H. Pfaff.
Helmst. May.
1792

K. 499b
1268

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0002-5

Herrn Abt Bossüts

der königl. Akademie der Wissenschaften, der königl. Akademie der Architektur, des Instituts zu Bologna, der kaiserl. Akademie zu Petersburg, der königl. Akademie der Wissenschaften zu Turin, und der Gesellschaft zu Utrecht Mitglied; Examinator der Zöglinge des königl. Ingenieurkorps, und Generalinspektor über die Maschinen und hydraulischen Werke der königl. Gebäude.

Lehrbegriff der Hydrodynamik

nach

Theorie und Erfahrung

vorzüglich für solche, welche zur Ausübung dieser Wissenschaft bestimmt sind

---

aus dem Französischen übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen herausgegeben

von

Karl Christian Langsdorf

marggräflich brandenburgischen Rath und Salineninspektor zu Gerabronn, der Weltweisheit Doktor; der königl. schwedischen und hochfürstl. hessischen patriot. Gesellschaft, der kurfürstl. mainzischen Akademie der Wissenschaften zu Erfurt, der kurpfalzbaierschen physikalischen Gesellschaft zu Heidelberg und der physikal. Societät zu Lausanne Mitglied

---

Erster Band

welcher die

Theorie der Hydrodynamik

enthält

mit 12 Kupfertafeln

Frankfurt am Main

in der Andreäischen Buchhandlung

1792

KOEN. BIBL. DER UNIVERS. HALLE.

Sr. Excellenz

dem Hochgebohrnen Freiherrn

Herrn

Carl August von Hardenberg

Königl. Preußischen Staats- und Kriegsminister

dann Hochfürstlich Brandenburgischen dirigirenden Geheimden Staatsminister; des erneuerten Hochfürstl. Brandenburg. rothen Adlers-, ingleichen des Königl. Polnischen weißen Adlers- und Stanislai-Ordens Ritter ꝛc.

meinem

gnädigen Herrn

Hochgebohrner Freiherr
Gnädiger,
Hochgebiethender dirigirender Herr
Geheimder Staatsminister,

Wenn ich gegenwärtiges Lehrbuch von Wissenschaften, von welchen der gekrönte Weltweise in einem Briefe an Herrn d'Alembert selbsten sagt:

„Ces hautes sciences ne deviennent utiles à la société qu'autant qu'on les applique à l'astronomie, à la mécanique & à la hydrostatique;"

Eurer Hochfreiherrlichen Excellenz in Unterthänigkeit zu überreichen mich erkühne, so ist es meine einzige Absicht **Eurer Hochfreiherrlichen Excellenz** einen Beweis zu geben, wie ich manche von Berufsgeschäften freie Winterstunden zur Ausbreitung nützlicher Kenntnisse zu verwenden bemüht bin, weil ich ausser der Rechtschaffenheit, von der

nur Handlungen, nicht aber Schriften einen Beweis ablegen können, keinen andern Weg kenne, mich der gnädigsten Protektion eines Staatsministers würdig zu machen, dessen Besitz Fürsten und Staaten beglückt.

Ich empfehle mich mit den Meinigen dieser gnädigsten Protektion und ersterbe in schuldigster Ehrfurcht

Hochgebohrner Freiherr
Hochgebiethender dirigirender Herr
Geheimder Staatsminister
Eurer Hochfreiherrlichen Excellenz

Gerabronn den 14. Nov. 1791.

unterthänigstgehorsamster Knecht
Carl Christian Langsdorf.

Vorrede
zur Uebersetzung.

So wenig Schwierigkeiten es hat, die allgemeinen Grundsätze der Statik auch auf den Gleichgewichtszustand flüßiger Körper anzuwenden, so sehr häufen sich solche in der Anwendung der allgemeinen mechanischen Lehren auf die Bewegung flüßiger Massen. Es haben uns zwar die Herrn Bernoulli, Euler, d'Alembert, Kästner, Karsten, de la Grange, u. a. theils ganze Systeme, theils einzele Aufsätze geliefert, die aus dem Tiefsten der höhern Analysis geschöpft, die Auflösung der wichtigsten Problemen darstellen, und Theorien mit einer Kunst aufgebaut haben, die uns so zu reden durch einen unermeßlichen Raum fast bis zur Grenze menschlichen Scharfsinns hinführen; aber wer braucht wohl noch die Erinnerung, daß alle diese Theorien kaum die Elementen von Wahrheit enthalten? Sie sind im Grunde nur Anweisung, wie man sich zu verhalten habe, um auf gegebene Voraussetzungen mit Hülfe des höhern Kalkuls eine Theorie der Hydrodynamik zu bauen, bei weitem aber nicht selbst Hydrodynamik.

Hiervon überzeugt, bekannt mit allem was bis iezt in dieser Wissenschaft geleistet worden war, mit allen Talenten eines Denkers, eines Geometers, eines Physikers und eines Beobachters ausgerüstet, und von Gelehrten und von Großen unterstützt, unternahm es Herr Abt Bossüt, neues Licht über diesen Theil der Mathematik zu verbreiten, den Gesetzen der Natur **nachzuspüren**, nicht ihr Gesetze **vorzuschreiben**, nicht **hypothetische**, sondern **wirkliche** Hydrodynamik zu lehren, und, mit einer unnachahmlichen Bescheidenheit, alle seine Vorgänger, sich selbst (*), zu übertreffen. Und in der That war seine Bemühung nicht umsonst; er hat seinen Zweck besser erreicht, als sich erwarten ließe, und vielleicht hat noch nie eine Wissenschaft so plötzliche Fortschritte gemacht, als die Hydrodynamik bei Erscheinung des gegenwärtigen Lehrbuchs. Schwerlich würden deutscher Fleiß, deutsche Denkkraft, deutscher Beobachtungsgeist diese Ehre sich haben rauben lassen, wenn die, die unterstützen könnten, in Deutschland mehr Gefühl für Wissenschaften und für die wahre Ehre hätten, die **ihnen** mehr als dem unter ihrem Schutz arbeitenden **gelehrten Taglöhner** zufließen müßte, und wenn Unterstützung zur Beförderung nützlicher Kenntnisse außer Fällen, wo sie keinen Dank verdient, wo man nur

sein

(*) In Rücksicht seiner ältern Hydrodynamik. Die gegenwärtige erschien zu Paris 1777.

sein eigenes unmittelbares Interesse zum Ziel hat, nicht so selten wäre.

Wenn ich von des Hrn. Bossüt's großem Verdienst um die Hydrodynamik rede, so geschieht es blos in Rücksicht auf die ausführliche Vergleichung der Theorie mit der Erfahrung, wozu derselbe den ganzen zweeten Band, oder hier den andern Theil dieses Bandes, bestimmt hat, und die der deutsche Gelehrte nur darum noch nicht vor Hrn. Bossüt angestellt hatte, weil deutsche Fürsten es nicht wollten. Denn so trefflich auch der theoretische Theil dieses Lehrbuchs ist, und so viele eigene Vorzüge er in der That hat, so glaube ich doch, daß Hr. Bossüt darin unsere deutschen Hydrodynamiker nicht übertroffen hat, weil ihm gegen iene Prärogativen auch wieder manche Vorzüge, die dem Deutschen eigen sind, fehlen. Vielleicht sind letztere, wenigstens großentheils, durch die mit Sternen (*) von mir hinzugefügten Anmerkungen ersetzt worden.

Weil ich anfangs im zweiten Band blose Erzählung von Versuchen und Beobachtungen erwartete, so glaubte ich, darin gar keine Veranlassung zu Anmerkungen finden zu können, und wollte es daher bei einer blosen Uebersetzung desselben bewenden lassen, weshalb man auch nur sehr wenige Erinnerungen von mir finden wird. Selbst Stellen, die mir einer Erinnerung benöthigt schienen, übergieng ich, um meinem ersten Vorsatz treu zu bleiben, stillschweigend.

Inzwischen sties ich nach und nach bei den Schlüssen, die Hr. Bossüt aus seinen Beobachtungen gezogen hat, und bei denen in diesem Bande sehr häufig vorkommenden Verbindungen der Theorie mit den Resultaten der Beobachtung, auf so viele einzele Sätze, die mir einer nähern Beleuchtung werth schienen, daß ich mich entschloß, das Nöthigste in dieser Vorrede einzuschalten, auf die ich mich daher mehrmalen im Buch beziehe. Ich werde aus dieser Ursache in dem übrigen Theil dieser Vorrede in möglichster Kürze anzeigen, was Hr. Bossüt in iedem Kapitel des 2ten Bandes, dessen Ueberschrift man am Ende der Vorrede nachschlagen kann, geleistet hat, und meine Erinnerungen bei einzelen Stellen beifügen.

I. Kap. Enthält genauere Bestimmungen der Zusammenziehung eines aus einer Oefnung schießenden Wasserstrahls aus Beobachtungen.

II. Kap. Hier hat Hr. Bossüt das große Verdienst, die Abweichungen der Theorie für die verschiedenen Fälle genauer als seine Vorgänger für **Oefnungen in dünnen Platten** bestimmt, und gezeigt zu haben, wie sich die auslaufenden Wassermengen in allen Fällen so genau, als es nur immer zu wünschen ist, berechnen lassen.

III. Kap. Das Nämliche hat hier Hr. Bossüt für den Ausfluß aus einer in dem Ausflußbehältnis eingesteckten Röhre geleistet. Doch ist hier schlechterdings

dings nur von ganz kurzen Röhren die Rede, bei welchen die Röhrenwand dem Durchfluß nicht merklich hinderlich ist. Auf lange Röhren oder Röhrenfahrten lassen sich die Tafeln dieses Kapitels schlechterdings nicht anwenden, und es wird deswegen von diesen Fällen erst im VIII. und IX. Kap. gehandelt. Schade, daß die allerwenigsten Fälle der Ausübung grade auf so kurze Röhren gehen, wie die sind, über welche Hr. Bossüt hier so genaue Berechnungen mittheilt. Besonders aber vermisse ich hier Versuche über den Ausfluß aus Behältnissen mit lothrechten Röhren von einiger Länge.

IV. Kap. §. I. und II. sehr lehrreich, und die Abweichung der Theorie von der Erfahrung §. II. sehr gut erklärt. Aber äußerst unbefriedigend ist §. III. Es ist nur durch einige Versuche bewiesen worden, daß das Wasser unter der durchbohrten Schiedwand sich von dem oberhalb derselben in gewissen Fällen trennen kann, aber nichts Bestimmtes, nichts Lehrreiches, nichts zur Prüfung der Theorie dienendes gesagt worden. Sollte Hr. Bossüt bei einem so guten Apparat, bei so großer Geschicklichkeit in Anstellung lehrreicher Versuche, bei der einzigen Bestimmung dieses ganzen 2ten Bandes zur Prüfung aller interessanten theoretischen Berechnungen durch Versuche, gar keinen Versuch über die Ausflußmenge oder Zeitdauer bei dergleichen abgetheilten Gefäßen zur

Prü-

Prüfung seiner Theorie angestellt haben? Ich wenigstens schließe aus dieser anscheinenden Unterlassung, daß die Resultate seiner Beobachtungen der von ihm oben vorgetragenen Theorie zu wenig entsprochen haben und daher, vielleicht als zu irregulär, von ihm ganz unterdruckt worden sind.

V. Kap. §. I. wird gewiesen, wie ein einziger Fundamentalversuch angewendet werden müsse, um alle bei einem Gefäs, das während dem Auslaufen beständig voll erhalten wird, vorfallende Fragen, welche auf den Ausfluß Bezug haben, für die Ausübung befriedigend zu beantworten, ohne dabei was weiter zu wissen, als daß die Geschwindigkeit des Ausflusses den Quadratwurzeln aus den Wasserhöhen proportional ist. Man kommt auf diesem Weg unstreitig dem wirklichen Befund bei weitem näher, als durch alle Kunstgriffe der tiefsten Theorie. Man bedient sich auch in unzählichen andern Fällen eben dieses Verfahrens z. B. die erfoderliche Dicke der Röhrenwände bei Steigröhren u. dgl. zu berechnen, wo nur ein sicherer Fundamentalversuch zum Grund gelegt und nun das Gesuchte nach den blosen Proportionsregeln berechnet wird. Noch Niemand hat dieses zu tadeln gewußt oder wirklich getadelt. Es hebt dieses Verfahren über hundert Schwierigkeiten mit einmal weg, führt uns schneller, leichter, und ungleich sicherer zur Beantwortung der interessantesten Fragen; gibt selbst eine Theorie an die Hand, welche

schon

schon stillschweigend die richtigen physischen Voraussetzungen in sich schließt, von denen man sich sonsten immer zu entfernen in Gefahr ist und sich bisher so sehr entfernt hat; eine Theorie bei der man nie in Gefahr steht, mit unter zu träumen oder der Mathematik den Namen eines trüglichen Orakels zuzuziehen und ihre Aussprüche überall verdächtig zu machen; eine Theorie, die ungleich einfacher und sicherer ist, wodurch die Wissenschaft als Inbegriff einleuchtender Wahrheiten gewinnt, der menschliche Verstand nicht von sich selbst hintergangen wird, und wodurch die Angelegenheiten des bürgerlichen Lebens, welches der erste Zweck aller Wissenschaften seyn soll, am besten befördert werden (*). Mich hat daher diese Betrachtung zu dem Entschluß bewogen, die Ausarbeitung eines eigenen Lehrbegriffs der Hydrodynamik nach diesem Plane zu unternehmen.

§. II. Sehr nutzbar für die Ausübung.

VI. und VII. Kap. Nicht befriedigend genug. Die hier vorkommenden Versuche gehen alle nur auf die

(*) Einer unserer größten Mathematiker, Hr. Hofrath Klügel in Halle, sagt in seinen Anfangsgründen der praktischen Mechanik ꝛc. S. 110. „In der „That ließe sich die Theorie der Maschinen auch „noch wohl sehr abkürzen und erleichtern, wenn „man nur erst mehr Beobachtungen über den Gang „der Maschinen hätte.“

die Bestimmung der Verhältnis zwischen der Höhe des Falls vom Behältnis herab und der Höhe des springenden Strahls. Kein einziger Versuch dient zur Bestimmung der Wassermenge, welche der springende Strahl gibt, denn die Tafel, worin Hr. Bossüt in diesem Kapitel auch die Wassermengen angibt, sind nicht Resultat unmittelbarer Beobachtungen, sondern aus Berechnungen hergeleitet, die sich auf die Voraussetzungen (567.) gründen. Diese Voraussetzungen sind aber nicht von der Art, daß sie ohne nähere Untersuchung und Vergleichung mit unmittelbaren Beobachtungen angenommen werden können.

Hr. Bossüt sagt fürs Erste, die Ausflußmenge bleibe immer die nämliche, wofern nur die Wasserhöhe vom Behältnis herab bis zur Mündung und diese Mündung selbst ungeändert bleibe. Auf die Länge der Röhrenleitung vom Behältnis zur Mündung hat er gar nicht gesehen, und doch hängt auch von dieser die Menge des herausspringenden Wassers mit ab, so daß für einerlei Weite der Röhrenleitung die Mündung, um einerlei Höhe des Strahls zu erhalten, desto enger seyn muß, ie länger die Röhrenleitung ist. Nur in denen Fällen kann sie außer Acht gelassen werden, wo das Gußstück so enge ist, daß die bei vollen Röhren daraus springende Wassermenge allemal kleiner bleibt, als die Wassermenge, welche die Röhrenleitung frei abführen würde, wenn man das Gußstück wegnähme.

