehen, daß wir die Reihe

$$\mathrm{Sin}.\,x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \textit{etc.}$$

zu der -1 ten Potenz erheben.

Man setze also $-\frac{1}{1.2.3} = \overset{2}{\mathfrak{A}}$; $+\frac{1}{1\ldots5} = \overset{3}{\mathfrak{A}}$; $-\frac{1}{1\ldots7} = \overset{4}{\mathfrak{A}}$; *etc.* so daß

$$\mathrm{Sin}.\,x = x + \overset{2}{\mathfrak{A}}\,x^3 + \overset{3}{\mathfrak{A}}\,x^5 + \overset{4}{\mathfrak{A}}\,x^7 + \textit{etc.}$$

Vergleicht man diese Reihe mit der allg. Wurzelreihe $y = A\,x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}}\,x^{m+r} + \textit{etc.}$ so hat man $y = \mathrm{Sin}.\,x$; $A = 1$; $m = 1$; $r = 2$, und weil $(\mathrm{Sin}\,x)^{-1}$ gesucht wird $n = -1$. Bringt man nun diese Werthe in die allgemeine Auflösungsreihe, so erhält man $(\mathrm{Sin}.\,x)^{-1} =$,

$$\begin{array}{lllll}
\text{Cosec.}\, x = x^{-1} & - \overset{2}{\mathfrak{A}}\, x & - \overset{3}{\mathfrak{A}}\, x^3 & - \overset{4}{\mathfrak{A}}\, x^5 & - \overset{5}{\mathfrak{A}}\, x^6 - etc. \\
 & & + \overset{4}{\mathfrak{B}} \;= & + \overset{5}{\mathfrak{B}} \;= & + \overset{6}{\mathfrak{B}} \;= \\
 & & & - \overset{6}{\mathfrak{C}} \;= & - \overset{7}{\mathfrak{C}} \;= \\
 & & & & + \overset{8}{\mathfrak{D}} \;=
\end{array}$$

Oder $\text{Cosec.}\, x = \frac{1}{x} - \overset{2}{\mathfrak{A}}\, x - (\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})\, x^3 - (\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})\, x^5 - etc.$ welches die verlangte Reihe ist, deren im Grunde sehr verwickeltes Gesetz, in D. Z. sehr einfach erscheint, selbst einfacher als vermittelst der Bernoullischen Zahlen. Man sehe **Eulers** inst. calc. diff. p. 541.

§. 77. Zusatz.

Da die hier gebrauchten D. Z. eben die Werthe haben, als Taf. VI. B. so ist es sehr leicht einige Glieder dieser Reihe in Zahlen zu berechnen. Es ist nemlich:

$$\begin{array}{lll}
1)\ \overset{2}{\mathfrak{A}} & = -\frac{1}{1.\,2.\,3} & = -\frac{2-1}{1.\,2\,3} \\
2)\ \overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}} & = -\frac{7}{3.1\ldots5} & = -\frac{2^3-1}{3.\,1\ldots5} \\
3)\ \overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}} & = -\frac{31}{3.1\ldots7} & = -\frac{2^5-1}{3.\,1\ldots7} \\
4)\ \overset{5}{\mathfrak{A}} - \overset{6}{\mathfrak{B}} + \overset{7}{\mathfrak{C}} - \overset{8}{\mathfrak{D}} & = -\frac{381}{5.1\ldots9} & = -\frac{3(2^7-1)}{5.\,1\ldots9} \\
5)\ \overset{6}{\mathfrak{A}} - \ldots + \overset{10}{\mathfrak{E}} & = -\frac{2555}{3.1\ldots11} & = -\frac{5(2^9-1)}{3.\,1\ldots11}
\end{array}$$

etc.

Demnach $$\text{Cosec.}\, x = \frac{1}{x} + \frac{2-1}{1.\,2.\,3}\, x + \frac{2^3-1}{3.\,1\ldots5}\, x^3 + \frac{2^5-1}{3.\,1\ldots7}\, x^5 + \frac{3(2^7-1)}{5.\,1\ldots9}\, x^7 + \frac{5(2^9-1)}{3.\,1\ldots11}\, x^9 + etc.$$

§. 78. Erläuterungsaufgabe. 2.

Eine Reihe für die Secante des Bogens x zu finden.

Aufl. Da $\text{Sec.}\, x = \frac{1}{\text{Cos.}\, x} = (\text{Cos.}\, x)^{-1}$, so erhebe man die Reihe

$$\text{Cos.}\, x = 1 - \frac{x^2}{1.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + etc.$$

zu der Potenz -1. Zu dem Ende bezeichne man vom zweiten Gliede an, die Coefficienten mit D. Z., so daß

$$\text{Cos.}\,x = 1 + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^4 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^6 + etc.$$

Die Vergleichung dieser Reihe, mit der allgemeinen Wurzelreihe $y = Ax^m + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^{m+r} + etc.$ giebt hier, $y = \text{Cos.}\,x$; $A = 1$; $m = 0$; $r = 2$, und weil wir $(\text{Cos.}\,x)^{-1}$ suchen, $n = -1$. Wir erhalten also, wenn diese Werthe in die allgemeine Potenzreihe gebracht werden, $(\text{Cos.}\,x)^{-1} =$

$$\begin{aligned}\text{Sec.}\,x = x^0 - \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 - \overset{3}{\mathfrak{A}}x^4 &- \overset{4}{\mathfrak{A}}x^6 - etc.\\ + \overset{4}{\mathfrak{B}}\,\text{″} &+ \overset{5}{\mathfrak{B}}\,\text{″}\\ &- \overset{6}{\mathfrak{C}}\,\text{″}\end{aligned}$$

oder $\text{Sec.}\,x = 1 - \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 - (\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})x^4 - (\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})x^6 - etc.$

welches die verlangte Reihe ist.

Ihre Coefficienten sind den Buchstaben nach, die nemlichen, als in der Reihe für die Cosecante. Allein jene bezogen sich auf die Coefficienten der Sinusreihe, diese auf die Coeff. der Cosinusreihe.

§. 79. Zusatz.

Die ersten Glieder dieser Reihe lassen sich, vermittelst Taf. VII. B., ohne Mühe in Zahlen berechnen. Es ist nemlich:

$$\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{-1}{1\,.\,2};\quad \overset{5}{\mathfrak{A}} - etc. \ldots - \overset{8}{\mathfrak{D}} = \frac{-1385}{1\ldots 8};$$

$$\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}} = \frac{-5}{1\,.\,.\,4};\quad \overset{6}{\mathfrak{A}} - etc. \ldots + \overset{10}{\mathfrak{E}} = \frac{-50521}{1\,.\,.\,10};$$

$$\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}} = \frac{-61}{1\,.\,.\,6};\quad \overset{7}{\mathfrak{A}} - etc. \ldots - \overset{12}{\mathfrak{F}} = \frac{-2702765}{1\,.\,.\,.\,12};$$

etc.

Demnach $\text{Sec.}\,x = 1 + \frac{1}{1\,.\,2}x^2 + \frac{5}{1.2.3.4}x^4 + \frac{61}{1\ldots 6}x^6 + \frac{1385}{1\ldots 8}x^8 + \frac{50521}{1\ldots 10}x^{10} + \frac{2702765}{1\ldots\ldots 12}x^{12} + etc.$

§. 80. Anmerkung.

Auf eine andere Art entwickelt **Euler** diese Reihe, Inst. calc. diff. p. 542 sq. Auch vergleiche man die kleine Schrift des Herrn Pr. **Pfaff**, Versuch einer neuen Summationsmethode, S. 81 ff.

Um übrigens hier die Reihen für die einfachen trigonometrischen Functionen beisammen zu haben, so wie im vorigen Abschn. die Reihen für ihre logarithmen, so wollen

wollen wir noch die Reihen für die Tangente und Cotangente eines Winkels auf ähnliche Art, als in den oben angeführten Schriften, doch vermittelst der D. Z, suchen, obgleich zu ihrer Entwickelung keine Erhebung zu einer Potenz nöthig seyn wird.

§. 81. Zusatz.

Eine Reihe für die Cotangente eines Bogens zu finden.

Aufl. Man weiß aus der Trigonometrie, daß $\mathrm{Cot.}\frac{1}{2}x - \mathrm{Cot.}x = \mathrm{Cosec.}x$. Aus dieser Formel folgt zuerst, daß die gesuchte Reihe für $\mathrm{Cot.}x$, mit der Reihe $\mathrm{Cosec.}x$ einerley Form haben müsse: denn wenn zwei Reihen von einerlei Form ($\mathrm{Cot.}\frac{1}{2}x$ und $\mathrm{Cot.}x$) von einander abgezogen werden, so werden in dem Reste ($\mathrm{Cosec.}x$) wohl andere Coefficienten, aber nicht andere Potenzen von x, als in den beiden Reihen vorkommen können.

Die Folge der Pot. in der gesuchten Reihe für $\mathrm{Cot.}x$ wird demnach x^{-1}, x, x^3, x^5, *etc.* seyn (§.76.), und die noch unbestimmten Coefficienten derselben wollen wir, nach der Reihe, mit α, β, γ, δ *etc.* bezeichnen. Demnach ist:

$$\mathrm{Cot.}\,x = \alpha x^{-1} + \beta x + \gamma x^3 + \delta x^5 + \varepsilon x^7 + etc.$$

$$\mathrm{Cot.}\tfrac{1}{2}x = 2\alpha x^{-1} + \frac{\beta}{2}x + \frac{\gamma}{2^3}x^3 + \frac{\delta}{2^5}x^5 + \frac{\varepsilon}{2^7}x^7 + etc.$$

$$\mathrm{Cosec.}\,x = \alpha x^{-1} - \frac{(2-1)}{2}\beta x - \frac{2^3-1}{2^3}\gamma x^3 - \frac{2^5-1}{2^5}\delta x^5 - \frac{2^7-1}{2^7}\varepsilon x^7 + etc.$$

Da nun nach §.76. $\mathrm{Cosec.}x = x^{-1} - \overset{2}{\mathfrak{A}}x - (\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})x^3 - (\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})x^5 - etc.$ (wo sich $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *etc.* auf die Coeff. der Sinusreihe vom zweiten Gliede an beziehen,), so haben wir, weil diese beiden Reihen identisch seyn müssen,

$$\alpha = 1; \qquad \text{also } \alpha = 1;$$

$$\frac{2-1}{2}\beta = \overset{2}{\mathfrak{A}}; \qquad \text{also } \beta = \frac{2}{2-1}\overset{2}{\mathfrak{A}};$$

$$\frac{2^3-1}{2^3}\gamma = \overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}}; \qquad \text{also } \gamma = \frac{2^3}{2^3-1}(\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}});$$

$$\frac{2^5-1}{2^5}\delta = \overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}}; \qquad \text{also } \delta = \frac{2^5}{2^5-1}(\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}});$$

$$\frac{2^7-1}{2^7}\varepsilon = \overset{5}{\mathfrak{A}} - \ldots - \overset{8}{\mathfrak{D}}; \qquad \text{also } \varepsilon = \frac{2^7}{2^7-1}(\overset{5}{\mathfrak{A}} - \overset{6}{\mathfrak{B}} + \overset{7}{\mathfrak{C}} - \overset{8}{\mathfrak{D}})$$

$$etc. \qquad\qquad etc.$$

Dem-

Demnach $\text{Cot.}\, x = \frac{1}{x} + \frac{2}{2-1}\overset{2}{\mathfrak{A}}x + \frac{2^3}{2^3-1}(\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})x^3 + \frac{2^5}{2^5-1}(\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})x^5$

$$+ \frac{2^7}{2^7-1}(\overset{5}{\mathfrak{A}} - \overset{6}{\mathfrak{B}} + \overset{7}{\mathfrak{C}} - \overset{8}{\mathfrak{D}})x^7 + etc.$$

§. 82. Zusatz.

Da die Coefficienten dieser Reihe, so weit sie durch D. Z. ausgedrückt sind, mit den §. 73. berechneten Werthen völlig einerley sind, so erhalten wir durch Vergleichung dieses §. geradezu:

$$\text{Cot.}\, x = \frac{1}{x} - \frac{2}{1.2.3}x - \frac{2^3}{3.1\ldots5}x^3 - \frac{2^5}{3.1\ldots7}x^5 - \frac{3.2^7}{5.1\ldots9}x^7 - \frac{5.2^7}{3.1\ldots11}x^9 - etc.$$

§. 83. Zusatz.

Eine Reihe für die Tangente eines Bogens zu finden.

Aufl. Aus der Trigonometrie weiß man, daß $\text{Tang.}\, x = \text{Cosec.}\, 2x - \text{Cot.}\, 2x$. Es ist aber nach §§. 76. und 81.

$$\text{Cosec.}\, 2x = \tfrac{1}{2}x^{-1} - 2\overset{2}{\mathfrak{A}}x - 2^3(\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})x^3 - 2^5(\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})x^5 - etc.$$

$$\text{Cot.}\, 2x = \tfrac{1}{2}x^{-1} + \frac{2^2}{2-1}\overset{2}{\mathfrak{A}}x + \frac{2^6}{2^3-1}(\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})x^3 + \frac{2^{10}}{2^5-1}(\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})x^5 + etc.$$

$$\text{Tang.}\, x = -\frac{2(2^2-1)}{2-1}\overset{2}{\mathfrak{A}}x - \frac{2^3(2^4-1)}{2^3-1}(\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})x^3$$

$$- \frac{2^5(2^6-1)}{2-1^5}(\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})x^5 - etc.$$

oder da $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{-1}{1.2.3}$; also $-\frac{2(2^2-1)}{2-1}\overset{2}{\mathfrak{A}} = +1$,

$$\text{Tang.}\, x = x - \frac{2^3(2^4-1)}{2^3-1}(\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})x^3 - \frac{2^5(2^6-1)}{2^5-1}(\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})x^5$$

$$- \frac{2^7(2^8-1)}{2^7-1}(\overset{5}{\mathfrak{A}} - \overset{6}{\mathfrak{B}} + \overset{7}{\mathfrak{C}} - \overset{8}{\mathfrak{D}})x^7 - etc.$$

Das Gesetz der Fortschreitung ist leicht zu übersehen.

§. 84. Zusatz.

Aus §. 77. ergiebt sich in Zahlen

$$\text{Tang.}\,x = x + \frac{2^3(2^4-1)}{3.1\ldots5}x^3 + \frac{2^5(2^6-1)}{3.1\ldots7}x^5 + \frac{3.2^7(2^8-1)}{5.1\ldots9}x^7$$
$$+ \frac{5\,2^9(2^{10}-1)}{3.1\ldots11}x^9 + etc.$$

$$\text{Oder Tang.}\,x = x + \frac{2}{1.2.3}x^3 + \frac{2^4}{1\ldots5}x^5 + \frac{2^4.17}{1\ldots7}x^7 + \frac{2^8.31}{1\ldots9}x^9 + etc.$$

§. 85. Zusatz.

Da die Reihen für die einfachen trigonometrischen Functionen von sehr vielen Gebrauche sind, so wollen wir sie zu mehrerer Bequemlichkeit des Nachschlagens, so weit wir sie in Zahlen berechnet haben, hier noch einmal zusammenstellen, und der Vollständigkeit wegen die Reihe für Sin. x, und Cos. x hinzusetzen.

1) $\text{Sin.}\,x = x - \frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1}{1\ldots5}x^5 - \frac{1}{1\ldots7}x^7 + \frac{1}{1\ldots9}x^9 - etc.$

2) $\text{Cos.}\,x = 1 - \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{1\ldots4}x^4 - \frac{1}{1\ldots6}x^6 + \frac{1}{1\ldots8}x^8 - etc.$

3) $\text{Tang.}\,x = x + \frac{2}{1.2.3}x^3 + \frac{16}{1\ldots5}x^5 + \frac{272}{1\ldots7}x^7 + \frac{7936}{1\ldots9}x^9 + etc.$ (§. 83. 84.)

4) $\text{Cot.}\,x = \frac{1}{x} - \frac{2}{1.2.3}x - \frac{8}{3.1\ldots5}x^3 - \frac{32}{3.1\ldots7}x^5 - \frac{384}{5.1\ldots9}x^7 - \frac{640}{3.1\ldots11}x^9 - etc.$
(§. 81. 82.)

5) $\text{Sec.}\,x = 1 + \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{5}{1\ldots4}x^4 + \frac{61}{1\ldots6}x^6 + \frac{1385}{1\ldots8}x^8 + \frac{50521}{1\ldots10}x^{10}$
$+ \frac{2702765}{1\ldots12}x^{12} + etc.$ (§. 78. 79.)

6) $\text{Cosec.}\,x = \frac{1}{x} + \frac{1}{1.2.3}x + \frac{7}{3.1\ldots5}x^3 + \frac{31}{3.1\ldots7}x^5 + \frac{381}{5.1\ldots9}x^7$
$+ \frac{2555}{3.1\ldots11}x^9 + etc.$ (§. 76. 77.)

Das Gesetz der vier letzten Reihen, wird sich, wie schon anderwärts bemerkt worden, in der Folge selbst in Zahlzeichen sichtbar machen lassen, wo es aber freilich etwas zusammengesetzt erscheint.

§. 86. Erläuterungsaufgabe. 3.

Den Ausdruck $\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}}$, in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln.

Aufl. Zuerst giebt der Bruch $\frac{1+x}{1-x}$ durch Division, oder in eine recurrirende Reihe verwandelt, die Reihe

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + etc.$$

Aus

aus welcher die $n$te Wurzel, vermittelst §. 70. (oder Tafel II.) zu suchen ist. Man bezeichne also die Coefficienten derselben vom zweiten Gliede an, mit D. Z., nemlich:

$$2 = \overset{2}{\mathfrak{A}} = \overset{3}{\mathfrak{A}} = \overset{4}{\mathfrak{A}} = \overset{5}{\mathfrak{A}} = \overset{6}{\mathfrak{A}} = etc.\ etc.$$

Wenn nun $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \overset{2}{\mathfrak{A}}x + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^2 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^3 + etc.$

so giebt Tafel II.

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}\overset{2}{\mathfrak{A}}x + \frac{}{n}\overset{3}{\mathfrak{A}}x^2 + \frac{1}{n}\overset{4}{\mathfrak{A}}x^3 + etc.$$
$$- \frac{n-1}{1.2.n^2}\overset{4}{\mathfrak{B}}\,'' - \frac{n-1}{1.2.n^2}\overset{5}{\mathfrak{B}}\,'' - etc.$$
$$+ \frac{(n-1)(2n-1)}{1.2.3.n^3}\overset{6}{\mathfrak{C}}\,'' + etc.$$

Das Fortschreitungsgesetz fällt deutlich in die Augen.

§. 87. Zusatz.

Wenn man die Werthe der D. Z. nach Tafel 1. entwickelt, so erhält man

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = +2$	$\overset{4}{\mathfrak{B}} = 2^2$	$\overset{6}{\mathfrak{C}} = 2^3 = \frac{2.1}{1.2}2^3$	$\overset{8}{\mathfrak{D}} = 2^4 = \frac{3.2.1}{1.2.3}2^4$	etc.
$\overset{3}{\mathfrak{A}} = +2$	$\overset{5}{\mathfrak{B}} = 2.2^2$	$\overset{7}{\mathfrak{C}} = 3.2^3 = \frac{3.2}{1.2}\,''$	$\overset{9}{\mathfrak{D}} = 4.2^4 = \frac{4.3.2}{1.2.3}\,''$	
$\overset{4}{\mathfrak{A}} = +2$	$\overset{6}{\mathfrak{B}} = 3.2^2$	$\overset{8}{\mathfrak{C}} = 6.2^3 = \frac{4.3}{1.2}\,''$	$\overset{10}{\mathfrak{D}} = 10.2^4 = \frac{5.4.3}{1.2.3}\,''$	
$\overset{5}{\mathfrak{A}} = +2$	$\overset{7}{\mathfrak{B}} = 4.2^2$	$\overset{9}{\mathfrak{C}} = 10.2^3 = \frac{5.4}{1.2}\,''$	$\overset{11}{\mathfrak{D}} = 20.2^4 = \frac{6.5.4}{1.2.3}\,''$	
etc.	etc.	etc.	etc.	

Substituiret man diese Werthe in der gefundenen Reihe, so wird

$$\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}} =$$
$$1 + \frac{1}{n}2x + \frac{1}{n}2x^2 + \frac{1}{n}2x^3 + \frac{1}{n}2x^4 + etc.$$
$$- \frac{1}{1}\frac{(n-1)}{1.2.n^2}2^2x^2 - \frac{2}{1}\frac{(n-1)}{1.2.n^2}2^2x^3 - \frac{3}{1}\frac{(n-1)}{1.2.n^2}2^2x^4$$
$$+ \frac{2.1}{1.2}\frac{(n-1)(2n-1)}{1.2.3.n^3}2^3x^3 + \frac{3.2}{1.2}\frac{(n-1)(2n-1)}{1.2.3.n^3}2^3x^4$$
$$- \frac{3.2.1}{1.2.3}\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{1 \ldots 4.n^4}2^4x^4$$

wo das Fortschreitungsgesetz selbst in der gemeinen Bezeichnung sichtbar bleibt. Setzt man für n die bestimmten Zahlen 2, 3, etc., so erhält man

$$
\begin{array}{lllll}
\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1 + x + 1\; x^2 & + 1.\; x^3 & + 1.\; x^4 & + 1.\; x^5 & + \text{etc.} \\
\qquad\qquad - \frac{1}{2}\;'' & - 2.\; \frac{1}{2}\;'' & - 3.\; \frac{1}{2}\;'' & - 4.\; \frac{1}{2}\;'' & \\
& + 1.\, \frac{1.3}{2.3}\;'' & + 3.\; \frac{1.3}{2.3}\;'' & + 6.\; \frac{1.3}{2.3}\;'' & \\
& & - 1.\; \frac{1.3.5}{2.3.4}\;'' & - 4.\; \frac{1.3.5}{2.3.4}\;'' & \\
& & & + 1.\; \frac{1\ldots7}{2\ldots5}\;'' &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2 & + 1.\; \frac{2}{3}x^3 & + 1.\; \frac{2}{3}x^4 & + 1.\; \frac{2}{3}x^5 & + \text{etc.} \\
\qquad\qquad - \frac{2^2}{3^2}\;'' & - 2.\; \frac{2^2}{3^2}\;'' & - 3.\; \frac{2^2}{3^2}\;'' & - 4.\; \frac{2^2}{3^2}\;'' & \\
& + 1.\, \frac{5}{3}\frac{2^3}{3^3}\;'' & + 3.\; \frac{5}{3}\frac{2^3}{3^3}\;'' & + 6.\; \frac{5}{3}\frac{2^3}{3^3}\;'' & \\
& & - 1.\; \frac{5.8}{3.4}\frac{2^4}{3^4}\;'' & - 4.\; \frac{5.8}{3.4}\frac{2^4}{3^4}\;'' & \\
& & & + 1.\; \frac{5.8.11}{3.4.5}\frac{2^5}{3^5}\;'' &
\end{array}
$$

u. s. f.

§. 88. Anmerkung.

Wir haben bisher unsere allgemeine Potenzreihe, auf lauter unendliche Reihen angewendet. Es ist aber leicht einzusehen, daß sie für eine Potenz irgend eines endlichen Ausdrucks, nicht weniger brauchbar sey. In diesem Falle verwandelt sich jede Horizontalreihe des allgemeinen Schema (Taf. II.) in eine endliche Reihe; und da aus dem 2ten Abschn. (§. 35.) bekannt ist, wie weit die D. Z. in jeder Ordnung fortschreiten, wenn die erste Ordnung endlich ist, so wird es in jedem Falle leicht seyn, die ganze Form der Reihe zu übersehen. Was die Vertikalreihen in dem allgemeinen Schema betrift, so würden auch diese, wenn n eine ganze und positive Zahl ist, endlich wegen der Binomialcoefficienten abbrechen, und so würde die ganze Reihe endlich werden. Allein in diesem Falle wird es immer (sehr wenige Fälle ausgenommen) vortheilhafter seyn, die Methode des dritten Abschnitts anzuwenden. In jedem andern Falle aber, bleibt unsere Reihe, obgleich die Horizontalreihen abbrechen, unendlich, weil die Reihe der Binomialcoefficienten unendlich ist. Wir wollen den gegenwärtigen Abschnitt, mit einem einzigen Beispiele dieser Art schließen.

§. 89. Erläuterungsaufgabe 4.

Den Ausdruck $3 - 2x + 4x^2 - x^3$ zu der $n$ten Potenz zu erheben.

Aufl.

Aufl. Man setze $y = 3 - 2x + 4x^2 - x^3$, und bezeichne, vom zweiten Gliede an, die Coefficienten mit D. Z., so daß $y = 3 + \overset{2}{\mathfrak{A}}x + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^2 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^3$. Vergleicht man diese Gleichung, mit der allgemeinen Wurzelreihe, so ist $A = 3$; $m = 0$; $r = 1$. Da in der allg. Potenzreihe, die erste Horizontalreihe mit $\overset{4}{\mathfrak{A}}$ abbricht, so würde die zweite mit $\overset{8}{\mathfrak{B}}$, die dritte mit $\overset{12}{\mathfrak{C}}$, *etc.* abbrechen (§. 35.), und wenn wir statt der Binomia coefficienten α, β, γ *etc.* behalten, so wird seyn

$$\begin{array}{llll}
y^n = 3^n + 3^{n-1}\alpha\overset{2}{\mathfrak{A}}x & + 3^{n-1}\alpha\overset{3}{\mathfrak{A}}x^2 & + 3^{n-1}\alpha\overset{4}{\mathfrak{A}}x^3 & \\
& + 3^{n-2}\beta\overset{4}{\mathfrak{B}}\ \text{〃} & + 3^{n-2}\beta\overset{5}{\mathfrak{B}}\ \text{〃} & + 3^{n-2}\beta\overset{6}{\mathfrak{B}}x^4 + etc. \\
& & + 3^{n-3}\gamma\overset{6}{\mathfrak{C}}\ \text{〃} & + 3^{n-3}\gamma\overset{7}{\mathfrak{C}}\ \text{〃} \\
& & & + 3^{n-4}\delta\overset{8}{\mathfrak{D}}\ \text{〃}
\end{array}$$

Berechnet man, nach Tafel 1., die Werthe der D. Z. bis zu dem Gliede, welches x^5 enthält, so findet man

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = -2$				
$\overset{3}{\mathfrak{A}} = +4$	$\overset{4}{\mathfrak{B}} = +4$			
$\overset{4}{\mathfrak{A}} = -1$	$\overset{5}{\mathfrak{B}} = -16$	$\overset{6}{\mathfrak{C}} = -8$		
	$\overset{6}{\mathfrak{B}} = +20$	$\overset{7}{\mathfrak{C}} = +48$	$\overset{8}{\mathfrak{D}} = +16$	
	$\overset{7}{\mathfrak{B}} = -8$	$\overset{8}{\mathfrak{C}} = -108$	$\overset{9}{\mathfrak{D}} = -128$	$\overset{10}{\mathfrak{E}} = -32$
etc.	*etc.*	*etc.*	*etc.*	*etc.*

Demnach ist

$$\begin{array}{lllll}
y^n = 3^n \big(1 - \tfrac{2}{3}\alpha x & + \tfrac{4}{3}\alpha x^2 & - \tfrac{1}{3}\alpha x^3 & & \\
& + \tfrac{4}{9}\beta\ \text{〃} & - \tfrac{16}{9}\beta\ \text{〃} & + \tfrac{20}{9}\beta x^4 & - \tfrac{8}{9}\beta x^5 + etc. \\
& & - \tfrac{8}{27}\gamma\ \text{〃} & + \tfrac{48}{27}\gamma\ \text{〃} & - \tfrac{10}{27}\gamma\ \text{〃} \quad + etc. \\
& & & + \tfrac{16}{81}\delta\ \text{〃} & - \tfrac{128}{81}\delta\ \text{〃} \quad + etc. \\
& & & & - \tfrac{32}{243}\varepsilon\ \text{〃} \quad + etc. \big)
\end{array}$$

Setzt man nun für n irgend eine bestimmte Zahl, so werden auch die Binomialcoefficienten α, β, γ, *etc.* bestimmt.

Wenn $n = +10$, so ist:

$$y^{10} = 3^{10}\left(1 - \tfrac{20}{3}x + \tfrac{100}{3}x^2 - \tfrac{250}{3}x^3 + \tfrac{9580}{27}x^4 - \tfrac{23896}{27}x^5 + etc.\right)$$

Diese Reihe würde (weil die Wurzelreihe mit x^3 abbricht,) mit x^{30} abbrechen.

Wenn $n = -4$, so ist:

$$\frac{1}{y^4} = \frac{1}{3^4}\left(1 + \tfrac{8}{3}x - \tfrac{5}{9}x^2 - \tfrac{284}{27}x^3 + \tfrac{160}{81}x^4 - \tfrac{2168}{243}x^5 + etc.\ \text{in inf.}\right)$$

Wenn $n = +\tfrac{1}{2}$, so ist:

$$\sqrt{y} = \sqrt{3}\left(1 - \tfrac{1}{3}x + \tfrac{11}{18}x^2 + \tfrac{1}{27}x^3 - \tfrac{115}{648}x^4 - \tfrac{157}{1944}x^5 + etc.\ etc.\right)$$

u. d. gl. m.

Fünfter Abschnitt.

Allgemeine Auflösungsmethode durch unendliche Reihen.

§. 90. Einleitung.

Diejenigen Leser, welche mit der höheren Analysis nicht unbekannt sind, werden, wie ich glaube, schon bei den beiden vorhergehenden Abschnitten bemerkt haben, von wie vielfachen Gebrauche unsere D. Z. sind; und es würde nicht an Stoff fehlen, schon hier mehrere Abschnitte mit den Anwendungen unserer Methode auf besondere Materien, z. B. Entwickelung, Umformung, Summirung unendlicher Reihen, *etc.* zu füllen. Es scheint mir aber zweckmäßiger diese Anwendungen sämtlich dem zweiten Theile dieser Schrift vorzubehalten, im ersten Theile aber, die Theorie, welche wir zu diesen Anwendungen brauchen, möglichst vollständig abzuhandeln. Es fehlt uns hierzu noch ein Problem, welches vielleicht das wichtigste in diesem Werke, und gewissermaßen in der ganzen Analysis heißen kann; dieses nemlich: **aus irgend einer vorgelegten Function oder Gleichung, sie sey von bestimmter oder unbestimmter Art (oder, welches auf eins hinausläuft, sie enthalte blos beständige, oder auch veränderliche Größen), sie sey algebraisch, oder transcendent, den Werth irgend einer darin enthaltenen Größe, durch alle übrigen auszudrücken.** So allgemein genommen, als wir dieses Problem hier nehmen, ist für dasselbe keine andere Auflösung, als durch unendliche Reihen möglich, denn wäre eine endliche Auflösung möglich, so würde folgen, daß von zwei Größen, die in einem transcendenten Verhältniß stehen (z. B. x und Sin. x), eine durch die andere vermittelst eines endlichen Ausdrucks gegeben werden könnte, welches dem Begriff transcendent widerspricht. Im Allgemeinen kann man also von der Analysis, bei diesem Probleme nichts weiter fordern, oder erwarten, als eine Auflösung durch eine unendliche Reihe. Dennoch bleibt noch ein höherer oder vielmehr höchster Schritt der Analysis im Allgemeinen übrig; nemlich, zu dieser Auflösungsreihe, deren Gesetze wir in diesem Abschnitte entwickeln werden, eine allgemeine summirende Reihe, von solcher Beschaffenheit zu finden, welche zwar bei transcendenten Gleichungen unendlich bleibe, bei algebraischen aber endlich werde. Es ist schwer zu entscheiden, ob eine solche höchste Auflösung des Problems möglich sey: ist sie aber in dieser Allgemeinheit möglich, so ist leicht einzusehen, daß eine genaue Untersuchung der Reihe, die wir entwickeln werden, den Weg dazu bahnen könne.

§. 91.

Soll aber das erwähnte Problem wirklich in aller der Allgemeinheit aufgelöset werden, in welcher wir dasselbe ausgedrückt haben, so muß die Auflösung an einer Formel geschehen, welche so allgemein ist, daß sie jede nur erdenkliche Function, desgleichen jede nur erdenkliche Gleichung vorstellen kann. Eine solche Formel nun, ist die schon öfter gebrauchte: $y = Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} + etc.$ die wir daher im Folgenden, das allgemeine Schema jeder Function und Gleichung, oder schlechthin, **das allgemeine Schema** nennen wollen.

Was wir hier von der Formel $y = Ax^m + etc.$ behaupten, ist ein bekannter Satz, der in der Analysis sehr häufig gebraucht wird. Ein Beweis davon ist aber nicht anders, als durch Induction möglich. Daher findet man ihn, so wichtig er auch ist, dennoch, meines Wissens, nirgends als Lehrsatz, sondern nur als beiläufige Folgerung angeführt, wenn man gezeigt hat, daß gebrochne, irrationale, und diejenigen transcendenten Functionen, die mit Logarithmen und Kreisbögen zusammenhängen, in Reihen von der obigen Form aufgelöset werden können. Man kann also immer noch fragen, ob auch wirklich **alle nur erdenkliche** Functionen, **alle nur erdenkliche** Gleichungen, sich in die obige Form einschmiegen lassen? Es ist mir daran gelegen, daß dem Leser, kein Zweifel hierüber übrig bleibe, und es wird daher, wie ich glaube, nicht überflüßig seyn, wenn ich einige Erläuterungen hinzusetze.

§. 92.

I) Soll zuerst der Ausdruck $y = Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + etc.$ wirklich das allgemeine Schema aller nur erdenklichen **Functionen** seyn, so ist folgendes zu merken.

Die Hauptbedingung dieses Schema bestehet darin, daß es eine Reihe von Gliedern enthält, welche nach Potenzen einer veränderlichen Größe x geordnet sind, **deren Exponenten m, $m+r$, $m+2r$ etc. Glieder einer arithmetischen Reihe seyn müssen.** Man könnte unbeschadet der Allgemeinheit, die Werthe der Buchstaben m und r, auf ganze, ja sogar positive Zahlen einschränken. Allein für unser folgendes Problem bedürfen wir dieser Einschränkung nicht, und m und n können seyn, was man irgend will. Blos $m = 0$ findet bei unserer Auflösungsmethode nicht statt, und kömmt daher dieser Fall vor, so muß dies Glied mit auf die linke Seite genommen werden.

Die Bedeutung der Buchstaben A, B, C, etc. muß im allgemeinen auf keine Art beschränkt werden. Nur daß sie kein x enthalten dürfen, versteht sich von selbst. Uebrigens können sie im Allgemeinen, entweder beständige Größen, (also auch zum

Theil $= 0$, und daher die Reihe, endlich oder unendlich,) oder veränderliche Größen, oder Functionen von ein, zwei, drei, und mehreren veränderlichen Größen, auch von y, oder endlich sogar unendliche Reihen seyn.

Was y betrift, so ist dies gewöhnlich der veränderliche Totalwerth, einer vorgelegten Function von x. Doch ist diese Einschränkung nicht nothwendig, sondern y kann auch eine Function von ein oder mehr veränderlichen Größen, oder auch eine unendliche Reihe seyn. Selbst ein beständiger Werth von y ist nicht auszuschließen, obgleich alsdenn die Reihe aufhöret, eine eigentliche Function zu seyn.

Nach diesen Bestimmungen kann kein Zweifel bleiben, daß nicht alle erdenkliche Functionen, unter diese Form sollten gebracht werden können. Folgende Anmerkungen mögen allen etwa noch möglichen Zweifeln vorbeugen.

Es sey also irgend eine und zwar entwickelte (explicita) Function gegeben, die wir in ihrer ursprünglichen und gegebenen Form X nennen wollen. Ihr veränderlicher Totalwerth heiße v, so daß $v = X$. Hier bemerke ich zuerst, daß wir von dem Fall, wenn X eine Function von mehreren veränderlichen Größen ist, abstrahiren können: denn da die Reduction auf die allgemeine Form blos Anordnung nach einer einzigen veränderlichen Größe x erfordert, so ist es offenbar ganz einerley, ob die übrigen in X vorkommenden Buchstaben beständige oder veränderliche Werthe haben.

Daß in allen Fällen, wo X eine algebraische Function von x ist, die Reduction auf die allgemeine Form möglich sey, und wie sie geschehe, ist zu bekannt, als daß ich mich dabei aufhalten dürfte.

Was die transcendenten Functionen betrift, so ist es nicht schwer einen allgemeinen Beweis zu geben, daß sie sich sämtlich durch Reihen, von der Form des allgemeinen Schema ausdrücken lassen; nur läßt sich dieser Beweis nicht ohne Integralrechnung, als der eigentlichen Quelle aller transcendenten Functionen, führen. Da indessen die ersten Begriffe der Integralrechnung schon zu diesem Beweise hinreichen, die übrigens von unserem Satze ganz unabhängig sind, so glaube ich, dies kleine hysteron proteron, ohne Beleidigung der Logik, mir erlauben zu dürfen.

Die eigentliche und einzige Quelle aller transcendenten Functionen, liegt in denjenigen Differential-Functionen, die sich durch keinen algebraischen Ausdruck integriren lassen. Es sey $X\,dx$ eine Differentialfunction von dieser Beschaffenheit, so wird $\int. X\,dx$ eine transcendente Function seyn. Nun ist X in diesem Falle entweder eine alge-

algebraische oder eine transcendente Function von x. Ist das erste, so kann X in eine Reihe von der allgemeinen Form aufgelöset werden. Gesetzt, es wäre

$$X\,dx = (\mathfrak{A}x^m + \mathfrak{B}x^{m+r} + \mathfrak{C}x^{m+2r} + etc.)\,dx$$

so erhält man durch Integrirung alle einzelnen Glieder

$$\int. X\,dx = \frac{1}{m}\mathfrak{A}x^{m+1} + \frac{1}{m+r}\mathfrak{B}x^{m+1+r} + \frac{1}{m+2r}\mathfrak{C}x^{m+1+2r} + etc.$$

also wieder eine Reihe von der allgemeinen Form.

Wäre aber X eine transcendente Function von x, so muß sie selbst aus einer nicht integrabeln Differential-Function entsprungen seyn. Diese Differential-Function sey $X^1\,dx$, so daß $X = \int. X^1\,dx$; so werden sich bei $\int. X^1\,dx$ dieselben Schlüsse machen lassen, die wir bei $\int. X\,dx$ gemacht haben. X^1 ist entweder eine algebraische oder transcendente Function von x; ist das erste, so kann X^1, folglich auch $\int. X^1\,dx = X$, folglich auch $\int. X\,dx$ durch eine Reihe von der allgemeinen Form ausgedrückt werden. Ist aber X^1 transcendent, so kann man die bei X für diesen Fall gemachten Schlüsse wiederholen, *etc.*

Da nun aber dergleichen nicht integrable Differential-Functionen $X\,dx$, $X^1\,dx$ *etc.* nie aus Differentiirung einer algebraischen Function entsprungen seyn können, sondern immer unmittelbar aus den Bedingungen einer Aufgabe vermittelst erwiesener mathematischer Sätze abgeleitet seyn müssen; so ist offenbar, daß man bei Fortsetzung der obigen Schlüsse, wenn X, X^1 *etc.* transcendent wären, dennoch auf alle Fälle endlich auf eine solche Differential-Function $P\,dx$ kommen müsse, wo P blos durch Sätze der **Elementar-Mathematik** bestimmt wird, und daher eine algebraische Function von x seyn muß. Alsdenn aber wird sich $\int. P\,dx$, nebst allen vorhergehenden transcendenten Functionen, in Reihen von der allgemeinen Form auflösen lassen.

Transcendente Functionen von mehr als einer veränderlichen Größe, haben eben den Ursprung. Da es aber im Integriren einen sehr großen Unterschied macht, ob eine vorgelegte Differential-Function, ein oder mehr veränderliche Größen enthalte, so könnte in Absicht der letztern noch ein Zweifel bleiben. Allein wenn eine solche Function, sich auf irgend eine Art integriren lässet, so ist offenbar, daß die Formel nach geschehener Integration, sie sey beschaffen, wie sie wolle, auf die allgemeine Form gebracht werden könne. Denn da wir nun, wie gleich anfänglich bemerkt worden, blos auf die **einzige** veränderliche Größe x zu sehen brauchen, nach welcher die Function geordnet werden soll, so mögen die einzelnen Glieder, aus welchen die integrirte Formel bestehet, in Rücksicht auf x, algebraische oder transcendente Ausdrücke enthalten, so wird nach dem vorigen jedes dieser Glieder, also auch das Ganze, in eine

Reihe nach Potenzen von x verwandelt werden können. Uebersteigt aber eine vorgelegte Differential-Function von mehr als einer veränderlichen Größe, die Kräfte der Integralrechnung, so kann die Frage von einer Reduction auf das allgemeine Schema gar nicht vorkommen, weil sie keinen Sinn hat.

Nach diesen Betrachtungen scheint mir nur noch Eines übrig zu bleiben, was ein eigensinniger Zweifler vorbringen könnte. Vielleicht, könnte man sagen, ist die oben angegebene Quelle der transcendenten Functionen, nicht die einzige derselben; vielleicht lassen sich ohne Integrirung, durch Schlüsse, oder nach einem willkührlich angenommenen Gesetze, Reihen von solcher Beschaffenheit bilden, die sich nicht unter die allgemeine Form schmiegen; wie wenn z. B. eine Reihe gebildet würde, die zwar nach Potenzen von x fortschritte, aber so, daß die Exponenten, nicht als Glieder einer arithmetischen Reihe angesehen werden könnten, z. B.

$$y = ax + bx^{\frac{1}{2}} + cx^{\frac{1}{3}} + dx^{\frac{1}{4}} + etc.$$

oder allgemein $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + etc.$ oder auch, wenn die Reihe überall gar nicht nach Potenzen von x fortschritte, sondern nach irgend einem andern Gesetz.

Was den ersten dieser Fälle betrifft, so scheint es zwar beim ersten Blick, als ließen dergleichen Reihen keine solche Umformung zu, daß sie nach solchen Potenzen von x fortschritten, deren Exponenten Glieder einer arithmetischen Reihe wären. Allein man setze $x = 1 + z$, so verwandelt sich jedes Glied, also auch das Ganze in eine Reihe, die nach Potenzen von z fortschreitet, deren Exponenten 0, 1, 2, 3, 4 etc. sind, so daß nach dieser Substitution

$$y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + etc.$$

seyn wird. Schon in dieser Gestalt, hat die Reihe die allgemeine Form angenommen, obgleich die Coefficienten A, B, C, etc. unendliche Reihen seyn können, welchen Fall wir aber oben ausdrücklich als zulässig erwähnt haben. Allein man kann noch weiter gehen, und diese umgeformte Reihe noch einmal so umformen, daß sie nach rationalen Potenzen von x fortschreitet: denn da $x = 1 + z$ war, so ist $z = -1 + x$, und setzt man diesen Werth statt z in der umgeformten Reihe, so wird $y = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + etc.$ wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. wieder unendliche Reihen seyn können *).

Was den andern Fall betrift, wenn eine vorgelegte Reihe gar nicht nach Potenzen von x fortschritte, so hat dieser eben so wenig, oder noch weniger Schwierigkeit. Denn soll die Reihe wirklich einem Gesetze folgen, (und wäre dies nicht, so wäre sie ein bloßes Hirngespinst,) so muß das Gesetz darin liegen, daß jedes Glied irgend

*) Daß man eben diese Umformung noch durch unzählige andere Substitutionen erreichen könne, fällt in die Augen.

irgend eine Function von x enthält, die Folge dieser Functionen aber in Absicht ihrer Form irgend etwas regelmäßiges enthielte. Stellt man sich nun unter Fx, $F^{I}x$, $F^{II}x$, $F^{III}x$ *etc.* eine solche regelmäßige Folge von Functionen vor, so würde

$$y = AFx + BF^{I}x + CF^{II}x + DF^{III}x + \text{etc.}$$

ein allgemeiner Ausdruck für dergleichen Reihen seyn. Hier fällt aber sogleich in die Augen, daß jedes einzelne Glied, also auch die ganze Reihe, in eine Reihe nach Potenzen von x verwandelt werden könne.

Alles, was bisher gesagt worden, beziehet sich blos auf entwickelte Functionen (functiones explicitae). Es läßt sich aber zeigen, daß auf jede verwickelte Function (functio implicita) auf das allgemeine Schema reduciret werden könne. Wenn X, X^{I}, X^{II} *etc.* Functionen von x (oder auch von mehreren veränderlichen Größen) sind, so ist

$$y^n + Xy^{n-1} + X^{I}y^{n-2} + X^{II}y^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

die allgemeine Form verwickelter Functionen. Werden hier X, X^{I}, X^{II} *etc.* in Reihen nach Potenzen von x verwandelt, so bestehet die Summe aller Glieder aus einer Menge vom Gliedern, die sämtlich Functionen, entweder blos von y, oder von x, oder von beiden sind. Diese Glieder ordne man blos in Rücksicht auf x, und setze alles, was kein x enthält, auf die linke Seite, so ist die Anordnung dem allgemeinen Schema gemäß, und wir werden in dem folgenden sehen, daß man jederzeit, x oder y, oder jede andere in dem Ausdruck enthaltene Größe, vermittelst unserer Auflösungsmethode, durch eine Reihe ausdrücken könne.

II. Soll zweitens eben die Formel $y = Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + \text{etc.}$ auch das allgemeine Schema jeder nur erdenklichen algebraischen oder transcendenten **Gleichung** seyn; so wird die Bedeutung der Buchstaben y, A, B, C, *etc.* etwas beschränkter. y ist nun nicht eine veränderliche Größe, sondern dasjenige Glied der Gleichung, welches nichts unbekanntes, oder vielmehr kein x enthält; denn wenn außer x noch mehr unbekannte Größen in der Gleichung enthalten wären, so können diese in y enthalten seyn. Da indessen in diesem Falle der gegebene Ausdruck eigentlich eine verwickelte Function von x wäre, wovon wir schon oben gesprochen haben, so können wir hier von diesem Falle ganz abstrahiren, und y blos als eine beständige Größe denken, die nichts unbekanntes enthält. Blos der Werth $y = 0$ findet nicht statt. Kömmt dieser Fall nach geschehener Reduction vor, so hat die Gleichung eine oder mehrere Wurzeln $= 0$, und läßt sich also durch x oder eine Potenz von x dividiren. Was von y gesagt worden, gilt auch von den Coefficienten A, B, C, *etc.* Sie sind hier (wenn der Fall mehrerer unbekannten Größen ausgeschlossen wird) immer beständige Größen, schließen aber nicht, wie y, den Werth 0 aus.

Daß übrigens jede Gleichung auf diese Form gebracht werden könne, ist leicht einzusehen. Ganz allgemein ließe sich die Sache so einsehen. Irgend eine gegebene Gleichung heiße in ihrer ursprünglichen Form $0 = X$. Um sie auf die allgemeine

Form zu reduciren, wird man jederzeit die Freiheit haben, das **unbekannte** x, als **veränderlich**, und X, als eine Function davon anzusehen, und seinen veränderlichen Totalwerth $= v$ zu setzen, so daß nun $v = X$. Alsdenn wird man sich durch eben die Schlüsse, die wir bei Functionen gemacht haben, überzeugen können, daß die Reduction in jedem Falle möglich sey, X sey beschaffen, wie es wolle. Nach geschehener Reduction setzt man wieder $v = 0$, und wenn auf der rechten Seite etwas stehen bleibt, was kein x enthält, so wird dies auf die linke Seite gesetzt. Es ist aber bekannt, daß bei **Gleichungen**, die Reduction noch durch andere Mittel, als bei **Functionen** bewerkstelligt werden könne. Nenner, welche x enthalten, schaffet man nicht durch Verwandlung in recurrirende Reihen, sondern durch Multiplication weg. Irrationale Ausdrücke werden nicht durch Auflösung in Reihen, sondern durch Potentiirung gehoben. Transcendente Functionen von x, können oft durch bloße Substitution weggeschaffet werden; denn es ist bekannt, daß eine Gleichung transcendente Functionen von x enthalten könne, ohne selbst transcendent zu seyn. So ist z. B. jede Gleichung, welche noch soviele trigonometrische Functionen von x enthält, dennoch nicht transcendent, wofern nicht außer diesen trig. Funct. noch x selbst, oder log. x, oder irgend eine andere Function vorkommt, die gegen die trigonometrischen Functionen in einem **transcendenten Verhältnisse** stehet. Alle trigonometrische Größen haben gegen einander algebraisches Verhältniß. Kommen daher mehrere als tang. x, sec. x, *etc.* in einer Gleichung vor, so lassen sie sich sämtlich auf eine einzige z. B. Sin. x reduciren, und setzt man dann statt Sin. x einen einzelnen Buchstaben, so verschwindet selbst das transcendente Ansehen, und die Gleichung erscheint, in ihrer wahren algebraischen Gestalt. Enthält aber eine Gleichung nicht blos transcendente Größen, sondern auch transcendente Verhältnisse, z. B. $x =$ Cos. x; log. Cos. $x = a + b$ Sin. x u. d. gl. m. so ist die Gleichung wirklich transcendent, und dann bleibt zu ihrer Reduction auf das allgemeine Schema kein anderes Mittel übrig, als daß man, wie bei Functionen, die transcendenten Größen in unendliche Reihen auflöse.

§. 93.

Wir sind demnach vollkommen berechtigt, die Formel

$$y = Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} + etc.$$

als ein völlig allgemeines Schema jeder nur erdenklichen Function, oder Gleichung anzusehen. Ist man demnach im Stande, aus diesem Schema den Werth von x, durch eine unendliche Reihe so darzustellen, daß es auf die Auflösung gar keinen Einfluß hat, ob y und x, desgleichen A, B, C, *etc.* veränderliche oder beständige Größen sind, so ist man offenbar im Besitz einer schlechterdings allgemeinen und uneingeschränkten Auflösungsmethode.