Fürs

Fürs Andere sagt Hr. Bossüt (567.), die herausspringende Wassermenge bleibe für iede Richtung des Strahls immer die nämliche, das Gußstück mag also horizontal oder vertikal, aufwärts oder unterwärts stehen; er bestättigt dieses mit keinem Versuch, sondern er sieht es als eine nothwendige Folge von der Gleichheit des Drucks an, den flüßige Massen nach allen Seiten leiden. Allein für mich ist dieser Schluß aus der Gleichheit des Drucks auf die Gleichheit der ausströhmenden Wassermenge nicht bündig genug. Die Kraft mag immerhin gleich groß seyn; findet sie größern Widerstand, so bringt sie dennoch nothwendig eine geringere Bewegung hervor. Und dieses ist hier der Fall. Hat das Gußstück eine lothrecht herabhängende oder eine horizontale Lage, so sind die vorauslaufenden Schichten den nachfolgenden auf keine Art hinderlich, und können also die Geschwindigkeit des aus dem Gußstück ströhmenden Wassers nicht verzögern; steigt aber der Strahl lothrecht empor, so verliehrt iede Schichte destomehr von ihrer in dem Gußstück gehabten Geschwindigkeit, ie höher sie steigt; die voransteigenden Schichten haben also eine geringere Geschwindigkeit als die nachfolgenden tiefer liegenden und fallen daher den letztern in ihrem Steigen hinderlich; die untern Schichten wenden auch wirklich einen Theil ihrer Kraft an, die obern auseinander zu pressen, so daß der Strahl nach oben allmälig dicker wird, und es ist also für die ausgeworfene Wasser-

menge

menge gewiß nicht gleichgültig, nach welcher Richtung der Strahl ausfährt. Der lothrecht aufsteigende Strahl muß die Geschwindigkeit des Wassers in der Mündung am meisten verzögern, und diese Geschwindigkeit gehört im Beharrungsstand gewiß nicht der ganzen Wasserhöhe zu. Dieser Unterschied muß desto beträchtlicher werden, ie größer die Fallhöhe ist, wie man auch aus den beiden ersten Kolonnen der Tafel (605) ersieht. Mit der Verminderung der Geschwindigkeit muß aber auch nothwendig die ausströhmende Wassermenge selbsten vermindert werden, und meines Erachtens hat daher Hr. Bossüt in der (605.) mitgetheilten Tafel darin gefehlt, daß er die Wassermengen der dritten Kolonne nach den Fallhöhen, wie man gewöhnlich thut, berechnet hat, indem dieses nicht die den Geschwindigkeiten zugehörigen Höhen sind; er würde ohne Zweifel der Wahrheit näher gekommen seyn, wenn er bei diesen Berechnungen die Höhen des Strahls als die Geschwindigkeitshöhen betrachtet hätte. Er würde auf solche Art z. B. für die Fallhöhe von 101 Fus 4 Zoll nur 128 Kannen statt 142 gefunden haben, wenn nämlich die Geschwindigkeit dabei nur nach der Höhe des Strahls von 80 Fus angenommen würde. Nun gehört zur Strahlhöhe von n. 5 Fußen allemal eine Fallhöhe von n. 5 Fus $+ n^2$ Zolle $= 5n + \frac{1}{12} n^2$ Fuße. Setzt man also $5n = h$, so ist $n = \frac{h}{5}$ und es gehört zur Strahlhöhe

h die

h die Fallhöhe $h + \frac{h^2}{300}$; setzt man also die Fallhöhe $= H$, so hat man $H = h + \frac{1}{300} h^2$, und hieraus gibt sich

$$h = -150 + \sqrt{(H + 22500)}$$

Nun müßte man, um die Wassermengen zu finden, alle Zahlen der dritten Kolonne in der Tafel (605.) mit $\sqrt{\frac{h}{H}}$ multipliciren. Man sieht aber gleich, daß hierdurch bis auf Fallhöhen von 25 Fus die Zahlen der dritten Kolonne nicht merklich abgeändert werden, und daß sich also meine Hypothese durch Versuche im Kleinen gar nicht prüfen lasse. Man müßte zu dem Ende die Versuche bei Fallhöhen anstellen, die wenigstens gegen 40 Fus betrügen.

Auch in Ansehung der Ursachen von der Verschiedenheit der Höhen des Strahls und des druckenden Wassers (584. u. f. f.) muß ich Einiges hier erinnern. Man nennt gewöhnlich, und so auch Hr. Bossut den Widerstand der Luft als die vorzüglichste zur Verminderung der Höhe wirkende Ursache. Allein der Strahl kann keineswegs mit einer Kugel verglichen werden, die aufwärts geworfen wird und in ieder Stelle ihrer Bahn dem Widerstand der Luft ausgesetzt ist. Der Strahl ist eine zusammenhängende Wassersäule, die im Beharrungsstand nur zu oberst auf ihrer höchsten Fläche den Widerstand der Luft leidet. Wenn also der höchste Querschnitt auch wirklich die der

serhöhe zugehörige Geschwindigkeit hätte, so wäre dennoch dieser Widerstand auch bei der gröſten Wasserhöhe unbeträchtlich, weil die Luft dem Strahl nur einen Widerstand entgegensetzen könnte, der höchstens dem Druck einer Wassersäule gleich wäre, deren Höhe $\frac{1}{800}$ von der ganzen Wasserhöhe betrüge. Es gehört aber die Geschwindigkeit des höchsten Querschnitts bei weitem nicht der ganzen Fallhöhe zu, und der Widerstand ist also noch weit geringer als der erwähnte, kann also sehr wenig zur Verminderung der Strahlhöhe beitragen. Mehr Einfluß hierauf hat meines Erachtens der (585.) erwähnte Umstand, der aber auch die Folge nach sich zieht, daß der Strahl im Beharrungsstand nicht mit der zur Fallhöhe gehörigen Geschwindigkeit aus der Oeffnung steigen kann.

Könnte man den Strahl an einem hohen Gebäude z. B. einem Thurm in die Höhe steigen lassen, und auf solche Art seine Höhe unmittelbar messen, so wäre wohl das beste Mittel die zu ieder Strahlhöhe gehörige Ausflußgeschwindigkeit zu bestimmen, dieses, daß man einen kupfernen, von innen wohl polirten Cilinder mit einer am äusern Ende aufwärts gebogenen Röhre verbände, ienen Cilinder mit Wasser anfüllte, das äusere Ende der erwähnten Kommunikationsröhre aber mit einer horizontalen Platte verschlösse, worin sich die verlangte Mündung befände, alsdann aber in dem Cilinder einen Kolben mit einer Stange anbrächte, die durch eine besondere Anstalt mit einer

verlang-

verlangten Geschwindigkeit niedergedruckt werden könnte. Die Verhältnis der Cilinderweite zum Querschnitt des zusammengezogenen Strahls sey nun M:m, und die Geschwindigkeit, womit der Kolben niedergedrückt wird, = c; die, womit das Wasser durch die Oeffnung ströhmt, = C, so wäre $C = \frac{M}{m} \cdot c$ und die dieser Geschwindigkeit zugehörige Höhe $= \frac{C^2}{4.15,625}$ wenn alles in Rhl. Fußen ausgedruckt wird, $= \frac{M^2 c^2}{62,5 . m^2}$. Diese Höhe müßte man nun mit der iedesmal wirklich beobachteten Höhe vergleichen, um aus vielen Beobachtungen die Verhältnis zwischen der Höhe des Strahls und der Höhe, welche der Geschwindigkeit beim Ausfluß zugehört, zu folgern.

In der Lehre von der Anlage der Springwerke hat Hr. B. die wichtige Aufgabe von der Anlage eines Springwerks ohne natürlichen Fall durch zweckmäsige Druckwerke ganz übergangen.

Die Frage ist nämlich: Wenn durch ein doppeltes ein lothrecht springender Strahl durch eine Oeffnung von gegebener Weite auf eine verlangte Höhe getrieben werden soll, die Geschwindigkeit des Kolbens im Cilinder oder Stiefel des Druckwerks zu bestimmen, wenn seine Weite gegeben ist.

Es sei die verlangte Strahlhöhe h, so ist nach obigen Formeln die erfoderliche Fallhöhe $H = h + \frac{h^2}{300}$ und die der Auslaufsgeschwindigkeit zugehörige Höhe $= h$. Wenn nun die Grundfläche des Kolbens W heist, der Querschnitt des zusammengezogenen Strahls w, und die Geschwindigkeit des Kolbens C, so ist die Geschwindigkeit des Ausflusses $= \frac{W}{w} . C$, und die dieser Geschwindigkeit zugehörige Höhe, alles in Rhl. Fußen ausgedruckt,

$$= \frac{W^2 . C^2}{w^2 . 4 . 15{,}625} = \frac{W^2 . C^2}{62{,}5 . w^2}$$

Nun muß aber, wenn der Strahl die Höhe h erreichen soll, die der Geschwindigkeit des Ausflusses im Beharrungsstand zugehörige Höhe $= h$ seyn; man hat also

$$\frac{W^2 . C^2}{62{,}5 . w^2} = h$$

und hieraus folgt

1) $C = \frac{w}{W} \sqrt{62{,}5 . h}$

2) $W = \frac{w}{C} \sqrt{62{,}5 . h}$

3) $h = \frac{W^2 . C^2}{62{,}5 . w^2}$

Diese drei Formeln dienen alle hierher gehörige Formeln zu beantworten.

1. Exem-

1. Exempel. Es sey $w = 4$ Quadratzoll $= \frac{1}{36}$ Quadratfus, $W = 6$ Quadratfus (wo nämlich W die Summe der Grundflächen aller zugleich druckenden Kolben bedeutet) und $h = 50$ Fus, so hat man die Geschwindigkeit der Kolben

$$C = \frac{1}{216}\sqrt{62,5.50} = 0,251 \text{ Fus}$$
$$= 3,01 \text{ Zoll.}$$

Man könnte also zu dem Ende 12 mit einander vereinte Stiefel anlegen, deren ieder 1 Quadratfus weit wäre, und wovon immer die eine Hälfte druckte, indem die andere aufgezogen würde. Alle zusammen müßten ein gemeinschaftliches Ausflußrohr haben, das oben mit einer Platte bedeckt wäre, worin sich die Mündung befände, und das Ausflußrohr müßte zugleich, um den Strahl ununterbrochen in möglichstgleicher Höhe zu erhalten, mit einem proportionirten Windkessel kommuniciren.

2. Exempel. Auch auf Feuerspritzen lassen sich diese Sätze anwenden. Es sey z. B. die Geschwindigkeit, welche man den Arbeitern zumuthen will, $C = 1$ Fus, $w = 2$ Quadratzoll $= \frac{1}{72}$ Quadratfus, und die Spritze soll das Wasser 80 Fus hoch lothrecht in die Höhe treiben, so hat man die Summe der beständig druckenden Kolbenflächen

$$W = \frac{1}{72}\sqrt{62,5.80} = 0,982 \text{ Quadratfus}$$
$$= 141,4 \text{ Quadratzoll.}$$

Doch fällt in die Augen, daß bei Bestimmung der Kraft, welche erfodert wird, das Wasser auf die Höhe h springen zu lassen, die Berechnung so geführt werden muß, als ob das Wasser auf die Höhe $H = h + \frac{h^2}{300}$ gehoben werden sollte, weil eben diese Kraft $= H$ nur die Geschwindigkeit, welche zur Höhe h gehört, hervorbringt.

Ich muß hier noch eines besondern praktischen Nutzens gedenken, den uns vielleicht Springwerke gewähren können.

Wenn nämlich Wasser durch eine Röhrenleitung von bestimmter Weite fortgeleitet werden soll, so erhält man aus dieser Röhrenleitung desto weniger Wasser, ie länger sie fortgeführt wird, wenn sie horizontal liegt oder kein sehr starkes Gefälle hat, wie in der Folge aus Beobachtungen gezeigt wird. Eine Röhrenfahrt von beträchtlicher Länge kann am Ende nur $\frac{1}{10}$ von dem Ausfluß geben, welchen man unmittelbar aus dem Behältnis durch die gleichgroße Oeffnung erhalten würde, wenn sie horizontal oder unter schwachem Gefälle geführt wird. Wollte man also aus einer Wasserstemmung einem z. B. 6000 Fus weit entfernten 30 Fus hohen Rad durch eine an dem Gebürg hingelegte Röhrenfahrt Wasser zuführen, wobei die Röhrenleitung ein schwaches Gefälle erhielte, so ist bekannt, daß eben diese Röhrenleitung im Thal fortgeführt, wo sie einen 30 Fus tiefern Fall erhielte,

weit

weit mehr Wasser fortzuführen vermögend wäre, als an dem Gebürg hin. Nur verlöre man dadurch am Ende den Wasserfall. Wenn man inzwischen am Ende einen Springstock aufsetzte, so könnte das Wasser durch den Sprung auf eine ziemlich beträchtliche Höhe in solcher Quantität erhoben werden, die vielleicht in vielen Fällen der Kraft mehr ersetzte als solche durch den Abgang an der Höhe verlöre. Man könnte z. B. das Wasser vielleicht in doppelter Quantität auf ein 20 Fus hohes Rad treiben, und dadurch beträchtlich gewinnen, weil man nicht die Hälfte der Höhe verloren hätte, die in unserem Beispiel 15 Fus beträgt. Es wäre wohl der Mühe werth, etwas umständlicher hiervon zu handeln, hier aber würde solches zu weitläuftig werden, und ich muß mir vorbehalten, bei einer andern Gelegenheit mehreres davon zu sagen.

§. 589. Hier ließe sich noch folgende kleine Bemerkung beifügen. Wenn H und h Fallhöhe und Strahlhöhe bedeuten, so hat man

$$H = h + \frac{h^2}{300}$$

also $h^2 = 300 . (H - h)$

Schreibt man also y statt h, und x statt H — h, so hat man

$$300 . x = y^2$$

und $x + y = H$

Verzeichnet man also eine Parabel, deren Parameter = 300 ist, so stellt in solcher iede Ordinate die

Höhe des lothrechten Strahls vor, und die Summe dieser Ordinate und ihrer zugehörigen Abscisse die Fallhöhe. Nun läßt sich leicht der Kegel verfertigen (*), aus welchem sich eine solche Parabel schneiden läßt; man hat also ein Mittel, die krumme Linie nach dem Umfang dieses ausgeschnittenen Kegelschnitts durch einen steten Zug zu verzeichnen, und die so verzeichnete Parabel gibt nun ein sehr leichtes Mittel ab, die zu ieder Strahlhöhe gehörige Fallhöhe durch Konstruktion zu bestimmen.

§. 596. Hier vermisse ich in Herrn Bossüts Ausdruck für den kleinsten Durchmesser einer Röhrenleitung zu einem Springwerk eines von den wichtigsten Bestimmungsstücken, das diesem Ausdruck durchaus nicht fehlen darf, nämlich die Länge der Röhrenleitung, indem der höchste Grad von Geschwindigkeit, dessen das Wasser in den Röhren fähig ist, allemal von der Länge der Röhrenleitung mit abhängt, und das Wasser in einer langen Röhrenleitung dem springenden Strahl nicht in der erfoderlichen Quantität, wie bei einer kürzern, nachfolgen kann.