Wir werden aber dennoch die Allgemeinheit dieser Methode, wo möglich, noch weiter treiben, und zeigen, wie man mit gleicher Leichtigkeit, x selbst, oder irgend

eine

eine Potenz davon x^t, was auch t seyn mag, finden könne. Woraus erhellet, daß man vermittelst eben dieser Methode, nicht nur x selbst, sondern sogar jede nur erdenkliche Function von x werde finden können, da wir gesehen haben, daß jede Function von x, aus Potenzen von x zusammengesetzt werden könne.

Wir könnten, wie schon bemerkt worden, in dem allgemeinen Schema, die Exponenten von x, unbeschadet der Allgemeinheit viel enger beschränken, und sie sogar blos auf die natürliche Zahlenreihe $1, 2, 3,$ *etc.* einschränken. Allein die Unbestimmtheit, oder vielmehr Allgemeinheit, welche wir in den Exponenten gelassen haben, ersparet uns theils manche verdrüßliche Reductionen, indem schon z. B. Formeln, wie diese: $y = x^{-3} - ax^{-5} + bx^{-7}$; desgleichen $\frac{1}{3} y = x^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{3}} - \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{3} x^{\frac{7}{3}}$; oder $y = \sqrt[3]{(a - x)} + a \sqrt[3]{(a - x)^2} + a^2 \sqrt[3]{(a - x)^3}$, u. d. gl. m., ohne weitere Reduction die Form des Schema haben: theils erleichtert eben diese Unbestimmtheit der Exponenten die Anwendung unserer Auflösungsmethode, noch auf andere Art, wie sich in der Folge zeigen wird.

Endlich ist noch zu bemerken, daß wir um mehrerer Einfachheit willen, bei Auflösung des Problems, den Coefficienten von x^m der Einheit gleich setzen werden, welches bekanntlich allezeit, und unbeschadet der Allgemeinheit geschehen darf.

§. 94. Aufgabe.

Aus dem allgemeinen Schema $y = x^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} +$ *etc.* den Werth irgend einer Potenz von x, nemlich x^t, (was auch t bedeuten mag) durch eine unendliche, nach Potenzen von y fortschreitende Reihe, auszudrücken.

Auflösung. Man bezeichne die Coefficienten des allgemeinen Schema, **vom zweiten Gliede an**, mit Dimensionszeichen, nemlich

$$B = \overset{2}{\mathfrak{A}}; \quad C = \overset{3}{\mathfrak{A}}; \quad D = \overset{4}{\mathfrak{A}}; \quad E = \overset{5}{\mathfrak{A}}; \quad etc.$$

so daß $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{m+3r} +$ *etc.*

Alsdann wird seyn $x^t = y^{\frac{t}{m}} + \alpha y^{\frac{t+r}{m}} + \beta y^{\frac{t+2r}{m}} + \gamma y^{\frac{t+3r}{m}} +$ *etc.* und die zur Abkürzung mit α, β, γ, *etc.* bezeichneten Coefficienten, werden folgende Werthe haben:

1) $\alpha = -\frac{t}{m} \overset{2}{\mathfrak{A}}$

2) $\beta = -\frac{t}{m} \overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{t}{m} \frac{t+m+2r}{2m} \overset{4}{\mathfrak{B}}$

3) $\gamma = -\frac{t}{m} \overset{4}{\mathfrak{A}} + \frac{t}{m} \frac{t+m+3r}{2m} \overset{5}{\mathfrak{B}} - \frac{t}{m} \frac{t+m+3r}{2m} \frac{t+2m+3r}{3m} \overset{6}{\mathfrak{C}}$

$$4)\ \delta = -\frac{t}{m}\overset{5}{\mathfrak{A}} + \frac{t}{m}\,\frac{t+m+4r}{2m}\overset{6}{\mathfrak{B}} - \frac{t}{m}\,\frac{t+m+4r}{2m}\,\frac{t+2m+4r}{3m}\overset{7}{\mathfrak{C}}$$
$$+ \frac{t}{m}\,\frac{t+m+4r}{2m}\,\frac{t+2m+4r}{3m}\,\frac{t+3m+4r}{4m}\overset{8}{\mathfrak{D}}$$

$5)\ e = etc.$

Oder es wird seyn:

$$\begin{aligned}
x^t = y^{\frac{t}{m}} - \frac{t}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}\,y^{\frac{t+r}{m}} &- \frac{t}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}}\,y^{\frac{t+2r}{m}} - \frac{t}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}}\,y^{\frac{t+3r}{m}} \\
&+ \frac{t}{m}\,\frac{t+m+2r}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}} = \quad + \frac{t}{m}\cdot\frac{t+m+3r}{2m}\overset{5}{\mathfrak{B}} = \\
&\qquad\qquad - \frac{t}{m}\,\frac{t+m+3r}{2m}\,\frac{t+2m+3r}{3m}\overset{6}{\mathfrak{C}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \frac{t}{m} && \overset{5}{\mathfrak{A}}\,y^{\frac{t+4r}{m}} && - etc. \\
&+ \frac{t}{m}\cdot\frac{t+m+4r}{2m} && \overset{6}{\mathfrak{B}} = && + etc. \\
&- \frac{t}{m}\cdot\frac{t+m+4r}{2m}\cdot\frac{t+2m+4r}{3m} && \overset{7}{\mathfrak{C}} = && - etc. \\
&+ \frac{t}{m}\cdot\frac{t+m+4r}{2m}\cdot\frac{t+2m+4r}{3m}\cdot\frac{t+3m+4r}{4m} && \overset{8}{\mathfrak{D}} = && + etc. \\
& && && - etc.
\end{aligned}$$

und das $n$te Glied dieser Reihe vom zweiten an gezählet, wird seyn:

$$\begin{aligned}
&- \frac{t}{m} && \overset{n+1}{\mathfrak{A}}\,y^{\frac{t+nr}{m}} \\
&+ \frac{t}{m}\cdot\frac{t+m+nr}{2m} && \overset{n+2}{\mathfrak{B}} = \\
&- \frac{t}{m}\cdot\frac{t+m+nr}{2m}\cdot\frac{t+2m+nr}{3m} && \overset{n+3}{\mathfrak{C}} = \\
&+ \frac{t}{m}\cdot\frac{t+m+nr}{2m}\cdot\frac{t+2m+nr}{3m}\cdot\frac{t+3m+nr}{4m} && \overset{n+4}{\mathfrak{D}} = \\
&- \frac{t}{m}\cdot\frac{t+m+nr}{2m}\cdot\frac{t+2m+nr}{3m}\cdot\frac{t+3m+nr}{4m}\cdot\frac{t+4m+nr}{5m} && \overset{n+5}{\mathfrak{E}} = \\
&+ \quad etc. \\
&\pm \frac{t}{m}\cdot\frac{(t+m+nr)}{2m}\,\frac{(t+2m+nr)}{3m}\cdots\cdots\frac{(t+(n-1)m+nr)}{nm} && \overset{2n}{\mathfrak{N}} =
\end{aligned}$$

Das obere Zeichen der letzten Zeile gilt für ein gerades, das untere für ein ungerades n.

Be-

Beweis. Man erhebe das gegebene allgemeine Schema

$$y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{m+3r} + etc.$$

nach der Methode des vorigen Abschnitts §. 70. (oder Taf. II. A.) nach und nach zu Potenzen, deren Exponenten nach der Reihe $\frac{t}{m}$, $\frac{t+r}{m}$, $\frac{t+2r}{m}$, $\frac{t+3r}{m}$, etc. sind. Zugleich multiplicire man die zweite unter diesen Potenzen, nemlich $y^{\frac{t+r}{m}}$ mit den unbestimmten Coefficienten α, die folgende $y^{\frac{t+2r}{m}}$ mit β; die folgende mit γ, etc. etc. so erhält man

$$y^{\frac{t}{m}} = x^t + \frac{t}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}} x^{t+r} + \left(\frac{t}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{t}{m}\cdot\frac{t-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}\right)x^{t+2r} + \left(\frac{t}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \frac{t}{m}\cdot\frac{t-m}{2m}\overset{5}{\mathfrak{B}} + \frac{t}{m}\cdot\frac{t-m}{2m}\cdot\frac{t-2m}{3m}\overset{6}{\mathfrak{C}}\right)x^{t+3r} + etc.$$

$$\alpha y^{\frac{t+r}{m}} = \alpha x^{t+r} + \alpha\frac{t+r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}} x^{t+2r} + \alpha\left(\frac{t+r}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{t+r}{m}\cdot\frac{t+r-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}\right)x^{t+3r} + etc.$$

$$\beta y^{\frac{t+2r}{m}} = \beta x^{t+2r} + \beta\frac{t+2r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}\, x^{t+3r} + etc.$$

$$\gamma y^{\frac{t+3r}{m}} = \gamma\, x^{t+3r} + etc.$$

$$etc. \qquad\qquad etc.$$

Bei Betrachtung dieser Potenzen fällt es sogleich in die Augen, daß es möglich sey, die unbestimmten Coefficienten α, β, γ, etc. so zu bestimmen, daß bei der Addition dieser Potenzen, alles bis aufs erste Glied x^t exclusive, $=$ Null werde. Sind aber α, β, γ, etc. so bestimmt, so wird alsdenn

$$x^t = y^{\frac{t}{m}} + \alpha y^{\frac{t+r}{m}} + \beta y^{\frac{t+2r}{m}} + \gamma y^{\frac{t+3r}{m}} + etc.$$

seyn. Und da dieses die in der Auflösung bemerkte Form der gesuchten Reihe ist, so ist dieselbe, was die Form betrift, hierdurch erwiesen.

Es ist noch zu erweisen, daß α, β, γ etc. die in der Auflösung bemerkten Werthe bekommen müssen, damit auf der rechten Seite alles, x^t ausgenommen, $= 0$ werde. Zu dem Ende sind folgende Gleichungen aufzulösen:

1) $\alpha = -\frac{t}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}$.

2) $\beta = -\alpha\frac{t+r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}} - \left(\frac{t}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{t}{m}\cdot\frac{t-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}\right)$.

3) $\gamma = -\beta\frac{t+2r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}} - \alpha\left(\frac{t+r}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{t+r}{m}\cdot\frac{t+r-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}\right) - \left(\frac{t}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \frac{t}{m}\cdot\frac{t-m}{2m}\overset{5}{\mathfrak{B}} + \frac{t}{m}\cdot\frac{t-m}{2m}\cdot\frac{t-2m}{3m}\overset{6}{\mathfrak{C}}\right)$.

4) $\delta =$ etc. etc.

Man übersiehet sehr leicht, wie diese Ausdrücke fortschreiten.

Vermittelst dieser Gleichungen ist, wie man siehet, jeder der Coefficienten α, β, γ *etc.* durch alle vorhergehende bestimmt. Und schon diese Gleichungen würden daher, ohne weitere Veränderung, zur Auflösung unsers Problems brauchbar seyn, da es in die Augen fällt, daß man vermittelst derselben in jedem Falle, die gesuchten Coefficienten, so weit als es verlangt wird, finden könne. (So lösete Moivre dies Problem auf; obgleich nur für den eingeschränkten Fall $m = r = t = 1$; man sehe die Phil. Transact. Vol. XX. pag. 190.) Die Formeln werden aber weit netter, und zur Berechnung geschmeidiger, wenn man sich durch die Schwierigkeiten einer in der That sehr verwickelten, und den unerschrockensten Analysten ermüdenden Rechnung, nicht abschrecken lässet, den Werth dieser Coefficienten nach der Reihe so zu bestimmen, daß jeder durch sich selbst, und unabhängig von allen vorhergehenden bestimmt sey, und das Fortschreitungsgesetz deutlich in die Augen fällt. Das Resultat dieser Rechnung, die ohne Dimensionszeichen so gut als unausführbar seyn möchte, sind die in der Auflösung angegebenen Werthe von α, β, γ *etc.* Wir liefern hier, gleichsam nur zur Probe, die Berechnung der drei ersten Glieder. Es ist ein wirkliches Glück, daß das Gesetz dieser Coefficienten in D. Z. ausgedrückt so einfach erscheint, daß man es schon nach wenig Gliedern übersiehet.

1) Bestimmung des Coefficienten von $y^{\frac{t+r}{m}}$, oder α. Nach der Gleichung Nr. 1. ist ohne weitere Rechnung $\alpha = -\frac{t}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}$.

2) Bestimmung des Coeff. von $y^{\frac{t+2r}{m}}$, oder β. Nach Nr. 2. ist

$$\beta = -\frac{t}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} - \frac{t}{m}\,\frac{t-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}} - \alpha\,\frac{t+r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}.$$

Setzt man für α, den gefundenen Werth $-\frac{t}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}$, so ist:

$$\beta = -\frac{t}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} - \frac{t}{m}\,\frac{t-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}} + \frac{t}{m}\,\frac{t+r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}\,\overset{2}{\mathfrak{A}}.$$

Da nun $\overset{2}{\mathfrak{A}}\,\overset{2}{\mathfrak{A}} = \overset{4}{\mathfrak{B}}$ (Taf. 1.), so ist:

$$\beta = -\frac{t}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} - \frac{t}{m}\,\frac{t-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}} + \frac{t}{m}\,\frac{2t+2r}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}.$$

Ziehet man die beiden letzten Glieder zusammen, so ergiebt sich

$$\beta = -\frac{t}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{t}{m}\,\frac{t+m+2r}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}.$$

3) Bestimmung des Coeff. von $y^{\frac{t+3r}{m}}$, oder γ. Nach der Gleichung Nr. 3. ist:

$$\gamma = -\frac{t}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}} - \frac{t}{m}\frac{t-m}{2m}\overset{5}{\mathfrak{B}} - \frac{t}{m}\frac{t-m}{2m}\frac{t-2m}{3m}\overset{6}{\mathfrak{C}}$$
$$-\alpha\frac{t+r}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} - \alpha\frac{t+r}{m}\frac{t+r-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}} - \beta\frac{t+2r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}$$

man setze nun für α und β ihre eben gefundenen Werthe, so wird

$$\gamma = -\frac{t}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}} - \frac{t}{m}\frac{t-m}{2m}\overset{5}{\mathfrak{B}} - \frac{t}{m}\frac{t-m}{2m}\frac{t-2m}{3m}\overset{6}{\mathfrak{C}}$$
$$+\frac{t}{m}\frac{t+r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{t}{m}\frac{t+r}{m}\frac{t+r-m}{2m}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{B}}$$
$$+\frac{t}{m}\frac{t+2r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} - \frac{t}{m}\frac{t+2r}{m}\frac{t+m+2r}{2m}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{B}}$$

Da aber $\overset{5}{\mathfrak{B}} = 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}}$, und $\overset{6}{\mathfrak{C}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{B}}$, so wird

$$\gamma = -\frac{t}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}} - \frac{t}{m.2m}(t-m-t-r-t-2r)\overset{5}{\mathfrak{B}}$$
$$-\frac{t}{m.2m.3m}\big((t-m)(t-2m) - 3(t+r)(t+r-m) + 3(t+2r)(t+m+2r)\big)\overset{6}{\mathfrak{C}};$$

Der eingeklammerte Coefficient von $\overset{5}{\mathfrak{B}}$ ist $= -m-t-3r = -(m+t+3r)$:
und der eingeklammerte Coeff. von $\overset{6}{\mathfrak{C}}$, ist

$$\begin{array}{llllll}
= tt - 3tm + 2mm & & & & & \\
-3tt + 3tm & & - 6tr & - 3rr & + 3rm & \\
+3tt + 3tm & & + 12tr & + 12rr & + 6rm & \\
\hline
= tt + 3tm + 2mm & + 6tr & + 9rr & + 9mr & & \\
= (t+m+3r)(t+2m+3r). & & & & &
\end{array}$$

Demnach $\gamma = -\frac{t}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \frac{t}{m}\frac{t+m+3r}{2m}\overset{5}{\mathfrak{B}} - \frac{t}{m}\frac{t+m+r}{2m}\frac{t+2m+3r}{3m}\overset{6}{\mathfrak{C}}.$

Bis dahin ist die Rechnung erträglich: die Berechnung von δ erfordert schon Geduld, und wenn man noch weiter gehen will, Eigensinn. Da mir alles daran gelegen war, von dem Fortschreitungsgesetz, welches schon bei γ in die Augen fällt, völlig versichert zu seyn, so habe ich die Hartnäckigkeit gehabt, die Rechnung **allgemein** bis zum sechsten Coefficienten ζ, und für den besondern Fall $m = r = t = 1$, bis zum achten Coeff. ϑ zu treiben; glaube aber den Leser mit dieser Rechnung verschonen zu müssen.

§. 95. Anmerkung.

Ich gebe den letzten Theil des im vorigen §. geführten Beweises für weiter nichts, als was er ist, für **unvollständige Induction**: allein dies benimmt dem Satze selbst nichts an Brauchbarkeit. Auch der Binomialsatz wurde lange allgemein gebraucht,

ehe

ehe Herr Hofr. Kästner den ersten ganz scharfen Beweis seiner allgemeinen Gültigkeit lieferte, (m. s. Theorema binomiale universaliter demonstratum, Gottingae 1758.) Uebrigens hoffe ich, daß mir nicht vor dem Richterstuhl der Critik über die Entdeckung des Gesetzes einer so wichtigen Reihe, der Proceß gemacht werden wird, weil ich nicht so glücklich war, einen vollständigen Beweis dieses Gesetzes zugleich zu finden. Zwar wäre ich im Stande, die Form des ersten, zweiten und letzten Gliedes jedes Coefficienten vollkommen scharf zu erweisen. Allein ich halte es für unnütz mehrere Seiten mit einer Rechnung anzufüllen, die doch nichts als ein unvollständiges Flickwerk seyn würde. Sollte übrigens jemand noch zweifeln, ob ein Gesetz dieser Art, das sich durch sechs bis acht Glieder bestätiget hat, allgemein richtig sey, dem mag der ganze folgende Inhalt dieser Schrift zur Bürgschaft für die Richtigkeit desselben dienen.

§. 96. Zusatz.

Wenn das erste Glied der gegebenen Reihe x^m einen Coefficienten A hat, und also

$$y = Ax^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + etc.$$

ist, so darf man nur entweder vor der Bezeichnung mit D. Z. die ganze Gleichung mit A dividiren, oder auch, welches auf eben das hinausläuft, anfänglich von A ganz abstrahiren, als ob es nicht da wäre, hernach aber in der gefundenen Auflösungsreihe, für y überall $\frac{y}{A}$, und bei den Dimensionszeichen $\frac{\mathfrak{A}}{A}$ für jedes $\mathfrak{A}$; $\frac{\mathfrak{B}}{A^2}$ für jedes $\mathfrak{B}$; $\frac{\mathfrak{C}}{A^3}$ für jedes $\mathfrak{C}$, u. s. f. setzen (§. 69.). Alles übrige bleibt ungeändert. Doch ist zu merken, daß bei diesen beiden Arten, die D. Z. nicht völlig einerley Bedeutung haben; denn bei der ersten schließen die D. Z. schon für sich selbst A als einen Divisor ein; bei der andern aber, enthalten sie nichts von A, sondern dies steht ausdrücklich als Divisor darunter.

§. 97. Zusatz.

Es ist leicht einzusehen, daß in der gefundenen Reihe für x^t, der Exponent t, ganz und gar nicht blos auf ganze und positive Zahlen eingeschränkt sey, sondern daß t schlechterdings bedeuten könne, was man nur will; indem in unserer Auflösung die Formirung der Potenzreihen nicht nach der eingeschränkten Methode des dritten Abschnitts, sondern nach der ganz allgemeinen, des vierten, gemacht worden.

§. 98. Zusatz.

Auch ist aus der Art, wie die Reihe entwickelt worden, klar, daß sie gar nicht blos auf unendliche Reihen eingeschränkt sey, sondern auch auf jede endliche Gleichung angewendet werden könne; da man aus §. 35. weiß, wie weit die D. Z. in jeder Ordnung fortschreiten, wenn die erste Ordnung endlich ist. Es kann aber im Fall einer endlichen Gleichung unsere Auflösungsreihe nie endlich werden, da die Zahlencoefficienten unserer D. Z. in dieser Reihe nie abbrechen können, wie man leicht einsieht, wenn man die Werthe von α, β, γ etc. und ihr Fortschreitungsgesetz §. 94. aufmerksam betrachtet.

§. 99. Anmerkungen.

1) Um den Gebrauch unserer allgemeinen Auflösungsreihe so leicht als möglich zu machen, habe ich dieselbe Tafel III. A. besonders abdrucken lassen.

2) Uebrigens ist bei dem Gebrauch der gefundenen allgemeinen Auflösungsreihe (so werden wir sie in der Folge nennen,) eben das zu beobachten, was oben bei der allgemeinen Potenzreihe (§. 71. Nr. 4.) gesagt worden. Man muß nemlich zuerst eine gegebene Gleichung oder Function, so wie wir es in den erstern §§. dieses Abschn. gezeigt haben, unter die allg. Form $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + etc.$ bringen. Die Vergleichung mit diesem Schema, giebt die Werthe von y, x, m, r; und t wird durch die Natur der Frage bestimmt; substituiret man alsdenn diese Werthe in der allg. Auflösungsreihe, so erhält man die gesuchte Auflösung.

3) Mehrere Anwendungen dieser Reihe versparen wir für den zweiten Theil, werden aber doch in diesem Abschnitte ihre Anwendung, durch ein Paar Aufgaben erläutern. Zu der ersten dieser Aufgaben wählen wir einen Fall, der ohne Schwierigkeit und sogar leichter und kürzer, auch auf andere Art, aus längst bekannten und erwiesenen Sätzen aufgelöset werden kann, welcher aber eben deswegen dienen kann, die Richtigkeit des Gesetzes unserer Auflösungsreihe an einem einzelnen Fall zu prüfen.

§. 100. Erläuterungsaufgabe. 1.

Die numerische Extraction irgend einer Wurzel aus einer vorgelegten Zahl, durch Hülfe unserer Auflösungsreihe zu verrichten.

Aufl. Die gegebene Zahl sey A, die aus derselben zu findende Wurzel sey vom $n$ten Grade, oder $\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}}$. Man suche ein Paar Ziffern der gesuchten Wurzel durch Logarithmen, oder auf andere Art. Dieser bekannte Theil der Wurzel heiße a, der unbekannte x.

Es ist also $A^{\frac{1}{n}} = a + x$, also $A = (a + x)^n$

$$= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} x + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} a^{n-2} x^2 + etc.$$

Dieser Reihe gebe man die Form des allgemeinen Schema $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + etc.$ indem man alles, was nicht x enthält, auf die linke Seite schaffet, und das alsdenn erste Glied von seinem Coefficienten befreiet; so erhält man:

$$\frac{A-a^n}{na^{n-1}} = x + \frac{n-1}{2}\,\frac{1}{a}\,x^2 + \frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,\frac{1}{a^2}\,x^3 + etc.$$

Man setze $\frac{A-a^n}{na^{n-1}} = y$; ferner $\frac{n-1}{2a} = \overset{2}{\mathfrak{A}}$; $\frac{(n-1)\,(n-2)}{2.\,3.\,a^2} = \overset{3}{\mathfrak{A}}$; etc. also

$$y = x + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^3 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^4 + etc.$$

Vergleicht man diese Reihe mit dem obigen Schema, so ist für unsern Fall $m = r = 1$, und da wir keine Potenz von x, sondern x selbst suchen, so ist auch $t = +1$. Bringt man nun diese Werthe in die Auflösungsreihe, so erhält man (Taf. III. A.)

$$\begin{array}{llllll}
x = y - \overset{2}{\mathfrak{A}}y^2 & - \overset{3}{\mathfrak{A}}y^3 & - \overset{4}{\mathfrak{A}}y^4 & - \overset{5}{\mathfrak{A}}y^5 & - etc. \\
 & & + \frac{4}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}}\;\text{〃} & + \frac{5}{2}\overset{5}{\mathfrak{B}}\;\text{〃} & + \frac{6}{2}\overset{6}{\mathfrak{B}}\;\text{〃} \\
 & & & - \frac{5.6}{2.3}\overset{6}{\mathfrak{C}}\;\text{〃} & - \frac{6.7}{2.3}\overset{7}{\mathfrak{C}}\;\text{〃} \\
 & & & & + \frac{6.7.8}{2.3.4}\overset{8}{\mathfrak{D}}\;\text{〃}
\end{array}$$

Da diese Reihe bestimmt ist, zu einer wirklichen Zahlenrechnung gebraucht zu werden, so ist es nothwendig für die D. Z. ihre Werthe zu substituiren. Es war aber

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{n-1}{2a}$	Daher
$\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)\,(n-2)}{2.\,3.\,a^2}$	$\overset{4}{\mathfrak{B}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)^2}{2^2\,a^2}$
$\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)\,..\,(n-3)}{2.\,3.\,4.\,a^3}$	$\overset{5}{\mathfrak{B}} = 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)^2\,(n-2)}{2.\,3.\,a^3}$
$\overset{5}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)\,..\,(n-4)}{2\,..\,5.\,a^4}$	$\overset{6}{\mathfrak{B}} = 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)^2\,(n-2)\,(5n-13)}{2^3.\,3^2.\,a^4}$
$\overset{6}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)\,...\,(n-5)}{2\,...\,6.\,a^5}$	$\overset{7}{\mathfrak{B}} = 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{5}{\mathfrak{A}} + 2\overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)^2\,(n-2)\,(n-3)\,(4n-11)}{2^2.\,3^2.\,5.\,a^5}$
etc.	etc.

$\overset{6}{\mathfrak{C}}$

$$\overset{6}{\mathfrak{C}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)^3}{2^3 \,.\, a^3}$$

$$\overset{7}{\mathfrak{C}} = 3\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)^3\,(n-2)}{2^3 \,.\, a^4}$$

$$\overset{8}{\mathfrak{C}} = 3\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{A}} + 3\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)^3\,(n-2)\,(11n-17)}{2^5 \,.\, 3 \,.\, a^5}$$

etc.

$$\overset{8}{\mathfrak{D}} = (\overset{2}{\mathfrak{A}})^4 = \frac{(n-1)^4}{2^4 \,.\, a^4}$$

$$\overset{9}{\mathfrak{D}} = 4(\overset{2}{\mathfrak{A}})^3\,\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)^4\,(n-2)}{2^2 \,.\, 3 \,.\, a^5}$$

etc.

$$\overset{10}{\mathfrak{E}} = (\overset{2}{\mathfrak{A}})^5 = \frac{(n-1)^5}{2^5 \,.\, a^5}$$

etc.

Substituiret man diese Werthe in der gefundenen Reihe, so wird

$$x = y - \frac{n-1}{2}\,\frac{y^2}{a} - \frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,\frac{y^3}{a^2} - \frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,\frac{n-3}{4}\,\frac{y^4}{a^3} - etc.$$

$$+ \frac{(n-1)^2}{2} \quad , \quad + \frac{5\,(n-1)^2\,(n-2)}{2^2 \,.\, 3} \,,$$

$$- \frac{5\,(n-1)^3}{2^3} \quad ,$$

Ziehet man endlich die Coefficienten zusammen, welche zu gleichen Potenzen von y gehören, so erhält man folgende einfache Reihe:

$$x = y - \frac{n-1}{2}\,\frac{y^2}{a} + \frac{n-1}{2}\,\frac{2n-1}{3}\,\frac{y^3}{a^2} - \frac{n-1}{2}\,\frac{2n-1}{3}\,\frac{3n-1}{4}\,\frac{y^4}{a^3} + etc.$$

Oder da $\sqrt[n]{A} = a + x$

$$\sqrt[n]{A} = a\left(1 + \frac{y}{a} - \frac{n-1}{2}\,\frac{y^2}{a^2} + \frac{n-1}{2}\,\frac{2n-1}{3}\,\frac{y^3}{a^3} - \frac{n-1}{2}\,\frac{2n-1}{3}\,\frac{3n-1}{4}\,\frac{y^4}{a^4} + etc.\right)$$

und in dieser Reihe ist

$$y = \frac{A - a^n}{n\,a^{n-1}} = \frac{A}{n\,a^{n-1}} - \frac{a}{n} = \frac{a}{n}\left(\frac{A}{a^n} - 1\right); \text{ also } \frac{y}{a} = \frac{1}{n}\left(\frac{A}{a^n} - 1\right)$$

Da die Reihe nach Potenzen von $\frac{y}{a}$ fortschreitet, so läßt sich aus dieser Formel die Convergenz der Reihe beurtheilen. Je näher a^n an A kommt, (a^n sey größer oder kleiner als A,) desto kleiner wird der Werth von $\frac{1}{n}(\frac{A}{a^n}-1)$. Auch wird dieser Werth kleiner, je größer n ist; doch wachsen in diesem Falle auch die Zähler der Coefficienten.

§. 101. Zusatz.

Die gefundene Reihe läßt sich, wie schon oben bemerkt worden, anders, blos vermittelst des Binomialsatzes entwickeln. Es ist nemlich

$$\sqrt[n]{A}=\frac{a\sqrt[n]{A}}{a}=a\left(\frac{A}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}=a\left(1+\frac{A-a^n}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

wo a, wie man siehet, irgend eine ganz willkührliche Zahl bedeuten könnte, die man nur so nehmen müßte, daß $\frac{A-a^n}{a^n}$ so klein als möglich würde, welches auf eben die Bestimmung, als im vorigen §., führet, nemlich a beinahe $=\sqrt[n]{A}$. Man setze $\frac{A-a^n}{na^{n-1}}=y$; also $\frac{A-a^n}{a^n}=\frac{ny}{a}$; so wird $\sqrt[n]{A}=a(1+\frac{ny}{a})^{\frac{1}{n}}$. Löset man diese Formel vermittelst des Binomialsatzes in eine unendliche Reihe auf, so findet man, wie im vorigen §.

$$\sqrt[n]{A}=a\left(1+\frac{y}{a}-\frac{n-1}{2}\frac{y^2}{a^2}+\frac{n-1}{2}\frac{2n-1}{3}\frac{y^3}{a^3}-\frac{n-1}{2}\frac{2n-1}{3}\frac{3n-1}{4}\frac{y^4}{a^4}+etc.\right)$$

Es ist aber $\frac{y}{a}=\frac{A-a^n}{na^n}=\frac{1}{n}(\frac{A}{a^n}-1)$, wie oben. Uebrigens giebt diese Reihe fast allezeit eine sehr bequeme Rechnung, weil man entweder jedes Glied sehr leicht aus dem vorhergehenden machen, oder, wenn $\frac{y}{a}$ gleich vom Anfang an klein genug ist, die Potenzen dieser Größe durch Logarithmen berechnen, und so durch eine leichte Rechnung die Wurzel in 7 bis 8 Ziffern mehr schaffen kann, als man sie durch die Logarithmen **unmittelbar** erhält. Wir wollen ihren Gebrauch durch ein Paar Beispiele (§§. 102 — 105.) erläutern, die wir im folgenden gelegentlich wieder brauchen werden. Da indessen diese Beispiele hier nur Nebensachen sind, so kann man sie ohne Nachtheil überschlagen, und nur gelegentlich nachsehen.

§. 102. Beispiel. 1.

Die 5te Wurzel aus 48 in 9 Ziffern zu berechnen.

Da diese Wurzel zwischen 2 und 3, und zwar näher bei 2 fällt, so setze man geradezu $a=2$; Ferner ist $A=48$, $n=5$, also:

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{n}\left(\frac{A}{a^n} - 1\right) = \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{48}{32} - 1\right) = 0,1$$

zur Abkürzung schreibe man statt jedes Gliedes der Reihe

$$1 + \underset{A}{\frac{y}{a}} - \underset{B}{\frac{n-1}{2}\,\frac{y^2}{a^2}} + \underset{C}{\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,\frac{y^3}{a^3}} - \underset{D}{\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,\frac{n-3}{4}\,\frac{y^4}{a^4}} + etc.$$

den darunter stehenden Buchstaben, so ist:

1	= +	1,			
A	= +	0, 1	B	= —	0, 02
C	=	0, 006	D	= —	0, 002 1
E	=	0, ... 798	F	=	0, ... 319 2
G	=	0, ... 123 12	H	=	0, ... 046 17
I	=	0, ... 020 01	K	=	0, ... 008 80
L	=	0, ... 003 92	M	=	0, ... 20
N	=	0, ... 09	O	=	0, ... 04
P	=	0, ... 02	Q	=	0, ... 01
	+	1, 106 945 16		—	0, 022 474 42
	—	0, 022 474 42			
	+	1, 084 470 74			

Dies noch mit $a = 2$ multipliciret, giebt; $\sqrt[5]{48} = 2,168\,941\,48\ldots$ wo höchstens die letzte Ziffer um ein oder zwei Einheiten fehlen kann.

Hätte man die Wurzel in mehr Ziffern verlangt, so hätte man, wie in den folgenden Beispielen rechnen können.

§. 103. Beispiel. 2.

Die 4te Wurzel aus $\frac{20}{7}$ zu berechnen.

Hier ist also $A = \frac{20}{7}$; $n = 4$, um a zu bestimmen, berechne man $\sqrt[4]{\frac{20}{7}}$ durch Logarithmen, so findet man sie $= 1,3001\ldots$ Man setze also $a = 1,3$; daher $a^4 = 2,8561$, und

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{n}\left(\frac{A}{a^n} - 1\right) = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{200000}{199927} - 1\right) = \tfrac{73}{799708}.$$

Da dieser Bruch schon so klein ist, so berechne man ihn selbst, und seine Potenzen durch Logarithmen, und zwar treibe man für $\frac{y}{a}$ selbst die Rechnung so weit, als es durch log. möglich ist, also auf 7 bis 8 Ziffern. Es ist aber

$$\begin{aligned}
\log.\ 73 &= 1,8633229\\
\log.\ 799\,708 &= 5,9029314\\
\hline
\log.\ \frac{y}{a} &= -5 + 0,9603915\\
\log.\ \frac{y^2}{a^2} &= -9 + 0,9207830\\
\log.\ \frac{y^3}{a^3} &= -13 + 0,8811745
\end{aligned}$$

Weiter ist nicht nöthig zu rechnen, denn da man aus der Kennziffer des $\log. \frac{y}{a}$ siehet, daß $\frac{y}{a}$ selbst erst in der 5ten Stelle geltende Ziffern bekommt, durch log. aber die Zahl höchstens in 8 Ziffern zu schaffen ist, so werden wir $\frac{y}{a}$, höchstens in 13 Ziffern erhalten, und daher wird uns jede Potenz unnütz, deren Kennziffer mehr als -13 beträgt. Nimmt man die Zahlen, so ist:

$$\begin{aligned}
\frac{y}{a} &= +0,000\ 091\ 283\ 34\\
\frac{y^2}{a^2} &= +0,\ \ldots\ \ldots\ 008\ 371\\
\frac{y^3}{a^3} &= +0,\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ 8
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
1 &= +1\\
A &= +0,000\ 091\ 283\ 34\\
B &= -0,\ \ldots\ \ldots\ 012\ 56\\
C &= +0,\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
\hline
&+1,000\ 091\ 270\ 78
\end{aligned}$$

Diese Zahl mit $a = 1,3$ multiplicirt, giebt $\sqrt[4]{\frac{20}{7}} = \pm 1,300\ 118\ 652\ 01$.

§. 104. Beispiel. 3.

Die Quadratwurzel aus 14928 zu berechnen.

Hier ist $A = 14928$; $n = 2$. Man suche die Wurzel durch log.

$$\begin{aligned}
\text{l. } 14\,928 &= 4,1740016\\
2)\ &\overline{}\\
&\ \ 2,0870008\\
\sqrt{14928} &= 122,1802\,..
\end{aligned}$$

Man setze also $a = 122,18$ so ist $a^n = a^2 = 14927,9524$, daher

$$\frac{y}{a} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{A}{a^2} - 1\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{149280000}{149279524} - 1\right) = \tfrac{119}{74639762}.$$

Man brauche nun, wie im vorigen §., die Logarithmen, so ist:

$$l.\, y = 2,\ 0755470$$
$$l.\, a = 7,\ 8729703$$

$$l.\frac{y}{a} = -\ 6 + 0,\ 2025767;\quad \frac{y}{a} = 0,\ 000\ 001\ 594\ 324\ 8$$

$$l.\frac{y^2}{a^2} = -\ 12 + 0,\ 4051534;\quad \frac{y^2}{a^2} = 0,\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ 002\ 54$$

Daher

$$1 = +\ 1$$
$$+\ \frac{y}{a} = +\ 0,\ 000\ 001\ 594\ 324\ 8$$
$$-\ \tfrac{1}{2}\frac{y^2}{a^2} = -\ 0,\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ 001\ 3$$

$$+\ 1,\ 000\ 001\ 594\ 323\ 5$$
mit $a =$ 122,18 multipliciret

100, 000 159 432 35
20, 000 031 886 47
2, 000 003 188 65
0, 100 000 159 43
0, 080 000 127 54

$$\pm\ 122,\ 180\ 194\ 794\ 44 = \sqrt{14928}$$

§. 105. Beispiel. 4.

Die gefundene Reihe ist ganz allgemein, so daß man für n auch negative Zahlen, ja wenn man will selbst Brüche nehmen darf.

Es sey also aus eben der Zahl die $\sqrt[-2]{}$ oder $\frac{1}{\sqrt{14928}}$ zu berechen; so ist $A = 14928$; $n = -\ 2$; Ferner um a zu bestimmen

$$\log. A = 4,\ 1740016$$
$$\log. A^{-1} = -\ 5 + 0,\ 8259984$$
$$\log. A^{-\frac{1}{2}} = -\ 3 + 0,\ 9129992;\quad A^{-\frac{1}{2}} = 0,\ 008\ 184\ 6$$

Man setze also $a = 0,\ 0082$; so wird

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{n}\left(\frac{A}{a^n} - 1\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{A}{a^{-2}}\right) = \tfrac{1}{2}(1 - a^2 A).$$

Es

Es ist aber $a^2 = 0,000\,067\,24$, daher $a^2 A = 0,003\,758\,72$; also $\frac{y}{a} = -0,001\,879\,36$ (genau), und

$$\begin{array}{l|l}
\log.\frac{y}{a} = -3 + 0,2740100 & \\
\log.\frac{y^2}{a^2} = -6 + 0,5480200 & \frac{y^2}{a^2} = +0,000\,003\,531\,994 \\
\log.\frac{y^3}{a^3} = -9 + 0,8220300 & \frac{y^3}{a^3} = -0,\ldots\ldots006\,638 \\
\log.\frac{y^4}{a^4} = -11 + 0,0960400 & \frac{y^4}{a^4} = +0,\ldots\ldots\ldots012
\end{array}$$

Also

$$\begin{array}{rcl}
1 & = & +1 \\
+\frac{y}{a} & = & -0,001\,879\,360\,000 \\
+\frac{1}{2}\frac{y^2}{a^2} & = & +0,\ldots005\,297\,991 \\
+\frac{3.5}{2.3}\frac{y^3}{a^3} & = & -0,\ldots\ldots016\,595 \\
+\frac{3.5.7}{2.3.4}\frac{y^4}{a^4} & = & +0,\ldots\ldots\ldots052 \\
\hline
 & & +1,000\,005\,298\,043 \\
 & & -0,001\,879\,376\,595 \\
\hline
 & & +0,998\,125\,921\,448 \\
\text{mit } a = & & 0,0\,082 \text{ multipliciret} \\
\hline
 & & 0,007\,985\,007\,371\,584 \\
 & & 199\,625\,184\,290 \\
\hline
 & & \pm 0,008\,184\,632\,555\,874 = \frac{1}{\sqrt{14928}}
\end{array}$$

So weit die Beispiele zu §. 100.

§. 106. Erläuterungsaufgabe. 2.

Aus der Gleichung $z^3 + a^2 z + axz - 2a^3 - x^3 = 0$ den Werth von z durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Vorbereitung. Da in unserm allgemeinen Schema

$$y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + etc.$$

die

die Bedeutung des Buchstaben r durch nichts eingeschränkt ist, und er daher sowohl eine positive als negative Zahl bedeuten darf, so ist offenbar, daß die Exponentenreihe m, $m + r$, $m + 2r$, *etc.* sowohl eine steigende, als fallende arithmetische Reihe seyn kann. Es wird sich daher, unsere gegenwärtige, und jede endliche Gleichung, wenigstens auf zweierley Art unter das allgemeine Schema bringen lassen, indem man die Glieder, welche die unbekannte Größe z enthalten, entweder so stellen kann, daß die niedrigsten Potenzen derselben, zuerst, oder auch so, daß die höchsten Potenzen zuerst stehen. Ich sage, **wenigstens** auf zweierley Art, denn im zweiten Theile werden wir sehen, daß die Vergleichung mit dem allgemeinen Schema, auf noch mehr Arten geschehen könne.

Bringen wir nun in unserer Gleichung alles, was kein z enthält, auf die linke Seite, so erhalten wir folgende zwei Formen, auf welche sich unsere Auflösungsmethode anwenden lässet:

1) $2a^3 + x^3 = (a^2 + ax)z + z^3$

2) $2a^3 + x^3 = z^3 + a(a + x)z$

1) **Auflösung der ersten Form.** Man befreie z von seinem Coefficienten, so ist

$$\frac{2a^3 + x^3}{a(a+x)} = z + \frac{1}{a(a+x)} z^3$$

Vergleicht man nun diese Form mit dem allgemeinen Schema, so ist

$$y = \frac{2a^3 + x^3}{a(a+x)};\ x = z;\ m = 1;\ r = 2;\ \overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a(a+x)};\ \overset{3}{\mathfrak{A}}\ etc. = 0.$$

und da wir z selbst, oder z^{+1} suchen, so ist $t = +1$.

Bringt man nun die Werthe von m, r, t, desgl. von $\overset{3}{\mathfrak{A}}$, $\overset{4}{\mathfrak{A}}$, *etc.*, und was davon abhängt, in die allgemeine Auflösungsreihe (Tafel III. A.), so siehet man leicht, daß, da wir nur das einzige D. Z. der ersten Ordnung $\overset{2}{\mathfrak{A}}$ haben, in jeder höhern Ordnung nur das niedrigste D. Z., nemlich $\overset{4}{\mathfrak{B}}$, $\overset{6}{\mathfrak{C}}$, $\overset{8}{\mathfrak{D}}$, *etc.* wirklichen Werth haben, alle übrigen $= 0$ seyn werden. Wir erhalten daher

$$z = y - \overset{2}{\mathfrak{A}} y^3 + \tfrac{6}{2} \overset{4}{\mathfrak{B}} y^5 - \frac{8.9}{2.3} \overset{6}{\mathfrak{C}} y^7 + \frac{10.11.12}{2.3.4} \overset{8}{\mathfrak{D}} y^9 - etc.$$

Da aber $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a(a+x)}$; so ist $\overset{4}{\mathfrak{B}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a^2(a+x)^2}$; $\overset{6}{\mathfrak{C}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a^3(a+x)^3}$; $\overset{8}{\mathfrak{D}} = (\overset{2}{\mathfrak{A}})^4 = \frac{1}{a^4(a+x)^4}$; *etc.* und $y = \frac{2a^3+x^3}{a(a+x)}$. Demnach

$$z = \frac{2a^3+x^3}{a(a+x)} - \frac{(2a^3+x^3)^3}{a^4(a+x)^4} + \tfrac{6}{2}\frac{(2a^3+x^3)^5}{a^7(a+x)^7} - \frac{8.9}{2.3}\frac{(2a^3+x^3)^7}{a^{10}(a+x)^{10}} + etc.$$

in welcher Reihe, theils das Fortschreitungsgesetz deutlich vor Augen liegt, theils die Convergenz der Reihe leicht zu beurtheilen ist, so bald für a und x bestimmte Zahlen gegeben sind.

2) Auflösung der zweiten Form $2a^3 + x^3 = z^3 + a(a+x)z$. Da hier die erste Potenz neben $=$, nemlich z^3 den Coefficienten 1 hat, so läßt sich diese Form unmittelbar mit dem Schema vergleichen. Diese Vergleichung giebt $y = 2a^3 + x^3$; $x = z$; $m = +3$; $r = -2$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = a(a+x)$; $\overset{3}{\mathfrak{A}}$ etc. $= 0$; und da wir z selbst (keine höhere Potenz) suchen, so ist $t = +1$; demnach (Taf. III.)

$$z = y^{\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{\mathfrak{A}}y^{-\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}.\tfrac{0}{6}\overset{4}{\mathfrak{B}}y^{-\frac{3}{3}} - \tfrac{1}{3}\tfrac{(-2)}{6}\tfrac{1}{9}\overset{6}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{5}{3}} + \tfrac{1}{3}.\tfrac{(-4)}{6}.\tfrac{(-1)}{9}.\tfrac{2}{12}\overset{8}{\mathfrak{D}}y^{-\frac{7}{3}}$$
$$- \tfrac{1}{3}\tfrac{(-6)}{6}\tfrac{(-3)}{9}\tfrac{0}{12}\tfrac{3}{15}\overset{10}{\mathfrak{E}}y^{-\frac{9}{3}} + \tfrac{1}{3}\tfrac{(-8)}{6}.\tfrac{(-5)}{9}.\tfrac{(-2)}{12}\tfrac{1}{15}\tfrac{4}{18}\overset{12}{\mathfrak{F}}y^{-\frac{11}{3}} - etc.$$

Es dienet zur leichtern Uebersicht des Fortschreitungsgesetzes, wenn man die Zeichen $(-)$, wie wir gethan haben, in den Zählern stehen lässet. Schreibt man in der gefundenen Reihe $(2a^3 + x^3)$ für y; und $a(a+x)$ für $\overset{2}{\mathfrak{A}}$; $a^2(a+x)^2$ für $\overset{4}{\mathfrak{B}}$; $a^3(a+x)^3$ für $\overset{6}{\mathfrak{C}}$; etc., so wird

$$z = (2a^3+x^3)^{\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}a(a+x)(2a^3+x^3)^{-\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}\tfrac{0}{6}a^2(a+x)^2(2a^3+x^3)^{-\frac{3}{3}}$$
$$- \tfrac{1}{3}\tfrac{(-2)}{6}\tfrac{1}{9}a^3(a+x)^3(2a^3+x^3)^{-\frac{5}{3}} + \tfrac{1}{3}\tfrac{(-4)}{6}\tfrac{(-1)}{9}\tfrac{2}{12}a^4(a+x)^4(2a^3+x^3)^{-\frac{7}{3}}$$
$$- \tfrac{1}{3}\tfrac{(-6)}{6}\tfrac{(-3)}{9}\tfrac{0}{12}\tfrac{3}{15}a^5(a+x)^5(2a^3+x^3)^{-\frac{9}{3}} + etc.$$

Oder

$$z = \sqrt[3]{(2a^3+x^3)} - \tfrac{1}{3}\frac{a(a+x)}{\sqrt[3]{(2a^3+x^3)}} + \tfrac{1}{3}\tfrac{0}{6}\frac{a^2(a+x)^2}{\sqrt[3]{(2a^3+x^3)^3}} - \tfrac{1}{3}\tfrac{(-2)}{6}\tfrac{1}{9}\frac{a^3(a+x)^3}{\sqrt[3]{(2a^3+x^3)^5}}$$
$$+ \tfrac{1}{3}\tfrac{(-4)}{6}\tfrac{(-1)}{9}\tfrac{2}{12}\frac{a^4(a+x)^4}{\sqrt[3]{(2a^3+x^3)^7}} - \tfrac{1}{3}\tfrac{(-6)}{6}\tfrac{(-3)}{9}\tfrac{0}{12}\tfrac{3}{15}\frac{a^5(a+x)^5}{\sqrt[3]{(2a^3+x^3)^9}} + etc.$$

Diese Reihe bestehet aus lauter irrationalen Gliedern, indem leicht zu übersehen ist, daß alle die Glieder, welche rational sind (das 3te, 6te, 9te etc.), den Coefficienten Null haben. Indeß hindert dies die Brauchbarkeit einer solchen Reihe zu Näherungsrechnungen nicht, da die irrationalen Glieder sämtlich Potenzen einer und derselben Irrationalität, nemlich $\sqrt[3]{(2a^3 + x^3)}$ enthalten. Denn wenn die Reihe nur sonst convergiret, so läßt sich dieser einzige irrationale Ausdruck ohne Schwierigkeit berechnen, und dann kann man davon, wie von jeder andern Zahl, die nöthigen Potenzen berechnen.

§. 107.

§. 107. Anmerkung.

Im zweiten Theil werden wir zeigen, daß dergleichen auf verschiedene Art gefundene Reihen, nicht schlechthin einander an Werth gleich sind, sondern daß es verschiedene Ausdrücke, für die verschiedenen Wurzeln einer Gleichung sind. Hier ist noch nicht der Ort, diese Materie auszuführen, daher begnügen wir uns, die Sache hier erwähnt zu haben. Uebrigens ist die aufgelösete Gleichung aus Newtons Method of Fluxions (pag. 9. der franz. Uebers.) genommen, wo sie auf einem andern sehr mühsamen Wege aufgelöset worden.

§. 108. Zusatz.