§. 599. Wenn ich Hrn. Bossüt hier richtig verstehe, so ist seine Meinung, daß man aus den verschiedenen Höhen, welche der Strahl aus verschiedenen Mündungen erreiche, ersehen könne, wie sich die

(*) S. meine Erläuterungen der Kästnerischen Analysis endl. Gr.

die Geschwindigkeit des Ausflusses nach der Verschiedenheit der Verhältnis zwischen der Röhrenweite (die hier als die Weite des Gefäßes angesehen werden könne) und der Mündung (die also die Stelle von der Oeffnung des Gefäßes vertrete) abändere, indem die **größere Höhe des Strahls auch eine größere Ausflußgeschwindigkeit voraussetze.** So gut nun dieser letztere Satz mit meiner oben angenommenen Hypothese übereinstimmt, so sehr widerspricht hiermit Herr Bossüt sich selbst (586. am E.) Ueberhaupt aber enthält dieser ganze Satz gar nichts Brauchbares. Eine Röhrenleitung kann für eine gegebene Mündung zu eng seyn, um das Wasser durch letztere mit der größtmöglichen Geschwindigkeit durchzulassen, da hingegen ein ungleich weites Gefäs mit der nämlichen Ausflußöffnung an mehrern Stellen so eng als iene Röhrenleitung seyn und doch das Wasser mit der größtmöglichen Geschwindigkeit durch die Oeffnung durchlassen kann.

§. 601. Hier hat sich Herr Bossüt weder bestimmt noch richtig genug ausgedruckt. Die Behältnisöffnung kann sehr viel enger als die Röhrenweite seyn, und doch der Strahl seine volle Höhe erreichen. Auch kann die ganze Röhrenleitung beständig ganz mit Wasser angefüllt seyn, und dennoch der Strahl seine erfoderliche Höhe bei weitem nicht erreichen.

I. Es sey z. B. CO (fig. 31.) eine steil herabgehende Röhrenleitung, und die Höhe CO = 27 Fus,

die Behältnisöffnung C = 0,1 Quadratfus, die übrige Röhrenweite = 1 Quadratfus, die Mündung = 0,05 Quadratfus, die Höhe BC = 3 Fus, so verhält sich (die Atmosphäre beiseitgesetzt) die Wassermenge, welche vermög der ganzen Wasserhöhe OR durch die Mündung O herausströhmen kann, zu der, welche durch die Oeffnung C nachfolgen kann,

wie $0,05 \cdot \sqrt{(27+3)} : 0,1 \cdot \sqrt{3}$

also letztere kleiner, und es könnte also nicht Wasser genug nachfließen, um die ganze Wassermasse ABCO zusammenhängend zu erhalten; die Röhre CO könnte nicht voll sondern nur bis an einen gewissen Punkt D angefüllt erhalten werden, so daß ohngefähr

$0,05 \cdot \sqrt{}$ (lothrechte Höhe OD) $= 0,1 \cdot \sqrt{3}$

oder $OD = \frac{0,01 \cdot 3}{0,0025} = \frac{300}{25} = 12$ Fus würde.

also der Strahl beiläufig nur 12 Fus hoch steigen könnte.

Allein so kann es sich in der Atmosphäre nicht verhalten; denn wegen der über D bis C sich erstrekkenden Leere könnte die Wassersäule DO bei O nicht auslaufen, weil die Atmosphäre bei O entgegendruckt; überdas wirkt sie auch auf AB und im Augenblick der Trennung des Wassers unter C würde also das Wasser gegen C nicht nur von der Wassersäule BC = 3 Fus, sondern auch von der Atmosphäre gedruckt, und in dieser Rücksicht ist, wenn die Atmosphäre so stark als eine 32 Fus hohe Wassersäule druckt, das Gefäs

ABC

ABC vermögend, eine Wassersäule durch C zu treiben, die sich zum Ausfluß O der Höhe RO gemäs verhält, beinahe wie

$$0,1 \cdot \sqrt{(32+3)} : 0,05 \cdot \sqrt{(27+3)}$$

Die Wassersäule bleibt also zusammenhängend, und der Strahl erreicht seine ganze Höhe, die der Fallhöhe RO zugehört.

II. Wäre aber z. B. die lothrechte Höhe CO = 61 Fus, und C = O = 0,05; so wäre die erwähnte Verhältnis nach sonstiger Rechnungsart

$$0,05 \cdot \sqrt{(32+3)} : 0,05 \cdot \sqrt{(61+3)} = \sqrt{35} : \sqrt{64}$$

Nach meiner Berechnungsart aber wäre die der Geschwindigkeit des Ausflusses bei der Fallhöhe von 64 Fus nach der Tafel (605.) zugehörige Höhe = 54 Fus, also die gedachte Verhältnis des Ausflusses durch C zu dem durch O

$$\sqrt{35} : \sqrt{54} = 591 : 735$$

Es kann also das Wasser nicht zusammenhängend bleiben, weil dem Ausfluß nicht Wasser genug nachfolgen kann. Man setze, das Wasser falle unterhalb C bis an D herab, und DO = H, so wäre

$$\sqrt{(32+3)} = \sqrt{h}; \text{ also } h = 35$$

In diesem Fall erreichte also der Strahl bei der Fallhöhe von 64 Fus nur die Höhe von 35 Fus.

Die Bestimmung des Werths von H läßt sich hier nicht nach der Formel $H = h + \frac{h^2}{300}$ bestimmen.

Man

Man fände nämlich hierdurch $H = 35 + 4{,}08 = 39{,}08$ Fus. Da aber die Geschwindigkeit des durch C herab auf die Oberfläche bei D sprützenden Wassers keinen beträchtlichen Effekt hat, und die zum Ausfluß bei O gehörige Geschwindigkeit also nur beiläufig der Höhe $39 - 32$ (wegen des Gegendrucks der Atmosphäre) $= 7$ Fus zugehören müßte, so sieht man, daß H weit größer als 39,08 Fus seyn müsse.

Wollte man $H = h + \frac{h^2}{300} + 32 = 71$ Fus setzen, so erhielte man eine Höhe, die größer wäre, als die gesammte Wasserhöhe OR, und so lang also nicht der ganze Raum von D bis C mit Wasser angefüllt wäre, könnte der Strahl nicht die Höhe von 35 Fus erreichen, weil er nicht den Druck der Atmosphäre von oben, dagegen aber den Gegendruck derselben von unten litte.

Diese Schwierigkeit läßt sich so heben. Die ganze Röhre muß bis an C angefüllt bleiben, doch so, daß sich der Druck aus dem Behältnis nicht mit dem Druck der Säule CD vereinigt. Das untere Stück der Röhre bis auf die Höhe von 32 Fus hebt den Gegendruck der Atmosphäre auf; das noch übrige obere Stück (hier 31 Fus hoch) übt also noch den ganzen seiner Höhe gemäßen Druck frei aus; über solchem befindet sich nun noch das Wasser im Gefäs und die darauf druckende Atmosphäre zusammen = dem Druck einer Wassersäule von der Höhe $3 + 32 = 35$ Fus.

Dieses

Dieses Wasser aus dem Gefäs wird aber vermög des 35 Fus hohen Drucks als ein Strahl durch die Oefnung C durchgepreßt, so daß dieser Strahl eigentlich nicht auf die Säule in der Röhre druckt, sondern gegen ihre Theile stößt, indem er zwischen solchen durchschießt. Es ließe sich gedenken, daß er dadurch den Druck der Säule gar nicht vergrößerte, aber dann könnte die Wassersäule in der Röhre nicht so viel Wasser unter sich wegdrucken, als iener Strahl beizuführen strebte, und da gleichwohl die Gewalt des Strahls der Höhe des Gefäßes 32 + BC zugehört, so müßte er anfangen, den Druck der Säule in der Röhre zu vergrößern, bis er gleichfalls der Höhe 32 + BC zugehörte oder bis solcher eben so viel Wasser unter sich wegdruckte, als das Wasser aus dem Gefäs zuführt. In unserem Exempel wird also der Druck der 31 Fus hohen Wassersäule, die zunächst unter der Behältnisöfnung liegt, durch den herabschießenden Strahl so weit vergrößert werden, als wann ihre Höhe um 4 Fus vergrößert würde.

Eigentlich ist also das Wasser im Behältnis und der Röhre in solchen Fällen keine zusammenhängende Masse (bei der sich nämlich der Druck gleichförmig fortpflanzte), sondern es sind diese beiden Wasser wirklich als isolirt zu betrachten, aber so daß der Druck der Wassersäule in der Röhre durch den Strohm aus dem Behältnis um so viel vergrößert wird, als der Differenz beider Höhen von dem Wasser im Behältnis

und

und dem in der Röhre gemäs ist. Und man sieht, daß in solchen Fällen die Höhe des Strahls gar nicht mit der Wasserhöhe zusammenhängt.

Hiernach muß auch meine Anmerkung zu 265 eigentlich geläutert werden, daß nämlich, was ich dort eine Leere genennt habe, nicht allemal ein wirklich entstehender leerer Raum ist, sondern nur die Wirkung im Ausfluß so erfolgt, als ob diese Leere wirklich vorhanden wäre.

Hingegen kann auch in Fällen, wo die Behältnisöfnung so groß als die Röhrenweite oder noch größer ist, die Strahlhöhe sehr weit von der Behältnißhöhe abweichen, wie aus der Anmerk. zu 265. zu sehen ist.

VIII. Kap. Enthält trefliche Versuche zur Prüfung der Theorie.

Der sonderbare Umstand, daß die größten Mathematikverständigen auf den Einfluß der Atmosphäre bei Gefäßen mit Röhren nicht Acht gehabt haben, hat ihnen die Erklärung der Beschleunigung des aus dem Gefäs in die Röhre schießenden Wassers zu einer unauflösbaren Schwierigkeit gemacht, und hat unter den Vielen selbst Hrn. Bossüt, der die flüßigen Massen sonst so gut kennt, verleitet, diese Schwierigkeit nicht etwa durch die physische Beschaffenheit der Wassertheilgen, sondern durch eine Voraussetzung zu heben, die gerade der Natur der flüßigen Massen entgegen

gegen ist. Hr. Bossüt behauptet also nichts geringeres als dieses, wenn die Röhre MQ fig. 36.) z. B. 1 Fus lang sey, so hänge nicht nur Schichte mit Schichte von Q bis M vermög ihrer natürlichen zusammenhängenden Kraft so stark zusammen, daß sie alle zusammen eine einzige Masse ausmachen, sondern diese zusammengekettete Wassersäule hänge auch mit dem Wasser in MN vermög der natürlichen Anhänglichkeit so zusammen, als wenn sie hier in MN beständig wie eine Kette an einem Kloben befestigt wäre, und auf solche Art werde also das Wasser durch MN, wenn MQ nicht sehr groß ist, grade so durchgetrieben, als ob die Wasserschichte in MN beständig den Druck einer Wassersäule von der Höhe AD + MQ litte. Ich glaube von dieser Methode, Ketten aus Wasser zu schmieden und mittelst Wasserkloben an Wasser aufzuhängen kein Wort weiter sagen zu dörfen, als daß sie zum Beweis dient, wie sehr der größte menschliche Verstand der Gefahr zu irren, grob zu irren, ausgesetzt ist, und wie groß der Hang mancher Physiker ist, eine ihnen unbegreifliche Erscheinung lieber durch noch größere Unbegreiflichkeiten erklären zu wollen, als sie ganz unerklärt zu lassen. Die einzige Betrachtung des atmosphärischen Drucks hebt alle Schwierigkeit mit einmal, und überzeugt, daß die Geschwindigkeit durch MN auch dann durch das Wasser in der Röhre beschleunigt werden müsse, wann die Wassertheilgen statt ihres unendlich kleinen Zusammenhangs

gar

gar keinen hätten, und daß vielmehr dieser allenfallsige Zusammenhang iener Beschleunigung noch hinderlich fallen müsse, der aber ganz unbedeutend ist.

Es läßt sich, den Druck der Atmosphäre erwogen, gegen die Behauptung, daß die Geschwindigkeit und also auch die Ausflußmenge selbsten sich wie die Quadratwurzel aus der Höhe von der Oberfläche AB bis zur Mündung Q verhalte, nicht das Geringste einwenden, und es läßt sich bei dem trefflichen Apparat und der großen Menge von Versuchen, die Hr. Bossüt angestellt hat, zuverläßig vermuthen, daß er für MQ auch Röhren von mehrern Fußen gebraucht haben werde, ohne einen andern Erfolg gefunden zu haben. Nur für Höhen, wo MQ > 32 ist, hat die fernere Verlängerung keinen Einfluß mehr auf die Vergrößerung der Ausflußmenge, so wie im leeren Raum die Röhre bei ieder Länge so wenig auf den Ausfluß wirken würde, wie der Heber, dessen Wirkung ehemals von manchen Naturforschern grade so wie hier das Auslaufen von Hrn. Bossüt erklärt wurde, bis der Versuch im leeren Raum den Glauben an eine bessere Theorie stärkte. Eine kleine Ueberlegung zeigt, daß in unserem Fall in der That nur Wirkung eines Hebers eintritt. Aber so entschieden die Kraft ist, welche hierbei eigentlich wirkt, so wenig ist es in der Ausübung zu erwarten, daß besonders bei schief liegenden Röhrenleitungen von beträchtlicher Länge der Ausfluß in ieder Stelle der Höhe von der Oberfläche im

Behält-

Behältnis bis zu dieser Stelle herab zugehören oder auch nur der Quadratwurzel aus dieser Höhe proportional seyn werde. Das unordentliche Aneinanderstoßen der Wassertheilgen unter sich und an die Röhrenwand, oder was Hr. Bossüt immer die Reibung nennt, ist iener Kraft, welche aus dem Druck der Wassersäule in der Röhre entsteht, entgegen, und ändert die theoretische Verhältnis ab. Nimmt man z. B. von einer Röhrenfahrt verschiedene Längen L, l, und setzt die zugehörigen wirklichen Ausflüsse = M, m; so wäre für die waagrechte Lage, nach Herrn Bossüts Beobachtungen, beiläufig

$$M : m = \sqrt{l} : \sqrt{L}$$

und wenn die Wasserhöhen im Behältnis verschieden, nämlich H, h, wären,

$$M : m = \sqrt{lH} : \sqrt{Lh}.$$

Nun habe die Röhre eine solche Lage, daß sich ihre Höhe zu ihrer Länge in ieder Stelle verhalte, wie b zu B, so gehören zu den Längen l, L die Höhen $\frac{b}{B} \cdot l$, $\frac{b}{B} L$, und die Höhe des Wasserdrucks wird also in beiden Fällen statt H, h nunmehr $H + \frac{b}{B} L$, $h + \frac{b}{B} l$, also

$$M : m = \sqrt{l.\left(H + \frac{b}{B} L\right)} : \sqrt{L.\left(h + \frac{b}{B} l\right)}$$

oder, H = h gesetzt,

$$M : m = \sqrt{l.\left(h + \frac{b}{B} L\right)} : \sqrt{L.\left(h + \frac{b}{B} l\right)}$$

Schon hieraus ersieht man, daß die Ausflüsse nicht nach Verhältnis der Quadratwurzeln aus den Wasserhöhen, die hier $h + \frac{b}{B} \cdot L$, $h + \frac{b}{B} \cdot l$ sind, fortgehen, sondern in einer viel geringern.

Es sey nun z. B. $l = 59$ Fus, $L = 177$, $h = \frac{5}{6}$, $\frac{b}{B} = \frac{1}{9}$, so erhält man die Verhältnis der Ausflußmengen aus der langen und der kurzen Röhre

$$M : m = \sqrt{59 \cdot 19{,}5} : \sqrt{177 \cdot 7{,}39}$$

beinahe $= 17 : 18$

Und so müßte also die lange Röhre hier $\frac{1}{18}$ weniger geben, als die kurze, wenn man mit dem Satz, daß sich die Ausflußmengen verkehrt, wie die Quadratwurzeln aus den Längen verhalten, noch den verbindet, daß die Höhe des Wasserdrucks bei M N (fig. 37.) der Höhe des Wasserspiegels über der Ausflußmündung der Röhre gleich ist.