Wenn die für z gefundenen Reihen geradezu nach Potenzen von x fortschreiten sollten, so läßt sich dies nach geschehener Auflösung in jedem Falle bewerkstelligen, indem man jedes Glied der gefundenen Reihe in eine unendliche Reihe auflöset. Es läßt sich aber diese Auflösung immer auf eine allgemeine Art verrichten; so ist z. B. in der ersten der gefundenen Reihen

$$z = \frac{2a^3+x^3}{a(a+x)} - \frac{(2a^3+x^3)^3}{a^4(a+x)^4} + \frac{6}{2}\,\frac{(2a^3+x^3)^5}{a^7(a+x)^7} - etc.$$

das $n$te Glied $= \mp \dfrac{2n(2n+1)(2n+2)\ldots 3(n-1)}{2.\ \ 3.\ \ 4\ \ldots\ (n-1)}\,\dfrac{(2a^3+x^3)^{2n-1}}{(a^2+ax)^{3n-2}}$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades n gilt. Hier läßt sich der Bruch

$$\frac{(2a^3+x^3)^{2n-1}}{(a^2+ax)^{3n-2}} = (2a^3+x^3)^{2n-1}(a^2+ax)^{-3n+2}$$

in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln, welches hier blos vermittelst des Binomialsatzes geschehen könnte. Setzte man dann in dieser Reihe für n, nach und nach 1, 2, 3, *etc.*, und gäbe jeder Reihe ihren zugehörigen Coefficienten, so würde man jedes Glied der Reihe z, durch eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe ausgedrückt erhalten; und alle diese Reihen, durch Addition vereinigt, würden z in einer Reihe nach Potenzen von x geben.

§. 109. Erläuterungsaufgabe. 3.

Eine Wurzel der Gleichung $4x^3 - 3x = c$ durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Aufl. Aus der Gleichung folget $-\frac{1}{3}c = x - \frac{4}{3}x^3$. Vergleichet man sie in dieser Form mit dem allgemeinen Schema $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^{m+2r} + etc.$ so ergiebt sich $y = -\frac{1}{3}c$; $m = 1$; $r = 2$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = -\frac{4}{3}$; $\overset{3}{\mathfrak{A}}$ und alle übrige D. Z. der ersten Ordnung $= 0$. Da x selbst gesucht wird, so ist $t = 1$.

Substituiret man nun in der allgemeinen Auflösungsreihe Taf. III. A. anfänglich blos die Werthe von m, t, und r, so erhält man

$$x = y - \overset{2}{\mathfrak{A}} y^3 + \frac{6}{2} \overset{4}{\mathfrak{B}} y^5 - \frac{8.9}{2.3} \overset{6}{\mathfrak{C}} y^7 + \frac{10.11.12}{2.3.4.} \overset{8}{\mathfrak{D}} y^9 - etc.$$

setzt man dann ferner $y = -\frac{1}{3}c$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = -\frac{4}{3}$, daher $\overset{4}{\mathfrak{B}} = +\frac{4^2}{3^2}$; $\overset{6}{\mathfrak{C}} = -\frac{4^3}{3^3}$; $\overset{8}{\mathfrak{D}} = +\frac{4^4}{3^4}$; *etc.* so wird

$$x = -\frac{1}{3}c - \frac{4}{3^4}c^3 - \frac{6}{2}.\frac{4^2}{3^7}c^5 - \frac{8.9}{2.3}\frac{4^3}{3^{10}}c^7 - \frac{10.11.12}{2.3.4.}\frac{4^4}{3^{13}}c^9 - etc.$$

eine Reihe, die leicht zu verlängern ist, und für kleine c ziemlich stark convergiret.

Die hier aufgelösete Gleichung ist eine von denen, von welchen die Theilung eines Winkels in 3 Theile abhängt. Es ist nemlich $Cos. \varphi = 4\ Cos. \frac{1}{3}\varphi^3 - 3\ Cos. \frac{1}{3}\varphi$. Wenn demnach c der Cosinus eines Winkels φ ist, so wird x der Cosin. von $\frac{1}{3}\varphi$ seyn. Beim ersten Anblick könnte die gefundene Reihe, mit dieser Vorstellung nicht übereinstimmend scheinen, weil x, für jedes positive c, negativ wird. Allein unsere Gleichung hat drei reelle Wurzeln, nemlich $Cos. \frac{1}{3}\varphi$; $Cos. \frac{1}{3}(360 - \varphi)$; und $Cos. \frac{1}{3}(360 + \varphi)$. Unsere Reihe giebt den mittelsten dieser drei Werthe $Cos. \frac{1}{3}(360 - \varphi)$ oder $Cos. (120 - \frac{1}{3}\varphi)$, welcher allerdings negativ seyn muß, so lange c positiv oder $\varphi < 90°$ ist. Man setze $\varphi = 60°$, also $c = +\frac{1}{2}$; so geben die sieben ersten Glieder der Reihe $x = -0{,}173\,647\,9$. Diese Größe positiv genommen, ist in den Tafeln der Cos. 80°, also negativ der Cos. 100°; wie es zu Folge der obigen seyn muß; denn $Cos. (120° - \frac{1}{3}\varphi)$ ist hier $= Cos. (120° - 20°) = Cos. 100°$.

Aus eben der Gleichung lassen sich auch Reihen für die übrigen Wurzeln der Gleichung ableiten; auf welche Art? werde ich im zweiten Theile zeigen.

§. 110. Erläuterungsaufgabe. 4.

Aus der transcendenten Gleichung $x = n.\ Cos. x$ den Werth von x durch eine unendliche Reihe zu finden.

Auflösung. Aus der gegebenen Gleichung folgt $\frac{x}{n} = Cos. x$; und wenn man für $Cos. x$, die bekannte Reihe setzt

$$\frac{x}{n} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1...4} - \frac{x^6}{1...6} + etc.$$

Diese Gleichung läßt sich wirklich auf unzählige Arten, unter die Form des allgemeinen Schema $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{n+r} + etc.$ bringen.

Denn

Denn zuerst kann man 1, auf die linke, und $\frac{x}{m}$ auf die rechte Seite bringen. Alsdenn kann man auch die ganze Reihe, durch jede darin vorkommende Potenz von x dividiren, und das durch diese Division von x befreite Glied auf die linke, alles übrige aber auf die rechte Seite bringen.

Die einfachste Anordnung erhält man, wenn die ganze Reihe durch x dividirt wird, so erhält man

$$\frac{1}{n} = x^{-1} - \frac{x}{1.2} + \frac{x^3}{1..4} - \frac{x^5}{1...6} + \frac{x^7}{1...8} - etc.$$

Vergleicht man die Reihe in dieser Gestalt mit dem allgemeinen Schema, so ist $y = \frac{1}{n}$; $m = -1$; $r = +2$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{-1}{1.2}$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{+1}{1..4}$; $\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{-1}{1...6}$; *etc.* welches die Coeff. der Cosinusreihe vom zweiten Gliede an sind (Taf. VII. B.). Setzt man ferner $t = +1$, und bringt diese Werthe in die allgemeine Auflösungsreihe (Taf. III.), so erhält man

$$\begin{array}{llllll} x = n & + \overset{2}{\mathfrak{A}} n^3 & + \overset{3}{\mathfrak{A}} n^5 & + \overset{4}{\mathfrak{A}} n^7 & + \overset{5}{\mathfrak{A}} n^9 & + etc. \\ & & + \frac{4}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}}\ '' & + \frac{6}{2}\overset{5}{\mathfrak{B}}\ '' & + \frac{8}{2}\overset{6}{\mathfrak{B}}\ '' & \\ & & & + \frac{6.5}{2.3}\overset{6}{\mathfrak{C}}\ '' & + \frac{8.7}{2.3}\overset{7}{\mathfrak{C}}\ '' & \\ & & & & + \frac{8.7.6}{2.3.4}\overset{8}{\mathfrak{D}}\ '' & \end{array}$$

Wenn die Coefficienten einiger Glieder dieser Reihe in Zahlen ausgedrückt werden sollen, so findet man vermittelst der Tafel VII. B.

$$\begin{array}{lll} \overset{2}{\mathfrak{A}} & = - \frac{1}{1.2} & = - 0,5 \\ \overset{3}{\mathfrak{A}} + 2\overset{4}{\mathfrak{B}} & = + \frac{13}{1..4} & = + 0,541\ 666\ 666 \ldots . \\ \overset{4}{\mathfrak{A}} + 3\overset{5}{\mathfrak{B}} + 5\overset{6}{\mathfrak{C}} & = - \frac{541}{1...6} & = - 0,752\ 222\ 222 \ldots .. \\ \overset{5}{\mathfrak{A}} + 4\overset{6}{\mathfrak{B}} + \frac{28}{3}\overset{7}{\mathfrak{C}} + 14\overset{8}{\mathfrak{D}} & = + \frac{47545}{1.....8} & = + 1,179\ 191\ 468\ 253\ 968\ 253 .. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Also } x = n & - n^3.\ 0,5 \\ & + n^5.\ 0,541\ 666 \ldots \ldots \\ & - n^7.\ 0,752\ 222 \ldots \ldots \\ & + n^9.\ 1,179\ 191\ 468\ 253\ 968\ 253 \ldots \end{array}$$

§. 111. Zusatz.

Man übersiehet sehr leicht, daß die Reihe divergiret, wenn $n > 1$, daß sie hingegen für $n < 1$ convergiret, und schon ziemlich stark, wenn $n = \frac{1}{4}$. Wir wollen $n = \frac{1}{10}$ setzen, so wird, wenn wir das 1ste, 2te, 3te *etc.* Glied blos durch (1), (2), (3) *etc.* anzeigen,

$$\begin{array}{rr|rr}
(1) = & +\ 0,\ 1 & (2) = & -\ 0,\ 000\ 5 \\
(3) = & 0,\ 000\ 005\ 416\ 6 & (4) = & 0,\ 000\ 000\ 075\ 2 \\
(5) = & 0,\ 000\ 000\ 001\ 2 & & -\ 0,\ 000\ 500\ 075\ 2 \\
 & +\ 0,\ 100\ 005\ 417\ 8 & & +\ 0,\ 100\ 005\ 417\ 8 \\
 & & x = & 0,\ 099\ 505\ 342\ 6 = \frac{1}{10}\,\mathrm{Cos.}\,x
\end{array}$$

Um x in Grade zu verwandeln, muß sein Werth mit einer Zahl $p = 57,295\ldots$ (§. 64. *B*) multipliciret werden. Es ist aber

$$\begin{aligned}
lx &= 8,\ 997\ 846\ 4 \\
lp &= 1,\ 758\ 122\ 6 \quad (\text{§. } 64.\ B) \\
lpx &= 0,\ 755\ 969\ 0;\ px = 5,\ 701\ 235\ \text{Grade} \\
\text{oder } x &= 5^{0}.\ 42^{1}.\ 4^{11},\ 45.
\end{aligned}$$

Die Tafeln geben $\mathrm{Cos.}\,x = 0,\ 995\ 053\ 4$, so wie es unserer Rechnung gemäß ist.

Für größere Werthe von n, z. B. $n = 1$, kann die entwickelte Reihe zur wirklichen Berechnung nicht gebraucht werden. Es fehlet aber nicht an Mitteln, auch für dergleichen Fälle zusammenlaufende Reihen zu schaffen. Diese Untersuchung aber gehört nicht hierher, wo wir blos einige Aufgaben zur Erläuterung des Gebrauchs unserer Auflösungsreihe beibringen wollten.

§. 112. Erläuterungsaufgabe. 5.

Es ist eine transcendente Function von x, nemlich $y = ax^{nx}$ gegeben: man soll x, durch eine Reihe ausdrücken, die nach Potenzen von y, oder einer Function von y fortschreitet.

Aufl. Um die Function $y = ax^{nx}$ in eine Reihe aufzulösen, nehme man die Logarithmen, so ist $\log.\frac{y}{a} = nx\,lx$. Nun sollte lx in eine Reihe nach Potenzen von x verwandelt werden, welches aber nicht anders, als durch eine Reihe geschehen kann, worin jeder Coefficient selbst eine unendliche Reihe ist. Um dieser Unbequemlichkeit auszuweichen, setze man $x = 1 + z$; und wenn man zur Abkürzung $(l\frac{y}{a}) : n = \lambda$ setzt, so ist $\lambda = (1 + z)\log.(1 + z)$. Es ist aber

$$\log.(1 + z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \tfrac{1}{5}z^5 - etc.$$

folglich

folglich $(1+z)\log.(1+z) =$

$$\lambda = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \tfrac{1}{5}z^5 - etc.$$
$$\quad + \tfrac{1}{1}z^2 - \tfrac{1}{2}z^3 + \tfrac{1}{3}z^4 - \tfrac{1}{4}z^5 + etc.$$

oder $\lambda = z + \frac{1}{1.2}z^2 - \frac{1}{2.3}z^3 + \frac{1}{3.4}z^4 - \frac{1}{4.5}z^5 + etc.$

Diese Reihe läßt sich geradezu mit den allgemeinen Schema $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^{m+r} + etc.$ vergleichen. Die Vergleichung giebt

$$y = \lambda;\ m = 1;\ r = 1;\ \overset{2}{\mathfrak{A}} = +\frac{1}{1.2};\ \overset{3}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{2.3};\ \overset{4}{\mathfrak{A}} = +\frac{1}{3.4};\ etc.$$

und wenn wir z selbst suchen, so ist noch $t = +1$. Bringt man die Werthe von y, m, r, t in die allgemeine Auflösungsreihe Taf. III. A., so findet man

$$\begin{array}{llll}
z = \lambda - \overset{2}{\mathfrak{A}}\lambda^2 - & \overset{3}{\mathfrak{A}}\lambda^3 - & \overset{4}{\mathfrak{A}}\lambda^4 - & \overset{5}{\mathfrak{A}}\lambda^5 - etc. \\
 & + \frac{4}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}}\,'' & + \frac{5}{2}\overset{5}{\mathfrak{B}}\,'' & + \frac{6}{2}\overset{6}{\mathfrak{B}}\,'' \\
 & & - \frac{5.6}{2.3}\overset{6}{\mathfrak{C}}\,'' & - \frac{6.7}{2.3}\overset{7}{\mathfrak{C}}\,'' \\
 & & & + \frac{6.7.8}{2.3.4}\overset{8}{\mathfrak{D}}\,''
\end{array}$$

Setzt man zu dieser Reihe noch 1 hinzu, so erhält man $1 + z = x$, durch eine Reihe ausgedrückt, welche nach Potenzen einer Function von y, nemlich $\lambda = \log.\frac{y}{a} : n$, oder $\lambda = \frac{ly - la}{n}$, fortschreitet, und deren Coefficienten man, so weit als es verlangt wird, bestimmen kann.

§. 113. Zusatz.

Die Uebersetzung der D. Z. in die gemeine Bezeichnung, ist immer, wie wir schon öfters erinnert haben, im Allgemeinen entbehrlich, und Nebensache. Doch wollen wir auch bei dieser Reihe einige Glieder berechnen, weil das Gesetz derselben in Ziffern noch weit einfacher erscheint, als in Dimensionszeichen. Es ist also

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = +\frac{1}{1.2}$	Daher		
$\overset{3}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{2.3}$	$\overset{4}{\mathfrak{B}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = +\frac{1}{2.2}$		
$\overset{4}{\mathfrak{A}} = +\frac{1}{3.4}$	$\overset{5}{\mathfrak{B}} = 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{2.3}$	$\overset{6}{\mathfrak{C}} = +\frac{1}{2.2.2}$	
$\overset{5}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{4.5}$	$\overset{6}{\mathfrak{B}} = 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = +\frac{1}{3.3}$	$\overset{7}{\mathfrak{C}} = -\frac{1}{2.2.2}$	$\overset{8}{\mathfrak{D}} = +\frac{1}{2^4}$
etc.	etc.	etc.	etc.

demnach

$$\text{demnach } x = 1 + \lambda - \frac{1}{1.2}\lambda^2 + \frac{1}{2.3}\lambda^3 - \frac{1}{3.4}\lambda^4 + \frac{1}{4.5}\lambda^5 - etc.$$
$$+ \frac{4}{2}\,\frac{1}{2.2}\,\text{〃} - \frac{5}{2}\,\frac{1}{2.3}\,\text{〃} + \frac{6}{2}\,\frac{1}{3.3}\,\text{〃}$$
$$- \frac{5.6}{2.3}\,\frac{1}{2.2.2}\,\text{〃} + \frac{6.7}{2.3}\,\frac{1}{2.2.2}\,\text{〃}$$
$$+ \frac{6.7.8}{2.3.4}\,\frac{1}{2^4}\,\text{〃}$$

$$\text{Oder } x = 1 + \lambda - \frac{1}{1.2}\lambda^2 + \frac{2^2}{1.2.3}\lambda^3 - \frac{3^3}{1..4}\lambda^4 + \frac{4^4}{1...5}\lambda^5 - etc.$$

Das hier in Zahlen hervorspringende einfache Gesetz ist wirklich das Gesetz der ganzen Reihe, und wegen seiner Einfachheit merkwürdig.

Es ist aber, wie man aus dem vorigen §. weiß, in dieser Reihe $\lambda = \frac{ly - la}{n}$, und y eine solche Function von x, daß $y = ax^{nx}$.

§. 114. Erläuterungsaufgabe. 6.

Aus der transcendenten Gleichung $n = (x^3 - 3x)$ Sec. x den Werth von x durch eine Reihe zu finden.

Aufl. Nach §. 85. war

$$\text{Sec.}\,x = 1 + \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{5}{1..4}x^4 + \frac{61}{1...6}x^6 + \frac{1385}{1...8}x^8 + etc.$$

$$\text{Daher } n = x^3 + \frac{1}{1.2}x^5 + \frac{5}{1..4}x^7 + \frac{61}{1...6}x^9 + etc.$$
$$- 3x - \frac{3}{1.2}x^3 - \frac{15}{1..4}\,\text{〃} - \frac{183}{1...6}\,\text{〃} - \frac{4155}{1...8}\,\text{〃} - etc.$$

$$n = -3x - \frac{1}{1.2}x^3 - \frac{3}{1..4}x^5 - \frac{33}{1...6}x^7 - \frac{739}{1...8}x^9 - etc.$$

$$\text{also } -\tfrac{1}{3}n = x + \frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1}{1..4}x^5 + \frac{11}{1...6}x^7 + \frac{739}{3.1...8}x^9 + etc.$$

Dies mit den allgemeinen Schema verglichen, giebt das dortige y, hier $= -\frac{1}{3}n$, wofür wir wieder v setzen wollen. Ferner $m = 1$; $r = 2$; $t = 1$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{1.2.3}$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{1..4}$; etc.; demnach

$$\begin{array}{llll} x = v - \overset{2}{\mathfrak{A}}\, v^3 & - \overset{3}{\mathfrak{A}}\, v^5 & - \overset{4}{\mathfrak{A}}\, v^7 & - \overset{5}{\mathfrak{A}}\, v^9 - \text{etc.} \\ & + \frac{6}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}}\ '' & + \frac{8}{2}\overset{5}{\mathfrak{B}}\ '' & + \frac{10}{2}\overset{6}{\mathfrak{B}}\ '' \\ & & - \frac{8.9}{2.3}\overset{6}{\mathfrak{C}}\ '' & - \frac{10.11.}{2.3}\overset{7}{\mathfrak{C}}\ '' \\ & & & + \frac{10.11.12}{2.3.4}\overset{8}{\mathfrak{D}}\ '' \end{array}$$

Um die hier stehenden Glieder zu berechnen, haben wir

$$\begin{array}{l|l|l|l} \overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{1.2.3} & \text{Daher} & & \\ \overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{1\,..\,4} & \overset{4}{\mathfrak{B}} = \frac{1}{6.\,1.\,2.\,3} & & \\ \overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{11}{1\,...\,6} & \overset{5}{\mathfrak{B}} = \frac{1}{3.\,1\,..\,4} & \overset{6}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{9.\,1\,..\,4} & \\ \overset{5}{\mathfrak{A}} = \frac{739}{3.\,1\,...\,8} & \overset{6}{\mathfrak{B}} = \frac{59}{12.\,1\,...\,6} & \overset{7}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{12.\,1\,..\,4} & \overset{8}{\mathfrak{D}} = \frac{1}{54.\,1\,..\,4} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{folglich } x = v - \frac{1}{1.2.3} v^3 & - \frac{1}{1\,..\,4} v^5 & - \frac{11}{1\,...\,6} v^7 & - \frac{739}{3.\,1\,...\,8} v^9 - \text{etc.} \\ & + \frac{1}{2.1.2.3}\ '' & + \frac{4}{3.\,1\,..\,4}\ '' & + \frac{295}{12.\,1\,..\,6}\ '' \\ & & - \frac{4}{3.\,1\,..\,4}\ '' & - \frac{55}{36.\,1\,..\,4}\ '' \\ & & & + \frac{55}{54.\,1\,..\,4}\ '' \end{array}$$

$$x = v - \frac{1}{1.2.3} v^3 + \frac{1}{1\,..\,4} v^5 - \frac{11}{1\,...\,6} v^7 + \frac{2473}{1\,...\,9} v^9 - \text{etc.}$$

Und wenn man $-\frac{1}{3}n$ statt v setzt, so ist

$$x = -\frac{n}{3} + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{n^3}{3^3} - \frac{1}{1\,..\,4}\cdot\frac{n^5}{3^5} + \frac{11}{1\,...\,6}\cdot\frac{n^7}{3^7} - \frac{2473}{1\,...\,9}\cdot\frac{n^9}{3^9} + \text{etc.}$$

Diese Reihe convergiret schon für $n = 3$, und für $n = 1$, so stark, daß die berechneten fünf Glieder x schon in sieben bis acht Ziffern geben. Für diesen Fall giebt nemlich die Rechnung $x = -0{,}327\,325\,32\,.. = -18^{\circ}.\,45'.\,15'',\,7$, wo höchstens die letzte Ziffer ungewiß ist.

Die bisher beigebrachten Aufgaben, werden, wie ich glaube, hinreichend seyn, den Gebrauch unserer Auflösungsmethode zu erläutern. Im zweiten Theile werden wir, wie schon oben erinnert worden, umständlicher von ihrer Anwendung auf mehrere analytische Arbeiten handeln.

Sechster Abschnitt.

Besondere Entwickelung der höhern Potenzen einiger wichtigen Reihen.

§. 115. Einleitung.

Der Leser wird in den vorigen dritten, vierten und fünften Abschnitten wahrgenommen haben, daß in jeder entwickelten Reihe, so lange wir die Dimensionszeichen beibehielten, ein allgemeines Fortschreitungsgesetz einfach und deutlich vor Augen lag, daß aber dieses Gesetz bei der Uebersetzung in Zahlen entweder gänzlich verschwand, oder doch nur so sichtbar blieb, daß man von der Richtigkeit desselben, nicht anders, als durch Induction versichert seyn konnte (§. 87. 100. 113.). Die Ursache dieses Verschwindens ist leicht zu entdecken. Man nehme die erste beste Reihe, die wir gefunden haben, z. B. (§. 76.)

$$\text{Cosec.}\, x = x^{-1} - \overset{2}{\mathfrak{A}}\, x - (\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})\, x^3 - (\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})\, x^5 - etc.$$

so enthält dieselbe eigentlich nicht blos einen Ausdruck für die Cosecante des Bogens x, sondern einen ganz allgemeinen Ausdruck für unzählige Reihen, welche aus irgend einer Reihe, die mit der Sinusreihe **einerlei Form** hat, **durch eben die Rechnungsoperation** abgeleitet werden können, durch welche wir die Reihe für die Cosecante aus der Sinusreihe fanden; nemlich durch Erhebung zur Potenz -1. Denn was auch immer die Reihe

$$(A)\ y = x + \overset{2}{\mathfrak{A}}\, x^3 + \overset{3}{\mathfrak{A}}\, x^5 + \overset{4}{\mathfrak{A}}\, x^7 + etc.$$

vorstellen mag, so wird immer, wie in der Cosecantenreihe

$$(B)\ \frac{1}{y} = x^{-1} - \overset{2}{\mathfrak{A}}\, x - (\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})\, x^3 - (\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})\, x^5 - etc.$$

seyn. So könnte z. B. (A) die Tangentenreihe bedeuten, und dann würde derselbe Ausdruck (B), der oben für die Cosecante gefunden war, die Cotangente des Bogens x vorstellen. Eben so könnte in (A), y einen Bogen bedeuten, der durch seine Tangente x ausgedrückt wäre, und dann würde (B) der reciproke Werth dieses Bogens, oder $\frac{1}{y}$ seyn. Auch könnte in (A) $y = \frac{1}{2} \log. \frac{1+x}{1-x}$ seyn, und dann gäbe (B) den Werth von $\frac{2}{\log. \frac{1+x}{1-x}}$; u. d. gl. m. Die Reihe (B) wird also offenbar nur dadurch zu einer Reihe für die Cosecante, daß die Dimensionszeichen sich auf die Coefficienten der Sinusreihe beziehen.

Da

Da also jede durch Hülfe unserer Zeichen gefundene Reihe, wirklich nicht eine einzelne Reihe, sondern eine ganze Klasse von Reihen vorstellt, und das allgemeine Gesetz dieser ganzen Klasse sichtbar macht; so kann sie nicht auch zugleich das besondere Gesetz jeder einzelnen Reihe dieser Klasse enthalten; sondern dieses erfordert in jedem Falle eine besondere Untersuchung, die man indessen in den meisten Fällen entbehren kann, da durch jenes allgemeine Gesetz jede gefundene Reihe, so weit man will, berechnet werden kann. Für die Lehre von den Reihen, bleibt indessen die Bestimmung des besondern Gesetzes jeder Reihe, eine wichtige Sache, und obgleich die D. Z. unmittelbar dies Gesetz nicht entdecken können, so scheinen sie doch einen ganz allgemeinen Weg zu zeigen, durch dessen Verfolgung es möglich seyn dürfte, das Gesetz jeder Reihe zu finden, welche durch irgend eine analytische Operation, aus irgend einer andern Reihe, deren Gesetz bekannt ist, abgeleitet werden kann. Es läßt sich nemlich jede abgeleitete Reihe, wie wir bisher gesehen haben, auf eine ganz einfache und regelmäßige Art aus den D. Z. der verschiedenen Ordnungen zusammensetzen. Man müßte daher aus dem bekannten Gesetz, welchem die Werthe von den D. Z. der ersten Ordnung in einem besondern Falle folgen, das Gesetz zu bestimmen suchen, dem die Werthe der D. Z. in jeder höhern Ordnung folgen. Denn kennt man ein Gesetz für alle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ *etc.*, so ist offenbar, daß zugleich ein Gesetz für jede Reihe gefunden ist, welche aus diesen Zeichen auf eine regelmäßige Art zusammengesetzt ist. Dies so gefundene Gesetz wird sich in vielen Fällen noch einfacher ausdrücken lassen, wozu durch die angezeigte Untersuchung wenigstens der Weg gebahnt seyn wird.

Nun giebt es gewisse Hauptreihen, (deren Anzahl nicht groß ist,) aus welchen alle übrige ihren Ursprung haben. Dahin gehören unter den algebraischen z. B. die arithmetische, geometrische, Binomialreihe rc. unter den transcendenten die Reihen, welche $\sin. x$, $\cos. x$, $\log.(1+x)$; $\text{Num.}\log. x$ *etc.* durch x ausdrücken. Bezeichnet man nun die Coefficienten von dergleichen Hauptreihen mit D. Z., und suchet aus den bekannten Eigenschaften der Functionen, welche diese Reihen ausdrücken, das Fortschreitungsgesetz für jede ganze und positive Potenz derselben zu bestimmen, so erhält man dadurch offenbar das Gesetz für alle höheren Ordnungen der Dimensionszeichen, die, wie man aus dem dritten Abschnitt weiß, nichts anders sind, als die Coefficienten der höheren Potenzen.

Gelänge diese Arbeit für alle solche Hauptreihen, so ist klar, daß wenig oder keine abgeleitete Reihe übrig seyn würde, bei welcher nicht auf diese Art, ein Fortschreitungsgesetz selbst in der gewöhnlichen Bezeichnung sichtbar gemacht werden könnte. Wenn uns z. B. in der obigen Reihe

$$\text{Cosec.}\, x = \frac{1}{x} - \overset{2}{\mathfrak{A}}\, x - (\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})\, x^3 - (\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})\, x^5 - \text{etc.}$$

deren $n$tes Glied, vom zweiten an gezählt

$$-(\overset{n+1}{\mathfrak{A}} - \overset{n+2}{\mathfrak{B}} + \overset{n+3}{\mathfrak{C}} - \ldots \mp \overset{2n}{\mathfrak{N}})\, x^{2n-1}$$

ist; wenn uns, sage ich, das Gesetz bekannt wäre, nach welchen nicht nur die Werthe von $\overset{2}{\mathfrak{A}}, \overset{3}{\mathfrak{A}}, \overset{4}{\mathfrak{A}}$ *etc* $\overset{n+1}{\mathfrak{A}}$; sondern auch die Werthe von $\overset{4}{\mathfrak{B}}, \overset{5}{\mathfrak{B}}, \overset{6}{\mathfrak{B}} \ldots \overset{n+2}{\mathfrak{B}}$, desgleichen von $\overset{6}{\mathfrak{C}}, \overset{7}{\mathfrak{C}}, \overset{8}{\mathfrak{C}} \ldots \overset{n+3}{\mathfrak{C}}$, u. s. f., also auch das Gesetz, nach welchen die Werthe von $\overset{n+1}{\mathfrak{A}}, \overset{n+2}{\mathfrak{B}}, \overset{n+3}{\mathfrak{C}}, \ldots \overset{2n}{\mathfrak{N}}$ fortschreiten, so ist klar, daß man auf diese Art wirklich ein Fortschreitungsgesetz der Reihe, selbst in der gewöhnlichen Bezeichnung gefunden haben würde.

Allein es ist leicht einzusehen, daß fast in allen Fällen, das so gefundene Gesetz, noch nicht das einfachste seyn wird, nach welchen die abgeleitete Reihe fortschreitet. Denn der terminus generalis einer solchen Reihe, wie

$$-(\overset{n+1}{\mathfrak{A}} - \overset{n+2}{\mathfrak{B}} + \overset{n+3}{\mathfrak{C}} - \ldots \mp \overset{2n}{\mathfrak{N}})\, x^{2n-1}$$

wird auf diese Art immer in Gestalt einer Reihe gefunden werden, die zwar gewöhnlich für ein bestimmtes n endlich, und daher eine algebraische Function von n seyn, in ihrer allgemeinen Form aber, doch aus einer unbestimmten Anzahl von Gliedern bestehen, und also einer Summirung fähig seyn wird. Diese Reihe nun müßte erst summiret werden, wenn man das Gesetz der Reihe in seiner einfachsten Gestalt haben wollte. Allein es zeigt sich hierbei eine erhebliche Schwierigkeit, indem wir finden werden, daß die Entwickelung der Reihen, mehrentheils hier auf solche Reihen für den terminus generalis führen, mit denen bisher die Analysten wenig Veranlassung gehabt haben, sich zu beschäftigen, daher es in den meisten Fällen, an denen zu ihrer Summirung nöthigen Kunstgriffen noch fehlt. Hierzu kommt der noch lästigere Umstand, daß einige Hauptreihen, namentlich die für Sin. x und Cos. x, in den höheren Potenzen einem Gesetze folgen, das sich schwerlich in der gemeinen Bezeichnungsart, auf so einfache Art wird ausdrücken lassen, als zu wünschen wäre.

Ich kann daher dasjenige, was ich in diesem und dem folgenden Abschnitte in Rücksicht dieser Untersuchung geleistet habe, nur für einen noch sehr unvollständigen Versuch ausgeben. Aber auch als solcher, hoffe ich dennoch, daß er der Aufmerksamkeit der Analysten nicht unwerth seyn wird; theils, weil es doch immer Gewinn ist, einen allgemeinen Weg zu kennen, der zu einem gewissen Ziele führt, wenn auch eine Strecke desselben erst gangbar gemacht werden müßte; theils, weil die dahin gehörigen Untersuchungen, womit wir uns in diesem und dem folgenden Abschnitte beschäftigen werden, auch, ohne die hier bestimmte Rücksicht, an und für sich nicht unerheblich sind.

Was ich in gegenwärtigen Abschnitt geleistet habe, bestehet darin, daß ich das Fortschreitungsgesetz für die höheren Potenzen einiger wichtigen Reihen entwickelt habe. Dahin gehören, unter den Reihen, die sich auf algebraische Functionen beziehen, die

geo=

geometrische, die arithmetische, und die Binomialreihe; unter denen die transcendente Functionen ausdrücken, die Reihe für Num. log. x, oder e^x, ferner für Sin. x, und Cos. x. Mit den beiden wichtigen Reihen für log. $(1+x)$, und für x durch tang. x, hat mir bis jetzt kein Versuch, das Gesetz der höheren Potenzen zu finden, glücken wollen.

§. 116. Aufgabe. 1.

Die Dimensionszeichen der ersten Ordnung stellen irgend eine **geometrische Reihe** vor, nemlich

$$\overset{1}{\mathrm{I}} = a;\ \overset{2}{\mathrm{I}} = ab;\ \overset{3}{\mathrm{I}} = ab^2;\ \overset{4}{\mathrm{I}} = ab^3;\ \overset{5}{\mathrm{I}} = ab^4;\ etc.$$

man soll das Gesetz von den Werthen der D. Z. für jede Ordnung bestimmen.

Aufl. Man formire eine Reihe, nach Potenzen einer willkührlichen Größe x, von welcher die Coefficienten vom ersten Gliede an, die Glieder unserer geometrischen Reihe sind. Nemlich

$$(A)\ y = a + abx + ab^2x^2 + ab^3x^3 + ab^4x^4 + etc.$$

Dies ist eine der einfachsten recurrirenden Reihen, welche aus der Evolution des Bruches $\frac{a}{1-bx}$ entspringt, so daß wir hier $y = \frac{a}{1+bx}$ haben. Von diesen Ausdruck aber lassen sich ohne Schwierigkeit alle höhere Potenzen formiren, und in Reihen verwandeln, so daß wir ohne Schwierigkeit jede Potenz der obigen Reihe entwickeln können. Es ist nemlich $y^n = \frac{a^n}{(1-bx)^n} = a^n(1-bx)^{-n}$, also nach dem Binomialsatz:

$$y^n = a^n\left(1 + \frac{n}{1}bx + \frac{n}{1}\,\frac{n+1}{2}\,b^2x^2 + \frac{n}{1}\,\frac{n+1}{2}\,\frac{n+2}{3}\,b^3x^3 + etc.\right) \text{ oder}$$

$$(B)\ y^n = a^n + \frac{n}{1}a^n bx + \frac{n}{1}\,\frac{n+1}{2}\,a^n b^2x^2 + \frac{n}{1}\,\frac{n+1}{2}\,\frac{n+2}{3}\,a^n b^3x^3 + etc.$$

Schreiben wir nun in der Reihe (A), statt der Coefficienten, die Dimensionszeichen, so ist:

$$(C)\ y = \overset{1}{\mathrm{I}}x^0 + \overset{2}{\mathrm{I}}x + \overset{3}{\mathrm{I}}x^2 + \overset{4}{\mathrm{I}}x^3 + \overset{5}{\mathrm{I}}x^4 + etc.$$

und wenn n eine ganze und positive Zahl ist, (welcher Fall hier blos in Betrachtung kommen kann,) so ist §. 46.

$$(D)\ y^n = \overset{n}{IN}x^0 + \overset{n+1}{IN}x + \overset{n+2}{IN}x^2 + \overset{n+3}{IN}x^3 + \overset{n+4}{IN}x^4 + etc.$$

Da nun (B) und (D) identisch sind, so haben wir $\overset{n}{IN} = a^n$; $\overset{n+1}{IN} = \frac{n}{1}a^n b$;

$\overset{n+2}{IN} = \frac{n(n+1)}{1.\ 2} a^n b^2$; $\overset{n+3}{IN} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3} a^n b^3$; $\overset{n+4}{IN} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^n b^4$;

etc. und allgemein $\overset{n+r}{IN} = \frac{n(n+1) \ldots\ldots (n+r-1)}{1.\ 2 \ldots\ldots r} a^n b^r$.

Substituiret man nun in diesen Formeln für n und IN, erst 2 und II, dann 3 und III, ferner 4 und IV u. s. f., so erhält man eine leicht zu übersehende Tafel der D. Z. aller Ordnungen, für den Fall, wenn die erste Ordnung eine geometrische Reihe vorstellt. Man findet sie auf Tafel IV. A.

§. 117. Aufgabe. 2.

Das Gesetz für die Werthe der Dimensionszeichen jeder Ordnung zu finden, wenn die von der ersten Ordnung irgend eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung vorstellen, nemlich:

$$\overset{1}{I} = a;\ \overset{2}{I} = a + b;\ \overset{3}{I} = a + 2b;\ \overset{4}{I} = a + 3b;\ \overset{5}{I} = a + 4b;\ etc.$$

Aufl. Man formire eine unendliche Reihe S, nach Potenzen einer willkührlichen Größe x, deren Coefficienten vom ersten Gliede an, die Glieder der obigen arithmetischen Reihe seyn. Diese Reihe ist also:

$$(A)\ S = ax + (a+b)x^2 + (a+2b)x^3 + (a+3b)x^4 + etc.$$

Aus der Entwickelung der ganzen und positiven Potenzen dieser Reihe, werden wir die Werthe der sämtlichen höheren D. Z. erhalten.

Um für S einen endlichen Ausdruck zu erhalten, oder die Reihe zu summiren, theile man sie in zweie, nemlich:

$$ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + etc. = \frac{ax}{1-x}$$

$$bx^2 + 2bx^3 + 3bx^4 + 4bx^5 + etc. = \frac{bxx}{(1-x)^2}$$

Demnach ist $S = \frac{ax}{1-x} + \frac{bx^2}{(1-x)^2} = \frac{ax}{1-x}\left(1 + \frac{bx}{a(1-x)}\right)$; folglich

$$S^n = \frac{a^n x^n}{(1-x)^n}\left(1 + \frac{n}{1}\frac{bx}{a(1-x)} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{b^2x^2}{a^2(1-x)^2} + \ldots\ldots + \frac{b^n x^n}{a^n(1-x)^n}\right);$$

(da wir nemlich hier n blos als ganze und positive Zahl betrachten, so ist die eingeklammerte Binomialreihe endlich.)

Oder ohne Klammer $S^n = \frac{a^n x^n}{(1-x)^n} + \frac{n}{1}\frac{a^{n-1}bx^{n+1}}{(1-x)^{n+1}} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{a^{n-2}b^2x^{n+2}}{(1-x)^{n+2}}$

$$+ \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\frac{a^{n-3}b^3x^{n+3}}{(1-x)^{n+3}} + \ldots\ldots + \frac{b^n x^{2n}}{(1-x)^{2n}}.$$

Diese

Diese Reihe muß nun so umgeformt werden, daß sie gerade zu nach Potenzen von x fortschreitet, da sie jetzt nach Potenzen von $\frac{x}{1-x}$ geordnet ist. Man setze um mehrerer Einfachheit willen $\frac{x}{1-x} = z$, also

$$(B)\ S^n = a^n z^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b z^{n+1} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 z^{n+2} + \ldots\ldots + b^n z^{2n}.$$

Da nun $(C)\ z = \frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + etc.$

so ist in (B) für z überall die Reihe (C) zu setzen, welches vermittelst der D. Z. ohne Schwierigkeit geschehen kann. Man bezeichne die Coefficienten der Reihe (C), auf die gewöhnliche Art mit D. Z., (wozu wir diesmal in der ersten Ordnung den Buchstaben A, und in den höheren Ordnungen $B, C, D \ldots\ldots N$, $(N+A)$, $(N+B)$, *etc.* wählen §. 34.) und setze also

$$(D)\ z = \overset{1}{A} x + \overset{2}{A} x^2 + \overset{3}{A} x^3 + \overset{4}{A} x^4 + etc.$$

wo $\overset{1}{A} = \overset{2}{A} = \overset{3}{A} = \overset{4}{A} = etc. = +1$ ist.

Substituiret man nun diesen Werth von z in (B), so erhält man (§. 46.)

$$\begin{array}{llllll}
(E)\ a^n z^n & = a^n \overset{n}{N} x^n & + a^n \overset{n+1}{N} x^{n+1} & + a^n \overset{n+2}{(N)} x^{n+2} & + etc. \\
\frac{n}{1} a^{n-1} b z^{n+1} = & & \frac{n}{1} a^{n-1} b \overset{n+1}{(N+A)} \,\text{:} & + \frac{n}{1} a^{n-1} b \overset{n+2}{(N+A)} \,\text{:} & + etc. \\
\frac{n}{1}\frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 z^{n+2} = & & & \frac{n}{1}\frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 \overset{n+2}{(N+B)} \,\text{:} & + etc. \\
\quad etc. & & & & etc. \\
a^n z^{2n} = & & & a^n \overset{2n}{(2N)} x^{2n} & + etc.
\end{array}$$

Die Summe aller dieser Reihen, deren Anzahl immer endlich seyn wird, ist $= S^n$. Setzt man nun in diesem Schema (E), auf der rechten Seite für N und n, bestimmte Zeichen, nemlich zuerst B und 2; dann C und 3, ferner D und 4, u. s. f., so erhält man nach und nach folgende Werthe von S^2, S^3, S^4, *etc.*

$$\begin{array}{llllll}
S^2 = a^2 \overset{2}{B} x^2 & + a^2 \overset{3}{B} x^3 & + a^2 \overset{4}{B} x^4 & + a^2 \overset{5}{B} x^5 & + a^2 \overset{6}{B} x^6 & + etc. \\
 & + 2ab \overset{3}{C} \,\text{:} & + 2ab \overset{4}{C} \,\text{:} & + 2ab \overset{5}{C} \,\text{:} & + 2ab \overset{6}{C} \,\text{:} & + etc. \\
 & & + b^2 \overset{4}{D} \,\text{:} & + b^2 \overset{5}{D} \,\text{:} & + b^2 \overset{6}{D} \,\text{:} & + etc.
\end{array}$$

$$S^3 = a^3\overset{3}{C}x^3 + a^3\overset{4}{C}x^4 + a^3\overset{5}{C}x^5 + a^3\overset{6}{C}x^6 + a^3\overset{7}{C}x^7 + etc.$$
$$+ 3a^2b\overset{4}{D} : + 3a^2b\overset{5}{D} : + 3a^2b\overset{6}{D} : + 3a^2b\overset{7}{D} : + etc.$$
$$+ 3ab^2\overset{5}{E} : + 3ab^2\overset{6}{E} : + 3ab^2\overset{7}{E} : + etc.$$
$$+ b^3\overset{6}{F} : + b^3\overset{7}{F} : + etc.$$

$$S^4 = a^4\overset{4}{D}x^4 + a^4\overset{5}{D}x^5 + a^4\overset{6}{D}x^6 + a^4\overset{7}{D}x^7 + a^4\overset{8}{D}x^8 + etc.$$
$$+ 4a^3b\overset{5}{E} : + 4a^3b\overset{6}{E} : + 4a^3b\overset{7}{E} : + 4a^3b\overset{8}{E} : + etc.$$
$$+ 6a^2b^2\overset{6}{F} : + 6a^2b^2\overset{7}{F} : + 6a^2b^2\overset{8}{F} : + etc.$$
$$+ 4ab^3\overset{7}{G} : + 4ab^3\overset{8}{G} : + etc.$$
$$+ b^4\overset{8}{H} : + etc.$$

von welchen das Fortschreitungsgesetz deutlich in die Augen fällt. Es ist also nur noch übrig, die D. Z. so wegzuschaffen, daß das Gesetz der Reihen noch immer sichtbar bleibe. Dies geschieht nun vermittelst der im vorigen §. berechneten Taf. IV. A. Denn da für unsern gegenwärtigen Fall die D. Z. der ersten Ordnung sämtlich $= + 1$ sind, (man sehe die Reihen (C), (D), die Reihe $1 + 1 + 1 + 1 + etc.$ aber eben sowohl eine geometrische als arithmetische Reihe ist, so sind die Werthe aller hier gebrauchten D. Z. in jener Tafel mit begriffen, und wir werden sie erhalten, wenn wir dort $a = b = 1$ setzen. Dadurch verwandelt sich jene Tafel, (wenn wir noch A, B, C *etc.* statt I, II, III *etc.*) setzen in folgende:

$\overset{1}{A} = 1$	$\overset{2}{B} = \frac{1}{1}$	$\overset{3}{C} = \frac{1.2}{1.2}$	$\overset{4}{D} = \frac{1.2.3}{1.2.3}$	$\overset{5}{E} = \frac{1.2.3.4}{1\,.\,.\,4}$	$\overset{6}{F} = \frac{1.2.3.4.5}{1\,.\,.\,.\,5}$
$\overset{2}{A} = 1$	$\overset{3}{B} = \frac{2}{1}$	$\overset{4}{C} = \frac{2.3}{1.2}$	$\overset{5}{D} = \frac{2.3.4}{1.2.3}$	$\overset{6}{E} = \frac{2\,.\,.\,5}{1\,.\,.\,4}$	$\overset{7}{F} = \frac{2\,.\,.\,.\,6}{1\,.\,.\,.\,5}$
$\overset{3}{A} = 1$	$\overset{4}{B} = \frac{3}{1}$	$\overset{5}{C} = \frac{3.4}{1.2}$	$\overset{6}{D} = \frac{3.4.5}{1.2.3}$	$\overset{7}{E} = \frac{3\,.\,.\,6}{1\,.\,.\,4}$	$\overset{8}{F} = \frac{3\,.\,.\,.\,7}{1\,.\,.\,.\,5}$
$\overset{4}{A} = 1$	$\overset{5}{B} = \frac{4}{1}$	$\overset{6}{C} = \frac{4.5}{1.2}$	$\overset{7}{D} = \frac{4.5.6}{1.2.3}$	$\overset{8}{E} = \frac{4\,.\,.\,7}{1\,.\,.\,4}$	$\overset{9}{F} = \frac{4\,.\,.\,.\,8}{1\,.\,.\,.\,5}$
etc.	*etc.*	*etc.*	*etc.*	*etc.*	*etc.*

Bringen wir nun diese Werthe in die obigen Potenzreihen, so erhalten wir, die Reihe S, nebst ihren Potenzen, wie folgt:

1) $$S = ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + ax^5 + etc.$$
$$+ b : + 2b : + 3b : + 4b :$$

2)

$$2)\ S^2 = \tfrac{1}{1}a^2x^2 + \tfrac{2}{1}a^2x^3 + \tfrac{3}{1}a^2x^4 + \tfrac{4}{1}a^2x^5 + \tfrac{5}{1}a^2x^6 + etc.$$
$$+ \frac{1.2}{1.2}2ab\,'' + \frac{2.3}{1.2}2ab\,'' + \frac{3.4}{1.2}2ab\,'' + \frac{4.5}{1.2}2ab\,''$$
$$+ \frac{1.2.3}{1.2.3}b^2\,'' + \frac{2.3.4}{1.2.3}b^2\,'' + \frac{3.4.5}{1.2.3}b^2\,''$$

$$3)\ S^3 = \frac{1.2}{1.2}a^3x^3 + \frac{2.3}{1.2}a^3x^4 + \frac{3.4}{1.2}a^3x^5 + \frac{4.5}{1.2}a^3x^6 + \frac{5.6}{1.2}a^3x^7 + etc.$$
$$+ \frac{1.2.3}{1.2.3}3a^2b\,'' + \frac{2.3.4}{1.2.3}3a^2b\,'' + \frac{3.4.5}{1.2.3}3a^2b\,'' + \frac{4.5.6}{1.2.3}3a^2b\,''$$
$$+ \frac{1..4}{1..4}3ab^2\,'' + \frac{2..5}{1..4}3ab^2\,'' + \frac{3..6}{1..4}3ab^2\,''$$
$$+ \frac{1...5}{1...5}b^3\,'' + \frac{2...6}{1...5}b^3\,''$$

$$4)\ S^4 = \frac{1.2.3}{1.2.3}a^4x^4 + \frac{2.3.4}{1.2.3}a^4x^5 + \frac{3.4.5}{1.2.3}a^4x^6 + \frac{4.5.6}{1.2.3}a^4x^7 + \frac{5.6.7}{1.2.3}a^4x^8 + etc.$$
$$+ \frac{1..4}{1..4}4a^3b\,'' + \frac{2..5}{1..4}4a^3b\,'' + \frac{3..6}{1..4}4a^3b\,'' + \frac{4..7}{1..4}4a^3b\,''$$
$$+ \frac{1...5}{1...5}6a^2b^2\,'' + \frac{2...6}{1...5}6a^2b^2\,'' + \frac{3...7}{1...5}6a^2b^2\,''$$
$$+ \frac{1...6}{1...6}4ab^3\,'' + \frac{2...7}{1...6}4ab^3\,''$$
$$+ \frac{1...7}{1...7}b^4\,''$$

etc. etc.

welche Reihen sehr leicht, so weit man will, fortgesetzt werden können. Bezeichnet man aber dit Coefficienten der Reihe Nr. 1., wie in der Aufgabe angenommen wurde, mit D. Z., nemlich $a = \overset{1}{\mathrm{I}}$; $a + b = \overset{2}{\mathrm{I}}$; $a + 2b = \overset{3}{\mathrm{I}}$; etc., so erhält man in D. Z. die Reihe selbst nebst ihren Potenzen in folgender Form (§. 46.)

$$1)\ S = \overset{1}{\mathrm{I}}\,x + \overset{2}{\mathrm{I}}\,x^2 + \overset{3}{\mathrm{I}}\,x^3 + \overset{4}{\mathrm{I}}\,x^4 + \overset{5}{\mathrm{I}}\,x^5 + etc.$$
$$2)\ S^2 = \overset{2}{\mathrm{II}}\,x^2 + \overset{3}{\mathrm{II}}\,x^3 + \overset{4}{\mathrm{II}}\,x^4 + \overset{5}{\mathrm{II}}\,x^5 + \overset{6}{\mathrm{II}}\,x^6 + etc.$$
$$3)\ S^3 = \overset{3}{\mathrm{III}}\,x^3 + \overset{4}{\mathrm{III}}\,x^4 + \overset{5}{\mathrm{III}}\,x^5 + \overset{6}{\mathrm{III}}\,x^6 + \overset{7}{\mathrm{III}}\,x^7 + etc.$$
$$4)\ S^4 = \overset{4}{\mathrm{IV}}\,x^4 + \overset{5}{\mathrm{IV}}\,x^5 + \overset{6}{\mathrm{IV}}\,x^6 + \overset{7}{\mathrm{IV}}\,x^7 + \overset{8}{\mathrm{IV}}\,x^8 + etc.$$

etc. etc.