Nun muß man aber noch bedenken, daß der Widerstand nicht blos eine Funktion der Länge, sondern auch eine Funktion des Wasserdrucks ist, oder vielmehr der Ueberschuß der Kraft über den Widerstand, so daß solcher nach Proportion bei großen Höhen etwas größer ist als bei kleinen. Die Resultate (615.) beweisen solches. Weil nun bei der langen Röhre die ganze Höhe des Drucks $= 19{,}5$ Fus, und bei der kurzen $= 7{,}39$ Fus ist, so erhellet, daß die Verhältnis der

Aus-

Ausflußmengen der Verhältnis der Gleichheit noch näher kommen müsse als die 17 : 18.

Man könnte beiläufig, nach 615 zu schließen, zu 17 noch die Zahl $17. \sqrt{\left(\frac{19,5}{7,39}\right)} \over 24 = 1,14$ setzen, da man dann statt der vorigen Verhältnis 17 : 18 diese 17 + 1,14 : 18 = 18,14 : 18 erhielte.

Man dürfte also aus diesem Resultat, wonach die lange Täucherfahrt etwa nur $\frac{1}{158}$ mehr als die kurze geben müßte, überhaupt schließen, daß beide Röhrenfahrten in der Ausübung ohngefähr gleichviel geben werden.

Und wirklich hat Hr. B. aus unmittelbaren Versuchen (627.) gefunden, daß beide Röhrenfahrten gleichviel geben, die lange nämlich $\frac{1}{434}$ weniger als die kurze, ein Unterschied, der hier gar nicht geachtet werden kann, und der wirklich nichts weiter sagt, als daß in der Ausübung beide Röhrenfahrten wirklich einerlei Wassermenge fortführen.

Es erhellet also, daß der Satz, welchen Hr. B. hier (624.) als unrichtig verwirft, nicht nur der Theorie völlig gemäs ist, sondern auch, richtig angewendet und mit dem Widerstand, der sich in horizontalen Röhren findet, ordentlich verglichen auf Resultate führt, die der Erfahrung völlig entsprechen.

Nur Eins muß ich hierüber noch anmerken. Der Druck der Atmosphäre sey nämlich einer Wassersäule

von der Höhe k gleich, und die Wassertiefe im Behältnis = h, so kann durch Fortsetzung der Röhrenfahrt der Druck auf die Einflußmündung MN (fig. 37.) nicht höher wachsen, als bis er einer Wassersäule von der Höhe h + k gleich wird, wo ich statt k zuweilen 32 Fus schreibe, ob dieses gleich nicht allgemein ist. Man darf also die Formel

$$M : m = \sqrt{l.\left(h + \frac{b}{B} L\right)} : \sqrt{L.\left(h + \frac{b}{B} l\right)}$$

nicht weiter gebrauchen, als bis auf $\frac{b}{B} L = x$ oder $L = \frac{B}{b} x$; demnach bei voriger Berechnung weiter nicht als bis auf $L = 9k$ oder beiläufig 288 Fus, wo sich nämlich L auf die längste Röhrenfahrt bezieht.

Nimmt nun so lange nicht $L > \frac{B}{b} k$ ist, die Ausflußmenge mit der Vergrößerung der Länge der Röhrenfahrt nicht zu oder gar noch etwas ab, so muß sie umsovielmehr abnehmen, wenn einmal $L = \frac{B}{b} k$ geworden ist und noch ferner verlängert wird, weil von nun an der Druck des Wassers auf MN unverändert bleibt, der Widerstand aber mit Verlängerung der Röhren zunimmt.

Ich kann daher dem Schluß des Hrn. B. (629.) nicht beitreten, zumal da sich der ganze Erfolg ändert, sobald das Behältnis beträchtlich höher als bei Herrn B. Versuchen mit Wasser angefüllt wird. Nimmt

aber

aber die Ausflußmenge mit Verlängerung der Röhren bis auf $L = \frac{B}{b} k$ immer zu, so kann durch fernere Verlängerung der Röhren die Ausflußmenge um deswillen noch vergrößert werden, weil nun die Masse in der Röhre nicht mehr als blos träg anzusehen ist, sondern nun selbst vermög ihrer relativen Schwere schon eine gewisse Geschwindigkeit längst der schiefen Ebene herab anzunehmen vermag, also weniger als vorher dem durch die Einflußöfnung dringenden Wasser aus dem Behältnis widersteht, so daß dieses Wasser mit größerer Geschwindigkeit einschießen kann. Doch kann auch diese Vergrößerung der Wassermenge höchstens fortgehen, bis sie, die Oefnung $= w$ gesetzt, beiläufig

$$= \tfrac{13}{16} \cdot w \cdot 2\sqrt{15} \cdot (h + k)$$

wird. Aber nähere Bestimmungen anzugeben, unter welchen Umständen und nach welchem Gesetz in diesem Fall die Wassermenge mit Verlängerung der Röhren noch zunimmt, vermag die Theorie nicht.

IX. Kap. Was uns hier Herr Bossüt mittheilt, ist von größter Wichtigkeit, und verdient den größten Dank. Wir werden dadurch in den Stand gesetzt, Röhrenleitungen von beträchtlicher Länge mit ziemlicher und, wenn man vorsichtig genug ist, mit völliger Sicherheit zweckmäßig anzulegen. Hier bemerke ich noch, daß man dabei immer am sichersten geht, wenn man bei den Berechnungen solche Erfahrungen zum Grunde legt, wobei die Höhe des Was-

sers im Behältnis über der Einflußmündung in die Röhren und der Durchmesser der Röhren geringer ist als die zu gebrauchenden, weil bei dieser beiden Stücke Vergrößerung die von den Hindernissen der Röhrenwände abhängende Verminderung des Ausflusses verhältnismäßig kleiner wird. So kann man z. B. von meiner dabei erwähnten 7 zölligen Röhrenfahrt auf 8, 9, 10 zöllige u. s. f. bei welchen die Höhe des Wassers im Behältnis über der Einflußmündung 4, 5, 6 Fus u. s. f. beträgt, sicher schließen, nicht so sicher aber von 6, 5, 4 u. s. f. zölligen Röhrenfahrten bei Behältnistiefen von 3, 2, 1 Fus u. s. f.

Endlich muß ich noch erinnern, was man auch in meinem **Versuch einer neuen Theorie hydrodynamischer und pyrometrischer Grundlehren** findet, daß diese Lehren auch bei Druckwerken ihre Anwendung finden.

Ich würde dabei so verfahren. Die Höhe, zu der das Wasser erhoben werden soll, vom mittlern Kolbenstand angerechnet, heiße α; des Kolbens Geschwindigkeit c, und seine Grundfläche K, die Weite der Steigröhre k, so ist die Geschwindigkeit des am Ende auslaufenden Wassers $= \frac{K}{k} \cdot c$, wozu die Höhe $\frac{\left(\frac{K}{k} c\right)^2}{4g}$ ($g = 15{,}625$ in Rhl. Fußen verstanden) $= \frac{K^2 c^2}{4gk^2}$ gehört; es kann also der Lauf des Wassers durch

die

die Steigröhre so angesehen werden, als wenn die Steigröhre eine an einem Behältnis angebrachte Röhrenleitung wäre, für welche die ganze Wasserhöhe (in dem Sinne wie hier im Buch genommen) $= \frac{K^2 c^2}{4gk^2}$ wäre, und die der Bewegung des Wassers keine Hindernis entgegensetzte.

Nun sehe man aber aus Vergleichung mit der in diesem Kap. mitgetheilten Tafel nach, der wievielte Theil von der Ausflußmenge, welche bei Entfernung aller Hindernisse ausfließen müßte, bei der gegebenen Länge und Weite der Röhrenfahrt und der gegebenen Wasserhöhe wegen der Hindernisse der Röhrenwände wirklich nur abfließen kann. Dieser Theil sey z. B. $\frac{1}{n}$tel; so heißt dieses, man würde bei der Wasserhöhe $= \frac{K^2 c^2}{4gk^2}$ nur die Wassermenge $= \frac{K.c}{n}$ erhalten; und um also den Abfluß $= K.c$ zu erhalten, müßte die Wasserhöhe $= n^2. \frac{K^2 c^2}{4gk^2}$ seyn, oder sie müßte noch um eine Höhe vergrößert werden, die $= (n^2 - 1). \frac{K^2 c^2}{4gk^2}$ wäre. Dieses wäre also die Kraft, die zur Ueberwindung der von den Röhrenwänden herrührenden Hindernisse angewendet werden müßte.

Ist also die, ohne hierauf Rücksicht zu nehmen, berechnete Kraft zur Betreibung des Kolbens einer Wassersäule von der Höhe H gleich, so wird wegen

der erwähnten Hindernisse eine Kraft erfodert, die einer Wassersäule gleich ist von der Höhe

$$H + (n^2 - 1).\frac{K^2 c^2}{4gk^2}$$

Exempel. Es sey die Länge der Steigröhre 297 Toisen, ihre lothrechte Höhe $\alpha = 160$ Fus, $H = 280$ Fus, c für eine Sek. $= \frac{1}{2}$ Fus, K oder die Summe der beständig druckenden Kolbenflächen = einer Kreisfläche von 1 Fus im Durchmesser, k = einer Kreisfläche von $\frac{1}{4}$ Fus im Durchmesser, also $\frac{K}{k} = 9$, und $\frac{K^2}{k^2} = 81$. Nun findet man in der Tafel dieses Kapitels, daß durch eine 297 Toisen lange Röhrenfahrt nur etwa $\frac{1}{2\frac{1}{7}}$ soviel Wasser ablauft, als bei gleicher Wasserhöhe aus einer ebensoweiten kurzen Ansatzröhre abfließen würde; man hat also hier

$$n = 27$$

$$n^2 = 729$$

Demnach $(n^2 - 1).\frac{K^2 c^2}{4gk^2} = 728.\frac{81.\frac{1}{4}}{62,5}$ beinahe $= 236$ Fus. Und die ganze erfoderliche Kraft also einer Wassersäule gleich

von der Höhe $280 + 236 = 516$ Fus

Machte man hingegen $k = K$, so erhielte man

$$(n^2 - 1).\frac{K^2 c^2}{4gk^2} = 728.\frac{\frac{1}{4}}{62,5} = 2,9 \text{ Fus}$$

also die ganze erfoderliche Kraft = einer Wassersäule von der Höhe $H + 2,9$ Fus.

Man

Man weiß schon aus der sonst bekannten Formel für die zur Treibung eines Druckkolbens erfoderliche Kraft, daß diese Kraft desto größer seyn müsse, ie enger und ie länger die Steigröhre bei einerlei lothrechter Höhe genommen wird. Aus gegenwärtiger Berechnung aber, die noch zur Verbesserung der blos theoretischen Formel dient, erhellet dieses noch weit mehr, daß nämlich der Nachtheil, welcher aus Vergrößerung der Steigröhrenlänge und Verminderung ihrer Weite erfolgt, noch weit beträchtlicher ist, als ihn die Theorie der Druckwerke angibt.

Verbindet man, was ich hier gesagt habe, mit denen von mir im **Versuch einer neuen Theorie** &c. vorgetragenen Lehren, so hat man für die Theorie der Druckwerke eine sehr leichte und ungleich richtigere Theorie als man in irgend einer hydraulischen Schrift antrifft. Und auf diesem Weg darf man in der That hoffen, auch die Hydraulik nach und nach zu einer solchen Vollkommenheit zu erheben, daß Jemand, der nach ihren Vorschriften verfährt, nicht mehr, wie bisher, irre geführt zu werden, oder, mich eines Ausdrucks aus einem Brief von Herrn Hofr. Kästner zu bedienen, nicht mehr **die Vernunft unter den Gehorsam der Rechnung gefangen nehmen zu müssen** befürchten darf.

X. Kap. Sehr gut und eine treffliche Anweisung, wie man sich bei Führung der Wasserleitungen

durch Gebürge nach verlangten Richtungen zu verhalten habe.

XI. Kap. Enthält mehrere nützliche Versuche, doch ist dieses Kap. überhaupt nicht lehrreich genug abgefaßt. Die Tafel (694.) ist die nackte Geburt empirischer Weisheit, wenn auch gleich zugegeben wird, daß nicht blos der Druck, welchen die Röhrenwände auszuhalten haben, sondern auch andere von Herrn B. erwähnte Umstände bei Bestimmung der Wanddicke in Betrachtung gezogen werden müssen. Wenn z. B. die Empiriker zugeben, daß die Dicke von 1 Linie bei einer 1 zölligen eisernen Röhrenfahrt hinlänglich sey, außer dem Wasserdruck allen übrigen zum Ruin der Röhren wirkenden Vorfällen zu widerstehen, so muß gewiß die Zugabe der Röhrendicke, welche die Empiriker wegen der äußern Zernagung der Röhrenwand für nöthig halten, noch keine halbe Linie betragen; diese Zugabe muß aber bei weiten wie bei engen Röhren seyn, also bedarf die 12 zöllige Röhrenwand auch in Rücksicht auf diesen Umstand keiner größern Zugabe als $\frac{1}{2}$ Linie zu ihrer Wanddicke; und wenn nun übrigens eine eiserne $3\frac{1}{2}$ Linien dicke Wand einer 12 zölligen Röhrenfahrt schon einen dreimal so großen Widerstand zu leisten vermag, als der Druck des horizontal- oder gar abfallend fortgeleiteten Wassers erfodert; warum wollte man statt einer 4 Linien dicke nach dieser Tafel eine 8 linigte Wanddicke nehmen, und dadurch die Kosten unmäßig vergrößern? Es ist überdas in der Ausübung allemal

nöthig,

nöthig, auf die Wasserhöhe und Länge der Röhrenleitung, von deren Vergrößerung zugleich die Vergrösserung des Wasserdrucks abhängt, gehörige Rücksicht zu nehmen. Wenn z. B. der Empiriker selbsten behauptet, daß zu einer 12000 Fus langen 12 zölligen Röhrenleitung bei einer Wasserhöhe von 9 Fußen eine Wanddicke von 8 Linien hinreichend sey; warum sollte man nun bei einer 600 Fus langen 12 zölligen Röhrenleitung unter der Wasserhöhe von 3 Fußen die nämliche Wanddicke nehmen? Also hat eine solche Tafel offenbar nicht den geringsten Nutzen.

Es bedarf aber überdas diese Lehre des Herrn B. noch einer Hauptverbesserung.

§. 695. Herr B. glaubt, der Seitendruck des in horizontalen Röhren fortfließenden und am Ende in voller Röhrenweite abfließenden Wassers lasse sich aus Vergleichung der Geschwindigkeit, welche das Wasser in den Röhren wirklich hat, und der, welche es vermög der Wasserhöhe eigentlich haben sollte, bestimmen; wann also die der wirklichen Geschwindigkeit zugehörige Höhe = a und die wirkliche Wasserhöhe = h, die dem wirklichen Seitendruck zugehörige Höhe aber = H wäre, so sey

$$H = h - a$$

Hiermit stimmen auch alle Lehrer der Hydrodynamik überein, und dennoch ist dieser Satz falsch. Die Folge daraus beweißt solches augenscheinlich. Es ist nämlich die horizontale Geschwindigkeit des Wassers

in

in der gleichweiten Röhre durchaus gleich groß, also hat für alle Stellen der Röhrenleitung h — a einerlei Werth, und es müßte also der Druck des Wassers gegen die Röhrenwände an allen Stellen der Röhrenleitung gleich groß seyn, welches ein offenbarer Irrthum ist. Man mache an einer 1000 Fus langen horizontalen Röhrenleitung, deren Axe unter dem Wasserspiegel des Behältnisses z. B. 4 Fus tief liegt, vom Anfang an nach dem Ende zu nach und nach mehrere lothrechte kleine Oefnungen, wodurch das Wasser in die Höhe springt, indeß der Abfluß am Ende immer fortdauert; so oft man die Höhe eines Strahls gemessen hat, spunte man die Oefnung wieder zu und mache ein neues Loch weiter abwärts u. s. f. so daß man die iedesmalige Strahlhöhe messe. Je näher man dem Ausflußende der Röhrenleitung kommt, desto niedriger findet man die Höhe des Strahls und desto geringer ist also nothwendig der Druck, den das Wasser auf die Wand an solcher Stelle ausübt.

Es ist nicht einmal nöthig, sich hiervon erst durch besondere Versuche zu überzeugen, da die erwähnte Erscheinung aus der Natur der Sache nothwendig so erfolgen muß. Man weiß nämlich schon aus der Erfahrung, daß der Widerstand, den die in der Röhrenleitung vorausfließende Wassersäule der nachfolgenden in ihrer Bewegung entgegensetzt, desto größer ist, ie länger die vorausfließende ist; also muß iede Schichte desto weniger Hindernis in ihrer Bewegung

finden,

finden, ie näher sie der Ausflußöfnung liegt; aber grade um so viel eine dem Ende näher liegende Schichte weniger Hindernis in ihrer Bewegung findet, als eine weiter zurückliegende, um so viel mehr Hindernis hat die an iene andruckende hintere Wassersäule als die zunächstvorhergehende um eine Schichte kürzere Wassersäule, d. i. um so viel die dem Ende näher liegenden Schichten weniger Hindernis in ihrer Bewegung finden, um so viel ist auch die auf ihre Bewegung verwendete Kraft geringer als bei weiter vom Ende liegenden Schichten. Wirkt z. B. die Hindernis, welche der dem Ende näher liegenden Schichte entgegengesetzt ist, so viel als der Gegendruck einer 6 Linien hohen Wassersäule, bei einer weiter rückwärts liegenden Schichte aber als eine 15 Linien hohe Wassersäule, so entgeht der zur Bewegung verwendeten Kraft zwischen beiden Schichten so viel als der Druck einer 15 — 6 = 9 Linien hohen Wassersäule, und auf den hintern Querschnitt wird also der Druck einer Wassersäule verwendet, die um 9 Linien höher ist, als bei dem vordern Querschnitt; dagegen wirkt der Bewegung des hintern Querschnitts der Druck einer Wassersäule entgegen, die um 9 Linien größer ist als bei dem vordern, und beide bewegen sich daher mit gleicher Geschwindigkeit; nur ist bei dem hintern der Druck und Gegendruck und folglich auch die daher gegen die Wand entstehende Pressung um die Höhe einer 9 Linien hohen Wassersäule größer als bei dem vordern.

Hier-

Hieraus erhellet also, daß der Ausdruck $H = h - a$ für keine einzige Stelle der Röhrenleitung richtig ist, daß er aber der Wahrheit desto näher kommen müsse, ie näher der auf die Bewegung einer Schichte verwendete Druck der wirklichen Wasserhöhe zugehört, also ie näher die Schichte dem Anfang der Röhrenleitung liegt, welches der Fall bei denen vom Hrn. Bossüt in diesem Kapitel mitgetheilten Beobachtungen ist.

Die Ausflußmenge, welche, wenn keine Hindernisse vorhanden wären, ausfließen würde, heiße M; aber wegen der Hindernis der Röhrenwände fließe nur die Wassermenge N in der Röhrenlänge l ab, so will ich dieses so ausdrucken

$$N = \frac{1}{(Fl)} \cdot M$$

wo (Fl) überhaupt irgend eine durch die Erfahrung zu bestimmende Funktion von l bedeutet; die Höhe des Drucks, welche auf die Bewegung eines ieden Querschnitts in der Entfernung l vom Anfang der Röhrenleitung beim Behältnis verwendet wird, heise δ, so hat man

$$N : M = \sqrt{\delta} : \sqrt{h}$$

also

$$\delta = \frac{N^2 h}{M^2} = \frac{M^2 l^2 h}{(Fl)^2 M^2} = \frac{l^2}{(Fl)^2} \cdot h$$

Dieses muß als die in ieder Entfernung l vom Behältnis an druckende Wasserhöhe angesehen und

statt

statt des obigen h gesetzt werden; dadurch erhält man also

statt $H = h - a$

diese Gleichung

$$H = \delta - a = \frac{l^2}{(Fl)^2} \cdot h - a \quad (b$$

Für ein sehr kleines l ist bekanntlich $N = M$ also $l = (Fl)$, mithin $H = h - a$; sobald aber l nur einige Länge z. B. nur 100 Fuße bedeutet, ist $\frac{l^2}{(Fl)^2}$ schon ein kleiner Bruch. Wenn l nur nicht sehr klein, z. B. nur > 8 Fus ist, so kann man ohngefähr $N = \left(\sqrt{\frac{8}{l}}\right) \cdot M$ setzen oder $\frac{l}{(Fl)} = \sqrt{\frac{8}{l}}$ also $H = \frac{8}{l} h - a$. Für ein beträchtliches l ist die wirkende Wasserhöhe $\frac{8}{l} h$ schon sehr klein, so daß sie schon nahe an den Werth von a grenzt; daher der Druck auf die Wand in solchem Fall sehr unbedeutend ausfallen muß, wenn gleich das übrige Stück der Röhrenleitung noch sehr lang ist.

Anwendung auf Druckwerke.

Vergleicht man dieses mit der Anmerk. zum IX. Kap. so erhellet, daß das Wasser eben so durch die Steigröhre des Druckwerks ströhmt als ob solche horizontal gelegt mit einem Behältnis in der Höhe $n^2 \cdot \frac{K^2 c^2}{4g k^2}$ verbunden wäre. Diese Höhe statt h, und

$\frac{K^2 c^2}{4 g k^2}$ statt a in (B) gesetzt, gibt für iede Schichte, welche, nach den Krümmungen der Steigröhre gemessen, in der Entfernung l von dem Stiefel liegt, den Druck, welchen die Steigröhre auszuhalten hätte, wenn sie horizontal läge.

$$H = \frac{K^2 c^2}{4 g k^2} \left(\left(\frac{1}{(Fl)} \right)^2 \cdot n^2 - 1 \right)$$

Wenn aber x die lothrechte Höhe einer ieden Schichte über dem mittlern Kolbenstand bedeutet, und α die ganze lothrechte Höhe der ganzen Steigröhre ist, so muß zu der berechneten von dem Widerstand der Wände herrührenden Höhe noch $\alpha - x$ addirt werden, und dann erhält man

$$H = \alpha - x + \left(\frac{l^2}{(Fl)^2} \cdot n^2 - 1 \right) \cdot \frac{K^2 c^2}{4 g k^2} \quad (\mathfrak{X}$$

wo n eine für die ganze Länge der Steigröhre bestimmte Zahl, hingegen $\frac{1}{(Fl)}$ für iedes von dem Stiefel an genommene Stück derselben, welches zum iedesmaligen x gehört, besonders bestimmt werden, also nicht $\frac{(Fl)}{l}$ mit n für einerlei gehalten werden muß.

Für $x = \alpha$ wird l die ganze Röhrenlänge also in diesem Fall $n = \frac{(Fl)}{l}$ und

$$H = \alpha - \alpha + \left(\left(\frac{1}{Fl} \right)^2 \cdot \left(\frac{Fl}{l} \right)^2 - 1 \right) \cdot \frac{K^2 c^2}{4 g k^2}$$

$$= 0.$$

wie sich gehört.

Für

Für die unterste Stelle der Steigröhre bleibt $(Fl) = l$, oder $\frac{l}{(Fl)} = 1$ und $x = 0$, also

$$H = \alpha + (n^2 - 1) \cdot \frac{K^2 c^2}{4g k^2}$$

Behält man das in der Anmerk. zum IX. Kap. beigefügte 1ste Ex. bei, so hat man $\alpha = 160$ Fus, $(n^2 - 1) \cdot \frac{K^2 c^2}{4g k^2} = 236$ Fus, also für die unterste Stelle

$$H = 160 + 236 = 396 \text{ Fus.}$$

Die ganze Steigröhre ist 297 Toisen oder 1782 Fus lang und 160 Fus hoch; wollte man nun den Werth von H für die Mitte der Höhe, also für $x = 80$ Fus berechnen, so müßte man das zugehörige l, d. i. die Länge des Röhrenstücks vom Stiefel an bis zu der 80 Fus hoch liegenden Stelle messen. Gesetzt nun, man fände $l = 160$ Toisen $= 960$ Fus, so müßte man den Werth von $\frac{l}{(Fl)}$ aus Vergleichung mit bekannten Beobachtungen oder in dieser Ermangelung durch die Proportion bestimmen

$$\frac{1}{n} : \frac{l}{(Fl)} = \sqrt{960} : \sqrt{1782}$$

oder, weil hier $\frac{1}{n} = \frac{1}{27}$ ist,

$$\frac{l}{(Fl)} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1782}{960}\right)}}{27} \text{ beinahe} = 0,05$$

überdas ist für diese Stelle $x = 80$, also nach (☿)

$$H = (160 - 80) + (0,0025 \cdot 729 - 1) \cdot 0,324$$
$$= 80 + 0,8225 \cdot 0,324 = 80,266$$

wo also der von der Verzögerung der Röhrenwand herrührende Seitendruck ganz unbeträchtlich ist. In der tiefsten Stelle der Steigröhre war $H = 396$ Fus, und so erhellet, daß hier der Druck auf die Wand in der halben Höhe der Steigröhre nur $\frac{1}{5}$ so stark als ganz unten am Stiefel ist.

Man wird einsehen, daß diese Bemerkungen von äußerster Wichtigkeit sind. Es ist übrigens sehr begreiflich, warum zu unterst ein so beträchtlicher Seitendruck von dem Widerstand der ganzen Röhrenleitung und doch ein so ganz unbedeutender Widerstand in der Mitte von etwa der halben Röhrenleitung entstehen kann; weil nämlich bei weitem der größte Theil der auf die Bewegung wirkenden Kraft schon im Anfang verlohren geht, wo die Geschwindigkeit der fortgehenden Schichten bei weitem kleiner ist als die Höhe der auf sie wirkenden Kraft erfodert, von Schichte zu Schichte aber diese Kraft immer mehr verschwächt wird, so daß die durchaus gleich große Geschwindigkeit der, welche dem wirkenden Druck in ieder folgenden Stelle gemäs wäre, immer näher kommt.

Es ist wahr, wenn man z. B. erwägt, daß in einer 10000 Fus langen Röhrenfahrt unter sonst gleichen Umständen das Wasser etwa nur halb so geschwind fortfließt als in einer 2500 Fus langen, so

scheint

scheint doch der Widerstand, den das Wasser in letzterer leidet, durch die bei ersterer noch angesetzte Länge von 7500 Fußen ungemein vergrößert zu werden, folglich der Widerstand, den das Wasser noch in den letzten 7500 Fußen dem Wasser am Ende der ersten 2500 Fußen entgegensetzt, sehr beträchtlich zu seyn, woraus dann nothwendig auch in dieser Entfernung von 2500 Fus noch ein beträchtlicher Seitendruck erwachsen müßte. Allein eine genauere Prüfung beweißt das Gegentheil. Es muß nämlich der Ueberschuß der wahren Wasserhöhe, welche der Hindernis gleich gesetzt werden kann, bei der erstern Röhrenleitung $\frac{1}{4}$ so viel betragen als bei letzterer, und wenn also H, h, die genannten Höhen bei ersterer sind, und H, h′ bei letzterer, so wäre

$$H - h = \frac{1}{4}(H - h')$$

und das gäbe

$$H - h' = 4.(H - h)$$

also

$$h' = H - 4(H - h) = 4h - 3H$$

Wenn nun eine 10000 Fus lange Röhrenfahrt z. B. nur $\frac{1}{18}$ so viel Wasser gibt als eine kurze Ansatzröhre, so ist

$$H - h = (\tfrac{1}{18})^2 . H = \tfrac{1}{324} H$$

demnach

$$h = H - \tfrac{1}{324} H = \tfrac{323}{324} H$$

und $h' = 4h - 3H = 4H - \frac{4}{324}H - 3H$
$= \frac{320}{324}H$

also

$h : h' = 323 : 320$

folglich der Widerstand, den die 10000 Fus lange Röhrenleitung dem Einfluß des Wassers aus dem Behältnis in die Röhrenleitung entgegensetzt, nur um $\frac{3}{323}$ oder etwa $\frac{1}{108}$ größer als der, welchen die 2500 Fus lange Röhrenleitung verursacht, wenn gleich letztere doppelt so viel Wasser gibt. Wäre also $h =$ 36 Zoll, und spränge daher das Wasser aus einem am Anfang der ersten Röhrenfahrt gemachten kleinen lothrechten Loch ohngefähr 36 Zolle hoch, so dürfte man nicht erwarten, daß aus einem ähnlichen 2500 Fus weit von ienem angebrachten Loch das Wasser höher als $\frac{1}{108} \cdot 36 = \frac{1}{3}$ Zoll hoch stiege, wie es nämlich dem Widerstand oder den gegenseitigen Pressungen an dieser Stelle gemäs wäre.

Hiermit glaube ich iungen Lesern alle Zweifel, die ihnen etwa gegen meine bisherigen Behauptungen aufstoßen mögten, gehoben zu haben. Auch läßt sich aus dem Bisherigen übersehen, wie unrichtig es ist, was Hr. Bernard in seiner Hydraulik §. 170. am Anf. sagt, und wie dessen Behauptung dort eingeschränkt werden müsse.

XII. Kap. Höchst interessant und mit den treflichsten Beobachtungen angefüllt. Nur sind wenige

Sätze

Sätze mit eingeflossen, gegen die ich nöthige Erinnerungen im Buch selbst beigebracht habe.

Hier muß ich noch einen und zwar den einzigen wesentlichen Unterschied zwischen völlig verschlossenen Röhrenleitungen und offenen Kanälen bemerken, daß nämlich bei ienen das Gefälle den Druck des Wassers im Behältnis vergrößert, bei diesen aber nicht. Eben daher kommts, daß z. B. (770.) ein offenes Gerinne fast ein eben so starkes Gefälle nöthig hat, um die der Wasserhöhe im Behältnis zugehörige Ausflußmenge abzuführen, als eine Röhrenleitung, wenn gleich bei letzterer der Widerstand so sehr viel beträchtlicher ist.

Vielleicht ließe sich auch noch wünschen, daß Hr. Bossüt hier eine nähere Anwendung seiner Tafeln hätte beibringen mögen. Es versteht sich, daß man hier überall in der Ausübung nur mit ohngefähren Resultaten zufrieden seyn müsse. Ich will ein Exempel hersetzen.

Exempel. Ein Gerinne, das 4000 Fus lang in grader Richtung fortgeführt werden, und dessen Höhe 12 Zoll, die Breite aber 22 Zoll betragen soll, will man horizontal anlegen; man fragt, wie viel Wasser sich durch solches fortführen lasse, ohne daß es irgendwo überlaufe. Die Wasserhöhe im Behältnis sey 3 Fus.

Man setze zuerst, das Schutzbrett sey 1 Zoll hoch gezogen, oder die Einlaßöfnung 1 Zoll hoch und

22 Zoll breit; so kann man zur größern Sicherheit die einander zugehörigen Zeiten und Räume in folgender Progression neben einander setzen (statt VI. 715.)

Sekunden	Durchloffene Fuße
3	21
7	42
12	63
19	84
28	105

wo die Zeiten etwa so fortgehen $(7+5), (7+5+7), (7+5+7+9) \ldots$

und die zugehörigen Räume: $63 \quad 84 \quad 105 \ldots\ldots$ od. $63 \quad 63+21 \quad 63+2.21 \ldots$

So gehörte also

zu dem Raum $63+3.21$ Fus die Zeit $7+5+7+9+11$

— $63+4.21$ — — — $7+5+7+9+11+13$

.