Da nun hier und oben die mit gleichen Nummern bezeichneten Reihen, vollkommen identisch sind, so erhellet, daß man durch ihre Vergleichung die verlangten Werthe aller höheren D. Z. so erhält, daß man das Fortschreitungsgesetz derselben in jeder Ordnung sehr leicht übersehen kann, wie Tafel IV. B. augenscheinlich machet.

§. 118. Zusatz.

Für den Fall $a = b$, lassen sich die höheren Ordnungen sämtlich auf eine weit einfachere Art ausdrücken, und zwar erhält man die Tafel für diesen Fall viel kürzer aus §. 116. (oder Taf. IV. A.), als aus der Tafel des vorigen §. (IV. B.) Für diesen Fall wäre nemlich $\overset{1}{\mathrm{I}} = a$; $\overset{2}{\mathrm{I}} = 2a$; $\overset{3}{\mathrm{I}} = 3a$; *etc.* Betrachtet man aber in Tafel IV. A. die zweite Ordnung, und setzt $b = 1$, so enthält sie die Werthe a^2, $2a^2$, $3a^2$, $4a^2$ *etc.*, welche von den eben angenommenen, blos darin unterschieden sind, daß dort überall a^2, wo hier nur a, stehet. Man mache also die dortige zweite Ordnung zur ersten, so verwandelt sich die vierte in die zweite, die sechste in die dritte, *etc.* und überhaupt wird jede gerade Ordnung auf die halbe Höhe herabgesetzt, die ungeraden Ordnungen hingegen fallen gänzlich aus. Schreibt man nun überdem für a^2 überall a, wie es unsere Voraussetzung erfordert, so erhält man diejenige Tafel, welche man auf der Fortsetzung von Taf. IV. unter C findet.

§. 119. Aufgabe. 3.

Das Gesetz für alle höhere Ordnungen anzugeben, wenn die D. Z. der ersten Ordnung das Gesetz einer Binomialreihe befolgen, so daß

$$\overset{1}{\mathrm{I}} = a^m;\ \overset{2}{\mathrm{I}} = \frac{m}{1} a^{m-1} b;\ \overset{3}{\mathrm{I}} = \frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\, a^{m-2} b^2;\ etc.$$

Aufl. Man mache wieder eine Reihe y, nach Potenzen von x, wovon diese Werthe Coefficienten seyn, also

$$(A)\ y = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} bx + \frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\, a^{m-2} b^2 x^2 + etc.$$

so ist bekannt, daß $y = (a + bx)^m$; also $y^n = (a + bx)^{mn}$, und in eine Reihe aufgelöset:

$$(B)\ y^n = a^{mn} + \frac{mn}{1} a^{mn-1} bx + \frac{mn}{1}\,\frac{mn-1}{2}\, a^{mn-2} b^2 + etc.$$

Schreibt man statt (A), mit Dimensionszeichen

$$(C)\ y = \overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}} x + \overset{3}{\mathrm{I}} x^2 + \overset{4}{\mathrm{I}} x^3 + etc. \text{ so ist}$$

$$(D)\ y^n = \overset{n}{IN} + \overset{n+1}{IN} x + \overset{n+2}{IN} x^2 + \overset{n+3}{IN} x^3 + etc. \quad (\S.\ 46.)$$

Da nun (B) und (D) identisch sind, so giebt die Vergleichung aller einzelnen Glieder das gesuchte Gesetz; und setzt man für IN und n, nach und nach, erst II und 2, dann III und 3, ferner IV und 4, *etc.*, so erhält man Tafel IV. D.

§. 120. Anmerkung.

Die bisher entwickelten Potenzen bezogen sich sämtlich auf Reihen, welche algebraische Functionen von x ausdrückten. Eine ähnliche Arbeit kann man bei mehreren Reihen, welche transcendente Functionen von x ausdrücken, unternehmen. Ehe wir uns aber auf Untersuchungen dieser Art einlassen, wird es vielleicht nicht überflüßig seyn, den Gebrauch und Nutzen von dergleichen Tafeln, in einem Beispiele zu zeigen.

Der Nutzen von dergleichen Tafeln ist eigentlich doppelt. Einmal erhält man dadurch in den besondern Fällen, auf welche diese Tafeln anwendbar sind, die Werthe der höheren D. Z. offenbar ungleich leichter und geschwinder, als nach der allgemeinen im zweiten Abschnitt vorgetragenen Methode. Und dann gewähren sie den Vortheil, daß das Gesetz jeder Reihe, welche man vermittelst dieser D. Z. auf irgend eine Art entwickelt hat, auch noch alsdann sichtbar bleibt, wenn man für die D. Z. die gemeine Bezeichnung substituiret.

§. 121. Erläuterungsaufgabe.

Die bekannte Reihe $\log.(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + etc.$ durch die Substitution $z = \frac{x}{(1-x)^2}$, so umzuformen, daß die umgeformte Reihe nach Potenzen von x fortschreite.

Aufl. Man verwandle $\frac{x}{(1-x)^2}$ in eine unendliche Reihe, so erhält man

$$z = x + 2x^2 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + etc.$$

Die Coefficienten dieser Reihe bezeichne man, vom ersten Gliede an, mit D. Z., so daß

$$z = \overset{1}{\mathrm{I}}x + \overset{2}{\mathrm{I}}x^2 + \overset{3}{\mathrm{I}}x^3 + \overset{4}{\mathrm{I}}x^4 + \overset{5}{\mathrm{I}}x^5 + etc.$$

Vermittelst dieser Bezeichnung ist es nun sehr leicht, jedes Glied der gegebenen Reihe $\log.(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + etc.$ in eine Reihe nach x zu verwandeln, und diese sämtlichen Reihen zu addiren. Wir haben nemlich

$$\begin{array}{lllll}
z = \overset{1}{\mathrm{I}}x & + \overset{2}{\mathrm{I}}x^2 & + \overset{3}{\mathrm{I}}x^3 & + \overset{4}{\mathrm{I}}x^4 & + etc. \\
-\frac{1}{2}z^2 = & -\frac{1}{2}\overset{2}{\mathrm{II}}\,\text{〃} & -\frac{1}{2}\overset{3}{\mathrm{II}}\,\text{〃} & -\frac{1}{2}\overset{4}{\mathrm{II}}\,\text{〃} & - etc. \\
+\frac{1}{3}z^3 = & & +\frac{1}{3}\overset{3}{\mathrm{III}}\,\text{〃} & +\frac{1}{3}\overset{4}{\mathrm{III}}\,\text{〃} & + etc. \\
-\frac{1}{4}z^4 = & & & -\frac{1}{4}\overset{4}{\mathrm{IV}}\,\text{〃} & - etc. \\
etc. & & & etc. &
\end{array}$$

Also $\log.(1+z) = \overset{1}{\mathrm{I}}x + (\overset{2}{\mathrm{I}} - \frac{1}{2}\overset{2}{\mathrm{II}})x^2 + etc.$

Das *n*te Glied dieser Reihe wird seyn:

$$(\overset{n}{\mathrm{I}} - \tfrac{1}{2}\overset{n}{\mathrm{II}} + \tfrac{1}{3}\overset{n}{\mathrm{II}} - \tfrac{1}{4}\overset{n}{\mathrm{IV}} + \ldots \mp \tfrac{1}{n}\overset{n}{IN})\, x^n$$

wo das obere Zeichen für ein gerades n gilt.

Die D. Z. der ersten Ordnung haben aber hier folgende Werthe:

$$\overset{1}{\mathrm{I}} = 1;\ \overset{2}{\mathrm{I}} = 2;\ \overset{3}{\mathrm{I}} = 3;\ \overset{4}{\mathrm{I}} = 4;\ \overset{5}{\mathrm{I}} = 5;\ etc.$$

sie stellen also eine arithmetische Reihe vor, und wir werden daher nicht nöthig haben, die Werthe der D. Z. von den höheren Ordnungen, nach der allgemeinen Methode zu bestimmen, sondern können dieselben aus Taf. IV. C. nehmen, wo wir nur $a = 1$ zu setzen brauchen. Vermittelst dieser Tafel nun findet man

$$\log.(1 + z) = \log\left(1 + \frac{x}{(1-x)^2}\right) = \log\frac{1 - x + xx}{1 - 2x + xx} =$$

$$\begin{array}{lllllllll}
x + & \frac{2}{1} & x^2 + & \frac{3}{1} & x^3 + & \frac{4}{1} & x^4 + & \frac{5}{1} & x^5 + etc, \\
 & -\frac{1}{2}\frac{1.2.3}{1.2.3} & \text{''} & -\frac{1}{2}\frac{2.3.4}{1.2.3} & \text{''} & -\frac{1}{2}\frac{3.4.5}{1.2.3} & \text{''} & -\frac{1}{2}\frac{4.5.6}{1.2.3} & \text{''} \\
 & & & +\frac{1}{3}\frac{1\ldots5}{1\ldots5} & \text{''} & +\frac{1}{3}\frac{2\ldots6}{1\ldots5} & \text{''} & +\frac{1}{3}\frac{3\ldots7}{1\ldots5} & \text{''} \\
 & & & & & -\frac{1}{4}\frac{1\ldots7}{1\ldots7} & \text{''} & -\frac{1}{4}\frac{2\ldots8}{1\ldots7} & \text{''} \\
 & & & & & & & +\frac{1}{5}\frac{1\ldots9}{1\ldots9} & \text{''}
\end{array}$$

Es bleibt also auch in dieser Bezeichnung das Gesetz der Reihe sichtbar, und der allgemeine Ausdruck für das *n*te Glied derselben ist:

$$+ x^n \left(\frac{n}{1} - \frac{1}{2}\,\frac{(n-1)}{1.}\,\frac{(n)}{2.}\,\frac{(n+1)}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{(n-2)}{1.}\,\frac{(n-1)}{2.}\,\frac{n}{3.}\,\frac{(n+1)}{4.}\,\frac{(n+2)}{5} - \frac{1}{4}\,\frac{(n-3)\ldots(n+3)}{1\,.\,.\,.\,.\,.\,7} + \frac{1}{5}\,\frac{(n-4)\ldots(n+4)}{1\,.\,.\,.\,.\,.\,9} - etc.\right)$$

die Reihe wird fortgesetzt, bis sie von selbst abbricht. Die Summirung dieser Reihe ist schwierig, ob sie gleich eine auffallende Aehnlichkeit mit gewissen Reihen hat, welche Sin. nz und Cos. nz, durch Sin. z und Cos. z ausdrücken. Man sehe Eulers Introduction Cap. XIV.

§. 122. Zusatz.

Zieht man indessen die Coefficienten, welche zu einerlei Potenzen von x gehören, wirklich zusammen, so entdeckt sich durch Induction, ein zwar einfaches aber eigensinniges Gesetz dieser Reihe, man findet nemlich

log.

$$\log.\ \frac{1 - x + xx}{1 - 2x + xx} =$$

$$\tfrac{1}{1}x + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{3}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{0}{6}x^6$$
$$+ \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{3}{8}x^8 + \tfrac{4}{9}x^9 + \tfrac{3}{10}x^{10} + \tfrac{1}{11}x^{11} + \tfrac{0}{12}x^{12}$$
$$+ \tfrac{1}{13}x^{13} + \tfrac{3}{14}x^{14} + \tfrac{4}{15}x^{15} + \tfrac{3}{16}x^{16} + \tfrac{1}{17}x^{17} + \tfrac{0}{18}x^{18}$$
$$+ \text{etc. etc.}$$

wovon es bei aller Einfachheit des Gesetzes doch schwer ist, einen einzigen terminus generalis anzugeben, der für jedes n passe. Könnte man sich aber von der allgemeinen Richtigkeit des hier hervorspringenden Gesetzes auf irgend eine Art überzeugen, so könnte man den Schluß umkehren, und das hier entdeckte Gesetz zur Summirung der Reihe brauchen, die wir oben für den term. gen. gefunden haben. Es wird nemlich

$$\frac{n}{1}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{n^2-1}{1.2.3} + \frac{1}{3}\,\frac{(n^2-1)(n^2-4)}{1\,.\,.\,.\,5} - \frac{1}{4}\,\frac{(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{1\,.\,.\,.\,.\,.\,7} + etc.\right)$$

$= \frac{z}{n}$ seyn. Dieses z aber, hat nach Verschiedenheit von n folgende Werthe: Wenn $n = 0 + 6m$, so ist $z = 0$; wenn $n = 1 + 6m$, so ist $z = 1$; wenn $n = 2 + 6m$, so ist $z = 3$; wenn $n = 3 + 6m$, so ist $z = 4$; wenn $n = 4 + 6m$, so ist $z = 3$; wenn $n = 5 + 6m$, so ist $z = 1$, wo m jede ganze und positive Zahl seyn darf.

§. 123. Anmerkung.

Die Umformung der Reihen gehört unter die Materien, über welche vermittelst unserer D. Z., und der bisher aufgelöseten Aufgaben, eine sehr vollständige Theorie festgesetzt werden kann. Besonders bleibt keine Umformung durch Substitution denkbar, die vermittelst unserer Methode nicht ohne Schwierigkeit bewerkstelligt werden könnte. Wir werden daher im zweiten Theile ein eigenes Capitel von dieser Materie liefern. Auch wird man überhaupt im zweiten Theile mehrere Beispiele von dem Gebrauche der in diesem Abschnitte entwickelten Tabellen finden.

§. 124. Aufgabe. 4.

Wenn die D. Z. der ersten Ordnung folgende Werthe haben:

$$\overset{1}{I} = 1;\ \overset{2}{I} = 1;\ \overset{3}{I} = \frac{1}{1.2};\ \overset{4}{I} = \frac{1}{1.2.3};\ \overset{5}{I} = \frac{1}{1.\ 4};\ \overset{6}{I} = \frac{1}{1...5};\ etc.$$

das Gesetz für die D. Z. jeder höheren Ordnung zu finden.

Aufl. Die in der Aufgabe angenommenen Werthe, sind die Coefficienten derjenigen Reihe, welche eine Zahl, durch ihren natürlichen log. ausdrückt. Es sey nemlich y eine Zahl, λ ihr natürlicher Logarithmus, so ist:

$$(A)\ y = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{1.2} + \frac{\lambda^3}{1.2.3} + \frac{\lambda^4}{1.\ 4} + \frac{\lambda^5}{1...5} + etc.$$

Es giebt keine Reihe, von welcher sich alle Potenzen leichter machen ließen, als diese. Denn aus der Theorie der Logarithmen weiß man, daß, wenn zu der Zahl y, der Log. λ gehört, zu der Zahl y^n, der Logarithme $n\lambda$ gehöre, und y^n wird man daher aus (A) blos dadurch erhalten, daß man für λ überall $n\lambda$ schreibt, wir haben demnach

$$(B)\ y^n = 1 + n\lambda + \frac{n^2}{1.\,2}\lambda^2 + \frac{n^3}{1.\,2.\,3}\lambda^3 + \frac{n^4}{1\ldots4}\lambda^4 + etc.$$

Setzen wir nun in (A) statt der Coefficienten die D. Z., so haben wir

$$(C)\ y = \overset{1}{I} + \overset{2}{I}\lambda + \overset{3}{I}\lambda^2 + \overset{4}{I}\lambda^3 + \overset{5}{I}\lambda^4 + etc.$$

und hieraus folgt (§. 46.)

$$(D)\ y^n = \overset{n}{IN} + \overset{n+1}{IN}\lambda + \overset{n+2}{IN}\lambda^2 + \overset{n+3}{IN}\lambda^3 + \overset{n+4}{IN}\lambda^4 + etc.$$

Da nun (B) und (D) völlig identisch sind, so haben wir $\overset{n}{IN} = 1$; $\overset{n+1}{IN} = \frac{n}{1}$; $\overset{n+2}{IN} = \frac{n^2}{1.\,2}$; $\overset{n+3}{IN} = \frac{n^3}{1.\,2.\,3}$; etc. $\overset{n+r}{IN} = \frac{n^r}{1\ldots r}$. Setzt man für N und n die bestimmten Werthe, so erhält man Tafel V. A.

§. 125. Lehnsatz.

Wenn $s = +\ \text{Sin.}\,x$, so ist:

$$\begin{array}{llllll}
2 & s^2 = -\ \text{Cos.}\,2x & +\ \tfrac{1}{2}.\ 2 & & & \\
2^2 & s^3 = -\ \text{Sin.}\,3x & + & 3\ \text{Sin.}\,x & & \\
2^3 & s^4 = +\ \text{Cos.}\,4x & - & 4\ \text{Cos.}\,2x & +\ \tfrac{1}{2}\ 6 & \\
2^4 & s^5 = +\ \text{Sin.}\,5x & - & 5\ \text{Sin.}\,3x & + & 10\ \text{Sin.}\,x \\
2^5 & s^6 = -\ \text{Cos.}\,6x & + & 6\ \text{Cos.}\,4x & - & 15\ \text{Cos.}\,2x + \tfrac{1}{2}.\ 20
\end{array}$$

etc.

Oder allgemein 1) wenn n eine gerade Zahl,

$$2^{n-1}s^n = \pm(\text{Cos.}\,nx - \frac{n}{1}\text{Cos.}\,(n-2)x + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\text{Cos.}\,(n-4)x$$
$$- \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\text{Cos.}\,(n-6)x + \frac{n\ldots(n-3)}{1\,.\,.\,4}\text{Cos.}\,(n-8)x - \ldots$$
$$\ldots - \frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+4)}{1\ldots\frac{1}{2}(n-2)}\text{Cos.}\,2x + \frac{1}{2}\,\frac{n\ldots\ldots\frac{1}{2}(n+2)}{1\ldots\ldots\frac{1}{2}\,n}).$$

das obere Zeichen + gilt, wenn die Hälfte von n gerade, das untere −, wenn sie ungerade ist.

2) Wenn n eine ungerade Zahl,

2^{n-1}

$$2^{n-1}s^n = \pm\left(\text{Sin.}\,nx - \frac{n}{1}\,\text{Sin.}\,(n-2)\,x + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\text{Sin.}\,(n-4)\,x\right.$$
$$- \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,\text{Sin.}\,(n-6)\,x + \frac{n\,\ldots\,(n-3)}{1\,\ldots\,4}\,\text{Sin.}\,(n-8)\,x$$
$$\left. - \ldots\ldots + \frac{n\,\ldots\,\frac{1}{2}(n+3)}{1\,\ldots\,\frac{1}{2}(n-1)}\,\text{Sin.}\,x\right).$$

das obere Zeichen $+$ gilt, wenn $\frac{1}{2}(n-1)$ gerade, das untere $-$, wenn $\frac{1}{2}(n-1)$ ungerade ist.

§. 126. Anmerkung.

Man findet diese Formeln in mehreren Lehrbüchern und Schriften über die Analysis Man sehe Eulers Introductio in anal. inf. Cap. 14. §. 261. 263. von Tempelhoffs Analysis endlicher Größen, Abschn 8. §. 661. Hr. Pr. Klügel hat in seiner analytischen Trigonometrie S. 120 §. XXXV. ff. den Beweis für das allgemeine Gesetz dieser Ausdrücke mit dem ihm eigenen Scharfsinn ausgeführt.

§. 127. Aufgabe. 5.

Die höheren ganzen und positiven Potenzen der Sinusreihe, Sin. $x = s = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\ldots 5} -$ *etc.* auf eine solche Art zu entwickeln, daß das Fortschreitungsgesetz in jeder Potenz sichtbar bleibe.

Aufl. Die Auflösung dieser Aufgabe läßt sich auf eine vollkommen allgemeine Art vermittelst des Lehnsatzes §. 125. bewerkstelligen. Da aber der allgemeine Ausdruck für s^n dort etwas anders ausfällt, je nachdem n gerade, oder ungerade ist, so werden wir auch für diese beiden Fälle die Auflösung theilen müssen.

Erster Fall. Es sey n eine gerade Zahl, also:

$$2^{n-1}s^n = \pm\left(\text{Cos.}\,nx - \frac{n}{1}\,\text{Cos.}\,(n-2)\,x + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\text{Cos.}\,(n-4)\,x\right.$$
$$- \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,\text{Cos.}\,(n-6)\,x + \ldots - \frac{n\,\ldots\,\frac{1}{2}(n+4)}{1\,\ldots\,\frac{1}{2}(n-2)}\,\text{Cos.}\,2x$$
$$\left. + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\,\ldots\,\frac{1}{2}(n+2)}{1\,\ldots\,\frac{1}{2}\,n}\right)$$

($+$ gilt, wenn $\frac{1}{2}n$ gerade, $-$ wenn $\frac{1}{2}n$ ungerade.) Um mehrerer Einfachheit willen, setze man $\frac{n}{1} = \alpha$; $\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2} = \beta$; $\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3} = \gamma$; *etc.* $\frac{n\,\ldots\,\frac{1}{2}(n+4)}{1\,\ldots\,\frac{1}{2}(n-2)} = \mu$; $\frac{1}{2}\,\frac{n\,\ldots\,\frac{1}{2}(n+2)}{1\,\ldots\,\frac{1}{2}\,n} = \frac{1}{2}\,\nu$, so haben wir

(A)

$$(A)\ 2^{n-1}s^n = \pm(\text{Cos.}\,nx - \alpha\,\text{Cos.}\,(n-2)x + \beta\,\text{Cos.}\,(n-4)x - \gamma\,\text{Cos.}\,(n-6)x + \delta\,\text{Cos.}\,(n-8)x - \ldots - \mu\,\text{Cos.}\,2x + \tfrac{1}{2}\nu.)$$

Vermittelst der Reihe $\text{Cos.}\,x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - etc.$ löse man in (A) jeden Cosinus in eine Reihe auf. Auf diese Art erhalten wir, wenn wir uns vor der Hand blos an die Vorzeichnung $+$, oder an den Fall, wenn $\frac{1}{2}n$ gerade ist, halten:

$$\begin{array}{llllll}
(B)\ \text{Cos.}\,nx & = +1 & - n^2\frac{x^2}{1.2} & + n^4\frac{x^4}{1..4} & - etc. \\
-\alpha\,\text{Cos.}\,(n-2)x & = -\alpha & + \alpha(n-2)^2 \quad : & - \alpha(n-2)^4 \quad : & + etc. \\
+\beta\,\text{Cos.}\,(n-4)x & = +\beta & - \beta(n-4)^2 \quad : & + \beta(n-4)^4 \quad : & - etc. \\
-\gamma\,\text{Cos.}\,(n-6)x & = -\gamma & + \gamma(n-6)^2 \quad : & - \gamma(n-6)^4 \quad : & + etc. \\
\quad etc. & & & & \\
-\mu\,\text{Cos.}\,2x & = -\mu & + \mu.\ 2^2 \quad : & - \mu.\ 2^4 \quad : & + etc. \\
+\frac{1}{2}\nu & = +\frac{1}{2}\nu. & & &
\end{array}$$

Die Summe aller dieser Reihen wird $2^{n-1}s^n$ seyn. Da aber die $n$te Potenz der Reihe $s = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1...5} - \frac{x^7}{1...7} + etc.$ von folgender Form

$$s^n = Ax^n + Bx^{n+2} + Cx^{n+4} + etc.$$

seyn muß (§. 12.); so folgt, daß in (B) alle Coefficienten, welche zu niedrigern Potenzen als x^n gehören, jeder $= 0$ seyn muß. Wir müssen demnach bei der Addition dieser Reihen alle diese Glieder weglassen, und die Summe erst mit dem Gliede anfangen lassen, welches x^n enthält. Dies Glied, welches x^n enthält, wird in der ersten Zeile von (B) das Zeichen $+$ haben, weil wir uns blos auf den Fall $\frac{1}{2}n$ gerade, eingeschränkt haben. Daher finden wir

$$\begin{aligned}
(C)\ 2^{n-1}s^n = {} & (n^n - \alpha(n-2)^n + \beta(n-4)^n - \ldots - \mu.2^n)\frac{x^n}{1.2..n} \\
& - (n^{n+2} - \alpha(n-2)^{n+2} + \beta(n-4)^{n+2} - \ldots - \mu.2^{n+2})\frac{x^{n+2}}{1.2..(n+2)} \\
& + (n^{n+4} - \alpha(n-2)^{n+4} + \beta(n-4)^{n+4} - \ldots - \mu.2^{n+4})\frac{x^{n+4}}{1.2..(n+4)} \\
& - (n^{n+6} - \alpha(n-2)^{n+6} + \beta(n-4)^{n+6} - \ldots - \mu.2^{n+6})\frac{x^{n+6}}{1.2..(n+6)} \\
& + etc.
\end{aligned}$$

in welchem Ausdruck das Fortschreitungsgesetz leicht zu übersehen ist.

Da wir in der Reihe (A) nur das obere Zeichen gebraucht haben, so ist zwar die Reihe C nur für den Fall entwickelt, wenn $\frac{1}{2}n$ gerade ist. Allein (C) gilt unverändert auch für den andern Fall. Denn braucht man in A das untere Zeichen, (oder setzt man $\frac{1}{2}n$ ungerade,) so werden in (B) alle Zeichen durchgehends verändert werden müssen, und so bekommen nun in der ersten Zeile von (B) alle diejenigen Glieder $+$, in welchen die Hälfte des Exponenten von x ungerade ist; folglich bekommt x^n auch in diesem Fall, in der ersten Zeile von (B), das Zeichen $+$, und wenn dies ist, so bleibt alles übrige ungeändert.

Zweiter Fall. Es sey n eine ungerade Zahl, also:

$$2^{n-1}s^n = \pm\left(\text{Sin.}\,nx - \frac{n}{1}\text{Sin.}(n-2)x + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\text{Sin.}(n-4)x\right.$$
$$\left. - \;.\;.\;.\;.\;.\;+ \frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+3)}{1\ldots\frac{1}{2}(n-1)}\text{Sin.}\,x\right).$$

oder wenn wir wieder zur Abkürzung $\frac{n}{1}=\alpha$; $\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}=\beta$; $\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}=\gamma$; *etc.* $\frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+3)}{1\ldots\frac{1}{2}(n-1)}=\xi$, setzen,

$$(D)\quad 2^{n-1}s^n = \pm\left(\text{Sin.}\,nx - \alpha\,\text{Sin.}(n-2)x + \beta\,\text{Sin.}(n-4)x - \gamma\,\text{Sin.}(n-6)x\right.$$
$$\left. + \delta\,\text{Sin.}(n-8)x - \ldots + \xi\,\text{Sin.}\,x\right).$$

$+$ gilt, wenn $\frac{1}{2}(n-1)$ gerade, $-$ wenn $\frac{1}{2}(n-1)$ ungerade ist. Vermittelst der Reihe $s = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - etc.$ verwandle man nun jeden in (D) vorkommenden Sinus in eine Reihe nach Potenzen von x. Und wenn wir uns wieder vor der Hand blos an den Fall, $\frac{1}{2}(n-1)$ **gerade**, oder an die Vorzeichnung $+$ halten, so findet man

$$
\begin{array}{llllll}
(E)\ \text{Sin.}\,nx & = + & n.x - & n^3\frac{x^3}{1.2.3} + & n^5\frac{x^5}{1\ldots5} & - etc. \\
-\alpha\,\text{Sin.}(n-2)x & = - & \alpha(n-2) \ldots + & \alpha(n-2)^3 \ldots & -\alpha(n-2)^5 \ldots & + etc. \\
+\beta\,\text{Sin.}(n-4)x & = + & \beta(n-4) \ldots - & \beta(n-4)^3 \ldots & +\beta(n-4)^5 \ldots & - etc. \\
-\gamma\,\text{Sin.}(n-6)x & = - & \gamma(n-6) \ldots + & \gamma(n-6)^3 \ldots & -\gamma(n-6)^5 \ldots & + etc. \\
+\ etc. & & & & & \\
+\xi\,\text{Sin.}\,x & = + & \xi.\ 1. \ldots - & \xi.\ 1^3 \ldots & +\xi.\ 1^5 \ldots & - etc.
\end{array}
$$

Die Summe aller dieser Reihen wird $2^{n-1}s^n$ seyn. Da aber in (E), wie in (B), jeder Coefficient $= 0$ seyn muß, dessen Potenz niedriger ist als x^n, und da ferner hier eben so und aus eben den Gründen, wie im ersten Falle, die Zweideutigkeit der Vorzeichnung wegfällt, es mag $\frac{1}{2}(n-1)$ gerade oder ungerade seyn, so ist für beide Fälle

$$(F)\; 2^{n-1} s^n = (n^n - \alpha(n-2)^n + \beta(n-4)^n - \ldots + \xi . 1^n)\,\frac{x^n}{1.2\,.\,.\,n}$$
$$- (n^{n+2} - \alpha(n-2)^{n+2} + \beta(n-4)^{n+2} - \ldots + \xi . 1^{n+2})\,\frac{x^{n+2}}{1.2\,.\,.(n+2)}$$
$$+ (n^{n+4} - \alpha(n-2)^{n+4} + \beta(n-4)^{n+4} - \ldots + \xi . 1^{n+4})\,\frac{x^{n+4}}{1.2\,.\,.(n+4)}$$
$$- (n^{n+6} - \alpha(n-2)^{n+6} + \beta(n-4)^{n+6} - \ldots + \xi . 1^{n+6})\,\frac{x^{n+6}}{1.2\,.\,.(n+6)}$$
$$+ \text{ etc.}$$

Vergleicht man nun die beiden gefundenen Potenzreihen (C) und (F), so findet sich weiter kein Unterschied, als daß die Glieder, aus welchen die Coefficienten bestehen, in (C) mit Potenzen von 2, in (F) aber mit Potenzen von 1 abbrechen. Dies ist aber eine nothwendige Folge davon, daß n in (C) eine gerade, und in (F) eine ungerade Zahl bedeutet. Scheinbar unterscheiden sich beide Reihen auch darin, daß in (C) das letzte Stück jedes Coefficienten μ, in (F) aber ξ enthält. Allein, wenn man bedenkt, daß μ sowohl als ξ nichts anders als Binomialcoefficienten sind, so wie sie vermöge der Ordnung seyn müssen, so ergiebt sich auch dieser Unterschied von selbst, sobald n bestimmt ist.

Es ist daher nicht nöthig, die beiden Formen (C) und (F) zu unterscheiden, da sie wirklich einem einzigen allgemeinen Gesetz folgen, aus welchem sich der Unterschied beider Formen von selbst ergiebt. Wir haben demnach für jeden ganzen und positiven Werth von n, ganz allgemein

$$(G)\; s^n = \frac{n^n - \alpha(n-2)^n + \beta(n-4)^n - \text{etc.}}{2^{n-1}.\,1.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,n}\,x^n$$
$$- \frac{n^{n+2} - \alpha(n-2)^{n+2} + \beta(n-4)^{n+2} - \text{etc.}}{2^{n-1}.\,1.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,(n+2)}\,x^{n+2}$$
$$+ \frac{n^{n+4} - \alpha(n-2)^{n+4} + \beta(n-4)^{n+4} - \text{etc.}}{2^{n-1}.\,1.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,(n+4)}\,x^{n+4}$$
$$- \text{ etc. etc.}$$

oder wenn wir für α, β, γ etc. die Binomialcoefficienten selbst setzen

$$(H)\; s^n = \frac{n^n - \frac{n}{1}(n-2)^n + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(n-4)^n - \text{etc.}}{2^{n-1}.\,1.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n}\,x^n$$
$$- \frac{n^{n+2} - \frac{n}{1}(n-2)^{n+2} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(n-4)^{n+2} - \text{etc.}}{2^{n-1}.\,1.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(n+2)}\,x^{n+2}$$

$$+\frac{n^{n+4}-\frac{n}{1}(n-2)^{n+4}+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(n-4)^{n+4}-etc.}{2^{n-1}.\ 1.\ 2\ \ldots\ldots\ (n+4)}x^{n+4}$$

$-$ *etc. etc.*

in jedem Zähler geht man so weit fort, bis das nächstfolgende Glied die Potenz von einer negativen Zahl enthalten würde, d. h. man bricht entweder mit einer Potenz von 1 oder von 2 ab.

So zusammengesetzt übrigens diese Reihe ist, so liegt doch das Fortschreitungsgesetz einfach und deutlich vor Augen.

§. 128. Zusatz.

Man bezeichne die Coefficienten der Sinusreihe **vom ersten Gliede** an, mit D. Z., nemlich $\overset{1}{I}=1$; $\overset{2}{I}=\frac{-1}{1.2.3}$; $\overset{3}{I}=\frac{+1}{1\ldots5}$; $\overset{4}{I}=\frac{-1}{1\ldots7}$; *etc.* so ist $\text{Sin.}\,x=s=\overset{1}{I}x+\overset{2}{I}x^3+\overset{3}{I}x^5+\overset{4}{I}x^7+etc.$ daher §. 46.

$$s^n=\overset{n}{IN}x^n+\overset{n+1}{IN}x^{n+2}+\overset{n+2}{IN}x^{n+4}+\overset{n+3}{IN}x^{n+6}+etc.$$

Diese Reihe muß mit der Reihe (H) des vorigen §. vollkommen identisch seyn, daher die Coefficienten Glied vor Glied gleich seyn werden, nemlich

$$\overset{n}{IN}=+\frac{n^n-\frac{n}{1}(n-2)^n+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(n-4)^n-etc.}{2^{n-1}.\ 1\ \ldots\ldots\ n}$$

$$\overset{n+1}{IN}=-\frac{n^{n+2}-\frac{n}{1}(n-2)^{n+2}+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(n-4)^{n+2}-etc.}{2^{n-1}.\ 1\ \ldots\ldots\ (n+2)}$$

u. s. f. und allgemein

$$\overset{n+r}{IN}=\pm\frac{n^{n+2r}-\frac{n}{1}(n-2)^{n+2r}+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}(n-4)^{n+2r}-etc.}{2^{n-1}.\ 1.\ 2\ \ldots\ldots\ (n+2r)}$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades r gilt.

Substituiret man nun in diesen Ausdrücken für IN und n, die bestimmten Werthe II und 2, ferner III und 3, dann IV und 4 u. s. f., so erhält man eine Tafel für die D. Z. jeder Ordnung, die sich auf die **Coefficienten der Sinusreihe vom ersten Gliede an** beziehen. Man sehe Taf. V. B.

Jedes erste Glied jeder Potenzreihe muß $=+1$ seyn; denn da $\overset{n}{IN}=(\overset{1}{I})^n$ (§. 38.), und $\overset{1}{I}=+1$, so ist auch $\overset{n}{IN}=1$, was auch n bedeuten mag. (Hieraus

aus folgt $n^n - \frac{n}{1}(n-2)^n + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(n-4)^n - etc. = 2^{n-1}.\ 1.\ 2 \ldots n$ für jeden ganzen und positiven Werth von n.)

Uebrigens kann offenbar die hier gelieferte Tafel, von der schon öfters gebrauchten Tafel (VI. A.) nicht wesentlich verschieden seyn. Diese Tafel (VI. A.), in welcher bei den höheren Ordnungen das Fortschreitungsgesetz gänzlich versteckt ist, bleibt bei solchen Rechnungen bequemer, wo es nicht um das Gesetz einer entwickelten Reihe, sondern nur um einige Glieder derselben zu thun ist.

§. 129. Zusatz.

Wir haben oben gesagt, man müsse in dem Zähler des allgemeinen Ausdrucks

$$\overset{n+r}{IN} = \pm \frac{n^{n+2r} - \frac{n}{1}(n-2)^{n+2r} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(n-4)^{n+2r} - etc.}{2^{n-1}.\ 1.\ 2 \ldots\ldots (n+2r)}$$

so weit fortgehen, bis man entweder auf Potenzen von 1 oder 2 komme. Dies ist indessen nicht schlechthin nothwendig. Schreitet man nemlich über 1 oder 2 noch fort, so erhält man Potenzen von negativen Zahlen, allein da die Binomialcoefficienten, welche mit diesen Potenzen fortlaufen, sich hier jederzeit auf ein ganzes und positives n beziehen, so werden diese Coefficienten nothwendig einmal abbrechen, und die ganze Reihe endlich seyn. Untersucht man die Sache genauer, so findet sich, daß die letzte Hälfte dieser Reihe, so weit sie nemlich Potenzen von negativen Zahlen enthält, der ersten Hälfte, die wir bisher allein angenommen hatten, vollkommen gleich, und daher die ganze Reihe gerade das Duplum von der bisher angenommenen sey.

Setzt man also den Zähler fort, so weit er fortgesetzt werden kann, nemlich bis zu $(n-2n)^{n+2r}$, d. i. $(-n)^{n+2r}$, multiplicirt aber zugleich den Nenner mit 2, so wird der Werth des Ausdrucks nicht geändert, und wenn wir, wie im 127 §., statt der Bin. Coeff. die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \delta, \gamma, \beta, \alpha$ brauchen, so ist

$$\overset{n+r}{IN} = \frac{n^{n+2r} - \alpha(n-2)^{n+2r} + \ldots\ldots \mp \alpha(-n+2)^{n+2r} \pm (-n)^{n+2r}}{2^n.\ 1.\ 2 \ldots\ldots (n+2r)}$$

die obern Zeichen gelten, wenn n gerade, die untern, wenn es ungerade ist.

Ich habe diesen Umstand hier deswegen berühren wollen, weil es vielleicht möglich seyn dürfte, den Zähler durch Summirung, oder auf irgend eine Art auf eine einfachere Form zu bringen, welches ein sehr wichtiger Vortheil seyn würde, indem dadurch unsere ganze Tafel, und alle darauf zu gründende Rechnungen einfacher werden würden. Zur Aufsuchung einer solchen Vereinfachung dieses Ausdrucks ist er aber in der hier beschriebenen Form bequemer als in der obigen. Mir hat es bis jetzt nicht gelingen wollen, ihm eine einfachere Gestalt zu geben, ob wir gleich im folgenden sehen werden, daß sich der Zähler wirklich auf eine allgemeine Art summiren lässet.

Der

Der eine oder andere Ausdruck für $\overset{n+r}{IN}$ ist übrigens der terminus generalis, zu der Sinusreihe, und allen ihren ganzen und positiven Potenzen zugleich, n (also auch IN) zeigt die Potenz, und r die Anzahl der Glieder (vom 2ten an gezählet) an. Setzt man $IN = \mathrm{I}$, und $n = 1$, so hat man das allgemeine Glied von der Sinusreihe selbst. Setzt man $IN = \mathrm{II}$, und $n = 2$, so hat man das allgemeine Glied der 2ten Potenz; $IN = \mathrm{III}$, und $n = 3$, giebt das allgemeine Glied der 3ten Potenz *etc.* Setzt man dann für r, in jeder Potenz 0, 1, 2, 3 *etc.* so erhält man die einzelnen Glieder nach der Reihe.

§. 130. Beispiel vom Gebrauch der Tafel.

Wenn eine Reihe aus der Sinusreihe so abgeleitet worden, daß die dabei gebrauchten D. Z. der ersten Ordnung sich auf die Coeff. der Sinusreihe vom ersten Gliede an beziehen, so mag das Gesetz dieser Reihe noch so zusammengesetzt seyn, so wird es dennoch auch in der gemeinen Bezeichnung sichtbar bleiben, wenn man die Werthe der D. Z. aus Taf. V. B. nimmt. Im 3ten Abschnitt haben wir ein Paar dergleichen Reihen entwickelt, unter andern §. 61. folgende. Es sey Sin. $y = n$ Sin. x, so ist

$$y = n\overset{1}{\mathrm{I}}x + n\overset{2}{\mathrm{I}}x^3 + n\overset{3}{\mathrm{I}}x^5 + n\overset{4}{\mathrm{I}}x^7 + etc.$$
$$+ \frac{n^3}{1.\ 2.\ 3}\overset{3}{\mathrm{III}} \cdot + \frac{n^3}{1.\ 2.\ 3}\overset{4}{\mathrm{III}} \cdot + \frac{n^3}{1.\ 2.\ 3}\overset{5}{\mathrm{III}} \cdot$$
$$+ \frac{3^2 n^5}{1\ldots5}\overset{5}{\mathrm{V}} \cdot + \frac{3^2 n^5}{1\ldots5}\overset{6}{\mathrm{V}} \cdot$$
$$+ \frac{3^2 5^2 n^7}{1\ldots7}\overset{7}{\mathrm{VII}} \cdot$$

und es war $\overset{1}{\mathrm{I}} = 1$; $\overset{2}{\mathrm{I}} = -\frac{1}{1.\ 2.\ 3}$; $\overset{3}{\mathrm{I}} = +\frac{1}{1\ldots5}$; *etc.* also die Coeff. der Sinusreihe vom ersten Gliede an. Setzt man nun in dieser Reihe für die D. Z. ihre Werthe aus Taf. V. B.; so erhält man:

$$y = nx - n\frac{x^3}{1.2.3} + n\frac{x^5}{1\ldots5} - n\frac{x^7}{1\ldots7} + etc.$$
$$+ \frac{(3^3-3)n^3}{4.\ 1.\ 2.\ 3} \cdot - \frac{(3^5+3)n^3}{4.\ 1.\ 2.\ 3} \cdot + \frac{(3^7-3)n^3}{4.\ 1.\ 2.\ 3} \cdot$$
$$+ \frac{3^2(5^5 - 5.3^5 + 10)n^5}{16.\ 1\ldots5} \cdot - \frac{3^2(5^7 - 5.3^7 + 10)n^5}{16.\ 1\ldots5} \cdot$$
$$+ \frac{3^2 5^2(7^7 - 7.5^7 + 21.3^7 - 35)n^7}{64.\ 1\ldots7} \cdot$$

So zusammengesetzt auch das Gesetz dieser Reihe ist, so ist es doch in dieser Form ohne Schwierigkeit zu übersehen; so daß sich leicht ein allgemeiner Ausdruck für jedes Glied der Reihe formiren lässet. Dasjenige Glied nemlich, welches zu der Potenz x^r gehört, oder das $\frac{1}{2}(r+1)$te Glied der Reihe wird seyn;

$$\begin{aligned}
&\mp \frac{x^r}{1\ldots r}\Big(\frac{n}{1} - \frac{(3^r-3)n^3}{4.\ 1.\ 2.\ 3} + \frac{3^2(5^r-5.3^r+10)n^5}{16.\ 1\ .\ .\ .\ 5} \\
&\quad - \frac{3^2.5^2(7^r-7.5^r+21.3^r-35)n^7}{64.\ 1\ .\ .\ .\ .\ .\ 7} + \frac{3^2.5^2 7^2(9^r-9.7^r+36.5^r-84.3^r+126)n^9}{256.\ 1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 9} \\
&\quad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad \mp \frac{3^2.5^2.7^2.9^2\ldots(r-2)^2\left(r^r - \frac{r}{1}(r-2)^r + \frac{r}{1}\frac{r-1}{2}(r-4)^r - etc.\right)n^r}{2^{r-1}.\ 1.\ 2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ r}\Big)
\end{aligned}$$

die obern Zeichen gelten, wenn $\frac{1}{2}(r+1)$ gerade, die untern, wenn es ungerade ist.

Gäbe es ein einfacheres Gesetz für diese Reihe, so müßte sich dasselbe aus diesem terminus generalis entwickeln lassen, welches indessen bei dieser Reihe schwerlich der Fall ist.

§. 131. Lehnsatz.

Wenn $c = + \mathrm{Cos.}\, x$, so ist:

$$\begin{aligned}
2\,c^2 &= + \mathrm{Cos.}\,2x + \tfrac{1}{2}.\ 2. \\
2^2 c^3 &= + \mathrm{Cos.}\,3x + 3\ \mathrm{Cos.}\,x \\
2^3 c^4 &= + \mathrm{Cos.}\,4x + 4\ \mathrm{Cos.}\,2x + \tfrac{1}{2}.\ 6. \\
2^4 c^5 &= + \mathrm{Cos.}\,5x + 5\ \mathrm{Cos.}\,3x + 10\ \mathrm{Cos.}\,x \\
2^5 c^6 &= + \mathrm{Cos.}\,6x + 6\ \mathrm{Cos.}\,4x + 15\ \mathrm{Cos.}\,2x + \tfrac{1}{2}.\ 20. \\
&etc.\quad etc.
\end{aligned}$$

Oder allgemein 1) wenn n eine gerade Zahl,

$$\begin{aligned}
2^{n-1}c^n = \mathrm{Cos.}\,nx &+ \frac{n}{1}\mathrm{Cos.}\,(n-2)x + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\mathrm{Cos.}\,(n-4)x \\
&+ \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\mathrm{Cos.}\,(n-6)x + \ldots + \frac{1}{2}\frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+2)}{1\ldots\frac{1}{2}n}\mathrm{Cos.}\,(n-n)x
\end{aligned}$$

2) wenn n eine ungerade Zahl,

$$\begin{aligned}
2^{n-1}c^n = \mathrm{Cos.}\,nx &+ \frac{n}{1}\mathrm{Cos.}\,(n-2)x + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\mathrm{Cos.}\,(n-4)x \\
&+ \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\mathrm{Cos.}\,(n-6)x + \ldots + \frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+3)}{1\ldots\frac{1}{2}(n-1)}\mathrm{Cos.}\,x.
\end{aligned}$$

Entwickelung und Beweis dieser Formeln, sehe man bei denen §. 125. erwähnten Schriftstellern.

§. 132. Aufgabe. 6.

Die höheren ganzen und positiven Potenzen der Reihe

$$\mathrm{Cos.}\,x = c = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + etc.$$

auf eine solche Art zu entwickeln, daß das Fortschreitungsgesetz in jeder Potenz sichtbar bleibe.

Aufl. Diese Entwickelung geschiehet vermittelst des eben vorgetragenen Lehnsatzes auf ganz ähnliche Art, als bei der Sinusreihe (§. 127.). Setzen wir, wie dort, zur Abkürzung $\frac{n}{1} = \alpha$; $\frac{n}{1}\frac{n-1}{2} = \beta$; $\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3} = \gamma$; *etc.* ferner $\frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+4)}{1\ldots\frac{1}{2}(n-2)} = \mu$; $\frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+2)}{1\ldots\frac{1}{2}n} = \nu$; desgleichen $\frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+3)}{1\ldots\frac{1}{2}(n-1)} = \xi$; so haben wir nach dem vorigen §.

$$(A)\quad 2^{n-1}c^n = \mathrm{Cos.}\,nx + \alpha\,\mathrm{Cos.}(n-2)x + \beta\,\mathrm{Cos.}(n-4)x + \gamma\,\mathrm{Cos.}(n-6)x + etc.\,etc.$$

die beiden letzten Glieder sind, wenn n gerade ist, $+\mu\,\mathrm{Cos.}\,2x + \frac{1}{2}\nu$; wenn aber n ungerade ist, so ist das letzte Glied $+\xi\,\mathrm{Cos.}\,x$. Man verwandle nun jeden Cos. dieser Formel in eine Reihe, so ist:

$$\begin{array}{llllll}
(B)\ \mathrm{Cos.}\,nx & = 1 - & n^2\frac{x^2}{1.2} + & n^4\frac{x^4}{1\ldots4} - & n^6\frac{x^6}{1\ldots6} & + etc. \\
+\alpha\,\mathrm{Cos.}(n-2)x & = \alpha - & \alpha(n-2)^2 \;\text{:} & +\alpha(n-2)^4 \;\text{:} & -\alpha(n-2)^6 \;\text{:} & + etc. \\
+\beta\,\mathrm{Cos.}(n-4)x & = \beta - & \beta(n-4)^2 \;\text{:} & +\beta(n-4)^4 \;\text{:} & -\beta(n-4)^6 \;\text{:} & + etc. \\
+\gamma\,\mathrm{Cos.}(n-6)x & = \gamma - & \gamma(n-6)^2 \;\text{:} & +\gamma(n-6)^4 \;\text{:} & -\gamma(n-6)^6 \;\text{:} & + etc.
\end{array}$$

etc. wenn n gerade, bis

$$\begin{array}{llllll}
+\mu\,\mathrm{Cos.}\,2x & = \mu - & \mu.\,2^2 \;\text{:} & +\mu.\,2^4 \;\text{:} & -\mu.\,2^6 \;\text{:} & + etc. \\
+\frac{1}{2}\nu & = \frac{1}{2}\nu & & & &
\end{array}$$

und wenn n ungerade, bis

$$\begin{array}{llllll}
+\xi\,\mathrm{Cos.}\,x & = \xi - & \xi.\,1^2 \;\text{:} & +\xi.\,1^4 \;\text{:} & -\xi.\,1^6 \;\text{:} & + etc.
\end{array}$$

Die Summe aller dieser Reihen wird $2^{n-1}c^n$ seyn. Da $c = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - etc.$ so ist die Form von c^n so, daß $c^n = A + Bx^2 + Cx^4 + etc.$ §. 12. Daher fallen hier nicht, wie bei der Sinusreihe, die ersteren Glieder weg, sondern wir haben

$$(C)\quad 2^{n-1}c^n = (1 + \alpha + \beta + \ldots + \mu + \underset{n\text{ gerade.}}{\tfrac{1}{2}\nu}.\ \text{oder} + \underset{n\text{ ungerade.}}{\xi}\ )$$

$$- (n^2 + \alpha(n-2)^2 + \beta(n-4)^2 + \ldots + \mu.\,2^2.\ \ \text{oder} + \xi\,1^2)\frac{x^2}{1.\,2}$$

$$+ (n^4 + \alpha(n-2)^4 + \beta(n-4)^4 + \ldots + \mu.\,2^4.\ \ \text{oder} + \xi\,1^4)\frac{x^4}{1\,..\,4}$$

$$- (n^6 + \alpha(n-2)^6 + \beta(n-4)^6 + \ldots + \mu.\,2^6.\ \ \text{oder} + \xi\,1^6)\frac{x^6}{1\ldots 6}$$

$$+ \ etc.\ \ etc.$$

Was das letzte Stück jedes Coefficienten betrift, so kann man auch hier den Unterschied derselben, wenn n gerade oder ungerade ist, gänzlich bei Seite setzen, wenn man nur wie bei der Sinusreihe bemerkt, daß man nicht bis zu Potenzen negativer Zahlen fortschreiten dürfe, d. h. daß man mit Potenzen von 1 oder 2 abbrechen müsse. Setzt man für α, β, γ *etc.* wieder ihre Werthe, und dividiret alles durch 2^{n-1}, so erhält man

$$(D)\quad c^n = \frac{1 + \frac{n}{1} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2} + \ etc.}{2^{n-1}}$$

$$- \frac{n^2 + \frac{n}{1}(n-2)^2 + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}(n-4)^2 + etc.}{2^{n-1}.\ 1.\ 2}\,x^2$$

$$+ \frac{n^4 + \frac{n}{1}(n-2)^4 + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}(n-4)^4 + etc.}{2^{n-1}.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4}\,x^4$$

$$- \frac{n^6 + \frac{n}{1}(n-2)^6 + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}(n-4)^6 + etc.}{2^{n-1}.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4}\,x^6$$

$$+ \ etc.\ \ etc.$$

§. 133. Zusatz.