.

.

— $63+n.21$ Fus

die Zeit $7+\frac{2.5.(n+1)+[(n+1)^2-(n+1)].2}{2}$

Es ist aber in unserem Exempel $63+n.21=4000$, also $n=\frac{3937}{21}=187,5$; also die ganze Zeit, welche das erste Wasser braucht, den 4000 Fus langen Kanal zu durchlaufen, beinahe $= 7+\frac{1885+(35532-188).2}{2}$ $=36293$ Sekunden, oder beiläufig 10 Stunden, und

im

im Beharrungsstand durchlauft also das Wasser diesen Kanal ohngefähr in $\frac{19}{22} \cdot 36293 = 31343$ Sekunden.

Wenn also der Kanal durchaus, wie sich wohl annehmen läßt, gleich tief angefüllt seyn soll, so ist des Wassers Geschwindigkeit für 1 Sek. $= \frac{4000}{31343} =$ 0,127 Fus oder etwa $1\frac{1}{2}$ Zolle. Nun kann bei dieser Geschwindigkeit der Kanal, dessen Querschnitt $= 12 \cdot 22 = 264$ Quadratzolle ist, eine Wassermenge $= 264 \cdot 1\frac{1}{2} = 396$ Kubikzolle $= 0,23$ Kubikfus abführen; und da die Einlaßöfnung eine Wassermenge $= \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{12} \cdot 2\sqrt{15} \cdot 3 =$ beinahe 0,7 Kubikfus liefert, so sieht man, daß etwa $\frac{2}{3}$ des ganzen Einlasses überlaufen müßten, und daß man also die ganze mögliche Wassermenge abzuführen, das Schutzbret kaum $\frac{1}{2}$ Zoll hoch ziehen dürfte.

Es kann also dieser Kanal nicht mehr als etwa 0,23 Kubikfus in 1 Sek. oder 13,8 Kubikfus Wasser in 1 Minute abführen.

Inzwischen ist gewiß, daß das Wasser umsoviel schneller abschießt, ie höher sein Stand im Kanal angenommen wird, und hierauf ist bei dieser Berechnung noch keine Rücksicht genommen worden. Wenn das Wasser im Kanal 12 Zoll hoch fortfließt, so ist seine Geschwindigkeit ansehnlich größer, als wenn es darin nur 3 Zoll hoch flösse, und man wird in der Ausübung der Wahrheit merklich näher kommen, wenn man das nach solchen Berechnungen gefundene Resultat

noch mit $\sqrt{\frac{h}{3}}$ multiplicirt, wo nämlich h die Höhe des Wasserstandes im Kanal in Zollen ausdruckt. Hier wäre $h = 12$, also $\sqrt{\frac{h}{3}} = \sqrt{4} = 2$, und hiernach die zu erwartende Abflußmenge in 1 Min. $= 2 . 13,8 = 27,6$ Kubikfus, welches der Wahrheit ziemlich nahe kommen wird, wie ich aus eigenen Beobachtungen schließe, da ich selbsten Gerinne von 5 bis 7 tausen Fus lang anzulegen Gelegenheit gehabt habe.

Läßt man die erwähnte Voraussetzung gelten, so läßt sich daraus auch eine andere Frage beantworten:

Wie hoch wird der Wasserstand im vorigen Fall seyn, wenn statt der Wassermenge A die n. A durchfließen soll?

Die gesuchte Höhe heiße H, so ist die in dieser Höhe durchfließende Wassermenge

$$n . A = \frac{H}{12} . \left(\sqrt{\frac{H}{12}}\right) . A$$

$$\text{also} \quad n^2 = \frac{H^2}{144} . \frac{H}{12} = \frac{H^3}{1728}$$

$$\text{und} \quad H = \sqrt[3]{1728} . n^2 = 12 . \sqrt[3]{n^2}$$

So erhielte man also z. B. für die achtfache Wassermenge oder für $n = 8$,

$$H = 12 . \sqrt[3]{64} = 4 . 12 = 48 \text{ Zoll}$$

oder ein 4 mal so tiefes Gerinne als vorhin könnte achtmal soviel Wasser durchführen. Nennte man die zur einfachen Wassermenge A gehörige Tiefe, die

vorhin

vorhin = 12 Zoll war, überhaupt h, so hätte man hiernach allgemein

$$H = h . \sqrt[3]{n^2}$$

Man kann sich zwar hiermit in der Ausübung ziemlich begnügen, inzwischen erhellet doch hieraus, wie sehr es in diesem Punkt noch an hinlänglich genauen Beobachtungen fehlt, und wieviel noch zu leisten übrig ist.

Inzwischen hat doch Herr B. durch seine mitgetheilte Beobachtungen schon ungemein viel geleistet, und sie sind bei den gewöhnlichen schmalen Wasserleitungen, welche die Betreibung gewisser Künste zum Zweck haben, auf die gewiesene Art zu beiläufigen Ueberschlägen ungemein behülflich.

Junge Leser, ich weiß es aus eigener Erfahrung, rechnen so ziemlich theoretisch fort, glauben in dem angef. Exempel, wenn das Schutzbret in der Höhe und der Weite des Kanals aufgezogen würde, in 1 Sek. gegen 8 Kubikfus oder doch, wenn sie noch stark zu vermindern glauben, gegen 4 Kubikfus Wasser sicher fortzuleiten, da diese Berechnungen nur 2. 0,23 = 0,46 Kubikfus geben.

Ueberhaupt ist die gewöhnliche Behauptung, offene Kanäle gäben mehr Wasser als Röhrenleitungen, sehr irrig. Ganz natürlich gibt eine 8 zöllige Röhrenfahrt mehr als eine 4zöllige, und so auch ein Gerinne, wie das zuvor beschriebene, mehr als eine 4 zöllige Röhrenfahrt; man muß aber die Vergleichung allemal zwischen Kanälen und Röhrenfahrten von gleichen Weiten

anstellen, und dann weiß ich aus Erfahrung, daß im vorigen Fall eine 18 zöllige Röhrenfahrt, die mit dem 12 Zoll hohen und 22 Zoll breiten Gerinne ohngefähr gleiche Weite hätte, bei weitem mehr und zwar über das Vierfache von dem gibt, was das Gerinne fortführt. Es ist auch gewiß, daß weite in grader Linie fortgehende Röhrenfahrten bei weitem nicht $\frac{1}{10}$ ihrer Länge zum Gefälle nöthig haben, um ebensoviel Wasser zu geben, als eine von eben der Weite angesteckte ganz kurze Röhre am Behältnis geben würde.

Auch erinnere ich noch zu (783.), daß die daselbst gemachte Anwendung nur sehr selten ihren Nutzen hat. Wäre man z. B. in dem Fall, wo das unterschlächtige Rad 200 Fus weit von dem Behältnis entfernt werden müßte, so setzt die Vorschrift, daß man dem Gerinne in diesem Fall $\frac{200}{10}$ oder 20 Fus Fall geben solle, voraus, daß man von dem Ablaß des Behältnisses an wenigstens noch 20 Fus Fall zu benutzen habe; hieße das aber nicht die Kräfte verschwenden, wenn man diese Höhe von 20 Fus nur dazu benutzen wollte, den Stos, so wie ihn das Wasser beim Ablaß am Behältnis unmittelbar gibt, ohne Verminderung zu erhalten, da man das Wasser nur in einem breitern Gerinne horizontal fortführen und dann am Ende das 20 Fus hohe Gefälle benutzen könnte? Nur dann also hätte die (788) aufgeworfene Frage ihren Nutzen, wenn das auf solche Art am Ende sich ergebende Gefälle kleiner als die Wasserhöhe im

Behält-

Behältnis wäre; diese Höhe heiße nun H, und das Gefälle vom Ablaß des Behältnisses bis zur tiefsten Stelle des Rads h, die Entfernung bis zum Rad aber l, so müßte $\frac{1}{10}$ nicht $\triangleright$ h und h nicht $\triangleright$ H, oder h nicht $\triangleleft \frac{1}{10}$ und nicht $\triangleright$ H seyn, wenn 788. seine Anwendung haben soll. Ich setze hierbei überdas voraus, daß keine Breite oder Tiefe des Gerinnes vorgeschrieben ist. Ist man hierin auf ein bestimmtes Maas eingeschränkt, so wird die Frage weit wichtiger, wenn man sie so abfaßt:

Was muß das Gerinne, dessen Länge, Höhe und Breite bestimmt sind, für ein Gefälle haben, um zur Betreibung des Rads die größte Kraft zu erhalten? das Rad mag nun oberschlächtig oder unterschlächtig seyn.

Je geringer nämlich das Gefälle ist, destomehr gewinnt man für den Werth von h, destomehr verliert man aber zugleich an der Wassermenge, und wenn diese M heißt, so kommt es also drauf an, **für welches Gefälle M. h am größten werde?**

Aus den Versuchen (710. und 724.) ergibt sich schon, daß ein Gefälle von 3 Zollen auf 105 Fuße, welches bei langen Wasserleitungen schon einen ansehnlichen Verlust im Werth von h gibt (z. B. bei 4200 Fus schon 10 Fus), die Geschwindigkeit des Wassers nicht

beträcht-

beträchtlich von der im horizontalen Kanal unterscheidet, und man würde also eine beträchtliche Verminderung im Werth von M. h leiden, wenn man dem Kanal auf eine so ansehnliche Länge 3 Zoll Gefälle auf 105 Fuße geben wollte. Desto nachtheiliger würde es nun seyn, wenn man, auf 100 Fuße, 2 Zolle oder gar nur 1 Zoll Gefälle geben wollte: man würde alsdann in der Wassermenge so gut als gar nichts gewinnen, und doch auf 1200 Fuße schon 1 Fus am Werth von h verlieren, welches bei Wasserleitungen von beträchtlicher Länge einen ansehnlichen Verlust in dem Werth von M. h geben kann. Also bei langen Wasserleitungen ist es allemal vortheilhafter, solche ganz horizontal fortzuleiten. Kurze Wasserleitungen aber von nur einigen hundert Fußen geben auch selten einen beträchtlichen Werth von h, und dann macht also das Gefälle, welches man der Wasserleitung gibt, einen desto beträchtlichern Theil von h aus, so daß auch dann nicht leicht eine abhängige Lage vortheilhafter ist als die horizontale.

XIII. Kap. Hauptsächlich von einigen schon bekannten praktischen Arten, die Geschwindigkeit der Flüsse zu messen, dabei von dem Pitotschen Werkzeug und des Herrn Dübüat dabei angebrachten Verbesserungen. Viel mehr vom Lauf der Flüsse enthält des Herrn Bernards Hydraulik. Ich vermisse hier und im vorigen Kap. besonders Beobachtungen und

nähere

nähere Untersuchungen über den Ausfluß des in einem Kanal oder Strohmbett fortfließenden Wassers durch eine an der Seite angebrachte Oefnung, mit und ohne Abzugskanal. Denn wenn gleich der Seitendruck des in einem Kanal fließenden Wassers an die Wand bei einer bestimmten Höhe des Wasserstands der nämliche ist, als wann das Wasser in eben der Höhe ruhig stände, so erfolgt dennoch, sobald man ein Stück aus der Wand wegnimmt, der freie Ausfluß nicht ebenso, wie aus einem ebenso hoch vollerhaltenen verschlossenen Behältnis, worin man an der Seite eine lothrecht herabgehende Oefnung anbringt, weil die Geschwindigkeit, welche das Wasser schon längst dem Kanal hat, dabei eine merkliche Aenderung macht, so daß aus dieser Ursache bei übrigens gleichen Umständen die Pressungen der Querschnitte im Kanal der Seitenöfnung desto weniger Wasser zutreiben, ie größer die Geschwindigkeit des Wassers im Kanal ist. Um daher durch eine Seitenöfnung in diesem Fall ebensoviel Wasser wie aus einem an beiden Enden verschlossenen Kanal oder Behältnis abzuleiten, muß die Oefnung merklich größer als in einem solchen Behältnis seyn, und ein an einem Hauptkanal angebrachter Seitenkanal, der soviel Wasser wie ein eben solcher Seitenkanal aus einem übrigens verschlossenen Behältnis abführen soll, muß sich daher schon in einiger Entfernung vom Hauptkanal zu erweitern anfangen und auf solche Art divergirend bis in den Haupt-

kanal

kanal fortgehen. Die Verhältnis des größten Querschnitts des divergirenden Stücks des Seitenkanals zum Querschnitt des in unveränderter Breite fortgehenden Theils desselben muß desto größer seyn, 1) ie schmäler der in beständiger Breite fortgehende Theil des Seitenkanals, 2) ie größer die Geschwindigkeit des Wassers im Hauptkanal ist, wenn sonst alle Umstände einerlei sind.

XIV. Kap. Für die hier mitgetheilten ganz direkten Versuche, die unter den besten Vorrichtungen zur unmittelbaren Messung oder Abwiegung des Wasserstoßes angestellt worden sind, verdient Herr B. den wärmsten Dank. Es dient zugleich zu einer kurzen und angenehmen Uebersicht der Fortschritte, die man in der Theorie gemacht hat, daß Herr B. in gedrängter Kürze von den Untersuchungen, welche die Herrn Newton, Dan. Bernoulli, d'Alembert und Euler über diesen Gegenstand angestellt haben, einige Nachricht gibt. Auch ich wage es, hier einige Gedanken über den Wasserstos beizufügen.

Die ganze Wasserhöhe von der Oberfläche im Gefäs bis zum Mittelpunkt des Stoßes auf der Fläche, welche vom Wasser getroffen wird, heiße H, der natürliche Querschnitt, worin der Strahl eine im Mittelpunkt des Stoßes durch seine Axe senkrecht gelegte Ebene, wenn er sich nicht ausbreitete, treffen müßte, heiße q, die Größe von der senkrechten Projektion der

Fläche

Fläche aber, die er vermög seiner Ausbreitung trifft, sey = Q, und die Höhe, welche der Geschwindigkeit des Strahls in dieser Fläche Q zugehört, = h, so ist bekanntlich

$$h : H = q^2 : Q^2$$

und $$h = \frac{q^2}{Q^2} \cdot H$$

Die Summe aller bewegenden Kräfte des Strahls ist (nach meinem Versuch einer neuen Theorie 2c. §. 27. u. f.), wenn die Oberfläche des Wassers im Gefäs W heißt,

$$= 2\left(H + \frac{q^2}{W^2 - q^2} \cdot H\right) \cdot q = 2 \cdot \frac{W^2}{W^2 - q^2} \cdot H \cdot q$$

wofür ich hier, wo q^2 als unendlich klein gegen W^2 angesehen werden kann, 2 HQ setzen will.

Es wird aber diese bewegende Kraft nicht blos zum Druck auf Q angewendet, sondern auch zur Unterhaltung der Geschwindigkeit, womit der Strahl in Q anstößt.

Der Theil der Höhe, welcher zur Geschwindigkeit verwendet wird, gehört in Q der Höhe $h = \frac{q^2}{Q^2} \cdot H$, und es bleibt also

die zum Druck verwendete Kraft

$$= (2H - h) \cdot q$$

$$= \left(2H - \frac{q^2}{Q^2} \cdot H\right) \cdot q = \left(1 - \frac{q^2}{2Q^2}\right) \cdot 2Hq$$

Beim schiefen Stos widersetzt sich der Strahl auf allen Seiten der Axe, wo solche mit der Fläche

einen

einen Winkel macht, der kleiner als 90° ist, der Ausbreitung, und es wird daher bei solchen der Quotient $\frac{q}{Q}$ ohne Zweifel größer als beim senkrechten Stos, und um so vielmehr also $1 - \frac{q^2}{2Q^2}$ bei jenem kleiner als bei diesem, eben darum also auch der Stos in schiefer Richtung auf die Fläche etwas kleiner als in senkrechter Richtung.