Man bezeichne die Coefficienten der Cosinusreihe vom **ersten** Gliede an, mit D. Z., nemlich $\overset{1}{I} = 1$; $\overset{2}{I} = -\frac{1}{1.\,2}$; $\overset{3}{I} = +\frac{1}{1\,..\,4}$; *etc.* so ist Cos. $x =$

$$c = \overset{1}{I} + \overset{2}{I}x^2 + \overset{3}{I}x^4 + \overset{4}{I}x^6 + etc.$$

daher §. 46. $c^n = \overset{n}{IN} + \overset{n+1}{IN}x^2 + \overset{n+2}{IN}x^4 + \overset{n+3}{IN}x^6 + etc.$

Diese Reihe ist mit (D) im vorigen §. vollkommen identisch; daher folgt

$$\overset{n}{IN} = \frac{1 + \frac{n}{1} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2} + etc.}{2^{n-1}}$$

$$\overset{n+1}{IN} = \frac{n^2 + \frac{n}{1}(n-2)^2 + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}(n-4)^2 + etc.}{2^{n-1}.\,1.\,2}$$

u. s. f. und allgemein

$$\overset{n+r}{IN} = \pm\,\frac{n^{2r} + \frac{n}{1}(n-2)^{2r} + \frac{n(n-1)}{1.\;2}(n-4)^{2r} + etc.}{2^{n-1}.\,1.\,2\,\ldots\ldots\,2r}$$

wo das obere Zeichen für ein gerades r, das untere für ein ungerades r gilt.

Substituiret man in diesen Formeln für IN und n bestimmte Zeichen, nemlich erst II und 2, dann III und 3, ferner IV und 4 *etc.*, so erhält man die Werthe der sämtlichen höheren D. Z., welche sich auf die **Coefficienten der Cosinusreihe vom ersten Gliede an** beziehen. Man sehe Taf. V. C.

Da das **erste** Glied jeder Ordnung oder $\overset{n}{IN} = (\overset{1}{I})^n$ (§. 38.), also für unsern Fall $= 1$, so haben wir diesen Werth in die Tafel gebracht. Hätten wir nemlich auch das erste Glied nach der allgemeinen Form ausgedrückt, so würde in den geraden Ordnungen eine Disharmonie zwischen den ersten und folgenden Gliedern entstanden seyn. (Man sehe den allgemeinen Ausdruck (C) im vorigen §., wo im ersten Gliede, wenn n gerade noch $\frac{1}{2}\nu$ hinzukommt, welches in den folgenden Gliedern fehlt.)

In dem Zähler der allgemeinen Ausdrücke bricht man mit Potenzen von 1 oder 2 ab. Jenes in den ungeraden, dies in den geraden Ordnungen.

Wollte man das erste Glied jeder Ordnung dem allgemeinen Gesetzt gemäß ausdrücken, so ist 1) für ein gerades n

$$\overset{n}{IN} = +\,\frac{1 + \frac{n}{1} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2} + \ldots + \frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+4)}{1\ldots\frac{1}{2}(n-2)} + \frac{1}{2}\,\frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+2)}{1\ldots\frac{1}{2}n}}{2^{n-1}}$$

2) für ein ungerades n

$$\overset{n}{IN} = +\,\frac{1 + \frac{n}{1} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2} + \ldots\ldots + \frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+3)}{1\ldots\frac{1}{2}(n-1)}}{2^{n-1}}$$

setzt man hier für IN und n bestimmte Zeichen, so erhält man

$$\overset{2}{\mathrm{II}} = + \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}}{2} = + \frac{2^0 + \frac{1}{2}\cdot 2}{2}$$

$$\overset{3}{\mathrm{III}} = + \frac{1 + \frac{3}{1}}{4} = + \frac{3^0 + 3\cdot 1^0}{4}$$

$$\overset{4}{\mathrm{IV}} = + \frac{1 + \frac{4}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}}{8} = + \frac{4^0 + 4\cdot 2^0 + \frac{1}{2}\cdot 6}{8}$$

$$\overset{5}{\mathrm{V}} = + \frac{1 + \frac{5}{1} + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}}{16} = + \frac{5^0 + 5\cdot 3^0 + 10}{16}$$

$$\overset{6}{\mathrm{VI}} = + \frac{1 + \frac{6}{1} + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} + \frac{1}{2}\,\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}}{32} = + \frac{6^0 + 6\cdot 4^0 + 15\cdot 2^0 + \frac{1}{2}\cdot 20}{32}$$

$$\overset{7}{\mathrm{VII}} = + \frac{1 + \frac{7}{1} + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}}{64} = + \frac{7^0 + 7\cdot 5^0 + 21\cdot 3^0 + 35}{64}$$

etc.

Daß übrigens die Tafel V. C. mit VII. A. in Wesentlichen einerley seyn müsse, ist für sich selbst klar.

§. 134. Zusatz.

Der allgemeine Coefficient der $n$ten Potenz war, bei der Sinusreihe

$$A)\quad \frac{n^{n+2r} - \frac{n}{1}(n-2)^{n+2r} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}(n-4)^{n+2r} - etc.}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \; . \; . \; . \; . \; (n+2r)} \quad (§. 136.)$$

bei der Cosinusreihe

$$B)\quad \frac{n^{2r} + \frac{n}{1}(n-2)^{2r} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}(n-4)^{2r} + etc.}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \; . \; . \; . \; . \; 2r} \quad (§. 140.)$$

Wegen 2^n im Nenner (statt 2^{n-1}) vergleiche man die Anmerkung §. 129.

Ließen sich diese Ausdrücke auf irgend eine Art in eine einfachere Gestalt umformen, so würde dies für unzählige Rechnungen ein wichtiger Vortheil seyn.

Es ist schon oben (§. 129.) angemerkt worden, daß sich dergleichen Reihen wirklich summiren lassen, und obgleich das Resultat der Summirung nichts giebt, wodurch unsere Tafeln einfacher gemacht werden könnten, so ist doch diese Summirung an sich merkwürdig, auch ist es an sich schon wichtig, deutlich einzusehen, daß auf diesem Wege unsere Absicht nicht erreicht werden kann.

Obgleich die Summirung dieser Reihen auf dem gewöhnlichen Wege, durch wiederholte Differentiirung einer Reihe, deren Summe bekannt ist, bewerkstelliget werden

werden kann, so erinnere ich mich doch nicht diese Summirung irgendwo anders gefunden zu haben, als in der mit vielen Scharfsinn geschriebenen kleinen Schrift des Herrn Pr. Pfaff: Versuch einer neuen Summationsmethode. Berlin 1788. S. 23 — 30.

Die Art, wie Herr Pfaff diese Rechnung ausführt, ist sehr sinnreich, da aber der Vortrag in diesem kleinen Werke fast etwas zu gedrängt ist, so wird es vielleicht nicht überflüßig seyn, die Rechnung hier etwas umständlicher vorzutragen, wobei wir zu besserer Vergleichung die Buchstaben so beibehalten wollen, wie sie Herr P. braucht. Indessen können Leser, die in der Differenzialrechnung nicht genug geübt sind, den Rest dieses §. ohne Nachtheil überschlagen.

Die zu summirende Reihe sey also

$$C)\quad r^q y^r \mp \frac{r}{1}(r-2)^q y^{r-2} + \frac{r}{1}\frac{r-1}{2}(r-4)^q y^{r-4} \mp etc.$$

bis die Reihe vermöge der Binomialcoeff. von selbst abbricht. (A) und (B) sind offenbar besondere Fälle dieser Reihe.

Nach dem Binomialsatz ist

$$D)\quad y^r \mp \frac{r}{1} y^{r-2} + \frac{r}{1}\frac{r-1}{2} y^{r-4} \mp etc. = (y \mp \frac{1}{y})^r$$

und eine wiederholte Differentiirung von (D) giebt, die gesuchte Summirung von (C). Wir wollen hierbei uns vor das erste blos an die untern Zeichen halten.

Man differentiire also die Reihe

$$y^r + \frac{r}{1} y^{r-2} + \frac{r}{1}\frac{r-1}{2} y^{r-4} + etc. = (y + \frac{1}{y})^r = w$$

und multiplicire nachher alles durch $\frac{y}{dy}$, so erhält man

$$r y^r + \frac{r}{1}(r-2) y^{r-2} + \frac{r}{1}\frac{r-1}{2}(y-4) y^{r-4} + etc. = \frac{y\,dw}{dy} = w^{\mathrm{I}}$$

wiederholt man dasselbe Verfahren, so wird

$$r^2 y^r + \frac{r}{1}(r-2)^2 y^{r-2} + \frac{r}{1}\frac{r-1}{2}(y-4)^2 y^{r-4} + etc. = \frac{y\,dw^{\mathrm{I}}}{dy} = w^{\mathrm{II}}$$

eine dritte Wiederholung giebt

$$r^3 y^r + \frac{r}{1}(r-2)^3 y^{r-2} + \frac{r}{1}\frac{r-1}{2}(y-4)^3 y^{r-4} + etc. = \frac{y\,dw^{\mathrm{II}}}{dy} = w^{\mathrm{III}}$$

u. s. w.

nach der $q$ten Wiederholung wird man also haben

$$r^q y^r + \frac{r}{1}(r-2)^q y^{r-2} + \frac{r}{1}\frac{r-1}{2}(y-4)^q y^{r-4} + etc. = \frac{y\,dw^{(q-1)}}{dy} = w^{(q)}$$

Die wirkliche Entwickelung der Differentiale ist etwas mühsam, noch schwerer aber ist es, das Gesetz zu finden, nach welchem die Formeln fortschreiten. Zur Abkürzung setze man $(y+\frac{1}{y})^r = w$, und $\frac{y-\frac{1}{y}}{y+\frac{1}{y}} = z$, so wird

$$dw = r\,(y+\frac{1}{y})^{r-1}(1-\frac{1}{y^2})\,dy; \text{ also } \frac{y}{dy}\,dw = w.rz.$$

$$\text{ferner } dz = \frac{(y+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{y^2})-(y-\frac{1}{y})(1-\frac{1}{y^2})}{(y+\frac{1}{y})^2}\,dy; \text{ also } \frac{ydz}{dy} = 1-zz.$$

mit Hülfe dieser Bezeichnung wird die Arbeit sehr erleichtert.

1) Durch die erste Differentiirung erhält man $w^{I} = \frac{y}{dy}\,dw = w.rz$. Dies ist die gesuchte Summe für $q = 1$.

2) Diesen Ausdruck differentiire man wieder, schreibe aber hier und in der Folge beständig wrz, statt dw; und $1-zz$, statt dz, so erhält man nemlich die nöthige Multiplication durch $\frac{y}{dy}$ von selbst mit. Auf diese Art findet man

für $q = 2$; $w^{II} = w\,(r(r-1)\,z^2 + r)$

mit dieser Formel wird dieselbe Arbeit wiederholt, so findet man

für $q = 3$; $w^{III} = w\,(r\,(r-1)\,(r-2)\,z^3 + r\,(3r-2)\,z)$

für $q = 4$; $w^{IV} = w\,(r..(r-3)\,z^4 + 2r\,(r-1)(3r-4)\,z^2 + r\,(3r-2))$

für $q = 5$; $w^{V} = w\,(r..(r-4)\,z^5 + 10\,r\,(r-1)(r-2)^2 z^3 + r\,(15\,(r-1)^2+1)\,z)$

u. s. w.

Es wäre nicht nöthig gewesen, so weit in der Arbeit fortzugehen, um zu übersehen, daß jede Summe den Factor w, und dann eine Reihe nach Potenzen von z enthält, wovon die höchste immer z^q ist, die Exponenten aber um 2 abnehmen. Die Summe für q, wird also **ihrer Form nach** folgende seyn:

$$w^{(q)} = w\,(Az^q + Bz^{q-2} + Cz^{q-4} + Dz^{q-6} + etc.)$$

die Reihe bricht mit z^0 oder z^1 ab, je nachdem q gerade, oder ungerade ist.

Aus dieser Form ergeben sich einige Folgerungen. 1) Wenn die gefundene Summirung auf unsere Reihen A oder B angewendet werden soll, so muß $y = 1$ gesetzt werden, dadurch wird $z = 0$; also $w^{(q)}$ für jedes ungerade q auch $= 0$, für jedes gerade q aber besteht die Summirungsformel aus dem Producte von w in dasjenige Glied, welches gar kein z enthält. 2) Wenn man (C) für abwechselnde Zeichen summiren will, so müssen auch in (D) die Zeichen abwechseln, dadurch wird

$w = (y - \frac{1}{y})^r$, und setzt man nun $z = \frac{y + \frac{1}{y}}{y - \frac{1}{y}}$, so bleibt alles, wie vorhin, und wir werden keine andern als die schon gefundenen Formeln erhalten. In diesem Falle aber, wird für $y = 1$, nicht z, sondern $w = 0$; daher, so lange $q < r$, durchgehends auch $w^{(q)} = 0$. Wird $q = r$, so hebt sich w, gegen den Nenner von z^q, und das Glied Az^q bekommt also einen endlichen Werth, alle übrige aber bleiben $= 0$. Der weitere Fortgang läßt sich im Allgemeinen nicht deutlich übersehen, weil, wenn $q > r$ ein oder mehr Glieder, unendlich werden.

Zur Bestimmung der Coefficienten A, B, C *etc.*, welches eigentlich die Hauptsache bei der ganzen Rechnung ist, bedient sich Herr P. einer eigenen sehr zweckmäßig ausgedachten Bezeichnungsart. Jeden ersten Coefficienten (der höchsten Potenz von z) bezeichnet er mit I, jeden 2ten mit II, jeden 3ten mit III *etc.*, jeden $(m - 1)$ten mit $(M - \mathrm{I})$, jeden $m$ten mit M: dies unverändert für jeden Werth von q. Dann setzt er den Exponenten der Potenz, wozu ein solches Zeichen als Coefficient gehöret, zum Inder daneben. (Wir wollen es, wie bei den D. Z., darüber setzen.)

Mit diesen Zeichen schreiben wir:

$$
\begin{aligned}
(E)\; w^{\mathrm{I}} &= w\; \overset{1}{\mathrm{I}}\, z \\
w^{\mathrm{II}} &= w\, (\overset{2}{\mathrm{I}}\, z^2 + \overset{1}{\mathrm{I}}) \\
w^{\mathrm{III}} &= w\, (\overset{3}{\mathrm{I}}\, z^3 + \overset{1}{\mathrm{II}}\, z) \\
w^{\mathrm{IV}} &= w\, (\overset{4}{\mathrm{I}}\, z^4 + \overset{2}{\mathrm{II}}\, z^2 + \overset{1}{\mathrm{II}}) \\
w^{\mathrm{V}} &= w\, (\overset{5}{\mathrm{I}}\, z^5 + \overset{3}{\mathrm{II}}\, z^3 + \overset{1}{\mathrm{III}}\, z) \\
w^{\mathrm{VI}} &= w\, (\overset{6}{\mathrm{I}}\, z^6 + \overset{4}{\mathrm{II}}\, z^4 + \overset{2}{\mathrm{III}}\, z^2 + \overset{1}{\mathrm{I\,I}}) \\
&\textit{etc.} \\
w^{(q)} &= w\, (\overset{q}{\mathrm{I}}\, z^q + \overset{q-2}{\mathrm{II}}\, z^{q-2} + \overset{q-4}{\mathrm{III}}\, z^{q-4} + \overset{q-6}{\mathrm{IV}}\, z^{q-6} + \textit{etc.}
\end{aligned}
$$

Der Grund, warum das letzte Glied der 2ten, 4ten, 6ten *etc.* Zeile, nicht $\overset{0}{\mathrm{II}}$, $\overset{0}{\mathrm{III}}$, $\overset{0}{\mathrm{IV}}$ *etc.*, sondern $\overset{1}{\mathrm{I}}$, $\overset{1}{\mathrm{II}}$, $\overset{1}{\mathrm{III}}$ heißt, ist leicht einzusehen, wenn man die oben für w^{I}, w^{II}, w^{II} *etc.* geführte Rechnung betrachtet; überhaupt kann man jederzeit für $\overset{0}{M}$, $(M \overset{1}{-} \mathrm{I})$ setzen.

Jeder Coefficient dieser Art z. B. $\overset{2}{\mathrm{III}}$ hängt allezeit von zwei Coeff. der vorhergehenden Zeile $\overset{1}{\mathrm{III}}$ und $\overset{3}{\mathrm{II}}$ ab, wie man leicht aus dem Gesetze, nach welchem die oben beschriebene Differenziirung fortschreitet, ersiehet. Es mögen demnach

w

$$w\,(\ldots + (\overset{n+1}{M} - \mathrm{I})\, z^{n+1} + \overset{n-1}{M}\, z^{n-1} + \ldots)$$

zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder einer Zeile seyn, so werden diese durch die Differenzijrung, das Glied $\overset{n}{M} z^n$ in der folgenden Zeile geben. Die folgende Zeile entsteht nemlich, wenn man 1) was in der Klammer steht mit $\frac{y}{dy} dw = w.rz$ multipliciret, und denn 2) w mit dem Differential dessen, was eingeklammert ist, multipliciret, beim Differentiiren aber statt dz, oder vielmehr $\frac{y}{dy} dz$, $1 - zz$ schreibt. Verfährt man so mit den beiden obigen Gliedern, schreibt aber blos das hin, was z^n giebt, so erhält man

$$\begin{array}{l} w\,(\ldots + \quad r \quad \overset{n-1}{M} \quad z^n + \ldots) \\ \quad (\ldots + (n+1)\,(\overset{n+1}{M} - \mathrm{I})\, z^n + \ldots) \\ \quad (\ldots - (n-1) \quad \overset{n-1}{M} \quad z^n - \ldots) \end{array}$$

Die Summe dieser drei Glieder ist $\overset{n}{M} z^n$, also

$$\overset{n}{M} = (n+1)\,(\overset{n+1}{M} - \mathrm{I}) + (r - n + 1)\,\overset{n-1}{M}$$

von dieser Gleichung hängt das ganze System aller jener Coefficienten ab, und da der erste unter ihnen $\overset{1}{\mathrm{I}} = r$ bekannt ist, so müssen durch dieselbe alle übrige bestimmt werden können. Nun bestimme man zuerst die Werthe aller I, dann aller II, u. s. f.

Zur Bestimmung der sämtlichen I, setze man in der obigen Gleichung $M = \mathrm{I}$, so wird $M - \mathrm{I} = 0$, also $\overset{n}{\mathrm{I}} = (r - n + 1)\,\overset{n-1}{\mathrm{I}}$, also nach der Reihe

$$\begin{array}{l} \overset{1}{\mathrm{I}} = \qquad\qquad = r \\ \overset{2}{\mathrm{I}} = (r-1)\,\overset{1}{\mathrm{I}} = r\,(r-1) \\ \overset{3}{\mathrm{I}} = (r-2)\,\overset{2}{\mathrm{I}} = r\,(r-1)\,(r-2) \\ \overset{4}{\mathrm{I}} = (r-3)\,\overset{3}{\mathrm{I}} = r\,(r-1)\,(r-2)\,(r-3) \\ \qquad etc. \end{array}$$

$$(a)\ \overset{n}{\mathrm{I}} = (r - n + 1)\,\overset{n-1}{\mathrm{I}} = r\,(r-1)\ldots\ldots(r-n+1).$$

Um alle II zu bestimmen, setze man $M = \mathrm{II}$, also $\overset{n}{\mathrm{II}} = (n+1)\,\overset{n+1}{\mathrm{I}} + (r - n + 1)\,\overset{n-1}{\mathrm{II}}$, daher

$$\overset{1}{\mathrm{II}} = 2\overset{2}{\mathrm{I}} + r\overset{0}{\mathrm{II}} = 2\overset{2}{\mathrm{I}} + 1.r\overset{1}{\mathrm{I}}$$
$$\overset{2}{\mathrm{II}} = 3\overset{3}{\mathrm{I}} + (r-1)\overset{1}{\mathrm{II}} = 3\overset{3}{\mathrm{I}} + 2(r-1)\overset{2}{\mathrm{I}} + 1.r(r-1)\overset{1}{\mathrm{I}}$$
$$\overset{3}{\mathrm{II}} = 4\overset{4}{\mathrm{I}} + (r-2)\overset{2}{\mathrm{II}} = 4\overset{4}{\mathrm{I}} + 3(r-2)\overset{3}{\mathrm{I}} + 2(r-1)(r-2)\overset{2}{\mathrm{I}} + 1.r(r-1)(r-2)\overset{1}{\mathrm{I}}$$
$$\overset{4}{\mathrm{II}} = 5\overset{5}{\mathrm{I}} + (r-3)\overset{3}{\mathrm{II}} = 5\overset{5}{\mathrm{I}} + 4(r-3)\overset{4}{\mathrm{I}} + 3(r-2)(r-3)\overset{3}{\mathrm{I}} + 2(r-1)(r-2)(r-3)\overset{2}{\mathrm{I}}$$
$$+ 1.r(r-1)(r-2)(r-3)\overset{1}{\mathrm{I}}$$

etc.

$$(b)\ \overset{n}{\mathrm{II}} = (n+1)\overset{n+1}{\mathrm{I}} + n(r-n+1)\overset{n}{\mathrm{I}} + (n-1)(r-n+2)(r-n+1)\overset{n-1}{\mathrm{I}}$$
$$+ (n-2)(r-n+3)(r-n+2)(r-n+1)\overset{n-2}{\mathrm{I}} + \ldots + 1.r(r-1)\ldots(r-n+1)\overset{1}{\mathrm{I}}.$$

Durch eine völlig ähnliche Rechnung findet man

$$(c)\ \overset{n}{\mathrm{III}} = (n+1)\overset{n+1}{\mathrm{II}} + n(r-n+1)\overset{n}{\mathrm{II}} + (n-1)(r-n+2)(r-n+1)\overset{n-1}{\mathrm{II}}$$
$$+ (n-2)(r-n+3)(r-n+2)(r-n+1)\overset{n-2}{\mathrm{II}} + \ldots + 1.r(r-1)\ldots(r-n+1)\overset{1}{\mathrm{II}}$$

$$(d)\ \overset{n}{\mathrm{IV}} = (n+1)\overset{n+1}{\mathrm{III}} + n(r-n+1)\overset{n}{\mathrm{III}} + (n-1)(r-n+2)(r-n+1)\overset{n-1}{\mathrm{III}}$$
$$+ (n-2)(r-n+3)(r-n+2)(r-n+1)\overset{n-2}{\mathrm{III}} + \ldots + 1.r(r-1)\ldots(r-n+1)\overset{1}{\mathrm{III}}$$

u. s. w. so daß also jeder Coefficient der Ordnung M, von der vorhergehenden Ordnung $(M-\mathrm{I})$, völlig auf einerlei Art abhängig ist, oder allgemein

$$(e)\ \overset{n}{M} = (n+1)\overset{n+1}{(M-\mathrm{I})} + n(r-n+1)\overset{n}{(M-\mathrm{I})} + (n-1)(r-n+2)(r-n+1)\overset{n-1}{(M-\mathrm{I})}$$
$$+ (n-2)(r-n+3)(r-n+2)(r-n+1)\overset{n-2}{(M-\mathrm{I})} + \ldots + 1.r\ldots(r-n+1)\overset{1}{(M-\mathrm{I})}.$$

Setzt man nun in der für $\overset{n}{\mathrm{II}}$ gefundenen Formel (b), statt der Zeichen I ihre Werthe aus (a), so erhält man

$$\begin{aligned}\overset{n}{\mathrm{II}} = {} & r(r-1)\ldots\ldots(r-n+1)(n+1)(r-n)\\ & + r(r-1)\ldots\ldots(r-n+1)\quad n.\quad (r-n+1)\\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (n-1)(r-n+2)\\ & + etc.\\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 1.\quad r\end{aligned}$$

d. h. $\overset{n}{\mathrm{II}}$ ist gleich $r(r-1)\ldots(r-n+1)$, multiplicirt in $n+1$ Glieder einer arithmetischen Reihe der 2ten Ordn. $1.r + 2(r-1) + 3(r-2) + \ldots + (n+1)(r-n)$. Diese Summe zeige man durch $S\overline{(n+1)(r-n)}$ an, so ist

$$(f)\ \overset{n}{\mathrm{II}} = r(r-1)\ldots(r-n+1)\,S\overline{(n+1)(r-n)}.$$

Setzt

Setzt man ferner in der für $\overset{n}{\text{III}}$ gefundenen Formel (*c*), statt der Zeichen II, ihre Werthe aus (*f*), so erhält man

$$\begin{aligned}\overset{n}{\text{III}} = r(r-1)\ldots(r-n+1)\;&(n+1)\,(r-n)\,S\,\overline{(n+2)\,(r-n-1)}\\ +\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;&n\,(r-n+1)\,S\,\overline{(n+1)\,(r-n)}\\ +\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;&(n-1)\,(r-n+2)\,S\,\overline{(n)\,(r-n+1)}\\ +\;etc.&\\ +\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;&1.\quad r\quad S\,\overline{2\,(r-1)}\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck $S\,\overline{2\,(r-1)}$ bedeutet die Summe von 2 Gliedern der obigen arithmetischen Reihe der 2ten Ordn. oder $1.\,r + 2\,(r-1)$. Der ganze Werth von $\overset{n}{\text{III}}$ besteht also aus dem Product von $r\,(r-1)\ldots(r-n+1)$, in $n+1$ Glieder der Reihe

$$1.\,r\,S\,\overline{2\,(r-1)} + 2\,(r-1)\,S\,\overline{3\,(r-2)} + \ldots + (n+1)\,(r-n)\,S\,\overline{(n+2)\,(r-n-1)}$$

welches sich so ausdrücken läßt

$$\overset{n}{\text{III}} = r\,(r-1)\ldots(r-n+1)\;S\,\overline{(n+1)\,(r-n)\;S\,\overline{(n+2)\,(r-n-1)}}$$

Durch ein ganz ähnliches Verfahren findet sich

$$\overset{n}{\text{IV}} = r\,(r-1)\ldots(r-n+1)\;S\,\overline{(n+1)\,(r-n)\;S\,\overline{(n+2)\,(r-n-1)\;S\,\overline{(n+3)\,(r-n-2)}}}$$

und so nach dem einfachen Gesetze, daß man hinter jeden folgenden *S*, die beiden vorhergehenden Factoren, mit der einzigen Veränderung wiederholt, daß, statt n, $n+1$ gesetzt wird. Die übergesetzten Striche zeigen deutlich, wie weit sich die Bedeutung jedes *S* erstrecke. Allgemein wird seyn

$$\overset{n}{M} = r\,(r-1)\;.\;.\;.\;.\;(r-n+1)\;\times$$

$$S\,\overline{(n+1)\,(r-n)\;S\,\overline{(n+2)\,(r-n-1)\;S\;.\;.\;.\;.\;S\,\overline{(n+m-1)\,(r-n-m+2)}}}$$

So einfach die Formeln in dieser Bezeichnungsart erscheinen, so verwickelt werden sie, wenn man die *S* wegschaffen will, wovon man sich gleich bei dem ersten Versuche überzeugen kann. Es ist nemlich

$$S\,\overline{(n+1)\,(r-n)} = \frac{n+1}{1}\,\frac{n+2}{2}\,\frac{3r-2n}{3}$$

also $\overset{n}{\text{II}} = r\,(r-1)\ldots(r-n+1)\,\frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}\,\frac{3r-2n}{3}$

Eben so $S\,\overline{(n+2)\,(r-n-1)} = \frac{n+2}{1}\,\frac{n+3}{2}\,\frac{3r-2(n+1)}{3}$

also

also $\overset{n}{\text{III}} = r(r-1)\ldots(r-n+1)\tfrac{1}{6}S(n+1)(n+2)(n+3)(r-n)(3r-2n-2)$

so daß man, um den Werth von $\overset{n}{\text{III}}$ ohne ein S zu erhalten, schon eine Reihe der 5ten Ordnung summiren muß, und für jedes folgende Zeichen, wird die zu summirende Reihe um 3 Grade höher. Es dürfte daher eine allgemeine Auflösung dieser Formeln, nicht viel besser als unmöglich seyn. Demohngeachtet bleibt diese Summirung merkwürdig und brauchbar: denn theils können zu allgemeinen Untersuchungen, besonders so lange, für n keine bestimmte Zahl gesetzt wird, die Formeln in der obigen sehr einfachen Form beibehalten werden, theils kann man auch ohne Schwierigkeit den Werth jedes Coefficienten für ein bestimmtes n, durch diese Formeln finden. Wie wir noch kürzlich zeigen wollen.

Wir wollen uns aber blos auf den Fall einschränken, wenn die zu summirende Reihe (c) gleiche Zeichen enthält, und $y = 1$ ist. Alsdenn ist $= w = (y + \frac{1}{y})^r = 2^r$, und $z = 0$, also in (E) $w^{\text{I}}, w^{\text{III}}, w^{\text{V}}$, etc. $= 0$. Ferner

$$w^{\text{II}} = w\overset{\text{I}}{\text{I}};\quad w^{\text{IV}} = w\overset{\text{I}}{\text{II}};\quad w^{\text{VI}} = w\overset{\text{I}}{\text{III}};\quad w^{\text{VIII}} = w\overset{\text{I}}{\text{IV}};\ etc.$$

Um nun die Werthe von $\overset{\text{I}}{\text{I}}, \overset{\text{I}}{\text{II}}, \overset{\text{I}}{\text{III}}$ etc. zu finden, müssen wir in jeder der gefundenen Formeln $n = 1$ setzen; dann ist

1) $\overset{\text{I}}{\text{I}} = r$

2) $\overset{\text{I}}{\text{II}} = r.\,S(n+1)(r-n) = r(2(r-1) + 1.r) = r(3r-2)$

3) $\overset{\text{I}}{\text{III}} = r\,S(n+1)(r-n)\,S(n+2)(r-n-1)$

$$= r\left[\begin{array}{l} 2(r-1)(3(r-2) + 2(r-1) + 1.r) \\ +1.\ r\ \ (2(r-1) + 1.r) \end{array}\right]$$

$$= r(15rr - 30r + 16) = r(15(r-1)^2 + 1)$$

4) $\overset{\text{I}}{\text{IV}} = r\,S(n+1)(r-n)\,S(n+2)(r-n-1)\,S(n+3)(r-n-2)$

$$= r\left\{\begin{array}{l} 2(r-1)\left\{\begin{array}{l} 3(r-2)(4(r-3) + 3(r-2) + 2(r-1) + 1.r) \\ +2(r-1)(\qquad 3(r-2) + 2(r-1) + r) \\ +1.\ r\ (\qquad\qquad 2(r-1) + r) \end{array}\right\} \\ +1.\ r\ \left[\begin{array}{l} 2(r-1)(\qquad 3(r-2) + 2(r-1) + r) \\ +1.\ r\ (\qquad\qquad 2(r-1) + r) \end{array}\right] \end{array}\right\}$$

Die Vergleichung dieses Werthes mit dem vorigen, bietet eine Abkürzung im wirklichen Summiren dar.

$$\frac{\overset{\text{I}}{\text{IV}}}{r} = 2(r-1)\left(3(r-2)(4(r-3)+3(r-2)+2(r-1)+r)\right)$$
$$+ \frac{2(r-1)}{r}\overset{\text{I}}{\text{III}} + \overset{\text{I}}{\text{III}}$$

die erste Zeile giebt $60(r-1)(r-2)^2$

also $\overset{\text{I}}{\text{IV}} = r\left(60(r-1)(r-2)^2 + (3r-2)(15(r-1)^2+1)\right)$

u. s. f.

Wie ich glaube, ist die Art dieser Rechnung nicht schwer zu übersehen, und weiter fortzusetzen, wenn man sich den Sinn des Zeichens S deutlich denkt. Die gefundenen Werthe geben übrigens folgende Summirungen:

$$w^{\text{II}} = w\overset{\text{I}}{\text{I}} = r^2 + \frac{r}{1}(r-2)^2 + \frac{r}{1}\frac{r-1}{2}(r-4)^4 + etc.$$
$$= r.\,2^r.$$

$$w^{\text{IV}} = w\overset{\text{I}}{\text{II}} = r^4 + \frac{r}{1}(r-2)^4 + \frac{r}{1}\frac{r-1}{2}(r-4)^4 + etc.$$
$$= r(3r-2).\,2^r = r(3(r-1)+1)\,2^r$$

$$w^{\text{VI}} = w\overset{\text{I}}{\text{III}} = r^6 + \frac{r}{1}(r-2)^6 + \frac{r}{1}\frac{r-1}{2}(r-4)^6 + etc.$$
$$= r(15(r-1)^2+1)\,2^r = r(15r(r-1) - 15(r-1)+1)\,2^r$$

$$w^{\text{VIII}} = w\overset{\text{I}}{\text{IV}} = r^8 + \frac{r}{1}(r-2)^8 + \frac{r}{1}\frac{r-1}{2}(r-4)^8 + etc.$$
$$= r(60(r-1)(r-2)^2 + (3r-2)(15(r-1)^2+1))\,2^r$$
$$= r(105r(r-1)(r-2) - 105r(r-1) + 273(r-1)+1)\,2^r$$

u. s. f.

Da aber in diesen Ausdrücken schwerlich ein einfaches Fortschreitungsgesetz sichtbar zu machen ist, so können wir sie zur Simplificirung unserer obigen Tafeln nicht brauchen, ob sie gleich sonst von nützlichen Gebrauche seyn können.

§. 135. Anmerkung.

Wir haben in diesem Abschnitte für sechs wichtige Reihen die höheren Potenzen, oder vielmehr die Werthe der höheren D. Z., welche sich auf die Coeff. dieser 6 Reihen beziehen, auf eine solche Art entwickelt, daß wir das Fortschreitungsgesetz für jede höhere Ordnung kennen. Wir können aber diesen Reihen, eine noch allgemeinere Form geben, als wir bei Entwickelung ihrer Potenzen zum Grunde gelegt haben, indem die Potenzen von x, nach welchen wir jede Reihe geordnet haben, nicht nothwendig so seyn müssen, wie wir sie bei der Entwickelung angenommen haben. Befolgen nur ihre Exponenten das Gesetz einer arithmetischen Reihe, so hat dies auf den

den Werth der höheren D. Z. oder Coefficienten in den höheren Potenzen keinen Einfluß; da wir aus dem 2ten und 3ten Abschnitt wissen, daß die Potenzen von x, und ihre Coefficienten, jede, ihr eigenes von dem andern unabhängiges Gesetz befolgen. Wir wollen daher hier die Reihen oder Functionen von x, deren Potenzen wir entwickelt haben, in ihrer allgemeinsten Form hersetzen. In dieser Form sind die untersuchten Reihen folgende:

1) $y = ax^m + abx^{m+r} + ab^2x^{m+2r} + ab^3x^{m+3r} + etc. = \frac{ax^m}{1-x^r}$
(§. 116. Taf. IV. A.)

2) $y = ax^m + (a+b)x^{m+r} + (a+2b)x^{m+2r} + (a+3b)x^{m+3r} + etc.$
$= \frac{ax^m}{(1-x^r)} + \frac{bx^{m+r}}{(1-x^r)^2}$ (§. 117. Taf. IV. B.)

Hierbei noch besonders der einzelne Fall

$y = ax^m + 2ax^{m+r} + 3ax^{m+2r} + 4ax^{m+3r} + etc. = \frac{ax^m}{(1-x^r)^2}$
(§. 118. Taf. IV. C.)

3) $y = a^mx^p + \frac{m}{1}a^{m-1}bx^{p+q} + \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2x^{p+2q} + etc.$
$= x^p(a+bx^q)^m$ (§. 119. Taf. IV. D.)

4) $y = x^m + \frac{1}{1}x^{m+r} + \frac{1}{1.2}x^{m+2r} + \frac{1}{1.2.3}x^{m+3r} + \frac{1}{1..4}x^{m+4r} + etc.$
$= x^m$. Num. log. (x^r), d. h. wenn man die Größe x^r als einen natürlichen Log. ansieht, und die dazu gehörige Zahl mit der Größe x^m multipliciret, so ist das Product y, oder die Reihe. Die Potenzen dieser Reihe sind entwickelt §. 124. Taf. V. A. Wenn e die Grundzahl des nat. Log. Systems bedeutet, so ist die Summe eben der Reihe auch $= x^m e^{x^r}$.

5) $y = x^m - \frac{x^{m+2r}}{1.\ 2.\ 3} + \frac{x^{m+4r}}{1.2.3.4.5} - \frac{x^{m+6r}}{1\ldots.7} + etc. = x^m.\ \mathrm{Sin.}(x^r)$.
(§. 127. 128. Taf. V. B.)

6) $y = x^m - \frac{x^{m+2r}}{1.\ 2} + \frac{x^{m+4r}}{1.2.3.4} - \frac{x^{m+6r}}{1\ldots.6} + etc. = x^m\ \mathrm{Cos.}(x^r)$.
(§. 132. Taf. V. C.)

In Absicht der in diesen sämtlichen Reihen gebrauchten Zeichen ist aber noch zu merken, daß die obigen Tafeln nicht blos für die hier ausgedrückte Folge der Zeichen, sondern für jede von folgenden vier Folgen brauchbar ist:

1) + + + + *etc.*
2) — — — — *etc.*
3) + — + — *etc.*
4) — + — + *etc.*

denn wir haben im 2ten Abschn. §. 41. gezeigt, daß diese vier Veränderungen der Zeichen, auf den absoluten Werth keines einzigen D. Z. einen Einfluß haben, sondern daß blos die Vorzeichnung auch in den höheren Ordnungen geändert werden muß, wenn sie in der ersten Ordnung anders, als in den Tafeln seyn sollte. Die Regeln dazu sind leicht, und a. a. O. erklärt und bewiesen.

Wozu dergleichen Tafeln gebraucht werden können, ist theils in der Einleitung zu diesem Abschnitte gesagt worden, theils kann es einigermaßen aus den beiden Erläuterungsbeispielen §. 121. und 130. ersehen werden. Indessen ist die bisherige Theorie noch nicht hinreichend alle Anwendungen derselben deutlich zu machen. Besonders können wir diese Tafeln noch nicht auf solche Reihen anwenden, in denen sich zwar die D. Z. auf Coefficienten einer der obigen sechs Reihen beziehen, doch so, daß der Coefficient des ersten Gliedes nicht mit einem D. Z. bezeichnet wird, und von dieser Art waren die meisten in den vorigen Abschnitten entwickelten Reihen, nemlich in allen, wo wir, eben dieses Unterschiedes wegen, nicht die D. Z. I, II, III *etc.* sondern 𝔄, 𝔅, ℭ, *etc.* gebraucht haben. Um indessen schon hier einigermaßen zu zeigen, wie mannigfaltig der Gebrauch der angestellten Untersuchungen seyn könne, will ich noch ein Beispiel von ganz anderer Art, als die schon angeführten hinzusetzen. Doch ist bei diesem Beispiel die Methode vielleicht mehr, als die Sache selbst, zu bemerken.

§. 136. Erläuterungsaufgabe.

Die Summe folgender Reihe zu finden.

$$(A)\; S = 1 - \frac{2^{2r}}{2} + \frac{3^{2r}+3}{4} - \frac{4^{2r}+4.2^{2r}}{8} + \frac{5^{2r}+5.3^{2r}+10}{16}$$

$$- \frac{6^{2r}+6.4^{2r}+15.2^{2r}}{32} + \ldots\ldots$$

$$\mp \frac{n^{2r} + \frac{n}{1}(n-2)^{2r} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(n-4)^{2r} + etc.}{2^{n-1}} \pm etc.\ etc.$$

Aufl. Man wird leicht bemerken, daß die Glieder dieser Reihe nichts anders sind, als die sämtlich $(r+1)$ten Glieder der Tafel V. C., jedes mit $1.2.3\ldots 2r$ multipliciret. Wir werden demnach, wenn wir S und alle Glieder der Reihe mit $1.2.3\ldots 2r$ dividiren, und aus jener Tafel die D. Z. statt der Glieder setzen, unsere Reihe so schreiben können:

$$(B)\ \frac{S}{1.2\ldots 2r} = \overset{1+r}{\mathrm{I}} - \overset{2+r}{\mathrm{II}} + \overset{3+r}{\mathrm{III}} - \overset{4+r}{\mathrm{IV}} + \ldots\ldots \mp \overset{n+r}{\mathrm{N}} \pm etc.\ etc.$$

Die Summirung dieser Reihe geschiehet auf folgende Art. Der Ausdruck $\frac{\mathrm{Cos}.x}{1+\mathrm{Cos}.x}$ läßt sich auf zwei verschiedene Arten, in völlig identische, nach Potenzen von x geordnete Reihen verwandeln. Bei der einen dieser Entwickelungsarten wird jeder Coefficient eine unendliche Reihe, und das $(1+r)$te Glied derselben hat die obige Reihe (B) zum Coefficienten. Nach der zweiten Entwickelungsart wird jeder Coefficient eine endliche Größe, und so erhält man aus Vergleichung beider entwickelten Reihen, Glied vor Glied, die Summe der nach der ersten Entwickelung gefundenen unendlichen Reihen.

Erste Entwickelung der Function $y = \frac{\mathrm{Cos}.x}{1+\mathrm{Cos}.x}$ in eine unendliche Reihe nach Potenzen von x. Durch wirkliche Division des $\mathrm{Cos}.x$ durch $1 + \mathrm{Cos}.x$ erhält man

$$(C)\ y = \mathrm{Cos}.x - \mathrm{Cos}.x^2 + \mathrm{Cos}.x^3 - \mathrm{Cos}.x^4 + etc.$$

Jedes Glied dieser Reihe verwandle man mit Hülfe der D. Z. in eine unendliche Reihe nach Potenzen von x selbst, indem man $\mathrm{Cos}.x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - etc.$ $= \overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}}x^2 + \overset{3}{\mathrm{I}}x^4 + \overset{4}{\mathrm{I}}x^6 + etc.$ setzt. Man hat also

$$\begin{array}{lllllllll}
\mathrm{Cos}.x = & \overset{1}{\mathrm{I}} & + \overset{2}{\mathrm{I}}\,x^2 & + \overset{3}{\mathrm{I}}\,x^4 & + \overset{4}{\mathrm{I}}\,x^6 & + \ldots & + \overset{1+r}{\mathrm{I}}\,x^{2r} & + \ldots \\
-\mathrm{Cos}.x^2 = & -\overset{2}{\mathrm{II}} & - \overset{3}{\mathrm{II}}\,〃 & - \overset{4}{\mathrm{II}}\,〃 & - \overset{5}{\mathrm{II}}\,〃 & - \ldots & - \overset{2+r}{\mathrm{II}}\,〃 & - \ldots \\
+\mathrm{Cos}.x^3 = & +\overset{3}{\mathrm{III}} & + \overset{4}{\mathrm{III}}\,〃 & + \overset{5}{\mathrm{III}}\,〃 & + \overset{6}{\mathrm{III}}\,〃 & + \ldots & + \overset{3+r}{\mathrm{III}}\,〃 & + \ldots \\
-\mathrm{Cos}.x^4 = & -\overset{4}{\mathrm{IV}} & - \overset{5}{\mathrm{IV}}\,〃 & - \overset{6}{\mathrm{IV}}\,〃 & - \overset{7}{\mathrm{IV}}\,〃 & - \ldots & - \overset{4+r}{\mathrm{IV}}\,〃 & - \ldots \\
etc. & etc. & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Demnach } (D)\ y = & (\overset{1}{\mathrm{I}} - \overset{2}{\mathrm{II}} + \overset{3}{\mathrm{III}} - \overset{4}{\mathrm{IV}} + etc.) \\
& + (\overset{2}{\mathrm{I}} - \overset{3}{\mathrm{II}} + \overset{4}{\mathrm{III}} - \overset{5}{\mathrm{IV}} + etc.)\ x^2 \\
& + (\overset{3}{\mathrm{I}} - \overset{4}{\mathrm{II}} + \overset{5}{\mathrm{III}} - \overset{6}{\mathrm{IV}} + etc.)\ x^4 \\
& + \ \ etc. \\
& + (\overset{1+r}{\mathrm{I}} - \overset{2+r}{\mathrm{II}} + \overset{3+r}{\mathrm{III}} - \overset{4+r}{\mathrm{IV}} + etc.)\ x^{2r} \\
& + \ \ etc.\ \ etc.
\end{array}$$

wo das $(1+r)$te Glied unsere zu summirende Reihe (B) ist.

Zweite Entwickelung der Function $y = \frac{\text{Cos.}\, x}{1 + \text{Cos.}\, x}$ in eine unendliche Reihe, nach Potenzen von x. Aus der Trigonometrie weiß man, daß $\text{Cos.}\, x = 1 - 2\,(\text{Sin.}\, \frac{1}{2} x)^2$. Man bringe diesen Werth in die Function, so wird $y = \frac{\frac{1}{2} - \text{Sin.}\, \frac{1}{2} x^2}{1 - \text{Sin.}\, \frac{1}{2} x^2}$. Durch wirkliche Division, oder Verwandlung in eine recurrirende Reihe, findet man

$$(E)\; y = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2}\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2} x^4 - \tfrac{1}{2}\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2} x^6 - \textit{etc.}$$

Auch in dieser Reihe verwandle man jedes Glied in eine Reihe nach Potenzen von x. Es ist nemlich

$$S\tfrac{1}{2}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{1.2.3}\,\frac{x^3}{2^3} + \frac{1}{1\ldots5}\,\frac{x^5}{2^5} - \frac{1}{1\ldots7}\,\frac{x^7}{2^7} + \textit{etc.}$$

Die Coefficienten dieser Reihe bezeichne man also mit D. Z., wozu wir aber zum Unterschied von denen Nr. 1. gebrauchten, jetzt nicht I, (II, III *etc.*), sondern A, (B, C *etc.*) wählen. Wir setzen also $\overset{1}{A} = 1$; $\overset{2}{A} = -\frac{1}{1.2.3}$; $\overset{3}{A} = +\frac{1}{1\,.\,.\,5}$; $\overset{4}{A} = -\frac{1}{1\ldots7}$; *etc.* also

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x = \overset{1}{A}\frac{x}{2} + \overset{2}{A}\frac{x^3}{2^3} + \overset{3}{A}\frac{x^5}{2^5} + \overset{4}{A}\frac{x^7}{2^7} + \textit{etc.}$$

Demnach haben wir für die Glieder von (E)

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$-\tfrac{1}{2}(\text{Sin.}\,\tfrac{x}{2})^2 = -\tfrac{1}{2}\overset{2}{B}\frac{x^2}{2^2} - \tfrac{1}{2}\overset{3}{B}\frac{x^4}{2^4} - \tfrac{1}{2}\overset{4}{B}\frac{x^6}{2^6} - \ldots - \tfrac{1}{2}\overset{1+r}{B}\frac{x^{2r}}{2^{2r}} - \textit{etc.}$$

$$-\tfrac{1}{2}(\text{Sin.}\,\tfrac{x}{2})^4 = \qquad -\tfrac{1}{2}\overset{4}{D}: \; -\tfrac{1}{2}\overset{5}{D}: \; - \ldots - \tfrac{1}{2}\overset{2+r}{D}: \; - \textit{etc.}$$

$$-\tfrac{1}{2}(\text{Sin.}\,\tfrac{x}{2})^6 = \qquad -\tfrac{1}{2}\overset{6}{F}: \; - \ldots - \tfrac{1}{2}\overset{3+r}{F}: \; - \textit{etc.}$$

— *etc.*

$$-\tfrac{1}{2}(\text{Sin.}\,\tfrac{x}{2})^{2r} = \qquad -\tfrac{1}{2}\overset{2r}{(2R)}: \; - \textit{etc.}$$

Demnach $(F)\; y = \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2^3}\,\overset{2}{B}\,x^2$$

$$-\frac{1}{2^5}\,(\overset{3}{B} + \overset{4}{D})\,x^4$$

—

$$-\frac{1}{2^7}(\overset{4}{B}+\overset{5}{D}+\overset{6}{F})\,x^6$$

$$-\ \ etc.$$

$$-\frac{1}{2^{2r+1}}(\overset{1+r}{B}+\overset{2+r}{D}+\overset{3+r}{F}+\overset{4+r}{H}+\ldots+\overset{2r}{(2R)}).$$

$$-\ \ etc.$$

Da die Reihen (D) und (F) einerlei Werth und einerlei Form haben, und nach einerlei veränderlichen Größe x geordnet sind, so sind sie völlig identisch, und die Coefficienten Glied vor Glied gleich. Demnach

$$1)\ \overset{1}{\mathrm{I}}-\overset{2}{\mathrm{II}}+\overset{3}{\mathrm{III}}-\overset{4}{\mathrm{IV}}+etc.\ =\ \tfrac{1}{2}$$

$$2)\ \overset{2}{\mathrm{I}}-\overset{3}{\mathrm{II}}+\overset{4}{\mathrm{III}}-\overset{5}{\mathrm{IV}}+etc.\ =-\frac{1}{2^3}\overset{2}{B}$$

$$3)\ \overset{3}{\mathrm{I}}-\overset{4}{\mathrm{II}}+\overset{5}{\mathrm{III}}-\overset{6}{\mathrm{IV}}+etc.\ =-\frac{1}{2^5}(\overset{3}{B}+\overset{4}{D})$$

$$etc. \qquad\qquad etc.$$

$$4)\ \overset{1+r}{\mathrm{I}}-\overset{2+r}{\mathrm{II}}+\overset{3+r}{\mathrm{III}}-\overset{4+r}{\mathrm{IV}}+etc.=-\frac{1}{2^{2r+1}}(\overset{1+r}{B}+\overset{2+r}{D}+\overset{3+r}{F}+\ldots+\overset{2r}{(2R)}).=\frac{S}{1.2.3\ldots 2r}$$

welches letzte die verlangte Summirung ist, die zugleich alle vorhergehende, die erste ausgenommen, als ein allgemeiner Ausdruck in sich begreift, wie man leicht siehet, wenn man für r nach und nach die Werthe 1, 2, 3, *etc.* substituiret.

Will man diese Summirungen in der gemeinen Bezeichnungsart haben, so nimmt man die Werthe der D. Z. I, II, III, IV *etc.* aus der Tafel V. C. Die Werthe der D. Z. A, B, C, D *etc.* aber, aus der Tafel V. B., wo man sich nur überall A statt I, B statt II, C statt III, D statt IV *etc.*, $(2\,R)$ statt $(2\,lR)$ denken muß. (Wenn die letzten Zeichen $2\,R$ und $2\,lR$ undeutlich seyn sollten, so vergleiche man §. 34.) Hierdurch erhält man nach der Reihe folgende Summirungen:

$$1)\ 1-1+1-1+etc.=\tfrac{1}{2}$$

$$2)\ -\frac{1}{1.2}+\frac{2^2}{2.1\,2}-\frac{3^2+3}{4.1.2}+\frac{4^2+4.2^2}{8.1.2}-etc.=-\tfrac{1}{8}\,\frac{2^2}{2.1\,2}$$

oder $-1+2-3+4-5+etc.\ =-\tfrac{1}{4}$

(In Absicht dieser beiden Reihen sehe man Eulers Inst. calc. diff. pag. 501.)

$$3)\ \frac{1}{1.2.3.4}-\frac{2^4}{2.1..4}+\frac{3^4+3}{4.1..4}-\frac{4^4+4.2^4}{8.1..4}+etc.=\frac{-1}{32}\left(\frac{-2^4}{2.1..4}+\frac{4^4-4.2^4}{8.1..4}\right)$$

Nimmt

Nimmt man die Werthe der D. Z. dieser Reihe $\overset{3}{\mathrm{I}}$, $\overset{4}{\mathrm{II}}$ *etc.* nicht aus Taf. V. C., sondern aus Taf. VII. A., so hat man, wenn man den Nenner 1. 2. 3. 4, durchgehends, und auf beiden Seiten wegläßt

$$1 - 8 + 21 - 40 + 65 - 96 + etc. = -\tfrac{1}{2}$$

(Eben diese Summe findet man nach der in Eulers Diff. Rechnung S. 287. Nr. 7 ff. erklärten Methode.)

Die allgemeine Summirung giebt folgendes:

$$4)\ \pm \frac{1}{1\ldots 2r} \mp \frac{2^{2r}}{2.1\ldots 2r} \pm \frac{3^{2r}+3}{4.1\ldots 2r} \mp \frac{4^{2r}+4.2^{2r}}{8.1\ldots 2r} \pm etc.\ etc.$$

$$= \frac{-1}{2^{2r+1}}\left(\mp \frac{2^{2r}}{2.1\ldots 2r} \pm \frac{4^{2r}-4.2^{2r}}{8.1\ldots 2r} \mp \frac{6^{2r}-6.4^{2r}+15.2^{2r}}{32.1\ldots 2r}\right.$$

$$\left.\pm \ldots + \frac{2r^{2r} - \frac{2r}{1}(2r-2)^{2r} + \frac{2r}{1}\frac{2r-1}{2}(2r-4)^{2r} - etc.}{2^{2r-1}\,1\ldots\ldots 2r}\right)$$

$$= \pm \frac{S}{1.2\ldots.2r};\ \text{also}$$

$$S = \frac{1}{2^{2r+1}}\left(\frac{2^{2r}}{2} - \frac{4^{2r}-4.2^{2r}}{8} + \frac{6^{2r}-6.4^{2r}+15.2^{2r}}{32} - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{2r^{2r} - \frac{2r}{1}(2r-2)^{2r} + \frac{2r}{1}\frac{2r-1}{2}(2r-4)^{2r} - etc.}{2^{2r-1}}\right)$$

Siebenter Abschnitt.

Zusätze zu der Theorie der Dimensionszeichen.

§. 137. Einleitung.

Ich habe mit Vorbedacht mehrere zu der Theorie unserer Bezeichnungsart gehörige Sätze bis auf diesen Abschnitt verspalet, um dem Leser Zeit zu lassen, sich den Sinn und Gebrauch dieser Zeichen, durch das bisherige geläufig zu machen. Wir dürfen aber diese hier vorzutragenden Sätze nicht übergehen, wenn wir unsern Zeichen, und darauf gebauten Methoden alle die Anwendbarkeit geben wollen, deren sie fähig sind. Diese Sätze betreffen hauptsächlich folgenden Umstand. Wir haben bisher gesehen, daß in manchen Rechnungen, die Coefficienten einer Reihe, schon vom ersten Gliede an, in andern aber nur vom **zweiten** an, mit D. Z. bezeichnet werden mußten; in dem einem Falle aber bekommen die D. Z. der höheren Ordnungen ganz andere Werthe, als in den andern, woraus manche Unbequemlichkeiten entstehen, und unter andern auch die, daß wir von einigen im vorigen Abschnitt entwickelten Tafeln,

Tafeln, oft keinen Gebrauch machen können, wenn die Coeff. einer Reihe nur vom 2ten Gliede an mit D. Z. bezeichnet sind. Es ist daher nöthig, eine Methode zu suchen, durch welche man jederzeit solche D. Z., welche sich auf das erste Glied einer Reihe nicht mit beziehen, auf solche reduciren könne, welche den Coefficienten des ersten Gliedes mit in sich begreifen, und umgekehrt.

§. 138. Erklärung.

1) Wenn die Coefficienten irgend einer vorgelegten endlichen oder unendlichen Reihe durch Dimensionszeichen vorgestellt werden, und es werden alle Coefficienten vom **ersten** Gliede an, mit D. Z. bezeichnet, so wollen wir dieselben **vollzählige Dimensionszeichen** nennen.

2) Werden aber die Coeff. blos vom **zweiten** Gliede an mit Dimensionszeichen bezeichnet, so wollen wir sie **verkürzte Dimensionszeichen** nennen.

3) Sollten nur vom dritten Gliede an D. Z. gebraucht werden, so können sie **verkürzte D. Z. vom dritten Gliede an** heißen; eben so wäre der Ausdruck verkürzte D. Z. vom vierten, fünften *etc.* Gliede an zu verstehen.

4) Würde der gegebenen Reihe von vorne, vor dem ersten Glied ein neues zugesetzt, und auch dessen Coefficient, mit einem D. Z. bezeichnet, so kann man die D. Z., übervollzählige D. Z. nennen.

5) Würden auf eben die Art zwei, drei *etc.* Glieder zugesetzt, und ihre Coeff. mit D. Z. bezeichnet, so könnte man sie übervollzählig um zwei, drei *etc.* Glieder nennen.

§. 139. Anmerkung.

Es kommen nur wenig Fälle vor, bei welchen übervollzählige D. Z. oder verkürzte vom 3ten, 4ten *etc.* Gliede an, gebraucht werden müßten. Demohngeachtet habe ich sie hier nicht ganz übergehen wollen, um die große Allgemeinheit bemerkbar zu machen, deren die folgende Theorie fähig ist.

Hingegen ist aus den vorigen Abschnitten bekannt, wie bei Auflösung der Aufgaben beständig die eine oder andere Art derer D. Z. vorkommt, die wir schlechthin **vollzählige** und **verkürzte** genennt haben.

Uebrigens werden wir, im folgenden, wie bisher gewöhnlich den Unterschied beobachten, daß wir vollzählige D. Z. für eine Reihe, mit I, II, III *etc.*, verkürzte aber für dieselbe Reihe, mit A, B, C *etc.* bezeichnen.

§. 140. Aufgabe. 1.

Vollzählige D. Z. jeder Ordnung in verkürzte zu verwandeln.

Aufl. Es sey die Reihe

$$(A)\ y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + etc.$$

gegeben, in welcher die Folge der Potenzen ganz willkührlich ist, so daß wir auch jede andere hätten setzen können, wenn nur die Exponenten eine arithmetische Reihe machen.

Man bezeichne die Coefficienten dieser Reihe zuerst mit vollzähligen D. Z., so ist

$$(B)\; y = \overset{1}{\mathrm{I}}\, x + \overset{2}{\mathrm{I}}\, x^2 + \overset{3}{\mathrm{I}}\, x^3 + \overset{4}{\mathrm{I}}\, x^4 + etc.$$

folglich (§. 46.) für jedes ganze und positive n

$$(C)\; y^n = \overset{n}{IN}\, x^n + \overset{n+1}{IN}\, x^{n+1} + \overset{n+2}{IN}\, x^{n+2} + \overset{n+3}{IN}\, x^{n+3} + etc.$$

Zweitens bezeichne man die Coefficienten eben der Reihe (A) mit verkürzten D. Z., so ist

$$(D)\; y = Ax + \overset{2}{\mathfrak{A}}\, x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}}\, x^3 + \overset{4}{\mathfrak{A}}\, x^4 + etc.$$

folglich für jeden Werth von n (Taf. II.)

$$\begin{aligned}(E)\; y^n = A^n x^n &+ \tfrac{n}{1} A^{n-1} \overset{2}{\mathfrak{A}}\, x^{n+1} + \tfrac{n}{1} A^{n-1} \overset{3}{\mathfrak{A}}\, x^{n+2} \\ &\qquad\qquad + \tfrac{n}{1} \tfrac{n-1}{2} A^{n-2} \overset{4}{\mathfrak{B}}\, \text{〃} \\ &+ \tfrac{n}{1} A^{n-1} \overset{4}{\mathfrak{A}}\, x^{n+3} + \tfrac{n}{1} A^{n-1} \overset{5}{\mathfrak{A}}\, x^{n+4} + etc. \\ &+ \tfrac{n}{1} \tfrac{n-1}{2} A^{n-2} \overset{5}{\mathfrak{B}}\, \text{〃} \quad + \tfrac{n}{1} \tfrac{n-1}{2} A^{n-2} \overset{6}{\mathfrak{B}}\, \text{〃} \\ &+ \tfrac{n}{1} \tfrac{n-1}{2} \tfrac{n-2}{3} A^{n-3} \overset{6}{\mathfrak{C}}\, \text{〃} \quad + \tfrac{n}{1} \tfrac{n-1}{2} \tfrac{n-2}{3} A^{n-3} \overset{7}{\mathfrak{C}}\, \text{〃} \\ &\qquad\qquad + \tfrac{n \,\ldots\, (n-3)}{1 \,.\,.\, 4} A^{n-4} \overset{8}{\mathfrak{D}}\, \text{〃}\end{aligned}$$

Wenn n eine ganze und positive Zahl bedeutet, so sind (C) und (E) identisch. Folglich

$$\overset{n}{IN} = A^n;\; \overset{n+1}{IN} = \tfrac{n}{1} A^{n-1} \overset{2}{\mathfrak{A}};\; \overset{n+2}{IN} = \tfrac{n}{1} A^{n-1} \overset{3}{\mathfrak{A}} + \tfrac{n}{1} \tfrac{n-1}{2} A^{n-2} \overset{4}{\mathfrak{B}};$$

$$\overset{n+3}{IN} = \tfrac{n}{1} A^{n-1} \overset{4}{\mathfrak{A}} + \tfrac{n}{1} \tfrac{n-1}{2} A^{n-2} \overset{5}{\mathfrak{B}} + \tfrac{n}{1} \tfrac{n-1}{2} \tfrac{n-2}{3} A^{n-3} \overset{6}{\mathfrak{C}};\; etc.\; etc.$$

welche Formeln die verlangte Vergleichung enthalten.

§. 141. Zusatz.

Wenn man für IN, und n bestimmte Zeichen setzt; erst I und 1, dann II und 2, ferner III und 3, *etc.*, so erhält man eine **Reductionstafel der vollzähligen D. Z. auf verkürzte.** Man sehe Taf. VIII. A.

In den allgemeinen Ausdrücken dieser Tafel darf man für r alle ganze, und positive Zahlen setzen, welche $> n$ sind. Denn das erste Glied jeder Ordnung folgt nicht dem Gesetz der übrigen Glieder. Bei dem ersten Anblick könnte es auch scheinen, als enthielten die allgemeinen Ausdrücke mehrere Glieder vom Anfang jeder Ordnung nicht; denn es giebt z. B. das allgemeine Glied der vierten Ordn., wenn man $r = 5$ setzt,

$$\overset{5}{\text{IV}} = 4\,A^3\,\overset{2}{\mathfrak{A}} + 6\,A^2\,\overset{3}{\mathfrak{B}} + 4\,A\,\overset{4}{\mathfrak{C}} + \overset{5}{\mathfrak{D}}$$

allein wenn man bedenkt, daß für verkürzte D. Z., die sich mit $\overset{2}{\mathfrak{A}}$ anfangen, jede $n$te Ordnung sich mit $\overset{2n}{\mathfrak{N}}$ anfangen, und also jedes D. Z. $\overset{r}{\mathfrak{N}} = 0$ seyn muß, wenn $r < 2n$, so sieht man leicht, daß $\overset{3}{\mathfrak{B}} = 0$; $\overset{4}{\mathfrak{C}} = 0$; $\overset{5}{\mathfrak{D}} = 0$, also wirklich nur $\overset{5}{\text{IV}} = 4\,A^3\,\overset{2}{\mathfrak{A}}$, so wie in der Tabelle.

§. 142. Zusatz.

Vermittelst Taf. VIII. A. würde man jederzeit nicht nur vollzählige D. Z. durch verkürzte, sondern auch übervollzählige, durch vollzählige, übervollzählige um 2 Glieder, durch schlechthin übervollzählige u. s. f. eliminiren können. Denn es hindert nichts eine Reihe übervollzähliger D. Z., als vollzählige anzusehen, hierdurch aber verwandeln sich die vollzähligen in verkürzte. Auf eben diese Art dient die Tafel verkürzte D. Z., in verkürzte um 2 Glieder, und überhaupt verkürzte jeder Art (man verwechsle dies Wort nicht mit Ordnung) auf die nächste verkürzte Art zu reduciren.

Uebrigens bemerke ich, daß mir weit weniger wirkliche Rechnungsfälle vorgekommen sind, wo diese Reduction nöthig oder nützlich wäre, als die umgekehrte; ob sich gleich leicht Fälle erdenken lassen, wo sie anwendbar wäre.

§. 143. Aufgabe. 2.

Verkürzte D. Z. in vollzählige zu verwandeln.

Aufl. Die Coefficienten einer willkührlich angenommenen Reihe

$$(A)\; y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{etc.}$$

bezeichne man einmal mit vollzähligen, dann auch mit verkürzten D. Z., nemlich mit vollzähligen

$$(B)\; y = \overset{1}{\text{I}}x + \overset{2}{\text{I}}x^2 + \overset{3}{\text{I}}x^3 + \overset{4}{\text{I}}x^4 + \text{etc.}$$

mit verkürzten

$$(C)\; y = Ax + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^3 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^4 + \text{etc.}$$

Aus (C) folgt $(D)\ y - Ax = \overset{2}{\mathfrak{A}} x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^3 + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^4 + etc.$

Daher §. 46. $(E)\ (y - Ax)^n = \overset{2n}{\mathfrak{N}} x^{2n} + \overset{2n+1}{\mathfrak{N}} x^{2n+1} + \overset{2n+2}{\mathfrak{N}} x^{2n+2} + etc.$

Man entwickle auch $(y - Ax)^n$ in eine Reihe, durch den Binomialsatz

$$(F)\ (y - Ax)^n = y^n - \frac{n}{1} Axy^{n-1} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2} A^2x^2y^{n-2}$$

$$- \ldots \mp \frac{n}{1} A^{n-1}x^{n-1}y \pm A^n x^n$$

oder wenn wir statt der Bin. Coeff., die Buchstaben α, β, γ *etc.* brauchen

$$(y - Ax)^n = y^n - \alpha Axy^{n-1} + \beta A^2x^2y^{n-2} - \ldots \mp \alpha A^{n-1}x^{n-1}y \pm A^n \alpha^n$$

wo die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades n gelten. Aus dieser Reihe eliminire man y durch (B), so ist

$$\begin{array}{llll}
(G)\ y^n & = + \overset{n}{IN}\, x^n & + \overset{n+1}{IN}\, x^{n+1} & + \overset{n+2}{IN}\, x^{n+2} + etc. \\
-\alpha A\, x\, y^{n-1} & = -\alpha A\,(\overset{n-1}{IN} - \mathrm{I}), & -\alpha A\,(\overset{n}{IN} - \mathrm{I}), & -\alpha A\,(\overset{n+1}{IN} - \mathrm{I}), \\
+\beta A^2 x^2 y^{n-2} & = +\beta A^2(\overset{n-2}{IN} - \mathrm{II}), & +\beta A^2(\overset{n-1}{IN} - \mathrm{II}), & +\beta A^2(\overset{n}{IN} - \mathrm{II}), \\
- \ etc. & & & \\
\mp \alpha(Ax)^{n-1}y & = \mp \alpha A^{n-1}\overset{1}{\mathrm{I}}, & \mp \alpha A^{n-1}\overset{2}{\mathrm{I}}, & \mp \alpha A^{n-1}\overset{3}{\mathrm{I}}, \\
\pm A^n x^n & = \pm A^n, & &
\end{array}$$

Demnach $(H)\ (y - Ax)^n =$

$$\begin{array}{l}
x^n\ (\overset{n}{IN} - \alpha A(\overset{n-1}{IN} - \mathrm{I}) + \beta A^2(\overset{n-2}{IN} - \mathrm{II}) \ldots \mp \alpha A^{n-1}\overset{1}{\mathrm{I}} \pm A^n) \\
+ x^{n+1}\ (\overset{n+1}{IN} - \alpha A(\overset{n}{IN} - \mathrm{I}) + \beta A^2(\overset{n-1}{IN} - \mathrm{II}) \ldots \mp \alpha A^{n-1}\overset{2}{\mathrm{I}}.) \\
+ x^{n+2}\ (\overset{n+2}{IN} - \alpha A(\overset{n+1}{IN} - \mathrm{I}) + \beta A^2(\overset{n}{IN} - \mathrm{II}) \ldots \mp \alpha A^{n-1}\overset{3}{\mathrm{I}}.) \\
+ \ etc. \\
+ x^{2n}\ (\overset{2n}{IN} - \alpha A(\overset{2n-1}{IN} - \mathrm{I}) + \beta A^2(\overset{2n-2}{IN} - \mathrm{II}) \ldots \mp \alpha A^{n-1}\overset{n+1}{\mathrm{I}}.\ ) \\
+ x^{2n+1}\ (\overset{2n+1}{IN} - \alpha A(\overset{2n}{IN} - \mathrm{I}) + \beta A^2(\overset{2n-1}{IN} - \mathrm{II}) \ldots \mp \alpha A^{n-1}\overset{n+2}{\mathrm{I}}.\ ) \\
+ x^{2n+2}\ (\overset{2n+2}{IN} - \alpha A(\overset{2n+1}{IN} - \mathrm{I}) + \beta A^2(\overset{2n}{IN} - \mathrm{II}) \ldots \mp \alpha A^{n-1}\overset{n+3}{\mathrm{I}}.\ ) \\
+ \ etc. \quad etc
\end{array}$$

Offenbar muß (E) und (H) identisch seyn; daher in (H) alle Coeff. $= 0$, welche zu Potenzen gehören, deren Exponent $< 2n$. Von dem Gliede an, welches x^{2n} enthält, werden Glied vor Glied alle Coeff. gleich seyn: Nemlich

$\overset{2n}{\mathfrak{N}}$

$$\overset{2n}{\mathfrak{N}} = \overset{2n}{IN} - \alpha A(\overset{2n-1}{IN-I}) + \beta A^2(\overset{2n-2}{IN-II}) - \ldots \mp \alpha A^{n-1}.\overset{n+1}{I}.$$

$$\overset{2n+1}{\mathfrak{N}} = \overset{2n+1}{IN} - \alpha A(\overset{2n}{IN-I}) + \beta A^2(\overset{2n-1}{IN-II}) - \ldots \mp \alpha A^{n-1}.\overset{n+2}{I}.$$

$$\overset{2n+2}{\mathfrak{N}} = \overset{2n+2}{IN} - \alpha A(\overset{2n+1}{IN-I}) + \beta A^2(\overset{2n}{IN-II}) - \ldots \mp \alpha A^{n-1}.\overset{n+3}{I}.$$

$$\overset{2n+3}{\mathfrak{N}} = \overset{2n+3}{IN} - \alpha A(\overset{2n+2}{IN-I}) + \beta A^2(\overset{2n+1}{IN-II}) - \ldots \mp \alpha A^{n-1}.\overset{n+4}{I}.$$

etc. *etc.* und allgemein

$$\overset{2n+r}{\mathfrak{N}} = \overset{2n+r}{IN} - \alpha A(\overset{2n+r-1}{IN-I}) + \beta A(\overset{2n+r-2}{IN-II}) - \ldots \mp \alpha A^{n-1}\overset{n+r+1}{I},$$

in diesen Formeln ist $\alpha = \frac{n}{1}$; $\beta = \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}$; $\gamma = \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}$ *etc.*, und sie enthalten die verlangte Reduction der verkürzten D. Z. auf vollzählige, auf eine vollkommen allgemeine Art, so daß man nur für $\mathfrak{N}$, IN, n bestimmte Zeichen setzen darf, nemlich erst $\mathfrak{A}$, I, 1, dann $\mathfrak{B}$, II, 2, ferner $\mathfrak{C}$, III, 3, u. s. f., um die Reductionsformeln, für jede Ordnung, und jedes Glied besonders zu erhalten.

§. 144. Zusatz.

Wird diese Substitution wirklich gemacht, so erhält man diejenige **Reductionstafel zur Verwandlung der verkürzten D. Z. in vollzählige**, welche man unter den angehängten Tafeln, Taf. VIII. B., findet.

In dieser Tafel gelten die obern Zeichen für ein gerades n, die untern für ein ungerades. r kann alle ganze Zahlen bedeuten, die $> 2n$ sind. A ist derjenige Coefficient einer Reihe, der vor dem Gliede vorhergehet, welches $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \overset{2}{I}$ enthält, oder $A = \overset{1}{I}$. Daher hätten wir auch in der Tafel $\overset{2}{II}$ statt A^2; $\overset{3}{III}$ statt A^3 *etc.* setzen können. Allein ich finde ihren Gebrauch so bequemer, weil in den mehresten Fällen $A = 1$, wo es wenigstens geschwinder in die Augen fällt, daß auch A^2, A^3 *etc.* $= 1$, als wenn diese Größen mit D. Z. bezeichnet sind.

§. 145. Anmerkung.

Um den ganzen Zweck, und Gebrauch dieser Reductionstafel zu übersehen, bemerke man folgendes. Die ganze Theorie, welche gegenwärtiges Werk enthält, nebst den Anwendungen derselben, hängen an den drei Hauptaufgaben, denen wir den dritten, vierten und fünften Abschnitt gewidmet hatten. Das erste dieser Probleme lieferte uns eine Reihe, für alle ganze und positive Potenzen jedes vielgliedrigen Ausdrucks; das zweite eine ganz allgemeine Potenzreihe; das dritte eine allgemeine Auflösungsreihe. Das erste Problem wurde durch Hülfe **vollzähliger** D. Z., das zweite und dritte, durch **verkürzte** aufgelöset. Diese Disharmonie in den Auflösungen, bringt keinen Nachtheil, so lange man zufrieden ist, das Gesetz irgend einer mit Hülfe dieser Aufgaben entwickelten Reihe, blos in D. Z. zu übersehen; sobald man hingegen das Gesetz auch in der gemeinen Bezeichnung sichtbar machen will, so wird jene Disharmonie sehr lästig: denn die meisten Reihen, welche man findet, werden verkürzte D. Z. enthalten, auf welche sich die im vorigen Abschnitt entwickelten Tafeln nicht anwenden lassen, bei welchen durchgehends vollzählige D. Z. zum Grunde legen. (Doch fällt bei der geometrischen und arithmetischen Reihe §. 116 — 118. der Unterschied zwischen verkürzten und vollzähligen D. Z. in so ferne weg, in so fern diese Reihen ihre Natur nicht ändern, wenn gleich das 1ste Glied weggenommen wird. Wenn also gleich eine geom. Reihe nur mit verkürzten D. Z. bezeichnet wird, so kann man doch von der Tafel IV. A. unmittelbar Gebrauch machen, weil sie auch bei der Verkürzung noch immer eine **vollzählige** geom. Reihe vorstellen.) Vermittelst der gefundenen Reductionsformeln aber ist es möglich, jene Disharmonie zu heben. Die Reductionstafeln würde man zwar recht wohl auf **einzelne** Fälle anwenden, und z. B. in den verschiedenen Reihen für trigonometrische Functionen, die wir im 3ten und 4ten Abschnitt gefunden haben, die verkürzten D. Z. eliminiren können: allein ungerechnet, daß diese Arbeit in manchen einzelnen Fällen sehr weitläuftig und mühsam wird, so ist es offenbar besser, wenn wir die Reduction mit jenen Hauptaufgaben selbst, als den Quellen alles dessen, was in diesem Werke vorgetragen wird, vornehmen: denn ist diese Reduction ein für allemal geschehen, so werden wir bei jedem einzelnen Fall, mit gleicher Leichtigkeit das Resultat einer Untersuchung in vollzähligen oder verkürzten D. Z. darstellen können, je nachdem sich bei dem einen oder andern, Vortheile zeigen.

In dieser Absicht müssen wir aber folgenden Lehnsatz vorausschicken.

§. 146. Lehnsatz.

Es sey v eine ganze und positive, n aber irgend eine ganz willkührliche Zahl, so ist allezeit

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2} - \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-v+1)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ v}$$

$$= \pm \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-v)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ v}$$

die obern Zeichen gelten für ein gerades, die untern für ein ungerades v.

Beweis. Man nenne die zu summirende Reihe S, so ist, weil $1 - \frac{n}{1} = -\frac{n-1}{1}$,

$$S = -\frac{n-1}{1}\left(1 - \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\,\frac{n-2}{3} - \frac{n}{2}\,\frac{n-2}{3}\,\frac{n-3}{4} + \ldots \mp \frac{n(n-2)(n-3)\ldots(n-v+1)}{2.\;3.\;4\;\ldots\;v}\right)$$

Da ferner $1 - \frac{n}{2} = -\frac{n-2}{2}$, so ist

$$S = +\frac{n-1}{1}\,\frac{n-2}{2}\left(1 - \frac{n}{3} + \frac{n}{3}\,\frac{n-3}{4} - \frac{n}{3}\,\frac{n-3}{4}\,\frac{n-4}{5} + \ldots \mp \frac{n(n-3)(n-4)\ldots(n-v+1)}{3.\;4.\;5\;\ldots\;v}\right)$$

Da ferner $1 - \frac{n}{3} = -\frac{n-3}{3}$, so ist

$$S = -\frac{n-1}{1}\,\frac{n-2}{2}\,\frac{n-3}{3}\left(1 - \frac{n}{4} + \frac{n}{4}\,\frac{n-4}{5} - \frac{n}{4}\,\frac{n-4}{5}\,\frac{n-5}{6} + \ldots \mp \frac{n(n-4)(n-5)\ldots(n-v+1)}{4.\;5.\;6\;\ldots\;v}\right)$$

u. s. f.

Es ist offenbar, daß man diese Schlüsse auf eben die Art fortsetzen könne, und daß die Factoren, welche sich bei dieser Fortsetzung von der Reihe nach und nach absondern lassen, folgende seyn werden: $-\frac{n-4}{4}$, $-\frac{n-5}{5}$, $-\frac{n-6}{6}$, $-\frac{n-7}{7}$, *etc.* Da man aber bei jeder solchen Absonderung, zwei Glieder der Reihe in eins zusammenzieht, so wird die eingeklammerte Reihe, bei jeder solchen Absonderung, um ein Glied kürzer. Da nun die Reihe wegen der vorausgesetzten Beschaffenheit von v, auf alle Fälle endlich ist, so wird man nach einer gewissen Anzahl von Absonderungen, nur zwei Glieder in der Klammer übrig behalten, und diese werden zusammengezogen, den letzten Factor von S ausmachen. Es ist aber aus einer aufmerksamen Betrachtung der Fortschreitung der oben gemachten Schlüsse leicht zu übersehen, daß diese beiden zuletzt übrigen Glieder $1 - \frac{n}{v} = -\frac{n-v}{v}$ seyn werden. Demnach ist

$$S = \pm \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-v)}{1.\;\;2.\;\;3\;\ldots\ldots\;v}$$

wo $+$ für ein gerades, $-$ für ein ungerades v gilt: denn da alle Factoren, woraus S bestehet, nemlich $-\frac{n-1}{1}$, $-\frac{n-2}{2}$, $-\frac{n-3}{3}$, *etc.* negativ sind, v aber die Anzahl derselben ausdrückt, so folgt, daß eine gerade Anzahl derselben, ein positives, eine ungerade aber, ein negatives S geben werden.

Uebrigens setzen, wie man siehet, die gemachten Schlüsse voraus, was in dem Satze vorausgesetzt wurde, nemlich daß v eine ganze und positive Zahl seyn müsse. Hingegen erhellet gleichfalls aus dem Beweise, daß man sich unter n denken könne, was man wolle.

§. 147. Zusatz.

In dem gefundenen Ausdruck

$$A)\;\; 1 - \frac{n}{1} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots(n-v+1)}{1\;\;2\;.\;.\;.\;v} = \pm \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-v)}{1.\;\;2\;.\;.\;.\;v},$$

schreibe man $n-1$ statt n, und $v-1$ statt v, so ist

$$B)\ 1-\frac{n-1}{1}+\frac{n-1}{1}\frac{n-2}{2}-\ldots\mp\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-v+1)}{1.\quad 2\ \ldots\ (v-1)}=\mp\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-v)}{1.\quad 2\ \ldots\ (v-1)},$$

ferner $n-2$ statt n, und $v-2$ statt v, so ist

$$C)\ 1-\frac{n-2}{1}+\frac{n-2}{1}\frac{n-3}{2}-\ldots\pm\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-v+1)}{1.\quad 2\ \ldots\ (v-2)}=\pm\frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-v)}{1.\quad 2\ \ldots\ (v-2)},$$

ferner $n-3$ statt n, und $v-3$ statt v, so ist

$$D)\ 1-\frac{n-3}{1}+\frac{n-3}{1}\frac{n-4}{2}-\ldots\mp\frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-v+1)}{1.\quad 2\ \ldots\ (v-3)}=\mp\frac{(n-4)(n-5)\ldots(n-v)}{1.\quad 2\ \ldots\ (v-3)},$$

etc. etc.

daß die Zeichen in den letzten Gliedern, und in den Summen abwechseln müssen, erhellet daraus, weil jede folgende Reihe um ein Glied kürzer ist, wie man leicht aus dem Nenner des letzten Gliedes wahrnehmen wird.

§. 148. Zusatz.

Man schreibe $-n$ statt n, so wird

$$A)\ 1+\frac{n}{1}+\frac{n}{1}\frac{n+1}{2}+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+v-1)}{1.\quad 2\ \ldots\ v}=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+v)}{1.\quad 2\ \ldots\ v}$$

man schreibe in dieser Reihe $n+1$ statt n, und $v-1$ statt v, so ist

$$B)\ 1+\frac{n+1}{1}+\frac{n+1}{1}\frac{n+2}{2}+\ldots+\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+v-1)}{1.\quad 2\ \ldots\ (v-1)}=\frac{(n+2)(n+3)\ldots(n+v)}{1.\quad 2\ \ldots\ (v-1)}$$

ferner $n+2$ statt n, und $v-2$ statt v, so ist

$$C)\ 1+\frac{n+2}{1}+\frac{n+2}{1}\frac{n+3}{2}+\ldots+\frac{(n+2)(n+3)\ldots(n+v-1)}{1.\quad 2\ \ldots\ (v-2)}=\frac{(n+3)(n+4)\ldots(n+v)}{1.\quad 2\ \ldots\ (v-2)}$$

ferner $n+3$ statt n, und $v-3$ statt v, so ist

$$D)\ 1+\frac{n+3}{1}+\frac{n+3}{1}\frac{n+4}{2}+\ldots+\frac{(n+3)(n+4)\ldots(n+v-1)}{1.\quad 2\ \ldots\ (v-3)}=\frac{(n+4)(n+5)\ldots(n+v)}{1.\quad 2\ \ldots\ (v-3)}$$

etc. etc.

§. 149. Aufgabe. 3.

Die allgemeine Potenzreihe §. 70. oder Taf. II. A. so umzuformen, daß sie statt verkürzte D. Z., vollzählige enthalte.

Aufl. Wenn wir zur Abkürzung die in der allgemeinen Potenzreihe enthaltenen Binomialcoefficienten, nach Art der D. Z., folgendermaßen bezeichnen: $\frac{n}{1}=\overset{1}{\alpha}$; $\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}=\overset{2}{\alpha}$; $\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}=\overset{3}{\alpha}$; $\frac{n\ldots(n-3)}{1\ .\ 4}=\overset{4}{\alpha}$; *etc.* $\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.\ 2\ \ldots\ p}=\overset{p}{\alpha}$, (wo jederzeit durch die Marke, wie man leicht siehet, der ganze Bin. Coeff. bestimmt ist,) so ist die allgemeine Potenzreihe folgende:

(A)

$$(A)\; y^m = A^n x^{nm} + \overset{1}{\alpha} A^{n-1} \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{nm+r} + \overset{1}{\alpha} A^{n-1} \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{nm+2r}$$
$$+ \overset{2}{\alpha} A^{n-2} \overset{4}{\mathfrak{B}} \;''$$

$$+ \overset{1}{\alpha} A^{n-1} \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{nm+3r} + \overset{1}{\alpha} A^{n-1} \overset{5}{\mathfrak{A}} x^{nm+4r} + etc.$$
$$+ \overset{2}{\alpha} A^{n-2} \overset{5}{\mathfrak{B}} \;'' \qquad + \overset{2}{\alpha} A^{n-2} \overset{6}{\mathfrak{B}} \;''$$
$$+ \overset{3}{\alpha} A^{n-3} \overset{6}{\mathfrak{C}} \;'' \qquad + \overset{3}{\alpha} A^{n-3} \overset{7}{\mathfrak{C}} \;''$$
$$+ \overset{4}{\alpha} A^{n-4} \overset{8}{\mathfrak{D}} \;''$$

Sie bezieht sich auf die Wurzelreihe

$$(B)\; y = A x^m + B x^{m+r} + C x^{m+2r} + D x^{m+3r} + etc.$$

oder in verkürzten D. Z.

$$(C)\; y = A x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{m+3r} + etc.$$

Zählt man die Glieder der Potenzreihe vom 2ten an, so ist der allgemeine Ausdruck für das $p$te Glied dieser Reihe folgender:

$$(D) + (\overset{1}{\alpha} A^{n-1} \overset{p+1}{\mathfrak{A}} + \overset{2}{\alpha} A^{n-2} \overset{p+2}{\mathfrak{B}} + \overset{3}{\alpha} A^{n-3} \overset{p+3}{\mathfrak{C}} + \overset{4}{\alpha} A^{n-4} \overset{p+4}{\mathfrak{D}}$$
$$+ \ldots + \overset{p}{\alpha} A^{n-p} \overset{2p}{\mathfrak{P}}) x^{nm+pr}$$

Reduciren wir die D. Z. blos in diesem allgemeinen Ausdruck auf vollzählige, so ist offenbar die Reduction für die ganze Reihe geschehn. Es giebt aber die Reductionstafel Taf. VIII. B.

$$\overset{1}{\alpha} A^{n-1} \overset{p+1}{\mathfrak{A}} = \overset{1}{\alpha} A^{n-1} (+ \tfrac{1}{1} \overset{p+1}{\mathrm{I}})$$
$$+ \overset{2}{\alpha} A^{n-2} \overset{p+2}{\mathfrak{B}} = \overset{2}{\alpha} A^{n-2} (- \tfrac{2}{1} A.\overset{p+1}{\mathrm{I}} + \tfrac{2.1}{1.2} \overset{p+2}{\mathrm{II}})$$
$$+ \overset{3}{\alpha} A^{n-3} \overset{p+3}{\mathfrak{C}} = \overset{3}{\alpha} A^{n-3} (+ \tfrac{3}{1} A^2 \;'' - \tfrac{3.2}{1.2} A.\overset{p+2}{\mathrm{II}} + \tfrac{3.2.1}{1.2.3} \overset{p+3}{\mathrm{III}})$$
$$+ \overset{4}{\alpha} A^{n-4} \overset{p+4}{\mathfrak{D}} = \overset{4}{\alpha} A^{n-4} (- \tfrac{4}{1} A^3 \;'' + \tfrac{4.3}{1.2} A^2 \;'' - \tfrac{4.3.2}{1.2.3} A.\overset{p+3}{\mathrm{III}} + \tfrac{4.3.2.1}{1..4} \overset{p+4}{\mathrm{IV}})$$
$$+ \quad etc.$$
$$+ \overset{p}{\alpha} A^{n-p} \overset{2p}{\mathfrak{P}} = \overset{p}{\alpha} A^{n-p} (\mp \tfrac{p}{1} A^{p-1} \overset{p+1}{\mathrm{I}} \pm \tfrac{p}{1} \tfrac{p-1}{2} A^{p-2} \overset{p+2}{\mathrm{II}} \mp \tfrac{p}{1} \tfrac{p-1}{2} \tfrac{p-2}{3} A^{p-3} \overset{p+3}{\mathrm{III}}$$
$$\pm \tfrac{p\,..\,(p-3)}{1\,..\,4} A^{p-4} \overset{p+4}{\mathrm{IV}} \mp \ldots + \tfrac{p\,(p-1)\,\ldots\,1}{1.\;2\;\ldots\;p} \overset{2p}{IP})$$

Man summire die Verticalreihen, deren jede nicht mehr als ein einziges Dimensionszeichen enthält.

Die erste Verticalreihe giebt

$$(\overset{1}{\alpha} - \tfrac{2}{1}\overset{2}{\alpha} + \tfrac{3}{1}\overset{3}{\alpha} - \tfrac{4}{1}\overset{4}{\alpha} + \ldots\ldots \mp \tfrac{p}{1}\overset{p}{\alpha})\, A^{n-1}\overset{p+1}{\mathrm{I}}$$

$$= (\frac{n}{1} - \frac{2}{1}\frac{n}{1}\frac{n-1}{2} + \frac{3}{1}\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3} - \ldots \mp \frac{p}{1}\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.\ 2\ \ldots\ p})\, A^{n-1}\overset{p+1}{\mathrm{I}}$$

$$= \frac{n}{1}(1 - \frac{n-1}{1} + \frac{n-1}{1}\frac{n-2}{2} - \ldots \mp \frac{(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\ \ldots\ (p-1)})\, A^{n-1}\overset{p+1}{\mathrm{I}}$$

$$= \mp \frac{n}{1}.\ \frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-p)}{1.\ 2\ \ldots\ (p-1)}\, A^{n-1}\overset{p+1}{\mathrm{I}} \quad (\S.\ 147.\ B.)$$

Die zweite Verticalreihe giebt

$$(\frac{2.1}{1.2}\overset{2}{\alpha} - \frac{3.2}{1.2}\overset{3}{\alpha} + \frac{4.3}{1.2}\overset{4}{\alpha} - \ldots \pm \frac{p(p-1)}{1.\ 2}\overset{p}{\alpha})\, A^{n-2}\overset{p+2}{\mathrm{II}}$$

$$= (\frac{2.1}{1.2}\frac{n}{1}\frac{n-1}{2} - \frac{3.2}{1.2}\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3} + \ldots \pm \frac{p(p-1)}{1\ \ 2}\frac{n\ldots(n-p+1)}{1\ \ldots\ p})\, A^{n-p}\overset{p+2}{\mathrm{I}}$$

$$= \frac{n(n-1)}{1.\ 2}(1 - \frac{n-2}{1} + \frac{n-2}{1}\frac{n-3}{2} - \ldots \pm \frac{(n-2)\ldots(n-p+1)}{1\ \ldots\ (p-2)})\, A^{n-p}\overset{p+2}{\mathrm{II}}$$

$$= \pm \frac{n(n-1)}{1.\ 2}.\ \frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-p)}{1.\ 2\ \ldots\ (p-2)}\, A^{n-p}\overset{p+2}{\mathrm{II}} \quad (\S.\ 147.\ C.)$$

Die dritte Verticalreihe giebt

$$(\frac{3.2.1}{1.2.3}\overset{3}{\alpha} - \frac{4.3.2}{1.2.3}\overset{4}{\alpha} + \frac{5.4.3}{1.2.3}\overset{5}{\alpha} - \ldots \mp \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2\ \ 3}\overset{p}{\alpha})\, A^{n-3}\overset{p+3}{\mathrm{III}}$$

$$= (\frac{3.2.1}{1.2.3}\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3} - \frac{4.3.2}{1.2.3}\frac{n\ldots(n-3)}{1\ldots 4} + \ldots \mp \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2.\ 3}\frac{n\ldots(n-p+1)}{1\ldots p})\, A^{n-3}\overset{p+3}{\mathrm{III}}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2\ \ 3}(1 - \frac{n-3}{1} + \frac{n-3}{1}\frac{n-4}{2} - \ldots \mp \frac{(n-3)\ldots(n-p+1)}{1\ \ldots\ (p-3)})\, A^{n-3}\overset{p+3}{\mathrm{III}}$$

$$= \mp \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ \ 3}.\ \frac{(n-4)(n-5)\ldots(n-p)}{1.\ 2\ \ldots\ (p-3)}\, A^{n-3}\overset{p+3}{\mathrm{III}} \quad (\S.\ 147.\ D.)$$

u. s. f.

bis endlich die letzte Verticalreihe, aus dem einzigen Gliede

$$+ \frac{p(p-1)\ldots 1}{1.2\ \ldots\ p}\overset{p}{\alpha}\, A^{n-p}\overset{2p}{\mathrm{IP}} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.\ 2\ \ldots\ p}\, A^{n-p}\overset{2p}{\mathrm{IP}}$$

bestehet.

Setzen wir diese Summen zusammen, so erhalten wir den Coefficienten des obigen allgemeinen *p*ten Gliedes (*D*). Dies Glied heiße zur Abkürzung $Q\,x^{nm+pr}$, so ist

Q

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Q} = & \mp \frac{n}{1} \cdot \frac{(n-2)(n-3)\ \ldots\ldots\ (n-p)}{1.\ \ 2\ \ldots\ldots\ (p-1)} A^{n-1} \overset{p+1}{\mathrm{I}} \\
& \pm \frac{n(n-1)}{1.\ \ 2} \cdot \frac{(n-3)(n-4)\ \ldots\ (n-p)}{1.\ \ 2\ \ldots\ (p-2)} A^{n-2} \overset{p+2}{\mathrm{II}} \\
& \mp \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2\ \ \ 3} \cdot \frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-p)}{1.\ \ 2\ \ldots(p-3)} A^{n-3} \overset{p+3}{\mathrm{III}} \\
& \pm \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ \ 2\ \ \ 3\ \ \ 4} \cdot \frac{(n-4)\ldots(n-p)}{1\ \ldots(p-4)} A^{n-4} \overset{p+4}{\mathrm{IV}} \\
& \mp \text{etc.}\quad \text{etc.} \\
& + \frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-p+1)}{1.\ \ 2\ \ldots\ldots\ p} A^{n-p} \overset{2p}{\mathrm{IP}}.
\end{aligned}
$$

die obern Zeichen gelten für ein gerades, die untern für ein ungerades p.

Die Potenz von x, welche zu diesem Coefficienten gehört, ist x^{nm+pr}.

Dieser Ausdruck ist nun ein allgemeiner Ausdruck für das $p$te Glied (vom 2ten an gerechnet), der umgeformten Reihe, in welcher nun blos vollzählige D. Z. vorkommen.

Das Gesetz, nach welchem die Theile des gefundenen Coefficienten fortschreiten, ist zwar leicht zu übersehen, dennoch ist es nöthig auf einen Umstand aufmerksam zu seyn, weil man sonst bei der Entwickelung aller einzelnen Glieder der Reihe, aus diesem allgemeinen Glied, in eine Zweideutigkeit fallen kann. Dieser Umstand ist die Anzahl von Factoren, aus welchem jeder Theil des allgemeinen Coefficienten bestehet. Unter dem Wort Factor aber verstehe ich die Brüche $\frac{n}{1}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-2}{3}$, etc. $\frac{n-p}{p-1}$. Es ist aber leicht zu übersehen, daß jeder Theil des Coefficienten, p solche Factoren enthält, so wie auch die Anzahl aller Theile des Coefficienten p ist. Das erste ergiebt sich aus Betrachtung der Nenner, das andere aus den D. Z. Uebrigens bestehen die Factoren jedes Theils aus zwei Klassen, die durch Punkte abgesondert sind, und deren jede ihrem eigenen leicht zu übersehenden Gesetze folgt.

Nach diesen vorläufigen Anmerkungen substituire man für p, nach und nach die Werthe, 1, 2, 3, 4 etc., so wird man alle Glieder der umgeformten Potenzreihe, von 2ten an, nach der Reihe erhalten.

1) Das erste Glied der Reihe bleibt unverändert, wie in (A) $A^n x^{nm}$

2) Setzt man in den allgemeinen Gliede $p = 1$, so erhält man das 2te Glied der Reihe $+ \frac{n}{1} A^{n-1} \overset{2}{\mathrm{I}} x^{nm+r}$

(Uebersähe man hier die obige Anmerkung von der Anzahl der Factoren, so würde es zweideutig seyn, ob man in der ersten Zeile mit $\frac{n}{1}$ abbrechen müsse.)

3) Setzt

3) Setzt man $p = 2$, so erhält man das 3te Glied

$$-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-2}{1}A^{n-1}\overset{3}{\mathrm{I}}\,x^{nm+2r}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}A^{n-2}\overset{4}{\mathrm{II}}\,;$$

4) Setzt man $p = 3$, so erhält man das 4te Glied

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{1.\ 2}A^{n-1}\overset{4}{\mathrm{I}}\,x^{nm+3r}$$
$$-\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\cdot\frac{n-3}{1}A^{n-2}\overset{5}{\mathrm{II}}\,;$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}A^{n-3}\overset{6}{\mathrm{III}}\,;$$

5) Setzt man $p = 4$, so erhält man das 5te Glied

$$-\frac{n}{1}\cdot\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3}A^{n-1}\overset{5}{\mathrm{I}}\,x^{nm+4r}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\cdot\frac{(n-3)(n-4)}{1.\ 2}A^{n-2}\overset{6}{\mathrm{II}}\,;$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\cdot\frac{n-4}{1}A^{n-3}\overset{7}{\mathrm{III}}\,;$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}A^{n-4}\overset{8}{\mathrm{IV}}\,;$$

u. s. f.

diese Glieder sind schon hinreichend, die ganze Form der Reihe zu übersehen.

§. 150. Zusatz.

Die ganze Reihe ist also nach dieser Umformung folgende:

$$(A)\ y^n = A^n x^{nm} + \frac{n}{1}A^{n-1}\overset{2}{\mathrm{I}}\,x^{nm+r} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-2}{1}A^{n-1}\overset{3}{\mathrm{I}}\,x^{nm+2r}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}A^{n-2}\overset{4}{\mathrm{II}}\,;$$

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{1.\ 2}A^{n-1}\overset{4}{\mathrm{I}}\,x^{nm+3r} - \frac{n}{1}\cdot\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3}A^{n-1}\overset{5}{\mathrm{I}}\,x^{nm+4r} + etc.$$
$$-\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\cdot\frac{n-3}{1}A^{n-2}\overset{5}{\mathrm{II}}\,; \qquad +\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\cdot\frac{(n-3)(n-4)}{1.\ 2}A^{n-2}\overset{6}{\mathrm{II}}\,;$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}A^{n-3}\overset{6}{\mathrm{III}}\,; \qquad -\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\cdot\frac{n-4}{2}A^{n-3}\overset{7}{\mathrm{III}}\,;$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}A^{n-4}\overset{8}{\mathrm{IV}}\,;$$

und

und diese allgemeine Potenzreihe bezieht sich auf die Wurzelreihe

$$(B)\; y = Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} + etc.$$

oder in vollzähligen D. Z.

$$(C)\; y = \overset{1}{\mathrm{I}}\, x^m + \overset{2}{\mathrm{I}}\, x^{m+r} + \overset{3}{\mathrm{I}}\, x^{m+2r} + \overset{4}{\mathrm{I}}\, x^{m+3r} + etc.$$

Obgleich der Coefficient des ersten Gliedes $\overset{1}{\mathrm{I}} = A$, in der Potenzreihe nicht unter der Form eines D. Z. vorkommt, so beziehen sich doch sämtliche höhere D. Z. in derselben mit auf dieses Glied, welches also bei Entwickelung ihrer Werthe nicht zu übersehen ist.