Nehme ich z. B. in den Versuchen (828 und 829.) N° I. und V. den Durchmesser des ausgebreiteten Strahls $= \frac{24}{10} \cdot 10 = 24$ Linien, und N° III. und VII. $= \frac{24}{10} \cdot 6 = 14,6$ Linien, so finde ich $\frac{q^2}{Q^2} = \left(\frac{10^2}{24^2}\right)^2 = 0,03$ also $\frac{q^2}{2Q^2} = 0,015$, und $1 - \frac{q^2}{2Q^2} = 0,985$ und nach der Tafel (830.) die Stärke des Drucks

(C)
0,985. 2. 6518 = 12840 statt 12608 (828. I.)
0,985. 2. 3259 = 6420 statt 6306 (829. I.)
0,985. 2. 2346 = 4621 statt 4484 (828. III.)
0,985. 2. 1173 = 2311 statt 2243 (829. III.)

Setze ich (828. II.) $\frac{q}{Q} = \frac{1}{3}$ also $\frac{q^2}{Q^2} = \frac{1}{9}$, so ist $1 - \frac{q^2}{2Q^2} = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$ und der Stos $= \frac{17}{18} \cdot 2 \cdot 6518 = 12312$ statt 12248 wie ihn der Versuch gab. Ebenso gibt sich (829. II.) $\frac{17}{18} \cdot 2 \cdot 3259 = 6156$ statt 6125.

Alle

Alle diese Berechnungen stimmen mit den Resultaten der Versuche gut genug überein.

Nur die Berechnungen für (828. III. und 829. III.) kommen dem wirklichen Befund nicht so nahe als (828. I. und 829. I.); es scheint also, daß ein dünnerer Strahl nach Proportion weniger als ein dickerer ausgebreitet werde.

Man hat auch noch zu bedenken, daß Herr B. in der Tafel (830.) alle Höhen etwas zu groß genommen hat, indem sie statt $\frac{2}{3}$ H alle beiläufig $= \frac{100}{174}$ H (501.) genommen werden sollten, da dann nach dieser Korrektion alle Berechnungen in C den Beobachtungen noch näher kommen würden.

Ich erinnere übrigens hierbei noch an eine besondere Beobachtung, die beim ersten Anblick sonderbar scheinen könnte, deren Erklärung aber aus dem bisherigen sich leicht ergibt.

Ich habe nämlich selbsten folgenden Versuch angestellt: aus einem Gefäs, in das ich ein kleines kurzes Röhrgen, das ohngefähr 1 Quadratlinie weit war, horizontal eingesteckt hatte, lies ich das Wasser gegen eine Fläche senkrecht stoßen, die etwa nur eine Linie weit von der Oefnung der Röhre entfernt war; ich lies dabei kein neues Wasser zum Ersatz ins Gefäs fließen, und so leerte es sich unter dem fortdauernden Stos gegen die Fläche 120 Sek. aus. Diesen Versuch wiederholte ich 10 mal; allemal fiel die Auslaufszeit zwischen 119 und 121 Sek. Nun stellte ich 10

andere Versuche an, wo ich das Wasser auf eben die Art, nur ohne vorgesetzte Fläche ganz frei auslaufen ließ, und die Auslaufszeit fiel wie vorhin allemal zwischen 119 und 121 Sek. Es schien also die so nahe vorgestellte Fläche dem Lauf des Wassers nicht die geringste Hindernis entgegengesetzt zu haben. Ich schätzte die Ausbreitung des Strahls beiläufig auf $\frac{1}{2}$ Quadratzoll, also $\frac{q}{Q}$ ohngefähr $= \frac{1}{70}$, $\frac{q^2}{Q^2} = \frac{1}{4900}$ und $\frac{q^2}{2Q^2} = \frac{1}{9800}$. Es gieng also durch den Widerstand der vorgestellten Fläche nur $\frac{1}{9800}$ von der ganzen Höhe, welche ohne vorgestellte Fläche die Geschwindigkeit bewirkt, verlohren, und dieser Verlust konnte daher die Geschwindigkeit nicht merklich abändern.

XV. XVI. XVII. und XVIII. Kap. enthalten sehr mühsame, lehrreiche und den größten Dank verdienende Versuche, wodurch Herr B. über diese Materien weit mehr Gewißheit verbreitet hat, als man bisher hatte.

I. Anhang: eine lehrreiche Erzählung und Beurtheilung der Verdienste Italiänischer Schriftsteller um die Hydrodynamik.

II. Anhang: eine umständlichere Tafel über zugehörige Höhen und Geschwindigkeiten, als man in andern Schriften antrifft.

III. Anhang: der wichtigste, enthält eine kurze Geschichte der Feuermaschinen überhaupt, dann eine sehr

sehr deutliche Beschreibung der gewöhnlichen Säveriſchen Feuermaſchine, und eine kurze Anzeige derer erſt neuerlich von Bolton und Watt dabei angebrachten Verbeſſerungen; auch etwas Weniges von der Berechnung dieſer Maſchine.

Die Kaiſerliche Akademie zu Petersburg hatte für das Jahr 1783. auf die mit wirklichen Beobachtungen am genaueſten übereinſtimmende Theorie dieſer höchſt nützlichen Maſchine einen Preis ausgeſetzt; und dieſes veranlaßte mich zu einer kleinen theoretiſchen Unterſuchung darüber, die ich in meinem **Verſuch einer neuen Theorie** ꝛc. *XI.* **Kap.** eingeſchaltet habe. Ich geſtehe, daß ich gerne um iene Ehre bei der Akademie geworben hätte; allein ich konnte damals mit keiner Zuverläßigkeit Nachricht von der gegeben ſeyn ſollenden Preisfrage erhalten. Selbſt Herr Hofr. Karſten, bei dem ich hierum anfragte, wußte nichts davon, und konnte, da er die Gefälligkeit hatte, deshalb ſich ſelbſten anderwärts zu erkundigen, nichts Näheres erfahren, und darum unterlies ich eine ausführlichere Unterſuchung, die ich mir vorgeſetzt hatte. Eben der erwähnte Umſtand mag auch wohl Urſache ſeyn, daß wir keine Beantwortung dieſer Preisaufgabe von irgend einem großen teutſchen Mathematikverſtändigen erhalten haben, die ſich vielleicht von dem würdigen Verfaſſer der **Preisſchrift über die Anordnung der Feuerſprützen** hätte erwarten laſſen. Jetzt iſt bekannt, daß Herrn de Maillard der

Preis zuerkannt worden ist. der Titel seiner Schrift ist: *Théorie des machines mues par la force de la vapeur de l'eau par M. de Maillard, Capitaine-Lieutenant au Corps Impérial & Royal du Génie, à Viennes, à Strasbourg & à Paris* 1784. 139 Seiten in 8. Die darin vorausgeschickte ausführliche Beschreibung der Säverischen Feuermaschine ist nebst den zugehörigen Abzeichnungen der Theile der Maschine von Wort zu Wort mit der Bossütschen gleichlautend; Herr Bossüt denkt aber zu trefflich, um nicht ieden Gelehrten zu nennen, dem er etwas zu verdanken hat, und gesteht daher (III. Anh. N° X. am Ende) mit der gefälligsten Aufrichtigkeit, daß er diese Beschreibung schon im J. 1769. von Hrn. Dübüat erhalten habe. Daß übrigens die Maillardische Theorie dieser Maschine für die Akademie befriedigend gewesen seyn müsse, schließe ich blos daraus, daß sie solche des Preises würdig erkennt hat.

Gerabrönn bei Mergenthal
im März 1791.

K. Chr. Langsdorf.

Vorrede des Originals.

Die Alten haben den praktischen Theil des Maschinenwesens sehr weit getrieben. Man findet schon in den ältesten Zeiten Spuren von Mitteln, die sie anzuwenden wußten, schwere Lasten mit geringen Kräften in Bewegung zu setzen; aber sie hatten viele Jahrhunderte hindurch keinen andern Wegweiser als die Erfahrung mit einem natürlichen Hang zu mechanischen Arbeiten verbunden. Archimed, der nur 250 Jahre vor Christi Geburt lebte, hatte zuerst den allgemeinen Grundsatz von dem Gleichgewicht des Hebels gefunden, auf welchen sich der ganze Grund der gemeinen Statik bringen läßt. Er hat über die Theorie der Bewegung nichts geschrieben, das eine tiefere Geometrie als die seiner Zeit erfoderte und deren Entdeckung ganz den neuern Zeiten zugehört.

Wenn die gemeine Mechanik sich als Wissenschaft so langsam gebildet hat, so war solches von der Hydrodynamik noch um so vielmehr zu erwarten; denn gesetzt auch, daß man im Stand gewesen wäre, das Gleichgewicht oder die Bewegung eines Systems fester

Körper zu bestimmen, so konnte man doch die Methode nicht unmittelbar auf eine flüßige Masse anwenden, deren Elemente man weder in Ansehung ihrer Anzahl noch in Ansehung ihrer Gestalt kannte: es war überdas nöthig, daß die Erfahrung oder irgend eine besondere Eigenschaft bei den flüßigen Massen der Mechanik und der Geometrie zu Hülfe kame. Archimed hat dergleichen bemerkt, und Er ist es auch, welcher die ersten Gründe zur Hydrostatik gelegt. In seinem Werk *de humido insidentibus* setzt er den allgemeinen Satz fest: daß ieder Punkt einer im Gleichgewicht befindlichen Masse von allen Seiten gleichstark gedruckt wird, und hierauf untersucht er die Bedingungen, welche eintretten müssen, dafern ein fester auf einer flüßigen Masse schwimmender Körper die Lage des Gleichgewichts annehmen und behalten soll. Er wendet diese allgemeine Theorie auf das Dreieck, den Kegel und die Paraboloide an, und in der That ist dieses eines der schönsten Denkmäler seiner großen Talente.

Zween Mathematiker aus der Alexandrinischen Schule Ctesibius und Heron sein Schüler, ersannen ohngefähr hundert Jahre nach Archimed mehrere sehr sinnreiche hydraulische Maschinen, deren Spiel von der Federkraft oder dem Druck der Luft abhienge. Dahin gehören z. B. die Pumpen, wobei die Luft als Mittel dient, die bewegende Kraft wirksam zu machen; der durch den Druck bewirkte Brunnen, welcher noch iezt der Heronsbrunnen heißt,

heißt, wobei das Wasser über die Höhe seines obersten Spiegels vermög des Drucks der vorher verdichtet gewordenen Luft getrieben wird; der **Heber** mit ungleichen Schenkeln, da das Wasser durch den kürzern, wenn man solchen luftleer gemacht hat, in die Höhe steigt und durch den längern abfließt. Wenn man aber die Effekte aller dieser Maschinen bewundert, so erregt es Befremden und Bedauern, wenn man sieht, daß die Erfinder die wahren Ursachen davon völlig verkannten, und daß sie solche dem Abscheu zuschrieben, welchen die Natur gegen den leeren Raum habe.

Man setzt den Gebrauch, die Zeit durch **Wasseruhren** zu messen, bis zu den Egyptiern zurück. Ctesibius hat uns eine Maschine dieser Art hinterlassen, wo die Bewegung durch eine sehr feine Untersuchung hervorgebracht und unterhalten wurde, obgleich solche übrigens nicht geschickt war, die Zeit mit einer gewissen Genauigkeit abzumessen.

Wenn wir innerhalb den Grenzen der Hydrodynamik stehen bleiben, so sehen wir, daß die Alten, einige Abänderungen beiseit gesetzt, schon den größten Theil der Maschinen, deren wir uns noch ietzt zur Erhebung des Wassers bedienen, gebraucht haben: ich rechne hierhin die **Wasserschnecke**, die noch ihren Namen vom Archimed führt, das trommenförmige Rad, Schöpfwerke mit **Eimern**, mit **Büscheln** ꝛc. Ein Epigramm aus einer griechischen Sammlung hat zu der Meinung Anlaß gegeben, daß die Wassermühlen

zu den Zeiten Augusts erfunden worden seyen; aber Vitruv, der unter diesem Fürsten lebte, sagt in seiner Beschreibung, die er von diesen Mühlen gibt, nirgends, daß sie eine neue Erfindung gewesen wären; und wahrscheinlich waren sie schon vorher bekannt. Die Windmühlen sind weit später aufgekommen: einige Schriftsteller rechnen ihren Gebrauch vom sechsten Jahrhundert her; andere behaupten, die Kreuzzüge hätten uns solche aus dem Orient mitgebracht, wo sie schon sehr alt gewesen wären, und wo man sie den Wassermühlen vorgezogen hätte, weil in diesen Ländern die Flüsse und Quellen selten und gering sind. Unter unsern ersten Königen bediente man sich in Frankreich häufig der Handmühlen, ohngeachtet der Vorzüge der Wassermühlen.

Alle diese Maschinen wurden erdacht, noch ehe die Theorie von der Bewegung flüßiger Massen bekannt war. Man schreibt dem Sextus Julius Frontinus (gewöhnlich nur Frontin genannt) die ersten Begriffe zu, die man von dieser Theorie gehabt habe. Er war Oberaufseher über die öffentlichen Brunnen in Rom unter den Kaisern Nerva und Trajan, und hat über diesen Gegenstand ein Werk unter folgendem Titel hinterlassen: *de aquae ductibus vrbis Romae Commentarius*; er betrachtet darin die Bewegung der Wasser, welche in Kanälen oder durch Oefnungen aus Gefäßen, worin sie enthalten sind, abfliessen; zuerst beschreibt er die Wasserleitungen in Rom,

und

und erzählt die Namen derer, welche solche haben anlegen lassen, und die Epochen ihrer Erbauung. Hierauf bestimmt und vergleicht er die Maase unter einander, deren man sich damals zu Rom bediente, um die aus den Ausgußstücken auslaufenden Wassermengen zu bestimmen. Hiernächst kommt er auf die Mittel, die Wasser einer Wasserleitung oder eines Brunnens zu vertheilen. Ueber verschiedene Gegenstände macht er richtige Beobachtungen; er hat z. B. gefunden, daß die aus einem Ausgußrohr sich ergebende Wassermenge nicht blos von der Weite dieses Ausgußrohrs abhänge, sondern, daß man auch auf die Höhe des Behälters Rücksicht nehmen müsse: eine sehr einfache Bemerkung, die aber gleichwohl von manchen heutigen Brunnenmeistern vernachläßigt wird. Er hat auch eingesehen, daß eine Röhre, die bestimmt ist, das Wasser aus einer Wasserleitung zum Theil abzuleiten, nach den Umständen eine mehr oder minder schiefe Lage in Ansehung des Laufs des Wassers haben müsse ꝛc. Inzwischen findet sich in seinen Resultaten keine geometrische Genauigkeit; das wahre Gesetz der Geschwindigkeiten in Rücksicht auf die Höhen des druckenden Wassers hat er gar nicht gekannt.