Um das öftere Nachschlagen zu ersparen, ist diese umgeformte Reihe Taf. II. B. besonders abgedruckt.

Wir setzen sogleich einige Beispiele hinzu, um den Gebrauch dieser umgeformten Potenzreihe zu erläutern.

§. 151. Beispiel. 1.

Den Werth von $\frac{1}{\mathrm{Cos.}\, z^3}$, oder $(\mathrm{Cos.}\, z)^{-3}$ durch eine Reihe nach Potenzen von z so auszudrücken, daß das Gesetz der Reihe, auch in der gewöhnlichen Bezeichnung sichtbar bleibe.

Man bezeichne die Coefficienten der Reihe $\mathrm{Cos.}\, z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1..4} - etc.$ mit vollzähligen D. Z. $\mathrm{Cos.}\, z = \overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}}\, z^2 + \overset{3}{\mathrm{I}}\, z^4 + \overset{4}{\mathrm{I}}\, z^6 + etc.$

Vergleicht man diese Reihe mit B und C im vorigen §., so hat man $y = \mathrm{Cos.}\, x$; $n = -3$; $m = 0$; $r = 2$; $\overset{1}{\mathrm{I}} = A = 1$; *etc.* Demnach

$$\begin{aligned}(\mathrm{Cos.}\, z)^{-3} = 1 &- \tfrac{3}{1}\overset{2}{\mathrm{I}}\, z^2 - \tfrac{3}{1}.\tfrac{5}{1}\overset{3}{\mathrm{I}}\, z^4 - \tfrac{3}{1}.\tfrac{5.6}{1.2}\overset{4}{\mathrm{I}}\, z^6 - \tfrac{3}{1}.\tfrac{5.6.7}{1.2.3}\overset{5}{\mathrm{I}}\, z^8 - etc.\\ &+ \tfrac{3.4}{1.2}\overset{4}{\mathrm{II}}\text{〃} + \tfrac{3.4}{1.2}\tfrac{6}{1}\overset{5}{\mathrm{II}}\text{〃} + \tfrac{3.4}{1.2}\tfrac{6.7}{1.2}\overset{6}{\mathrm{II}}\text{〃}\\ &- \tfrac{3.4.5}{1.2.3}\overset{6}{\mathrm{III}}\text{〃} - \tfrac{3.4.5}{1.2.3}\tfrac{7}{1}\overset{7}{\mathrm{III}}\text{〃}\\ &+ \tfrac{3.4.5.6}{1.2.3.4}\overset{8}{\mathrm{IV}}\text{〃}\end{aligned}$$

Die Werthe der D. Z. nehme man aus Tafel V. C., so wird

$$(A)\ \frac{1}{\mathrm{Cos}.z^3} = 1 + \frac{3}{1}\cdot\frac{1}{1.2}z^2 - \frac{3}{1}\frac{5}{1}\frac{1}{1\,..\,4}z^4 + \frac{3}{1}\frac{5.6}{1.2}\frac{1}{1\,...\,6}z^6 - \frac{3}{1}\frac{5.6.7}{1.2.3}\frac{1}{1\,...\,8}z^8 + etc.$$

$$+ \frac{3.4}{1.2}\frac{2^4}{2.1\,..\,4}\ '' - \frac{3.4}{1.2}\frac{6}{1}\frac{2^6}{2.1\,..\,6}\ '' + \frac{3.4}{1.2}\frac{6.7}{1.2}\frac{2^8}{2.1\,..\,8}\ ''$$

$$+ \frac{3.4.5}{1.2.3}\frac{3^6+3}{4.1\,..\,6}\ '' - \frac{3.4.5}{1.2.3}\frac{7}{1}\frac{3^8+3}{4.1\,..\,8}\ ''$$

$$+ \frac{3.4.5.6}{1.2.3.4}\frac{4^8+4.2^8}{8.1\,...\,8}\ ''$$

wo das Fortschreitungsgesetz, so zusammengesetzt es auch ist, dennoch nicht schwer zu übersehen ist; das $r$te Glied, vom 2ten an gezählt, würde seyn:

$$\mp \frac{3}{1}\frac{5.6\,....\,(r+3)}{1.2\,....\,(r-1)}\frac{1}{1.2\,....\,2r}\qquad x^{2r}$$

$$\pm \frac{3.4}{1.2}\frac{6.7\,...\,(r+3)}{1.2\,...\,(r-3)}\frac{2^{2r}}{2.1.2\,....\,2r}\qquad ''$$

$$\mp \frac{3.4.5}{1.2.3}\frac{7.8\,...\,(r+3)}{1.2\,...\,(r-3)}\frac{3^{2r}+3}{4.1.2\,....\,2r}\qquad ''$$

$$\pm \frac{3\,..\,6}{1\,..\,4}\frac{8\,...\,(r+3)}{1\,...\,(r-4)}\frac{4^{2r}+4.2^{2r}}{8.1.2\,...\,2r}\qquad ''$$

$$\mp\ etc.$$

$$+ \frac{3.4\,......\,(r+2)}{1.2\,......\,r}\ \frac{r^{2r} + \frac{r}{1}(r-2)^{2r} + \frac{r}{1}\frac{r-1}{2}(r-4)^{2r} + etc.}{2^{r-1}.1.2\,.....\,2r}\quad ''$$

Sollte sich das Gesetz dieser Reihe in Ziffern einfacher ausdrücken lassen, (woran ich doch zweifle,) so müßte sich dies einfachere Gesetz aus diesem allgemeinen Ausdruck ableiten lassen.

Wäre es nur um einige Glieder dieser Reihe zu thun, nicht um das Gesetz derselben, so nehme man die Werthe der D. Z., nicht aus Taf. V. C., sondern aus Taf. VII. A.; so findet man durch eine sehr leichte Rechnung

$$(B)\ \frac{1}{\mathrm{Cos}.z^3} = 1 + \frac{3}{1.2}z^2 + \frac{32}{1\,..\,4}z^4 + \frac{743}{1\,..\,6}z^6 + \frac{25953}{1\,...\,8}z^8 + etc.$$

§. 152. Zusatz.

Es sey α ein parabolischer Bogen vom Scheitel an gerechnet; φ der Winkel im Brennpunkt, der diesen Bogen bespannt, und p der Parameter der Parabel, so läßt sich aus der Natur der Parabel beweisen, daß

$$d\alpha = \frac{p}{4}\frac{d\varphi}{(\mathrm{Cos}.\frac{1}{2}\varphi)^3}$$

Man

Man nenne die Coefficienten der im vorigen §. gefundenen Reihe, zur Abkürzung, vom 2ten Gliede an $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, $\overset{4}{A}$ *etc.*, und schreibe $\frac{\varphi}{2}$ statt z, so hat man

$$d\alpha = \tfrac{1}{4} p \left(d\varphi + \overset{2}{A} \frac{1}{2^2} \varphi^2 d\varphi + \overset{3}{A} \frac{1}{2^4} \varphi^4 d\varphi + \overset{4}{A} \frac{1}{2^6} \varphi^6 d\varphi + etc. \right)$$

Demnach, wenn man integrirt

$$\alpha = \tfrac{1}{4} p \left(\varphi + \frac{1}{2^2} \tfrac{1}{3} \overset{2}{A} \varphi^3 + \frac{1}{2^4} \tfrac{1}{5} \overset{3}{A} \varphi^5 + \frac{1}{2^6} \tfrac{1}{7} \overset{4}{A} \varphi^7 + etc. \right)$$

die beständige Größe ist o, weil für $\varphi = o$, auch $\alpha = o$ seyn muß. Setzt man hier statt $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$ *etc.* die im vorigen §. bey (A) gefundenen Werthe, so fällt in die Augen, daß das Gesetz auch dieser Reihe sichtbar bleibe.

Nimmt man aber die Werthe von $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$ *etc.* aus (B), so sind die ersten Glieder der Reihe folgende:

$$\alpha = \tfrac{1}{4} p \left(\varphi + \tfrac{1}{8} \varphi^3 + \frac{2}{1.2..5} \varphi^5 + \frac{743}{2^6.1\ldots7} \varphi^7 + \frac{25953}{2^8.1\ldots9} \varphi^9 + etc. \right)$$

oder wenn man jeden Coefficienten in eine einzige Zahl verwandelt

$$\alpha = \tfrac{1}{4} p \left\{ \begin{array}{l} \varphi \\ + \varphi^3 .\ 0,\ 125 \\ + \varphi^5 .\ 0,\ 016\ 666\ 666 \ldots \\ + \varphi^7 .\ 0,\ 002\ 303\ 447 \ldots \\ + \varphi^9 .\ 0,\ 000\ 278\ 942 \ldots \\ + \ etc. \end{array} \right\}$$

welche Reihe noch ziemlich für $\varphi = 1$ (d. i. $57^\circ.\ 17\tfrac{3}{4}'$) convergirt.

§. 153. Beispiel. 2.

Die trigonometrische Function von x, $v = \text{Cos.}\, x \sqrt{(2 \text{ tang.}\, x)}$ in eine Reihe nach Potenzen von x zu verwandeln.

Man forme zuerst diese Function so um, daß keine andere einfache trig. Function als Sin. oder Cos. darin bleibe. Es ist aber $v = \text{Cos.}\, x \sqrt{(2 \text{ tang.}\, x)}$

$$= \frac{\text{Cos.}\, x \sqrt{2 \text{ Sin.}\, x}}{\sqrt{\text{Cos.}\, x}} = \sqrt{(2 \text{ Sin.}\, x.\ \text{Cos.}\, x)} = \sqrt{\text{Sin.}\ 2x}.$$

$$vv = \text{Sin.}\ 2x = 2x - \frac{1}{1.2.3} 2^3 x^3 + \frac{1}{1..5} 2^5 x^5 - etc.$$

Man bezeichne nun die Coeff. vom ersten Gliede an, mit vollzähligen D. Z., ziehe aber 2, und ihre Potenzen, nicht mit zu den Coeff., damit die D. Z. keine andern Werthe he als §. 128. erhalten, nemlich $\overset{1}{\mathrm{I}} = 1$; $\overset{2}{\mathrm{I}} = -\frac{1}{1.2.3}$; *etc.*, so daß $vv = \overset{1}{\mathrm{I}}\, 2x + \overset{2}{\mathrm{I}}\, 2^3x^3 + \overset{3}{\mathrm{I}}\, 2^4x^4 + \overset{4}{\mathrm{I}}\, 2^6x^6 + etc.$ Aus dieser Reihe ist nun die Quadratwurzel zu ziehen, oder dieselbe zur Potenz $\frac{1}{2}$ zu erheben.

Vergleichen wir nun diese Reihe mit der Wurzelreihe Taf. II. B., so ist $\overset{1}{\mathrm{I}} = A = 1$; $m = 1$; $r = 2$, und weil die Quadratwurzel gesucht wird $n = \frac{1}{2}$. Bringt man nun diese Werthe in Taf. II. B., und schreibt noch statt x, überall $2x$, so erhält man

$$\begin{aligned} v = 2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} &+ \frac{1}{2}\overset{2}{\mathrm{I}}\, 2^{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\frac{3}{2}\overset{3}{\mathrm{I}}\, 2^{\frac{9}{2}}x^{\frac{9}{2}} + \frac{1}{2}.\frac{3.5}{2.4}\overset{4}{\mathrm{I}}\, 2^{\frac{13}{2}}x^{\frac{13}{2}} + etc. \\ &\qquad\qquad - \frac{1.1}{2.4}\overset{4}{\mathrm{II}} \;'' \;'' \quad - \frac{1.1}{2.4}.\frac{5}{2}\overset{5}{\mathrm{II}} \;'' \;'' \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1.1.3}{2.4.6}\overset{6}{\mathrm{III}} \;'' \;'' \end{aligned}$$

wovon das Fortschreitungsgesetz nicht schwer zu übersehen ist. Das $(1+r)$te Glied dieser Reihe wird seyn

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2}.\frac{3.5.7\ldots\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2r-2)}\overset{1+r}{\mathrm{I}} \quad (2x)^{\frac{4r+1}{2}} \\ &- \frac{1.1}{2.4}.\frac{5.7\ldots\ldots(2r-1)}{2.4\ldots\ldots(2r-4)}\overset{2+r}{\mathrm{II}} \quad '' \\ &+ \frac{1.1.3}{2.4.6}.\frac{7.9\ldots\ldots(2r-1)}{2.4\ldots\ldots(2r-6)}\overset{3+r}{\mathrm{III}} \quad '' \\ &+ \quad etc. \\ &\pm \frac{1.1\,3.5\ldots\ldots(23-5)}{2.4.6.8\ldots\ldots(2r-2)}.\frac{2r-1}{2}\overset{2r-1}{(IR-\mathrm{I})} \quad '' \\ &\mp \frac{1.1.3.5\ldots\ldots}{2.4.6.8\ldots\ldots}\frac{(2r-3)}{2r}\overset{2r}{IR} \quad '' \end{aligned}$$

Die obern Zeichen gelten für ein gerades, die untern für ein ungerades r. Setzt man für die D. Z. ihre Werthe aus Taf. V. B., so wird

$$\left.\begin{aligned} v = (2x)^{\frac{1}{2}}\Big(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{1.2.3}(2x)^2 &+ \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{1\ldots5}(2x)^4 - \frac{1}{2}\frac{3.5}{2.4}\frac{1}{1\ldots7}(2x)^6 + etc. \\ &- \frac{1}{2.4}\frac{2^6}{2.1\ldots6} \;'' \quad + \frac{1.1}{2.4}\frac{5}{2}\frac{2^8}{2.1\ldots8} \;'' \\ &\qquad\qquad\qquad - \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{3^9-3}{4.1\ldots9} \;'' \end{aligned}\right\}$$

und auch so, ist das Gesetz der Reihe nicht schwer zu übersehen.

Nimmt

Nimmt man aber die Werthe der D. Z. aus Taf. VI. A., so erhält man durch eine ganz leichte Rechnung

$$\mathrm{Cos}.x\sqrt{(2\,\mathrm{tang}.x)} = \sqrt{2x}.\left(1 - \frac{2x^2}{1.2.3} + \frac{2^3x^4}{1\ldots5} - \frac{5.2^5x^6}{1\ldots7} + \frac{67.2^7x^8}{1\ldots9} - etc.\right)$$

§. 154. Aufgabe. 4.

Die verkürzten Dimensionszeichen in der allgemeinen Auflösungsreihe, auf vollständige zu reduciren.

Aufl. Die allgemeine Auflösungsreihe, so wie wir sie §. 94. (Taf. III. A.) gefunden haben, war

$$x^t = y^{\frac{t}{m}} - \frac{t}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}y^{\frac{t+r}{m}} - \frac{t}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}}y^{\frac{t+2r}{m}} - \frac{t}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}}y^{\frac{t+3r}{m}} - etc.$$

$$+\frac{t}{m}\frac{t+2r+m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}\;\text{,,} \quad + \frac{t}{m}\frac{t+3r+m}{2m}\overset{5}{\mathfrak{B}}\;\text{,,}$$

$$-\frac{t}{m}\frac{t+3r+m}{2m}\frac{t+3r+2m}{3m}\overset{6}{\mathfrak{C}}\;\text{,,}$$

das $n$te Glied, vom 2ten ab gezählt, welches wir abgekürzt mit $Py^{\frac{t+nr}{m}}$ bezeichnen wollen, ist =

$$\begin{array}{ll}
-\frac{t}{m} & \overset{1+n}{\mathfrak{A}}\,y^{\frac{t+nr}{m}} \\
+\frac{t}{m}\frac{t+nr+m}{2m} & \overset{2+n}{\mathfrak{B}}\;\text{,,} \\
-\frac{t}{m}\frac{t+nr+m}{2m}\frac{t+nr+2m}{3m} & \overset{3+n}{\mathfrak{C}}\;\text{,,} \\
+\frac{t}{m}\frac{t+nr+m}{2m}\frac{t+nr+2m}{3m}\frac{t+nr+3m}{4m} & \overset{4+n}{\mathfrak{D}}\;\text{,,} \\
-\;etc. & \\
\pm\frac{t}{m}\frac{(t+nr+m)(t+nr+2m)\ldots\ldots(t+nr+(n-1)m)}{2m\quad 3m\quad\ldots\ldots\quad nm} & \overset{2n}{\mathfrak{N}}\;\text{,,}
\end{array}$$

Man setze zur Abkürzung $\frac{t+nr}{m} = v$, so wird

$$(A)\; -\frac{m}{t}P = \overset{1+n}{\mathfrak{A}} - \frac{v+1}{2}\overset{2+n}{\mathfrak{B}} + \frac{v+1}{2}\frac{v+2}{3}\overset{3+n}{\mathfrak{C}} - \frac{v+1}{2}\frac{v+2}{3}\frac{v+3}{4}\overset{4+n}{\mathfrak{D}}$$

$$+\ldots\mp\frac{(v+1)(v+2)\ldots(v+n-1)}{2.\;3\ldots\ldots n}\overset{2n}{\mathfrak{N}}$$

In beiden Ausdrücken gelten die obern Zeichen für ein gerades n, die untern für ein ungerades.

Die gegebene Gleichung, oder Function, auf welche sich diese Auflösungsreihe beziehet, war

$$(B)\; y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}}\, x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}}\, x^{m+2r} + \overset{4}{\mathfrak{A}}\, x^{m+3r} + etc.$$

Man reducire nun in dem allgemeinen Gliede (A), Stück vor Stück die verkürzten D. Z. auf vollzählige, vermittelst Taf. VIII. B., wobei zu merken, daß A in der Reductionstafel, für unsern Fall $= 1$, weil x^m in (B) den Coeff. 1 hat.

Zur Abkürzung setzen wir übrigens noch $\frac{v+1}{2} = \overset{2}{v}$; $\frac{v+1}{2}\,\frac{v+2}{3} = \overset{3}{v}$; $\frac{v+1}{2}\,\frac{v+2}{3}\,\frac{v+3}{4} = \overset{4}{v}$; etc. $\frac{(v+1)\,(v+2)\,\ldots\,(v+n-1)}{2.\;\;3\;\ldots\;n} = \overset{n}{v}$, wo die Indices 2, 3, 4, etc. n sich, wie man sieht, auf das letzte Glied des Nenners, oder auch auf das D. Z., wozu jeder dieser Coefficienten gehört, beziehen, so daß man für jedes $\overset{n}{v}$ sehr leicht wieder seinen Werth substituiren kann. Mit dieser Abkürzung ist also

$$-\frac{m}{r} P = \overset{1+n}{\mathfrak{A}} - \overset{2}{v}\,\overset{2+n}{\mathfrak{B}} + \overset{3}{v}\,\overset{3+n}{\mathfrak{C}} - \overset{4}{v}.\overset{4+n}{\mathfrak{D}} + \ldots \mp \overset{n}{v}\,\overset{2n}{\mathfrak{N}}$$

und nach Taf. VIII. D ist

$$\overset{1+n}{\mathfrak{A}} = + \overset{1+n}{\mathrm{I}}$$

$$-\overset{2}{v}\,\overset{2+n}{\mathfrak{B}} = + \overset{2}{v}\,(2\overset{1+n}{\mathrm{I}} - \overset{2+n}{\mathrm{II}})$$

$$+\overset{3}{v}\,\overset{3+n}{\mathfrak{C}} = + \overset{3}{v}\,(3\overset{1+n}{\mathrm{I}} - \frac{3.\,2}{1.\,2}\overset{2+n}{\mathrm{II}} + \overset{3+n}{\mathrm{III}})$$

$$-\overset{4}{v}\,\overset{4+n}{\mathfrak{D}} = + \overset{4}{v}\,(4\overset{1+n}{\mathrm{I}} - \frac{4\;3}{1.\,2}\overset{2+n}{\mathrm{II}} + \frac{4.\,3.\,2}{1.\,2\;3}\overset{3+n}{\mathrm{III}} - \overset{4+n}{\mathrm{IV}})$$

etc. etc.

$$\mp \overset{n}{v}\,\overset{2n}{\mathfrak{N}} = + \overset{n}{v}\,(\frac{n}{1}\overset{1+n}{\mathrm{I}} - \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\overset{2+n}{\mathrm{II}} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\overset{3+n}{\mathrm{III}} - \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{}\,\frac{n-3}{4}\overset{4+n}{\mathrm{IV}}$$

$$+ \ldots\ldots \pm \frac{n}{1}\,\overset{2n-1}{(IN-1)} \mp \overset{2n}{IN})$$

Man addire jede Verticalreihe einzeln, und setze statt $\overset{2}{v}$, $\overset{3}{v}$, $\overset{4}{v}$ etc. $\overset{n}{v}$ die obigen Werthe, so giebt die 1ste Verticalreihe

$$+ (1 + 2\frac{v+1}{2} + 3\,\frac{v+1}{2}\,\frac{v+2}{3} + etc. \ldots + n\,\frac{(v+1)\ldots(v+n-1)}{2\;.\;.\;.\;n})\,\overset{1+n}{\mathrm{I}}$$

$$= (1 + \frac{v+1}{1} + \frac{v+1}{1}\,\frac{v+2}{2} + \ldots + \frac{(v+1)(v+2)\ldots(v+n-1)}{1.\;\;2\;.\;.\;.\;(n-1)})\,\overset{1+n}{\mathrm{I}}$$

$$= + \frac{(v+2)(v+3)\;.\;.\;.\;.\;.\;(v+n)}{1.\;\;2\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-1)}\,\overset{1+n}{\mathrm{I}} \quad (\S.\ 148.\ B.)$$

Die

Die 2te Verticalreihe giebt

$$-\left(\frac{v+1}{2}+\frac{3.2}{1.2}\,\frac{v+1}{2}\,\frac{v+2}{3}+\ldots+\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{(v+1)\ldots(v+n-1)}{2\;.\;.\;.\;n}\right)\overset{2+n}{\mathrm{II}}$$

$$=-\frac{v+1}{2}\left(1+\frac{v+2}{1}+\frac{v+2}{1}\,\frac{v+3}{2}+\ldots+\frac{(v+2)(v+3)\ldots(v+n-1)}{1.\;\;2\;.\;.\;.\;(n-2)}\right)\overset{2+n}{\mathrm{II}}$$

$$=-\frac{v+1}{2}\cdot\frac{(v+3)(v+4)\;.\;.\;.\;.\;(v+n)}{1.\;\;2\;.\;.\;.\;.\;(n-2)}\overset{2+n}{\mathrm{II}}\quad(\S.\ 148.\ C.)$$

Die 3te Verticalreihe giebt

$$+\left(\frac{v+1}{2}\,\frac{v+2}{3}+\frac{4.3.2}{1.2.3}\,\frac{v+1}{2}\,\frac{v+2}{3}\,\frac{v+3}{4}+\frac{5.4.3}{1\,2.3}\,\frac{v+1}{2}\,\frac{v+2}{3}\,\frac{v+3}{4}\,\frac{v+4}{5}+\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,\frac{(v+1)(v+2)\ldots(v+n-1)}{2.\;\;3\;.\;.\;.\;n}\right)\overset{3+n}{\mathrm{III}}$$

$$=\frac{v+1}{2}\,\frac{v+2}{3}\left(1+\frac{v+3}{1}+\frac{v+3}{1}\,\frac{v+4}{2}+\ldots+\frac{(v+3)(v+4)\ldots(v+n-1)}{1.\;\;2\;.\;.\;.\;(n-3)}\right)\overset{3+n}{\mathrm{III}}$$

$$=\frac{(v+1)\;(v+2)}{2.\;\;\;3}\cdot\frac{(v+4)(v+5)\ldots.(v+n)}{1.\;\;2\;.\;.\;.\;(n-3)}\overset{3+n}{\mathrm{III}}\quad(\S.\ 148.\ D.)$$

u. s. f.

bis endlich die letzte Verticalreihe das einzige Glied

$$\mp\overset{n}{v}\,\overset{2n}{IN}=\mp\frac{(v+1)\,(v+2)\;.\;.\;.\;.\;(v+n-1)}{2.\;\;\;3\;.\;.\;.\;.\;n}\overset{2n}{IN}$$

giebt. Demnach erhalten wir

$$\begin{aligned}-\frac{m}{t}P=&+\frac{(v+2)\,(v+3)\;.\;.\;.\;.\;(v+n)}{1.\;\;\;2\;.\;.\;.\;.\;(n-1)}\overset{1+n}{\mathrm{I}}\\&-\frac{v+1}{2}\cdot\frac{(v+3)\,(v+4)\;.\;.\;.\;.\;(v+n)}{1.\;\;\;2\;.\;.\;.\;.\;(n-2)}\overset{2+n}{\mathrm{II}}\\&+\frac{(v+1)(v+2)}{2.\;\;\;3}\cdot\frac{(v+4)(v+5)\,.\,.(v+n)}{1.\;\;2\;.\;.\;(n-3)}\overset{3+n}{\mathrm{III}}\\&-\frac{(v+1)\,.\,.(v+3)}{2\;.\;.\;4}\cdot\frac{(v+5)\ldots(v+n)}{1\;.\;.\;.\;(n-4)}\overset{4+n}{\mathrm{IV}}\\&+\;etc.\\&\mp\frac{(v+1)\,(v+2)\;.\;.\;.\;.\;(v+n-1)}{2.\;\;\;3\;.\;.\;.\;.\;n}\overset{2n}{IN}\end{aligned}$$

Dies allgemeine Glied der umgeformten Reihe, bestehet aus n Stücken, wie man aus den D. Z. siehet, und die Coefficienten jedes D. Z. enthalten sowohl im Zähler als Nenner, jeder $n-1$ Factoren. Daher werden wir für $n=1$, ein D. Z., und keinen Coefficienten dazu bekommen; für $n=2$, zwei D. Z., und zu jedem einen Coeff. der im Zähler und Nenner nur einen Factor enthält; für $n=3$, drei D. Z., und der Coeff. eines jeden wird im Zähler und Nenner zwei Factoren enthalten, u. s. f.

Ehe wir aber aus diesem allgemeinen Gliede die einzelnen Glieder der Reihe entwickeln, ist es nöthig, das zur Abkürzung gebrauchte v, wegzuschaffen, weil es selbst eine Function von n, und also für jedes Glied anders ist. Es war aber $v = \frac{t+nr}{m}$; also $v+1 = \frac{t+nr+m}{m}$; $v+2 = \frac{t+nr+2m}{m}$; $v+3 = \frac{t+nr+3m}{m}$; *etc.* $v+n-1 = \frac{t+nr+(n-1)m}{m}$; $v+n = \frac{t+nr+nm}{m}$. Demnach

$$\begin{aligned} P = & - \frac{t}{m} \cdot \frac{(t+nr+2m)}{m.} \frac{(t+nr+3m)}{2m} \cdots \frac{(t+nr+nm)}{(n-1)m} \overset{1+n}{\mathrm{I}} \\ & + \frac{t(t+nr+m)}{m.\ 2m} \cdot \frac{(t+nr+3m)}{m} \frac{(t+nr+4m)}{2m} \cdots \frac{(t+nr+nm)}{(n-2)m} \overset{2+n}{\mathrm{II}} \\ & - \frac{t(t+nr+m)(t+nr+2m)}{m.\ 2m.\ 3m} \cdot \frac{(t+nr+4m)}{m} \cdots \frac{(t+nr+nm)}{(n-3)m} \overset{3+n}{\mathrm{III}} \\ & + \frac{t(t+nr+m).\,.\,(t+nr+3m)}{m.\ 2m\ .\,.\ 4m} \cdot \frac{(t+nr+5m)}{m} \cdots \frac{(t+nr+nm)}{(n-4)m} \overset{4+n}{\mathrm{IV}} \\ & - etc. \\ & \pm \frac{t(t+nr+m)(t+nr+2m)}{m.\ 2m,\ 3m} \cdots \frac{(t+nr+(n-1)m)}{nm} \overset{2n}{IN} \end{aligned}$$

In diesem Ausdrucke enthält nun jeder Zähler und Nenner n Factoren. Die Potenz von y, welche zu diesem allgemeinen Gliede gehört, ist $y^{\frac{t+nr}{m}}$. Man setze nun für n nach und nach 1, 2, 3, *etc.*, so erhält man alle einzelne Glieder der umgeformten Reihe, vom 2ten an; wobei die Anmerkung, die wir über die Anzahl der Factoren gemacht haben, nicht aus der Acht zu lassen ist.

Man setze also $n = 1$, so wird das 2te Glied der Reihe

$$= - \frac{t}{m} \overset{2}{\mathrm{I}}\, y^{\frac{t+r}{m}}$$

Man setze $n = 2$, so wird das 3te Glied

$$= - \frac{t}{m} \cdot \frac{t+2r+2m}{m} \overset{3}{\mathrm{I}}\, y^{\frac{t+2r}{m}}$$

$$+ \frac{t(t+2r+m)}{m.\ 2m} \overset{4}{\mathrm{II}};$$

Man setze $n = 3$, so erhält man das 4te Glied

$$= - \frac{t}{m} \cdot \frac{(t+3r+2m)(t+3r+3m)}{m\ \ 2m} \overset{4}{\mathrm{I}}\, y^{\frac{t+3r}{m}}$$

$$+ \frac{t(t+3r+m)}{m.\ 2m} \cdot \frac{t+3r+3m}{m} \overset{5}{\mathrm{II}};$$

$$- \frac{t(t+3r+m)(t+3r+2m)}{m.\ 2m.\ 3m} \overset{6}{\mathrm{III}};$$

Man

Man setze $n = 4$, so erhält man das 5te Glied

$$= -\frac{t}{m}.\frac{(t+4r+2m)}{m.}\frac{(t+4r+3m)}{2m.}\frac{(t+4r+4m)}{3m}\overset{5}{\mathrm{I}}\,y^{\frac{t+4r}{m}}$$

$$+\frac{t(t+4r+m)}{m.\quad 2m}.\frac{(t+4r+3m)}{m.}\frac{(t+4r+4m)}{2m}\overset{6}{\mathrm{II}} \text{ 〃}$$

$$-\frac{t(t+4r+m)}{m.\quad 2m.}\frac{(t+4r+2m)}{3m}.\frac{t+4r+4m}{m}\overset{7}{\mathrm{III}} \text{ 〃}$$

$$+\frac{t(t+4r+m)}{m.\quad 2m.}\frac{(t+4r+2m)}{3m.}\frac{(t+4r+3m)}{4m}\overset{8}{\mathrm{IV}} \text{ 〃}$$

u. s. f.

§. 155. Zusatz.

Für irgend eine gegebene Function oder Gleichung

$$y = x^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} + etc.$$

oder in D. Z.

$$y = \overset{1}{\mathrm{I}}\,x^m + \overset{2}{\mathrm{I}}\,x^{m+r} + \overset{3}{\mathrm{I}}\,x^{m+2r} + \overset{4}{\mathrm{I}}\,x^{m+3r} + etc.$$

haben wir demnach allgemein

$$x^t = y^{\frac{t}{m}} - \frac{t}{m}\overset{2}{\mathrm{I}}\,y^{\frac{t+r}{m}} - \frac{t}{m}.\frac{t+2r+2m}{m}\overset{3}{\mathrm{I}}\,y^{\frac{t+2r}{m}} - \frac{t}{m}.\frac{(t+3r+2m)}{m.}\frac{(t+3r+3m)}{2m}\overset{4}{\mathrm{I}}\,y^{\frac{t+3r}{m}}$$

$$+\frac{t(t+2r+m)}{m.\quad 2m}\overset{4}{\mathrm{II}} \text{ 〃} \qquad +\frac{t(t+3r+m)}{m.\quad 2m}.\frac{t+3r+3m}{m}\overset{5}{\mathrm{II}} \text{ 〃}$$

$$-\frac{t(t+3r+m)}{m.\quad 2m.}\frac{(t+3r+2m)}{3m}\overset{6}{\mathrm{III}} \text{ 〃}$$

$$-\frac{t}{m}.\frac{(t+4r+2m)}{m.}\frac{(t+4r+3m)}{2m.}\frac{(t+4r+4m)}{3m}\overset{5}{\mathrm{I}}\,y^{\frac{t+4r}{m}} - etc.$$

$$+\frac{t(t+4r+m)}{m\quad 2m}.\frac{(t+4r+3m)}{m.}\frac{(t+4r+4m)}{2m}\overset{6}{\mathrm{II}} \text{ 〃}$$

$$-\frac{t(t+4r+m)}{m\quad 2m}\frac{(t+4r+2m)}{3m}.\frac{t+4r+4m}{m}\overset{7}{\mathrm{III}} \text{ 〃}$$

$$+\frac{t(t+4r+m)}{m.\quad 2m.}\frac{(t+4r+2m)}{3m.}\frac{(t+4r+3m)}{4m}\overset{8}{\mathrm{IV}} \text{ 〃}$$

So zusammengesetzt auch die Coefficienten aussehen, so leicht ist doch ihr Gesetz zu übersehen, besonders da man blos seine Aufmerksamkeit auf m zu richten hat, denn t und r kommen in allen Stücken, woraus jedes einzelne Glied der ganzen Reihe bestehet, immer auf einerlei Art vor. Am deutlichsten übersiehet man es in dem allgemeinen Ausdruck (im vorigen §.). In der Anwendung, wo für t m, r bestimmte Zahlen gesetzt werden, erscheint die Reihe immer sehr einfach.

Uebrigens ist offenbar diese Reihe eben so allgemein, als diejenige, aus welcher wir sie durch die Umformung erhalten haben §. 94. Man sehe noch §. 96. 97. 98. Welche von beiden Reihen aber in jedem Falle zu brauchen sey, dies hängt von der Beschaffenheit der Coefficienten jeder einzelnen aufzulösenden Gleichung ab; nemlich von dem Umstande, ob man die Werthe der höhern D. Z., für vollzählige, oder verkürzte D. Z. leichter bestimmen könne. Da man indessen in sehr vielen Fällen, mit Reihen zu thun hat, deren Gesetz in den höheren Potenzen nicht bekannt ist, und da selbst mehrere von den Reihen, die wir im vorigen Abschnitt betrachtet haben, in den höheren Potenzen einem so verwickelten Gesetze folgen, so wird die Auflösungsreihe §. 94. oder Taf. III. A. in den mehresten Fällen vorzuziehen seyn, theils weil sie einfachere Coefficienten hat, und weil selbst die Werthe der verkürzten D. Z. etwas einfacher sind, weil der Coefficient des ersten Gliedes gar nicht mit in Rechnung kommt. Bei endlichen Gleichungen, dürfte sie von wenig oder gar keinen Gebrauch seyn. Denn ob wir gleich im vorigen Abschnitt einige Tafeln entwickelt haben, die sich auf algebraische Functionen beziehen, so sind sie doch alle von der Art, daß man, wenn es auf Auflösung einer Gleichung ankommt, ganz ohne unendliche Reihe fertig werden kann. Ein Paar Beispiele mögen den Gebrauch der Reihe, so wie wir sie jetzt umgeformt haben, erläutern. Uebrigens habe ich auch diese Reihe, zu mehrerer Bequemlichkeit Taf. III. B., besonders abdrucken lassen.

§. 156. Beispiel. 1.

Aus der transcendenten Gleichung $a = x e^x$ (wo e, wie gewöhnlich, die Grundzahl des natürlichen logarithmen Systems bedeutet,) den Werth von x durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Aufl. Mit Worten ist der Sinn der gegebenen Gleichung dieser: Es wird ein natürlicher log. gesucht, (welcher hier x heißt,) der mit seiner zugehörigen Zahl (e^x) multipliciret, eine bestimmte Größe a giebt. Es ist aber

$$e^x = 1 + \frac{1}{1} x + \frac{1}{1.2} x^2 + \frac{1}{1.2.3} x^3 + \frac{1}{1..4} x^4 + etc.$$

also da $a = x e^x$,

$$a = x + \frac{1}{1} x^2 + \frac{1}{1.2} x^3 + \frac{1}{1.2.3} x^4 + \frac{1}{1..4} x^5 + etc.$$

man bezeichne die Coeff. dieser Reihe mit vollzähligen D. Z., also

$$a = \overset{1}{\mathrm{I}} x + \overset{2}{\mathrm{I}} x^2 + \overset{3}{\mathrm{I}} x^3 + \overset{4}{\mathrm{I}} x^4 + \overset{5}{\mathrm{I}} x^5 + etc.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit dem allgemeinen Schema einer gegebenen Gleichung §. 155., so ist hier $y = a$; $m = 1$; $r = 1$; $\overset{1}{\mathrm{I}} = A = 1$, und da wir x selbst suchen, auch $t = 1$.

Bringt

Bringt man diese Werthe in die Auflösungsreihe, so erhält man

$$x = a - \overset{2}{\mathrm{I}}a^2 - \frac{5}{1}\overset{3}{\mathrm{I}}a^3 - \frac{6.7}{1.2}\overset{4}{\mathrm{I}}a^4 - \frac{7.8.9}{1.2.3}\overset{5}{\mathrm{I}}a^5 - etc.$$

$$+\frac{4}{2}\overset{4}{\mathrm{II}}\,\text{〃} + \frac{5}{2}\frac{7}{1}\overset{5}{\mathrm{II}}\,\text{〃} + \frac{6}{2}.\frac{8.9}{1.2}\overset{6}{\mathrm{II}}\,\text{〃}$$

$$-\frac{5.6}{2.3}\overset{6}{\mathrm{III}}\,\text{〃} - \frac{6.7}{2.3}.\frac{9}{1}\overset{7}{\mathrm{III}}\,\text{〃}$$

$$+\frac{6.7.8}{2.3.4}\overset{8}{\mathrm{IV}}\,\text{〃}$$

Da die Werthe der D. Z. in der 1sten Ordnung folgende sind: $\overset{1}{\mathrm{I}} = 1$; $\overset{2}{\mathrm{I}} = \frac{1}{1}$; $\overset{3}{\mathrm{I}} = \frac{1}{1.2}$; $\overset{4}{\mathrm{I}} = \frac{1}{1.2.3}$; *etc.* d. h. eben dieselben, für welche wir die höheren Ordnungen im vorigen Abschnitte §. 124. Taf. V. A entwickelt haben, so erhalten wir, wenn wir die Werthe der höheren D. Z. aus jener Tafel nehmen, folgende leicht zu übersehende Reihe:

$$x = a - \frac{1}{1}a^2 - \frac{5}{1}\frac{1}{1.2}a^3 - \frac{6.7}{1.2}\frac{1}{1.2.3}a^4 - \frac{7.8.9}{1.2.3}\frac{1}{1..4}a^5 - etc.$$

$$+\frac{4}{2}\frac{2^2}{1.2}\,\text{〃} + \frac{5}{2}\frac{7}{1}\frac{2^3}{1.2.3}\,\text{〃} + \frac{6}{2}\frac{8.9}{1.2}\frac{2^4}{1..4}\,\text{〃}$$

$$-\frac{5.6}{2.3}\frac{3^3}{1.2.3}\,\text{〃} - \frac{6.7}{2.3}.\frac{9}{1}\frac{3^4}{1..4}\,\text{〃}$$

$$+\frac{6.7.8}{2.3.4}\frac{4^4}{1..4}\,\text{〃}$$

Substituiret man die Werthe von m, r und t in dem allgemeinen Gliede der Auflösungsreihe, so erhält man für unsere Reihe, folgenden Ausdruck für das $n$te Glied, vom 2ten an gezählt:

$$-\frac{(n+3)}{1.}\frac{(n+4)}{2}\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}\frac{(2n+1)}{(n-1)}\overset{1+n}{\mathrm{I}}\,y^{n+1}, \text{ und } \overset{1+n}{\mathrm{I}} = \frac{1}{1\ldots n}$$

$$+\frac{(n+2)}{2}.\frac{(n+4)}{1}\frac{(n+5)}{2}\frac{\ldots}{\ldots}\frac{(2n+1)}{(n-2)}\overset{2+n}{\mathrm{II}}\,\text{〃}, \text{ und } \overset{2+n}{\mathrm{II}} = \frac{2^n}{1\ldots n}$$

$$-\frac{(n+2)}{2.}\frac{(n+3)}{3}.\frac{(n+5)}{1}\frac{\ldots}{\ldots}\frac{(2n+1)}{(n-3)}\overset{3+n}{\mathrm{III}}\,\text{〃}, \text{ und } \overset{3+n}{\mathrm{III}} = \frac{3^n}{1\ldots n}$$

$$+\frac{(n+2)}{2.}\frac{\ldots}{3.}\frac{(n+4)}{4}.\frac{(n+6)}{1}\frac{\ldots}{\ldots}\frac{(2n+1)}{(n-4)}\overset{4+n}{\mathrm{IV}}\,\text{〃}, \text{ und } \overset{4+n}{\mathrm{IV}} = \frac{4^n}{1\ldots n}$$

$$-\ etc. \qquad\qquad etc.$$

$$\pm\frac{(n+2)}{2.}\frac{(n+3)}{3}\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}\frac{\ldots\ 2n}{\ldots\ n}\overset{2n}{IN}\,\text{〃}, \text{ und } \overset{2n}{IN} = \frac{n^n}{1\ldots n}$$

das obere Zeichen gilt für ein gerades n.

§. 157.

§. 157. Zusatz.

Ließe sich die Reihe, aus welcher der Coefficient des allgemeinen Gliedes besteht, *a priori* summiren, so würde man für die gefundene Reihe ein einfacheres Gesetz finden. Allein auch diese Summirung dürfte etwas schwer seyn. Daß sie aber möglich seyn muß, läßt sich *a posteriori* zeigen. Denn wenn man die Coefficienten jeder Potenz wirklich addiret, so zeigt sich ein sehr einfaches Gesetz, nach welchem die Reihe fortschreitet, nemlich

$$x = a - \frac{1}{1}a^2 + \frac{3}{1.2}a^3 - \frac{4^2}{1.2.3}a^4 + \frac{5^3}{1..4}a^5 - \frac{6^4}{1...5}a^6 + etc.$$

das $n+1$ste Glied dieser Reihe, oder das $n$te vom zweiten an, würde zufolge dieses Gesetzes seyn

$$\pm \frac{(n+1)^{n-1}}{1.2....n} a^{n+1}$$

welches demnach die Summe des obigen Ausdrucks (im vorigen §.) seyn würde (+ gilt wenn n gerade). Läßt man hier und oben den Nenner $1.2...n$, desgleichen die Potenz a^{n+1} weg, so läßt sich diese Summirung auch auf folgende Art schreiben:

$$- \frac{(n+2)(n+3)...(2n+1)}{1.\quad 2\ ...\ n}\left(\frac{n}{1}\frac{1}{n+2} - \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{2^n}{n+3} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\frac{3^n}{n+4} - ...\right.$$
$$\left. ... \pm \frac{n}{1}\frac{(n-1)^n}{2n} \mp \frac{n^n}{2n+1}\right) = \pm (n+1)^{n-1}$$

Man kann sich sehr leicht durch Proben von der Richtigkeit dieser Summirung überzeugen, wenn man für n irgend eine ganze und positive Zahl setzt. Denn nur für diese kann die Summirung, zu Folge ihrer Form und der Art, wie sie gefunden worden, gültig seyn.

§. 158. Zusatz.

In der Gleichung $a = x.e^x$ bedeutete x den nat. log. der Zahl e^x; und der Sinn der Aufgabe war: einen nat. log. zu finden, der mit seiner zugehörigen Zahl multiplicirt a gäbe.

Beträfe die Frage nicht natürliche, sondern Briggische Logarithmen, und es sollte ein Briggischer Logarithme, z, gefunden werden, der mit seiner ihm in diesem System zugehörigen Zahl 10^z multipliciret, eine bestimmte Größe b gäbe, so daß also $b = z.10^z$ seyn sollte; so sey $m = 2,302585...$ die Zahl, durch deren Multiplication briggische log. in natürliche verwandelt werden, so ist $10^z = e^{mz}$, also $b = z e^{mz}$, und $bm = mz.e^{mz}$. Man schreibe also in der gefundenen Reihe

$$x = a - a^2 + \frac{3}{1.2}a^3 - \frac{4^2}{1.2.3}a^4 + \frac{5^3}{1..4}a^5 - etc.$$

mb statt a, und mz statt x, so erhält man

$$z = b - mb^2 + \frac{3}{1.2} m^2 b^3 - \frac{4^2}{1.2.3} m^3 b^4 + \frac{5^3}{1..4} m^4 b^5 - etc.$$

oder welches zur Berechnung etwas bequemer ist

$$z = \frac{1}{m} (mb - m^2 b^2 + \frac{3}{1.2} m^3 b^3 - \frac{4^2}{1.2.3} m^4 b^4 + \frac{5^3}{1..4} m^5 b^5 - etc.)$$

wo $\frac{1}{m} = 0{,}434294\ldots$

Man siehet übrigens leicht, daß beide Reihen nicht stark, und nur für ein sehr kleines a oder b convergiren.

Es sey $b = 0{,}001$; also $mb = 0{,}002\,302\,585$; $m^2 b^2 = 0{,}000\,005\,302$; $m^3 b^3 = 0{,}000\,000\,011$, und $mb - m^2 b^2 + \frac{3}{2} m^3 b^3 = +0{,}002\,297\,290$ und dies mit $\frac{1}{m}$ multipliciret, giebt

$$z = 0{,}000\,997\,70\ldots$$

zu diesem Logarithmen findet sich in der Tafel die Zahl $1{,}002\,300$, und diese mit z wirklich multipliciret, giebt

$$0{,}000\,999\,98\ldots \text{ d. i. } 0{,}001$$

so daß also das gefundene z wirklich die verlangte Eigenschaft hat.

Uebrigens bemerke ich noch, daß die Art, wie wir das Problem aufgelöset haben, gar nicht a oder b nothwendig, als **beständige** Größen voraussetzt, sondern daß sie den veränderlichen Werth der Function $x e^x$, oder z. 10^x ausdrücken können, so ist alsdenn die gefundene Reihe, die umgekehrte von der, welche a oder b durch x oder z ausdrückt.

§. 159. Beispiel. 2.

Es sey die transcendente Function $y = x^m e^{x^r}$ gegeben; es soll x durch eine Reihe nach Potenzen von y ausgedrückt werden.

Aufl. Es ist $e^{x^r} = 1 + x^r + \frac{x^{2r}}{1.2} + \frac{x^{3r}}{1.2.3} + \frac{x^{4r}}{1..4} + etc.$

also da $y = x^m e^{x^r}$,

$$y = x^m + x^{m+r} + \frac{1}{1.2} x^{m+2r} + \frac{1}{1.2.3} x^{m+3r} + etc.$$

Vergleicht man diese Reihe, mit dem allgemeinen Schema einer gegebenen Function Taf. III., so haben wir y, x, m, r, gerade wie dort auch $\overset{I}{I} = A = 1$; wird also x selbst gesucht, so ist blos in der Auflösungsreihe überall 1 statt t zu setzen.

Wegen dieser geringen Veränderung halte ich es für unnöthig, die Reihe hier wieder abzuschreiben. Die Werthe der D. Z. sind dieselben, wie im vorigen Beispiel.

Wofern nicht $m = \pm 1$, so schreitet die Reihe für x, unvermeidlich nach irrationalen Potenzen von y, nemlich $y^{\frac{1}{m}}$, $y^{\frac{r+1}{m}}$, $y^{\frac{2r+1}{m}}$, *etc.* fort, die man aber durch eine leichte Substitution $y^{\frac{1}{m}} = z$, auf eine rationale Form, nemlich z, z^{r+1}, z^{2r+1}, z^{3r+1} *etc.* bringen kann.

§. 160. Zusatz.

Es ist schon an einem andern Orte (§. 106. und 109) bemerkt worden, daß man jede Gleichung auf mehrere Arten, und die transcendenten auf unzählige auflösen könne. Die Aufgabe des vorigen §. z. B. läßt sich unter andern auch so auflösen: Es war $y = x^m e^{x^r}$, also $ly = mlx + x^r$, man setze $x = 1 + z$, also $ly = ml(1+z) + (1+z)^r$, und in Reihen aufgelöset

$$ly = mz - \frac{m}{2}z^2 + \frac{m}{3}z^3 - etc.$$

$$+ 1 + \frac{r}{1}z + \frac{r}{1}\frac{r-1}{2}z^2 + \frac{r}{1}\frac{r-1}{\cdot 2}\frac{r-2}{3}z^3 + etc.$$

Um diese Gleichung mit dem allgemeinen Schema zu vergleichen, müßte man 1 auf die linke Seite bringen, und die ganze Gleichung durch den Coeff. des ersten Gliedes, $m + r$ dividiren, so daß

$$\frac{ly-1}{m+r} = z + \frac{1}{m+r}\left(\frac{r}{1}\frac{r-1}{1} - \frac{m}{2}\right)z^2 + \frac{1}{m+r}\left(\frac{r}{1}\frac{r-1}{2}\frac{r-2}{3} + \frac{m}{3}\right)z^3 + etc.$$

Hier würde es nicht rathsam seyn, die Auflösungsreihe *B.* (Taf. III.) anzuwenden, sondern die im 5ten Abschnitt entwickelte *A.*

Die Werthe der höheren D. Z. würden schwerer zu berechnen, und das Gesetz der Reihe ohne die D. Z. nicht sichtbar zu machen seyn; aber die Reihe würde für manche Fälle, besonders für $m = n = 1$ stärker convergiren. Dies war der Fall des ersten Beispiels, welches in der Gleichung $y = x^m e^{x^r}$ als ein besonderer Fall mit enthalten ist.

§. 161. Beispiel. 3.

Aus der Function $y = \frac{\mathrm{Cos.}\, x}{x^2}$, den Werth von x, durch eine Reihe, nach Potenzen von y auszudrücken.

Aufl. Man verwandle Cos. x in die bekannte Reihe, so hat man

$$y = x^{-2} - \frac{1}{1,2}x^0 + \frac{1}{1,,4}x^2 - \frac{1}{1\ldots6}x^4 + \frac{1}{1,,,8}x^6 - etc.$$

Ver-

Vergleicht man dies mit dem allgemeinen Schema der gegebenen Function Taf. III. B. so ergiebt sich $m = -2$; $r = +2$; $\overset{1}{\mathrm{I}} = 1$; $\overset{2}{\mathrm{I}} = -\frac{1}{1.2}$; $\overset{3}{\mathrm{I}} = +\frac{1}{1..4}$; *etc.* und da wir x selbst suchen; $t = 1$; also

$$x = y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\overset{2}{\mathrm{I}}\,y^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\overset{3}{\mathrm{I}}\,y^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3.1}{2.4}\overset{4}{\mathrm{I}}\,y^{-\frac{7}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{5.3.1}{3.4.6}\overset{5}{\mathrm{I}}\,y^{-\frac{9}{2}} + etc.$$

$$+\frac{1.3}{2.4}\overset{4}{\mathrm{II}}\;'' \qquad -\frac{1.5}{2.4}\cdot\frac{1}{2}\overset{5}{\mathrm{II}}\;'' \qquad +\frac{1.7}{2.4}\cdot\frac{3.1}{2\;4}\overset{6}{\mathrm{II}}\;''$$

$$+\frac{1.5\;3}{2.4.6}\overset{6}{\mathrm{III}}\;'' \qquad -\frac{1.7.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2}\overset{7}{\mathrm{III}}\;''$$

$$+\frac{1.\;7.\;5.\;3}{2.\;4.\;6.\;8}\overset{8}{\mathrm{IV}}\;''$$

Das $n$te Glied vom 2ten an gerechnet, wird seyn

$$\mp\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\;\ldots\ldots\;1}{2.\;\;4.\;\;6\;\ldots\;2(n-1)}\overset{n+1}{\mathrm{I}}\;y^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$\pm\frac{1\,(2n-1)}{2.\;\;4}\cdot\frac{(2n-5)(2n-7)\;\ldots\ldots\;1}{2.\;\;4\;\ldots\;2(n-2)}\overset{n+2}{\mathrm{II}}\;''$$

$$\mp\frac{1\,(2n-1)\,(2n-3)}{2.\;\;4.\;\;6}\cdot\frac{(2n-7)\;\ldots\ldots\;1}{2\;\ldots\;2(n-3)}\overset{n+3}{\mathrm{III}}\;''$$

$$\pm\; etc.$$

$$+\frac{1\,(2n-1)(2n-3)\,(2n-5)\;\ldots\ldots\;3}{2.\;\;4.\;\;6\;\;8\;\ldots\ldots\;2n}\overset{2n}{IN}\;''$$

wo die obern Zeichen für ein gerades n gelten.

Nimmt man nun die Werthe der D. Z. aus Taf. V. C., so wird

$$x = y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2}y^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\;\frac{1}{1..4}\;y^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3.1}{2.4}\;\frac{1}{1...6}\;y^{-\frac{7}{2}} - etc.$$

$$+\frac{1.3}{2.4}\;\frac{2^4}{2.1..4}\;'' \qquad +\frac{1.5}{2.4}\cdot\frac{1}{2}\;\frac{2^6}{2.1...6}\;''$$

$$-\frac{1.5.3}{2.4.6}\;\frac{3^6+3}{4.1...6}\;''$$

das $n$te Glied, vom 2ten an

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\;\ldots\ldots\;1}{2.\;\;4.\;\;6\;\ldots\;2(n-1)}\;\frac{1}{1.\;2\;\ldots\;2n}\;y^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$+\frac{1\,(2n-1)}{2.\;\;4}\cdot\frac{(2n-5)\,(2n-7)\;\ldots\ldots\;1}{2.\;\;4\;\ldots\;2(n-2)}\;\frac{2^{2n}}{2.\;1\;\ldots\;2n}\;''$$

$$-\frac{1(2n-1)(2n-3)}{2.\;\;4.\;\;6}\cdot\frac{(2n-7)\;\ldots\ldots\;1}{2\;\ldots\;2(n-3)}\;\frac{3^{2n}+3}{4.\;1\;\ldots\;2n}\;''$$

$$+\frac{1\,(2n-1)\;..\;(2n-5)}{2.\;\;4.\;\;6.\;\;8}\cdot\frac{(2n-9)\;\ldots\;1}{2\;\ldots\;2(n-4)}\;\frac{4^{2n}+4.\,2^{2n}}{8.\;1\;\ldots\;2n}\;''$$

$$-\; etc.$$

$$\pm \frac{1(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots 3}{2.\ 4.\ 6.\ 8\ .\ .\ .\ 2n} \cdot \frac{n^{2n}+\frac{n}{1}(n-2)^{2n}+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(n-4)^{2n}+etc.}{2^{n-1}.\ 1.\ 2\ .\ .\ .\ 2n} y^{-\frac{2n+1}{2}}$$

wo das Gesetz, bei aller Verwickelung, doch ohne Schwierigkeit zu übersehen ist. Auch giebt es schwerlich einen einfachern Ausdruck für dasselbe in der gewöhnlichen Bezeichnung.

§. 162. Zusatz.

Opfert man die Uebersicht des Gesetzes auf, und nimmt die Werthe der D. Z. aus Taf. VII. A., so ergiebt sich, durch eine leichte Rechnung

$$x = y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2.1.2} y^{-\frac{3}{2}} + \frac{11}{4.1..4} y^{-\frac{5}{2}} - \frac{379}{8.1\ldots6} y^{-\frac{7}{2}} + \frac{27497}{16.1,..8} y^{-\frac{9}{2}} - etc.$$

Will man die irrationale Form wegschaffen, so setze man $y^{-\frac{1}{2}} = z$, so ist

$$x = z - \frac{1}{2.1.2} z^3 + \frac{11}{4.1..4} z^5 - \frac{379}{8.1\ldots6} z^7 + \frac{27497}{16.1\ldots8} z^9 - etc.$$

Diese Reihe convergirt nur für große y, oder kleine z. Selbst für $y = 1$ läuft sie noch auseinander.

Achter Abschnitt.

Zusätze zu der allgemeinen Auflösungsmethode.

§. 163. Einleitung.

Ich habe schon gelegentlich erwähnt, daß die im 5ten und 7ten Abschnitt vorgetragene Auflösungsmethode, von solcher Allgemeinheit sey, daß man vermittelst derselben, nicht nur, wie der Anblick der Auflösungsreihe zeigt, jede Potenz (ohne alle Einschränkung), einer in der vorgelegten Function oder Gleichung enthaltenen Größe x finden könne, sondern daß man sogar jede Function dieser Größe x, durch eine unendliche Reihe ausdrücken könne. Es ist auch gar nicht schwer, sich im allgemeinen von der Möglichkeit der Sache zu überzeugen.

1) Die gegebene Gleichung sey

$$y = x^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + etc.$$

und die Function von x, deren Werth durch eine Reihe ausgedrückt werden soll, wollen wir mit $F.x$ bezeichnen. Läßt sich nun diese Function (und dies ist im Allgemeinen immer möglich,) durch eine Reihe nach Potenzen von x ausdrücken, z. B.

$$F.x = a + bx + cx^2 + dx^3 + etc.$$

so fällt in die Augen, daß man, vermittelst unserer Auflösungsmethode alle Glieder dieser Reihe, bx, cx^2 etc. einzeln durch unendliche Reihen ausdrücken könne, deren Summe alsdenn den Werth von $F.x$ geben wird.

Indessen wird diese Art der Auflösung in der Anwendung nicht immer die bequemste seyn, theils weil die Summe der Reihen, die $F.x$ geben, gemeiniglich etwas sehr zusammengesetztes seyn wird, (dessen Fortschreitungsgesetz doch, vermittelst der D. Z., jederzeit zu übersehen ist,) theils weil $F.x$ von solcher Beschaffenheit seyn kann, daß die Coefficienten a, b, c, etc. dem Werthe oder der Form nach, unendlich werden, wenn die Reihe schlechterdings nach Potenzen von x selbst fortschreiten soll, wie dies z. B. der Fall ist, wenn $F.x = \log. x$.

Allein es giebt mehrere Wege, zu demselben Zweck zu gelangen, und wo der eine unwegsam ist, wird ein anderer offen stehen.

2) Wir werden im zweiten Theile, in dem Abschnitte von der Umformung der Reihen zeigen, daß es jederzeit möglich sey, eine vorgelegte Function oder Gleichung $y = x^m + Bx^{m+r} + etc.$ so umzuformen, daß sie in der umgeformten Gestalt, nach Potenzen von irgend einer gegebenen Function von x fortschreite. Formte man also die gegebene Gleichung so um, daß sie nach Potenzen von $F.x$ fortschritte, und nach dieser Umformung

$$v = (F.x)^p + \mathfrak{B}\,(F.x)^{p+q} + \mathfrak{C}\,(F.x)^{p+2q} + etc.$$

wäre, so ist klar, daß man nun den Werth von $F.x$, vermittelst der Auflösungsreihe, geradezu erhalten könne.

3) Aber auch hier kann es sich zutragen, daß die Coefficienten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. unendlich, und also unbrauchbar werden. Für diesen Fall bleibt ein drittes Mittel, welches auf alle Fälle zum Ziele führt. Man nehme eine andere Function von x, die wir $\varphi.x$ nennen wollen, zu Hülfe. Diese wird sich jederzeit so wählen lassen, daß wenn man nach derselben, sowohl die gegebene Function $y = x^m + Bx^{m+r} + etc.$ als die gesuchte $F.x = a + bx + cx^2 + etc$ umformt, in beiden Fällen die Coefficienten der umgeformten Reihen endlich werden, so daß alsdann die erste Auflösungsart angewendet werden kann.

Es ist meine Absicht nicht, diese Theorie in gegenwärtigen Werke vollständig abzuhandeln. Denn sollte dies auf eine hinlänglich allgemeine und bequeme Art geschehen, so würden dabei einige ziemlich verwickelte Differenziirungen nicht wohl zu entbehren seyn, die ich aber absichtlich in diesem Werke, in den Hauptsachen zu vermeiden gesucht habe.

Einige leichte Beispiele dieser Arbeit, werden indessen, wie ich hoffe, dem Leser nicht unangenehm seyn, und man wird daraus ersehen, wie man bei vorgelegten Fragen dieser Art, auf die eine oder andere Art verfahren könne.

§. 164. Beispiel. 1.

Aus der Gleichung $y = x - x^3$ den Werth von $\frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Aufl. Man verfahre nach der ersten Methode des vorigen §., und löse zu dem Ende zuerst $\frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ in eine unendliche Reihe auf, nemlich

$$\frac{1 + x^2}{1 - x^2} = 1 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + etc.\ etc.$$

Hierauf entwickle man aus dem gegebenen $y = x - x^3$ den Werth von x^t, und zwar nach der Auflösungsmethode des 5ten Abschnitts §. 94. oder Taf. III. A. Vergleicht man zu dem Ende unsere Gleichung $y = x - x^3$ mit dem allgemeinen Schema $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + etc.$, so ist $m = 1$; $r = 2$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = -1$; $\overset{3}{\mathfrak{A}}$ *etc.* $= 0$, also

$$x^t = y^t - t \overset{2}{\mathfrak{A}} y^{t+2} + \frac{t}{1} \frac{t+5}{2} \overset{4}{\mathfrak{B}} y^{t+4} - \frac{t}{1} \frac{t+7}{2} \frac{t+8}{3} \overset{6}{\mathfrak{C}} y^{t+6}$$
$$+ \frac{t}{1} \frac{t+9}{2} \frac{t+10}{3} \frac{t+11}{4} \overset{8}{\mathfrak{D}} y^{t+8} - etc.$$

oder da $\overset{2}{\mathfrak{A}} = -1$, also $\overset{4}{\mathfrak{B}} = +1$; $\overset{6}{\mathfrak{C}} = -1$; $\overset{8}{\mathfrak{D}} = +1$; *etc.*

$$x^t = y^t + t y^{t+2} + \frac{t}{1} \frac{t+5}{2} y^{t+4} + \frac{t}{1} \frac{t+7}{2} \frac{t+8}{3} y^{t+6} + \ldots + \frac{t}{1} \frac{t+9}{2} \frac{t+10}{3} \frac{t+11}{4} y^{t+8} + etc.$$

Nunmehr ist es sehr leicht, alle einzelne Glieder der Reihe

$$\frac{1 + x^2}{1 - x^2} = 1 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + etc. = 1 + 2(x^2 + x^4 + etc.)$$

in Reihen nach y zu verwandeln, indem man in der für x^t gefundenen Reihe für t, nach und nach, 2, 4, 6 *etc.* setzt. So erhält man

$$\begin{array}{lllllll}
x^2 = & y^2 + & \frac{2}{1} y^4 + & \frac{2}{1} \frac{7}{2} y^6 + & \frac{2}{1} \frac{9.\ 10}{2.\ 3} y^8 + & \frac{2}{1} \frac{11.\ 12.\ 13}{2.\ 3.\ 4.} & y^{10} + etc. \\
x^4 = & & y^4 + & \frac{4}{1} y^6 + & \frac{4}{1} \frac{9}{2} y^8 + & \frac{4}{1} \frac{11.\ 12}{2.\ 3} & y^{10} + etc. \\
x^6 = & & & y^6 + & \frac{6}{1} y^8 + & \frac{6}{1} \frac{11}{2} & y^{10} + etc. \\
x^8 = & & & & y^8 + & \frac{8}{1} & y^{10} + etc. \\
x^{10} = & & & & & & y^{10} + etc.
\end{array}$$

Dem=

Demnach ist $\frac{1+x^2}{1-x^2} = 1 + 2x^2 + 2x^4 + etc. =$

$$\begin{array}{llllll}
1 + 2y^2 & + \frac{4}{1}y^4 & + \frac{4}{1}\frac{7}{2}y^6 & + \frac{4}{1}\frac{9.\ 10}{2.\ 3}y^8 & + \frac{4}{1}\frac{11.\ 12.\ 13}{2.\ 3.\ 4}y^{10} & + etc. \\
 & + 2 \;: & + \frac{8}{1} \;: & + \frac{8}{1}\frac{9}{2} \;: & + \frac{8}{1}\frac{11.\ 12}{2.\ 3} \;: & \\
 & & + 2 \;: & + \frac{12}{1} \;: & + \frac{12}{1}\frac{11}{2} \;: & \\
 & & & + 2 \;: & + \frac{16}{1} \;: & \\
 & & & & + 2 \;: &
\end{array}$$

wo das Fortschreitungsgesetz nicht schwer zu übersehen ist.

Das $n$te Glied dieser Reihe, vom 2ten an gezählt, ist

$$+ 4 \left(\frac{(2n+1)(2n+2) \ldots\ldots (3n-2)}{2.\ \ 3\ \ \ldots\ldots\ (n-1)} + 2\,\frac{(2n+1)(2n+2) \ldots (3n-3)}{2.\ \ 3\ \ldots\ (n-2)} \right.$$
$$+ 3\,\frac{(2n+1)(2n+2) \ldots (3n-4)}{2.\ \ 3\ \ldots\ (n-3)} + 4\,\frac{(2n+1)(2n+2) \ldots (3n-5)}{2.\ \ 3\ \ldots\ (n-4)}$$
$$\left. + \ldots\ldots + (n-2)\,\frac{(2n+1)}{2} + (n-1) + \tfrac{1}{2} \right) y^{2n}.$$

§. 165. Zusatz.

Das Gesetz der im vorigen §. entwickelten Reihe, läßt sich aber auf eine weit einfachere Art ausdrücken, indem sich der gefundene terminus generalis ohne Schwierigkeit summiren läßt, und zwar vermittelst der §. 148. gefundenen Summirung.

Wenn man die Glieder desselben in umgekehrter Ordnung schreibt, und das, was in der Klammer steht, mit $2n$ multipliciret, außerhalb aber mit $2n$ dividiret, so ist er

$$+ \frac{2}{n}\left(n + (n-1)\,\frac{2n}{1} + (n-2)\,\frac{2n(2n+1)}{1.\ \ 2} + (n-3)\,\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{1.\ \ 2.\ \ 3} \right.$$
$$\left. + \ldots + 2\,\frac{2n(2n+1) \ldots (3n-3)}{1.\ \ 2\ \ldots\ (n-2)} + 1\,\frac{2n(2n+1) \ldots (3n-2)}{1.\ \ 2\ \ldots\ (n-1)} \right) y^{2n}$$

Das Ganze, was in der Klammer steht, bestehet aus n Gliedern, und läßt sich in folgende n Reihen theilen, deren jede nach §. 148. summabel ist:

1) $1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n+1)}{1.\ \ 2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2n(2n+1) \ldots\ldots (3n-2)}{1.\ \ 2\ \ldots\ldots\ (n-1)}$

2) $1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n+1)}{1.\ \ 2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2n(2n+1) \ldots\ldots (3n-3}{1.\ \ 2\ \ldots\ldots\ (n-2)}$

3) $1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n+1)}{1.\ \ 2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2n(2n+1) \ldots\ldots (3n-4)}{1.\ \ 2\ \ldots\ldots\ (n-3)}$

etc.

$n-1$) $1 + \frac{2n}{1}$

n) 1

welche

welche Reihen, wie man leicht siehet, blos darin verschieden sind, daß jede derselben am Ende um ein Glied kürzer ist, als die nächstvorhergehende.

Schreibt man nun §. 148. in (A), statt n, überall $2n$, so ist jederzeit

$$(A)\ 1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n+1)}{1.\ 2} + \ldots\ldots + \frac{2n(2n+1)\ldots(2n+v-1)}{1.\ 2\ \ldots\ v}$$
$$= \frac{(2n+1)(2n+2)\ldots(2n+v)}{1.\ 2\ \ldots\ v}$$

Setzt man nun in dieser Summirung für v, nach und nach $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$, ... 1, so erhält man folgende Reihe, als Summe der obigen n Reihen,

$$(B)\ \frac{(2n+1)(2n+2)\ldots(3n-1)}{1.\ 2\ \ldots\ (n-1)} + \frac{(2n+1)(2n+2)\ldots(3n-2)}{1.\ 2\ \ldots\ (n-2)}$$
$$+ \frac{(2n+1)(2n+2)\ldots(3n-2)}{1.\ 2\ \ldots\ (n-3)} + \ldots\ldots + \frac{2n+1}{1} + 1.$$

Es fällt aber sogleich in die Augen, daß diese Reihe, nach eben dem Satze summabel ist. Denn schreibt man in (A), $2n+1$ statt $2n$, und setzt $v = n-1$, so ist A und B völlig einerley, demnach ist die Summe von B

$$\frac{(2n+2)(2n+3)\ldots(3n-1)}{1.\ 2\ \ldots\ (n-1)}$$

und der ganze terminus generalis unserer Reihe wird also seyn

$$+ \frac{2(2n+2)(2n+3)\ldots(3n-1)}{1.\ 2\ 3\ \ldots\ n} y^{2n}$$

Setzt man also für n, nach und nach, $1, 2, 3, 4$ *etc.*, so erhält man alle Glieder der Reihe vom 2ten an. Das erste Glied aber, welches dem Gesetze der übrigen Glieder nicht folget, ist, wie wir aus dem vorigen §. wissen, $= 1$. Demnach die ganze Reihe

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = 1 + \frac{2}{1}y^2 + \frac{2.\ 6}{1.\ 2}y^4 + \frac{2.\ 8.\ 9}{1.\ 2.\ 3}y^6 + \frac{2.\ 10.\ 11.\ 12}{1.\ 2.\ 3.\ 4}y^8 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{2(2n+1)(2n+2)\ldots(3n-1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ n}y^{2n} + \ldots$$

Die Gleichung, worauf sie sich beziehet, war $y = x - x^3$.

§. 166. Beispiel. 2.

Aus eben der Gleichung $y = x - x^3$ den Werth des log. nat. x, durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Aufl. Da die hier gesuchte Function log. x von solcher Beschaffenheit ist, daß sie sich nicht anders in eine Reihe nach Potenzen von x selbst, als mit unendlichen Coefficienten auflösen läßt, so verfahre man nach der 2ten Methode §. 163, und forme man den Ausdruck $x - x^3$ selbst in eine Reihe um, die nach Potenzen von log. x, den wir Kürze halber, λ nennen wollen, fortschreitet. Dies geschiehet vermittelst der §. 124. betrachteten Reihe, nach welcher

$$\text{Num.}\ \lambda = x = 1 + \lambda + \frac{1}{1.2}\lambda^2 + \frac{1}{1.2.3}\lambda^3 + \frac{1}{1..4}\lambda^4 + etc.$$

$$\text{und}\ x^3 = 1 + 3\lambda + \frac{3^2}{1.2}\lambda^2 + \frac{3^3}{1.2.3}\lambda^3 + \frac{3^4}{1..4}\lambda^4 + etc.$$

Demnach $x - x^3 =$

$$y = (1-3)\lambda + \frac{(1-3^2)}{1.\ 2}\lambda^2 + \frac{(1-3^3)}{1.\ 2.\ 3}\lambda^3 + \frac{(1-3^4)}{1\ .\ .\ 4}\lambda^4 + etc.$$

$$\text{oder} - \tfrac{1}{2}y = \lambda + \tfrac{1}{2}\frac{(3^2-1)}{1.\ 2}\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\frac{(3^3-1)}{1.\ 2.\ 3}\lambda^3 + \tfrac{1}{2}\frac{(3^4-1)}{1\ .\ .\ 4}\lambda^4 + etc.$$

Aus dieser Reihe kann nun λ, oder log. x, nach unserer Auflösungsmethode ohne Schwierigkeit gefunden werden. Es wird aber besser seyn, die Auflösung nach der Methode des 7ten Abschn. §. 155. (Taf. III. B.) in vollzähligen D. Z. zu machen, indem es nicht schwer ist, das Gesetz der höheren Potenzen auf eine allgemeine Art zu finden: denn eben so wie wir $-\tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}(x^3 - x)$ in eine Reihe nach λ verwandelt haben, auf eben die Art, wird man jede höhere Potenz $(-\tfrac{1}{2}y)^n = \frac{1}{2^n}(x^3 - x)^n$ in eine eben solche Reihe auflösen können. Um aber die Hauptsache hier nicht durch Nebenrechnungen zu unterbrechen, so versparen wir diese Arbeit auf den folgenden §.

Setzen wir nun, um mehrerer Einfachheit willen $-\tfrac{1}{2}y = v$, und vergleichen dann unsere Reihe

$$v = \lambda + \tfrac{1}{2}\frac{(3^2-1)}{1.\ 2}\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\frac{(3^3-1)}{1.\ 2.\ 3}\lambda^3 + \tfrac{1}{2}\frac{(3^4-1)}{1\ .\ .\ 4}\lambda^4 + etc.$$

mit dem allgemeinen Schema einer gegebenen Function $y = \overset{1}{\mathrm{I}}x^m + \overset{2}{\mathrm{I}}x^{m+r} + \overset{3}{\mathrm{I}}x^{m+2r} + etc.$, so haben wir $y = v$; $x = \lambda$; $m = 1$; $r = 1$; $\overset{1}{\mathrm{I}}$ wie es für die Auflösungsreihen immer seyn muß $= 1$, ferner $\overset{2}{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\frac{(3^2-1)}{1.\ 2}$; $\overset{3}{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\frac{(3^3-1)}{1.\ 2.\ 3}$; *etc.*

Demnach für $t = 1$

$$\begin{array}{l} \lambda = v - \overset{2}{\mathrm{I}}v^2 - \frac{5}{1}\overset{3}{\mathrm{I}}v^3 - \frac{6.7}{1.2}\overset{4}{\mathrm{I}}v^4 - \frac{7.8.9}{1.2.3}\overset{5}{\mathrm{I}}v^5 - etc. \\ \qquad\qquad\qquad\quad + \frac{4}{2}\overset{4}{\mathrm{II}} \ \ + \frac{5}{2}.\frac{7}{1}\overset{5}{\mathrm{II}} \ \ + \frac{6}{2}.\frac{8.9}{1.2}\overset{6}{\mathrm{II}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \frac{5.6}{2.3}\overset{6}{\mathrm{III}} \ \ - \frac{6.7}{2.3}.\frac{9}{1}\overset{7}{\mathrm{III}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \frac{6.7.8}{2.3.4}\overset{8}{\mathrm{IV}} \end{array}$$

das $n$te Glied vom 2ten an gezählt, ist

$$-\frac{(n+3)}{1.}\frac{(n+4)\ldots\ldots\ldots}{2\ldots\ldots\ldots}\frac{(2n+1)}{(n-1)}\overset{n+1}{\mathrm{I}}\;v^{n+1}$$

$$+\frac{(n+2)}{2}\;\frac{(n+4)}{1.}\frac{(n+5)}{2}\frac{\ldots}{\ldots}\frac{(2n+1)}{(n-2)}\overset{n+2}{\mathrm{II}}\quad 〃$$

$$-\frac{(n+2)}{2.}\frac{(n+3)}{3}\;\frac{(n+5)}{1}\frac{\ldots}{\ldots}\frac{(2n+1)}{(n-3)}\overset{n+3}{\mathrm{III}}\quad 〃$$

$$+\frac{(n+2)}{2.}\frac{(n+3)}{3.}\frac{(n+4)}{4}\cdot\frac{(n+6)}{1}\frac{\ldots}{\ldots}\frac{(2n+1)}{(n-4)}\overset{n+4}{\mathrm{IV}}\quad 〃$$

$$-\; etc.$$

$$\pm\frac{(n+2)}{2}\frac{(n+3)}{3}\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\frac{2n}{n}\overset{2n}{IN}\quad 〃$$

Dies ist die verlangte Reihe für log. x, und die Werthe der D. Z. können entweder nach der im 2ten Abschn. vorgetragenen Theorie, d. i. vermittelst Tafel I., oder nach der besondern im Zusatz zu erklärenden Art bestimmt werden.

§. 167. Zusatz.

Die nach λ umgeformte, und hernach aufgelösete Reihe war

$$(A)\; v = \lambda + \tfrac{1}{2}\,\frac{3^2-1}{1.\;2}\,\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{3^3-1}{1.\;2.\;3}\,\lambda^3 + \tfrac{1}{2}\,\frac{3^4-1}{1\,..\,4}\,\lambda^4 + etc.$$

und in D. Z. $(B)\; v = \overset{1}{\mathrm{I}}\lambda + \overset{2}{\mathrm{I}}\lambda^2 + \overset{3}{\mathrm{I}}\lambda^3 + \overset{4}{\mathrm{I}}\lambda^4 + etc.$

Die höheren Potenzen von (A) lassen sich auf folgende allgemeine Art bestimmen. Es war $y = x - x^3$; also $-\tfrac{1}{2}y = v = \tfrac{1}{2}(x^3 - x)$. Hieraus folgt

$$v^n = \frac{1}{2^n}(x^3 - x)^n$$

und vermittelst des Binomischen Satzes

$$v^n = \frac{1}{2^n}\left(x^{3n} - \frac{n}{1}\,x^{3n-2} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,x^{3n-4} - etc.\right)$$

welche Reihe, da wir blos die höheren Potenzen von ganzen und positiven Exponenten entwickeln wollen, jederzeit endlich ist, und mit $\mp\frac{n}{1}x^{n+2} \pm x^n$ abbricht.

Zur Abkürzung setze man, wie sonst $\frac{n}{1} = \overset{1}{n}$; $\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2} = \overset{2}{n}$; $\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.\quad 2.\quad 3} = \overset{3}{n}$, u. s. f., so haben wir

$$(C)\; v^n = \frac{1}{2^n}\,x^{3n} - \overset{1}{n}\,\frac{1}{2^n}\,x^{3n-2} + \overset{2}{n}\,\frac{1}{2^n}\,x^{3n-4} - \overset{3}{n}\,\frac{1}{2^n}\,x^{3n-6} + etc.$$

Es ist aber, (weil $x = \mathrm{Num.}\,\lambda$),

$$x = 1 + \lambda + \frac{1}{1.2}\lambda^2 + \frac{1}{1.2.3}\lambda^3 + \frac{1}{1..4}\lambda^4 + etc.$$

und (§. 124.) $x^p = 1 + \frac{p}{1}\lambda + \frac{p^2}{1.2}\lambda^2 + \frac{p^3}{1.2.3}\lambda^3 + \frac{p^4}{1..4}\lambda^4 + etc.$

vermittelst dieser Reihe läßt sich nun jedes Glied der Reihe (*C*) in eine Reihe nach λ verwandeln. Es ist nemlich

$$\frac{1}{2^n}x^{3n} = \frac{1}{2^n} + \frac{3n}{1}\frac{1}{2^n}\lambda + \frac{(3n)^2}{1.2}\frac{1}{2^n}\lambda^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(3n)^r}{1\ldots r}\frac{1}{2^n}\lambda^r + etc.$$

$$-\overset{1}{n}\frac{1}{2^n}x^{3n-2} = -\overset{1}{n}\frac{1}{2^n} - \overset{1}{n}\frac{3n-2}{1}\frac{1}{2^n}\lambda - \overset{1}{n}\frac{(3n-2)^2}{1.2}\frac{1}{2^n}\lambda^2 - \ldots$$
$$\ldots - \overset{1}{n}\frac{(3n-2)^r}{1\ldots r}\frac{1}{2^n}\lambda^r - etc.$$

$$+\overset{2}{n}\frac{1}{2^n}x^{3n-4} = +\overset{2}{n}\frac{1}{2^n} + \overset{2}{n}\frac{3n-4}{1}\frac{1}{2^n}\lambda + \overset{2}{n}\frac{(3n-4)^2}{1.2}\frac{1}{2^n}\lambda^2 + \ldots$$
$$\ldots + \overset{2}{n}\frac{(3n-4)^r}{1\ldots r}\frac{1}{2^n}\lambda^r + etc.$$

etc. *etc.*

Die Summe aller dieser Reihen ist v^n. Es ist aber auch (vermöge *B* und §. 46.)

$$v^n = \overset{n}{IN}\lambda^n + \overset{n+1}{IN}\lambda^{n+1} + \overset{n+2}{IN}\lambda^{n+2} + \ldots + \overset{r}{IN}\lambda^r + \ldots$$

also $\overset{r}{IN} = \frac{1}{2^n\,1\ldots r}\left((3n)^r - \overset{1}{n}(3n-2)^r + \overset{2}{n}(3n-4)^r - etc.\right)$

oder $\overset{r}{IN} = \dfrac{(3n)^r - \frac{n}{1}(3n-2)^r + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(3n-4)^r - etc.}{2^n.1.2\ldots r}$

Diese Formel enthält auf eine ganz allgemeine Art, die Werthe aller D. Z., die in der im vorigen §. entwickelten Reihe für λ vorkommen, und man darf nur statt *IN* und *n*, nach und nach I und 1, II und 2, III und 3, IV und 4, *etc.* setzen, um Formeln für jede Ordnung zu erhalten, so ist allgemein

$\overset{r}{I} = \frac{3^r - 1}{2.1\ldots r}$; $\overset{r}{II} = \frac{6^r - 2.4^r + 2^r}{4.1\ldots r}$; $\overset{r}{III} = \frac{9^r - 3.7^r + 3.5^r + 3^r}{8.1\ldots r}$;

$\overset{r}{IV} = \frac{12^r - 4.10^r + 6.8^r - 4.6^r + 4^r}{16\,1\ldots r}$; *etc.* wo blos noch für *r* bestimmte Zahlen zu setzen sind, um die Werthe aller einzelnen D. Z. zu erhalten.

Die

Die für λ oder $\log. x$ gefundene Reihe, bekommt alsdenn folgende Gestalt:

$$\log. x = v - \frac{3^2 - 1}{2.\,1.\,2} v^2 - \frac{5}{1} \frac{3^3 - 1}{2.\,1.\,2.\,3} v^3 - \frac{6.\,7}{1.\,2} \frac{3^4 - 1}{2.\,1\,..\,4} v^4 - etc.$$

$$+ \frac{4}{2} \frac{6^4 - 2.4^4 + 2^4}{4.\; 1.\,2.\,3.\,4} \;〃\; + \frac{5}{2} \frac{7}{1} \frac{6^5 - 2.4^5 + 2^5}{4.\; 1\,...\,5} \;〃$$

$$- \frac{5.\,6}{2.\,3} \frac{9^6 - 3.7^6 + 3.5^6 - 3^6}{8.\; 1\,.....\,6} \;〃$$

und das $n$te Glied der Reihe vom 2ten an gerechnet, ist

$$- \frac{(n+3)(n+4)\,.....\,(2n+1)}{1 \quad 2\,.....\,(n-1)} \frac{3^{n+1} - 1}{2.\,1.\,2\,..\,(n+1)} v^{n+1}$$

$$+ \frac{n+2}{2} \cdot \frac{(n+4)(n+5)\,...\,(2n+1)}{1. \quad 2\,...\,(n-2)} \frac{6^{n+2} - 2.4^{n+2} + 2^{n+2}}{4.\; 1.\,2\,..\,(n+2)} \;〃$$

$$- \frac{(n+2)(n+3)}{2. \quad 3} \cdot \frac{(n+5)\,..\,(2n+1)}{1\,..\,(n-3)} \frac{9^{n+3} - 3.7^{n+3} + 3.5^{n+3} - 3^{n+3}}{8.\; 1.\,2.\,....\,(n+3)} \;〃$$

$$+ \frac{(n+2)\,..\,(n+4)}{2.\;3.\;4} \cdot \frac{(n+6)\,..\,(2n+1)}{1\,..\,(n-4)} \frac{12^{n+4} - 4.10^{n+4} + 6.8^{n+4} - 4.6^{n+4} + 4^{n+4}}{16\; 1.\,2\,.....\,(n+4)} \;〃$$

$$- \; etc.$$

$$\pm \frac{(n+2)(n+3)\,.....\,2n}{2. \quad 3\,.....\,n} \; \frac{(3n)^{2n} - \frac{n}{1}(3n-2)^{2n} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(3n-4)^{2n} - etc.}{2^n.\; 1.\,2\,......\,2n} \;〃$$

Das Gesetz dieser Reihe ist leicht genug zu übersehen, so zusammengesetzt es auch ist. Ob sich der terminus generalis noch auf einen einfachern Ausdruck bringen lasse, ist nicht leicht zu sagen.

§. 168. Beispiel. 3.

Aus jeder gegebenen endlichen Gleichung $0 = A + Bx^\alpha + Cx^\beta + etc.$ den Werth des $\log. x$ durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Aufl. Auf eine noch andere Art als im vorigen Beispiel (nemlich nach Nr. 3. §. 163.), läßt sich bei jeder endlichen Gleichung diese Aufgabe folgendergestalt allgemein auflösen.

Man forme die gegebene Gleichung durch die Substitution $x = a + z$ um, wo a im allgemeinen seyn kann, was man will. Nach dieser Umformung sey die Gleichung $y = z + bz^2 + cz^3 + etc.$ wo y nichts weiter als dasjenige Glied bedeutet, welches kein z enthält. Aus dieser Gleichung entwickele man durch unsere Auflösungsmethode eine Reihe für $\frac{z^r}{r.\,a^r}$. Da nun $\log. x = \log. (a+z) = \log. a + \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} - \frac{z^4}{4a^4} + etc.$ so wird vermittelst der gefundenen Reihe

für

für $\frac{z^t}{t.a^t}$ jedes Glied der Reihe log. $(a+z)$ in eine Reihe verwandelt werden können, deren Summe den log. $(a+z) = \log. x$ giebt. Dies ist das allgemeine der Auflösung, die Ausführung der Rechnung selbst ist folgende:

Wenn man die umgeformte Gleichung $y = z + bz^2 + cz^3 + etc.$, oder in verkürzten D. Z.

$$y = z + \overset{2}{\mathfrak{A}} z^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}} z^3 + \overset{4}{\mathfrak{A}} z^4 + etc.$$

mit dem allgemeinen Schema, einer gegebenen Gleichung $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + etc.$ Taf. III. A. vergleicht, so haben wir für unsern Fall $m = 1$; $r = 1$; $x = z$.

Bringt man diese Werthe in die Auflösungsreihe für z^t, und dividirt zugleich alles durch ta^t, so erhält man

$$(A)\quad \frac{z^t}{ta^t} = \frac{y^t}{ta^t} - \overset{2}{\mathfrak{A}} \frac{y^{t+1}}{a^t} - \overset{3}{\mathfrak{A}} \frac{y^{t+2}}{a^t} - \overset{4}{\mathfrak{A}} \frac{y^{t+r}}{a^t} - etc.$$
$$+ \frac{t+3}{2} \overset{4}{\mathfrak{B}} \;〃\; + \frac{t+4}{2} \overset{5}{\mathfrak{B}} \;〃$$
$$- \frac{t+4}{2} \frac{t+5}{3} \overset{6}{\mathfrak{C}} \;〃$$

und das $n$te Glied, vom zweiten an, wird seyn

$$- \overset{n+1}{\mathfrak{A}} \frac{y^{t+n}}{a^t}$$
$$+ \frac{n+t+1}{2} \overset{n+2}{\mathfrak{B}} \;〃$$
$$- \frac{(n+t+1)}{2} \frac{(n+t+2)}{3} \overset{n+3}{\mathfrak{C}} \;〃$$
$$+ \frac{(n+t+1)}{2.} \frac{(n+t+2)}{3.} \frac{(n+t+3)}{4} \overset{n+4}{\mathfrak{D}} \;〃$$
$$- etc.$$
$$\pm \frac{(n+t+1)}{2.} \frac{\ldots\ldots}{3\ldots} \frac{(2n+t-1)}{n} \overset{2n}{\mathfrak{N}} \;〃$$

Vermittelst dieser Reihe, muß nun jedes Glied der Reihe

$$\log.(a+z) = la + \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} - \frac{z^4}{4a^4} + etc.$$

in eine Reihe verwandelt werden, indem man blos für t, nach und nach 1, 2, 3, 4 etc. setzt. Auf diese Art ergiebt sich

$$+\frac{z}{a} = \frac{1}{a}y - \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a}y^2 - \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a}y^3 - \frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{a}y^4 - \frac{\overset{5}{\mathfrak{A}}}{a}y^5 - etc.$$

$$+\frac{4}{2}\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a}\,'' + \frac{5}{2}\frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{a}\,'' + \frac{6}{2}\frac{\overset{6}{\mathfrak{B}}}{a}$$

$$-\frac{5.6}{2.3}\frac{\overset{6}{\mathfrak{C}}}{a}\,'' - \frac{6.7}{2.3}\frac{\overset{7}{\mathfrak{C}}}{a}\,''$$

$$+\frac{6.7.8}{2.3.4}\frac{\overset{8}{\mathfrak{D}}}{a}\,''$$

$$-\frac{z^2}{2a^2} = -\frac{1}{2a^2}y^2 + \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^2}y^3 + \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a^2}y^4 + \frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{a^2}y^5 + etc.$$

$$-\frac{5}{2}\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a^2}\,'' - \frac{6}{2}\frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{a^2}\,''$$

$$+\frac{6.7}{2.3}\frac{\overset{6}{\mathfrak{C}}}{a^2}\,''$$

$$+\frac{z^3}{3a^3} = +\frac{1}{3a^3}y^3 - \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^3}y^4 - \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a^3}y^5 - etc.$$

$$+\frac{6}{2}\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a^3}\,''$$

$$-\frac{z^4}{4a^4} = \frac{1}{4a^4}y^4 + \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^4}y^5 + etc.$$

$$+\frac{z^5}{5a^5} = +\frac{1}{5a^5}y^5 - etc.$$

etc. etc.

Da in jeder einzelnen Reihe das Fortschreitungsgesetz leicht zu übersehen ist, so wird es auch nicht schwer seyn, dasselbe in der Summe zu übersehen. Man erhält nemlich

log.

$$\log. x = \log.(a+z) = \log. a +$$

$$\frac{1}{a}y - \frac{1}{2a^2}y^2 + \frac{1}{3a^3}y^3 - \frac{1}{4a^4}y^4 + \frac{1}{5a^5}y^5 - etc.$$

$$-\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a}\,;\ +\left(\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^2}-\frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a}\right);\ -\left(\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^3}-\frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a^2}+\frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{a}\right);\ +\left(\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^4}-\frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a^3}+\frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{a^2}-\frac{\overset{5}{\mathfrak{A}}}{a}\right);$$

$$+\frac{4}{2}\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a}\,;\ -\frac{5}{2}\left(\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a^2}-\frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{a}\right);\ +\frac{6}{2}\left(\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a^3}-\frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{a^2}+\frac{\overset{6}{\mathfrak{B}}}{a}\right);$$

$$-\frac{5.6}{2.3}\frac{\overset{6}{\mathfrak{C}}}{a}\,;\ +\frac{6.7}{1.2}\left(\frac{\overset{6}{\mathfrak{C}}}{a^2}-\frac{\overset{7}{\mathfrak{C}}}{a}\right);$$

$$+\frac{6.7.8}{2.3.4}\frac{\overset{8}{\mathfrak{D}}}{a}\,;$$

Da aber die erste Zeile $\frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} + etc.$ offenbar $= \log.\left(1+\frac{y}{a}\right)$ $= \log.\frac{y+a}{a} = \log.(y+a) - \log. a$, so erhalten wir

$$(B)\ \log. x = \log.(a+z) = \log.(a+y)$$

$$-\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a}y^2+\left(\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^2}-\frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a}\right)y^3-\left(\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^3}-\frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a^2}+\frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{a}\right)y^4+\left(\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^4}-\frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a^3}+\frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{a^2}-\frac{\overset{5}{\mathfrak{A}}}{a}\right)y^5 - etc.$$

$$+\frac{4}{2}\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a}\,;\ -\frac{5}{2}\left(\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a^2}-\frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{a}\right);\ +\frac{6}{2}\left(\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a^3}-\frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{a^2}+\frac{\overset{6}{\mathfrak{B}}}{a}\right);$$

$$-\frac{5.6}{2.3}\frac{\overset{6}{\mathfrak{C}}}{a}\,;\ +\frac{6.7}{2.3}\left(\frac{\overset{6}{\mathfrak{C}}}{a^2}-\frac{\overset{7}{\mathfrak{C}}}{a}\right);$$

$$+\frac{6.7.8}{2.3.4}\frac{\overset{8}{\mathfrak{D}}}{a}\,;$$

Diese Reihe, deren Gesetz so leicht zu übersehen ist, ist also für jede endliche Gleichung

$$0 = A + Bx^{\alpha} + Cx^{\beta} + etc.$$

gültig, wenn sie durch die Substitution $x = a + z$ in die Form

$$y = z + \overset{2}{\mathfrak{A}} z^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}} z^3 + \overset{4}{\mathfrak{A}} z^4 + etc.$$

gebracht wird. Da nun die Gleichung auch in dieser Form endlich seyn muß, indem sie von keinen höhern Grad seyn kann, als die gegebene Gleichung, so werden die D. Z. jeder Ordnung, mit einer gewissen Marke abbrechen. Wie weit die Marken in jeder Ordnung gehen, ist zu Folge der im zweiten Abschnitte vorgetragenen Theorie (§. 35.) sehr leicht zu bestimmen. Sind nemlich die Marken

in der 1sten Ordn.	2, 3, 4 . . . n;	so hat man
= = 2ten =	4, 5, 6 . . . $2n$;	
= = 3ten =	6, 7, 8 . . . $3n$;	
= = 4ten =	8, 9, 10 . . . $4n$;	u. s. f.

§. 169. Zusatz.

Aus der Art, wie wir die Reihe des vorigen §. entwickelt haben, ergiebt sich, daß die gegebene Gleichung

$$o = A + Bx + Cx^2 + etc.$$

nicht nothwendig eine endliche Gleichung seyn müsse. Auch wenn sie eine unendliche Reihe ist, findet ebendieselbe Auflösung statt, wofern sich nur diese Reihe ohne Schwierigkeit durch die Substitution $x = a + z$ umformen lässet.

§. 170. Zusatz.

Wir nahmen im 168. §., $o = A + Bx + Cx^2 + etc.$ als eine gegebene Gleichung, und

$$y = z + bz^2 + cz^3 + dz^4 + etc.$$

als eine durch Substitution $x = a + z$ daraus abgeleitete Gleichung an. Dies ist nicht nothwendig. Man kann

$$y = z + bz^2 + cz^3 + etc.$$

geradezu als eine gegebene Gleichung, oder Function ansehen, und dann giebt die gefundene Reihe, den log. $(a + z)$, wo nunmehr a als eine willkührlich angenommene Größe anzusehen ist; die nur nicht $= o$ seyn darf.

Wenn die Logarithmen negativer Zahlen unmöglich sind, so ist a noch mehr beschränkt, indem $a + y$ nicht negativ seyn darf.

§. 171. Zusatz.

Wollte man die gefundene Reihe (168. §. *B.*) auf die im ersten und zweiten Beispiel gebrauchte Gleichung $y = x - x^3$ anwenden, so könnte man

entweder diese Gleichung erst durch die Substitution $x = a + z$ umformen; so gäbe dann die Reihe geradezu $\log. (a + z) = \log. x$.

oder, wenn man nicht nothwendig den log. von x selbst haben müßte, sondern einen $\log. (a + x)$ für irgend einen zulässigen Werth von a brauchen könnte: so würde man ohne Umformung der Gleichung rechnen können; nur müßte sie alsdenn so geschrieben werden, daß sie die Form $y = z + bz^2 + cz^3 + etc.$ erhielte: also $y = x + 0 . x^2 - x^3$. Für diese Form hätte man $\overset{2}{\mathfrak{A}} = 0$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = -1$; $\overset{4}{\mathfrak{A}}$ *etc.* $= 0$. Alsdenn wäre $\overset{6}{\mathfrak{B}} = +1$; $\overset{9}{\mathfrak{C}} = -1$; $\overset{12}{\mathfrak{D}} = +1$; *etc.* alle übrige D. Z. aber $= 0$, so daß man nun eine leicht zu übersehende Reihe für $\log. (a + x)$ erhalten würde.

§. 172. Schlußanmerkung.

Ich schließe hier den ersten Theil dieses Werks, und begnüge mich in diesem letzten Abschnitte an einigen wenigen Beispielen gezeigt zu haben, was ungefähr zu thun sey, wenn man vorgelegte Functionen auf eine so allgemeine Art, als wir hier gethan haben, vermittelst der vorgetragenen Theorie auflösen wollte.

Vielleicht wird es nicht unangenehm seyn, hier noch einen Blick auf den zurückgelegten Weg zurück zu thun. Es waren hauptsächlich zwei Dinge, womit wir uns in diesem Theile beschäftiget haben; das erste betraf den Begriff und Gebrauch der Dimensionszeichen, deren im Ganzen gewiß leichten und einfachen Algorithmus wir hauptsächlich im 2ten, 6ten und 7ten Abschnitt festgesetzt haben. (Im 6ten, wenigstens in so ferne hier Methoden vorkommen, die Werthe der höheren D. Z. in speciellen Fällen zu finden.) Das andere, womit wir uns beschäftigten, war die Auflösung von ein Paar höchst allgemeinen Aufgaben, auf denen ein großer und wichtiger Theil der Analysis des Endlichen und Unendlichen beruhet; nemlich die allgemeine Potenziirung, und die allgemeine Auflösung, jeder Function. Wir haben gezeigt, wie man diese Aufgaben nach Gefallen, in vollzähligen oder verkürzten D. Z. auflösen könne, auch haben wir gesehen, daß jede durch Hülfe unserer Zeichen gefundene Reihe fortgesetzt werden konnte, so weit man wollte, weil in dieser Bezeichnung das Fortschreitungsgesetz ohne Ausnahme sichtbar blieb, und zwar so, daß jedes Glied für sich, und unabhängig von allen vorhergehenden bestimmt werden konnte. Im 6ten und 7ten Abschnitte haben wir einen Versuch gemacht, aus dem Gesetz einer Reihe, so wie es die D. Z. liefern, ihr Gesetz auch in der gewöhnlichen Bezeichnung abzuleiten; und so unvollkommen auch gegenwärtig noch dieser Versuch ist, so hoffe ich doch, daß er in der Folge Veranlassung zu sehr brauchbaren Methoden geben könne.

Die Hauptsache in diesem ersten Theile ist also theoretisch, und die hin und wieder eingestreuten Anwendungen, waren mehr zur Erläuterung, als an und für sich Zweck. Im 2ten Theile hingegen, werde ich verschiedene Kapitel der Analysis endlicher Größen, umständlicher durchgehen, und die weitläuftige Anwendbarkeit der hier vorgetragenen Theorie zeigen.

Ende des ersten Theils.

Theorie
der
Dimensionszeichen
nebst ihrer
Anwendung
auf
verschiedene Materien
aus der
Analysis endlicher Größen

von
Ernst Gottfried Fischer,
Professor der lateinischen Sprache an dem vereinigten Berlinischen und Cöllnischen Gymnasium zu Berlin.

Erster Theil,
welcher die Erklärung und allgemeine Theorie der Dimensionszeichen, eine allgemeine Potenziirungsmethode und eine allgemeine Auflösungsmethode durch unendliche Reihen enthält.

Halle,
in der Buchhandlung des Waisenhauses.
1792.