Litteratur und Künste waren schon zu Frontins Zeiten im Verfall, und bald wurde ganz Europa in die scheußlichste Barbarei versenkt. Diese dicke Finsternis dauerte an 1300 Jahre. Die Dichtkunst und Beredsamkeit ließen zuweilen einige Strahlen blicken,

die aber zu schwach waren, iene Dunkelheit zu zerstreuen. Erst zu den Zeiten der Mediceischen Familie erholte sich der menschliche Geist von seiner Erstarrung. Itzt sahe man unter der Aufmunterung und dem Schutz bloser Privatmänner die Menge der schönen Künste wieder aufleben und sich wieder zu eben dem Glanze erheben, den sie vormals in den glücklichen Zeiten Griechenlands und Roms hatten. Nach und nach verbreiteten sie sich unter die benachbarten Völker. Die Philosophie hatte einen langsamern Gang. Ich rede hauptsächlich von derienigen Abtheilung, welche mittelst des Kalkuls und der Geometrie auf eine sichere und evidente Weise die Erscheinungen der Natur erklärt. Von allem Schmuck entfernt und nur bestimmt die Wahrheit ganz nackt darzustellen, hatte sie wenig Anziehendes für Männer, die vielleicht zu gefühlvoll waren für die Reize der Dichtkunst und der Malerei, und nur gewöhnt gleichsam die Blumen der Einbildungskraft zu sammlen.

Nach der Litteratur und den Künsten keimten inzwischen auch die Wissenschaften wieder hervor. Auch in dieser Art der Wiedergenesung des menschlichen Verstandes hatte Italien den Ruhm der ersten Fortschritte. Galileus, Einer seiner größten Köpfe, verdiente den Namen des Schöpfers der heutigen Philosophie. Es gebührt ihm dieser Name, sowohl wegen seiner astronomischen Entdeckungen als wegen seiner Theorie von der Beschleunigung schwerer Körper:

er

er vermuthete die Schwere der Luft, und diese seinem berühmtesten Schüler, dem Torrizelli, mitgetheilte Vermuthung war für diesen gleichsam ein Lichtstrohm, der ihn leitete, die Schwere der Luft durch eine Menge höchst sinnreicher Erfahrungen wirklich zu beweisen, und von dem Steigen des Quecksilbers im Barometer und des Wassers in den Pumpen die richtige Erklärung zu geben.

Castelli, ein anderer Schüler des Galileus, wurde auf die Bewegung der Wasser aufmerksam. In einer kleinen 1628. bekannt gemachten Abhandlung erklärt Castelli sehr gut verschiedene Erscheinungen bei der Bewegung fließender Wasser; aber in dem Maas der Geschwindigkeiten, die er den Höhen der Wasserbehälter proportional setzt, irrt er sich.

Torrizelli, von dem wir zuvor geredet haben, war glücklicher. Da er sahe, daß ein aus einem kleinen Aufsatzrohr springender Strahl fast bis zur Höhe des Behälters emporstiege, so schloß er, daß solcher eben die Geschwindigkeit haben müßte, als wenn das Wasser vermög seiner Schwere von dieser Höhe herabgefallen wäre; hieraus schloß er weiter, der Theorie seines Lehrers gemäs, daß, ohne auf den Widerstand von Hindernissen zu sehen, die Geschwindigkeit des Ausflusses sich wie die Quadratwurzel aus der Höhe des Drucks verhalten müsse. Diese Vorstellung wurde durch Versuche bestättigt, welche Raphael Magiotti um eben diese Zeit über die

Aus-

Ausflüsse aus verschiedenen Aufsatzröhren unter verschiedenen Wasserhöhen anstellte.

Torrizelli machte seine Entdeckung 1643. in der Fortsetzung einer kleinen Abhandlung *De motu grauium naturaliter accelerato* bekannt. Er machte aus der Hydraulik eine ganz neue Wissenschaft; gleichwohl findet sie nur bei flüßigen Massen statt, welche, wie es gewöhnlich geschieht, durch kleine Oefnungen abfließen. Wenn die Oefnung sehr groß ist, so erfolgt die Bewegung der flüßigen Masse nach einem andern viel zusammengesetztern Gesetz.

Nach Pascals Tode fand man unter dessen Papieren eine Abhandlung unter dem Titel: *Traité de l'équilibre des Liqueurs*, welcher 1663. bekannt gemacht wurde. Dieses in der That originelle Werk ist das erste, worinn die Gesetze der Hydrostatik umständlich und auf eine einleuchtende und einfache Art durch Schlüsse und Erfahrung bewiesen worden sind; aber von der Bewegung der flüßigen Massen wird darin nicht gehandelt.

Unter denienigen Schriftstellern, welche über diesen letzten Gegenstand geschrieben, und welche den Torrizellischen Lehrsatz benutzt haben, verdient Mariotte vorzügliche Achtung. Gebohren mit seltenen Gaben, Anstalten zu Versuchen zu entwerfen und auszuführen, und in die glückliche Lage versetzt, viele solche Versuche über die Bewegung des Wassers zu Versailles, Chantilly und mehrern andern Orten anstel-

anstellen zu können, schrieb er über diese Materie eine Abhandlung, die erst nach seinem 1686. erfolgten Tode gedruckt wurde. Er hat sich darin an verschiedenen Stellen geirrt; viele Fragen hat er nur obenhin berührt; die Verminderung des Ausflusses, welche die Zusammenziehung des Strahls verursacht, wenn solcher aus einer Oefnung in einer dünnen Wand herausströhmt, hat er nicht gekannt. Aber dieser Mängel ungeachtet, hat sein Werk einen großen Nutzen gehabt, und es hat zu den Fortschritten der praktischen Hydraulik vieles beigetragen.

Im Jahr 1687. machte Newton seine *Princip. Mathem.* bekannt; ein Werk, worin die vorzüglichsten Fragen der natürlichen Philosophie abgehandelt werden. Die Untersuchung von der Bewegung flüßiger Massen ist darin nicht übergangen worden. Um sich einige Vorstellung von Newtons Methode bei dieser Untersuchung zu machen, stelle man sich ein lothrechtes zilindrisches Gefäs vor, das im Boden eine Oefnung hat, wodurch das Wasser ablauft; man stelle sich vor, dieses Gefäs erhalte von obenher beständig so viel Zufluß, als unten auslauft, daß es also beständig gleich hoch angefüllt bleibt. Nun theilt Newton die gesammte Wassermasse in zween Theile. Der eine hat die Gestalt eines Sphäroids, das aus der Umdrehung einer Hyperbel vom fünften Grad um die lothrechte grade Linie entsteht, welche durch den Mittelpunkt der Ausflußöfnung durchgeht; und dieses

Sphä-

Sphäroid hat unter seinen Elementen diese zwo: die Oefnung selbsten und die Oberfläche des Wassers im Zilinder; der andere Theil besteht aus der noch übrigen im Zilinder befindlichen flüßigen Masse. Nun stellt er sich vor, die horizontalen Schichten der Hyperboloide seyen allein in Bewegung und der übrige Theil der Masse bleibe in Ruhe. So ergäbe sich also in der Mitte der flüßigen Masse eine Art von Cataraкte, die sich immerfort erneuert, indeß das ringsum befindliche Wasser beständig in Ruhe bleibt. Bei Vergleichung des Resultats aus dieser Theorie mit der durch Versuche gefundenen Ausflußmenge machte Newton den übereilten Schluß, daß die Geschwindigkeit des Wassers in der Ausflußöfnung nur der Hälfte von der wirklichen Wasserhöhe zugehöre. Aber in der Folge bemerkte er selbsten, daß dieser Schluß mit der Höhe, zu welcher ein springender Strahl von selbsten emporsteigt, nicht bestehen könnte. Er hatte nicht gleich anfangs die Wirkung der Zusammenziehung erkannt; er bemerkte solche bei der zwoten Ausgabe, die davon 1714. erschien. Ohne den Grund seiner Theorie zu verlassen, betrachtete er den Querschnitt des zusammengezogenen Strahls als die wahre Oefnung, welche man als freien Durchgang für das Wasser anzunehmen hat, und die Geschwindigkeit an dieser Stelle, so wie sie wirklich vorhandenen Wasserhöhen zugehört. Hierdurch wird seine Theorie der Erfahrung angemessener; sie scheint aber gleichwohl

wohl auf keinen festen Grund gebaut zu seyn. Sie beruht im Grund auf willkührlichen und mit nichts bewiesenen Sätzen. Die Entstehung der Catarakte streitet gegen die Gesetze der Hydrostatik und gegen die Erfahrung, welche übereinstimmend beweisen, daß in einem Gefäs, aus welchem das Wasser durch eine Oefnung ablauft, alle Theilgen sich gegen diese Oefnung hindrängen.

Zu dieser kurzen Geschichte der Erfinder rechne ich nicht den Hrn. Varignon, welcher nur auf eine höchst unvollkommene Weise die Geschwindigkeit der Ausflüsse bestimmt hat; auch nicht Hrn. Guglielmini, welcher in seiner Abhandlung **vom Maas fließender Wasser** und in seiner Schrift **von der Natur der Flüsse**, die in Rücksicht auf den physischen und praktischen Theil treflich ist, keine andere als die Torrizellische Theorie gebraucht hat; noch sonst einen Haufen von Bücherschreibern, welche nur ihre Vorgänger ausgeschrieben haben.

Dieses war ohngefähr der Zustand der Hydraulik, als der berühmte Hr. Daniel Bernoulli, nachdem er in die Abhandlungen der Akademie zu Petersburg verschiedene Aufsätze über diesen Gegenstand hatte einrücken lassen, 1738. seine Hydrodynamik bekannt machte. Da man weder die Anzahl noch die Gestalt der flüßigen Theilgen kennt, und es folglich unmöglich ist, die Bewegung eines ieden einzelen Theilgens genau zu bestimmen, so zerlegt Herr

Ber-

Bernoulli die flüßige Materie in Massen, die sich nach einerlei Gesetz bewegen. Er nimmt zwo Voraussetzungen, die ihm der Erfahrung gemäs scheinen, und geschickt, um eine allgemeine und völlig sichere Theorie von der Bewegung flüßiger Massen zu begründen: fürs erste, daß sich die Oberfläche einer in einem mit einer Oefnung versehenen Gefäs befindlichen flüssigen Materie während dem Auslaufen beständig horizontal bleibe; fürs andere, daß, wenn man sich die ganze flüßige Masse in unendlich viel gleich große horizontale Schichten zertheilt gedenke, alle diese Schichten ohne Zwischenraum an einander liegen bleiben, und daß alle ihre Punkte lothrecht mit Geschwindigkeiten niedersinken, welche sich umgekehrt wie ihre Flächen oder die horizontale Querschnitte des Gefäßes verhalten. Hiernächst bedient er sich, um die Bewegung eines ieden Querschnitts zu bestimmen, des Grundsatzes von Erhaltung der lebendigen Kräfte, welches verstattet ist. Denn die flüßigen Schichten wirken, ohne sich zu stoßen und nach unmerklichen Aenderungen auf einander, fast wie feste Körper, die ein einziges System ausmachen und durch Fäden oder Hebel auf einander wirken, sich ein bestimmtes Maas von Bewegung mittheilen. Man weis aber, wiewohl man freilich keinen allgemeinen Beweis davon hat, daß der erwähnte Grundsatz in dergleichen Fällen statt findet. Hr. Bernoulli kommt auf solche Art auf Auflösungen, die in Rücksicht auf den Gang der

Rech-

Rechnung und auf die Simplicität der Resultaten ungemein nett sind. Die allgemeinen Lehrsätze wendet er auf ausgesuchte Beispiele an; überall herrscht tiefe Einsicht in die Analysis, gründliche Physik, die aus der Natur der Sache geschöpft ist, und Berechnungen nicht damit zu prangen, sondern so wie sie die Nothwendigkeit erfodert. Mit einem Wort, dieses Werk ist eines der schönsten und gelehrtesten Produkte des mathematischen Geistes.

Da Hr. Maclaurin und Hr. Joh. Bernoulli den Grundsatz von Erhaltung der lebendigen Kräfte nicht für direkt genug fanden, um ihn bei der Theorie von der Bewegung flüßiger Massen als Grundlage anzunehmen, so lößten sie das Problem durch andere Methoden auf, die ihnen natürlicher aus den Grundgesetzen der Mechanik zu fließen schienen. Uebrigens kamen sie mit Hrn. Dan. Bernoulli auf einerlei Resultate. Man hat ihren Methoden Dunkelheit vorgeworfen, inzwischen will ich mich in keine genauere Untersuchung hierüber einlassen. Die Untersuchungen des Hrn. Maclaurin, über diesen Gegenstand erschienen 1742. in seinem Werk von den Fluxionen, und die Hydraulik des Hrn. Joh. Bernoulli erschiene 1743. in der Sammlung seiner Werke.

Es war Hrn. d'Alembert vorbehalten, über die Theorie der Hydrodynamik eben das Licht zu verbreiten, womit er die Mechanik fester Körper aufgehellt hatte. Der allgemeine Grundsatz, den er eben ausfindig gemacht hatte, um die Bewegung fester Körper, welche

auf einander wirken, zu bestimmen, diente ihm auch im J. 1744. in seinem *Traité des fluides*, die Aufgaben, welche das Gleichgewicht und die Bewegung flüßiger Massen betreffen, auf die einfachste und netteste Weise aufzulösen. Dieser Gelehrte nimmt die nämlichen Voraussetzungen an, wie Hr. Dan. Bernoulli; nur ordnet er seine Berechnungen ganz anders an; er betrachtet in iedem Augenblick die wirkliche Bewegung einer Schichte als zusammengesetzt, aus der Bewegung, die sie im nächstvorhergehenden Augenblick hatte, und einer Bewegung die sie verloren hat. Die Gesetze des Gleichgewichts zwischen den verlornen Bewegungen, geben ihm die Gleichungen, welche die Bewegung der flüßigen Masse darstellen. Hierdurch löst Hr. d'Alembert auf eine leichte Art nicht nur die Aufgaben seiner Vorgänger auf, sondern noch eine Menge ganz neuer und sehr schwieriger Fragen. Sein Werk ist daher in mehr als einem Betracht selbst in seiner Grundlage originell; dieses ist es wenigstens vom Anfang bis zu Ende in Ansehung der Methode, deren sich der Verfasser bedient hat, und die in der Wissenschaft von der Bewegung, worin sie alle Gesetze auf die Gesetze des Gleichgewichts bringt, immer Epoche machen wird.

Obgleich die Hydrodynamik auf solche Art zu einem hohen Grad von Vollkommenheit gestiegen war, so blieb sie gleichwohl an die Hypothese gebunden, daß die Schichten der flüßigen Masse ihre parallele Lage behalten, oder daß alle Punkte von einem und eben dem Querschnitt sich nach einer und eben derselben Richtung bewegen.

bewegen. Es war zu wünschen, daß man die Bewegung eines Punkts der flüßigen Masse, nach iedwelcher Richtung durch Gleichungen ausdrücken könnte. Hr. d'Alembert fand diese Gleichungen nach diesen zwoen Grundsätzen: daß ein rechtwinklichter Kanal, in einer ruhig stehenden flüßigen Masse genommen, selbst im Gleichgewicht ist; und daß ein Theil der flüßigen Masse, indem er aus einer Stelle in eine andere tritt, einerlei körperlichen Raum behält, wenn die flüßige Masse sich nicht zusammendrucken läßt, oder wenn sie sich, falls sie elastisch ist, nach einem gegebenen Gesetz ausbreitet. Er machte diese sehr tiefsinnige und äusserst sinnreiche Methode in seinem *Essai sur la résistance des fluides* 1752. bekannt. In seinen *Opuscules mathématiques* hat er sie noch verbessert. Hr. Euler hat diese Aufgabe in einem noch weitern Umfang und in größerer Allgemeinheit in den Denkschriften der Akademien zu Berlin und Petersburg abgehandelt. Auch Herr de la Grange hat diese Untersuchung zum Gegenstand einer tiefsinnigen Abhandlung gemacht (Acad. de Berl. 1781.).

Diese großen Geometer scheinen alle Mittel erschöpft zu haben, welche die Analysis geben kann, die Bewegung flüßiger Massen zu bestimmen. Nur Schade, daß ihre Formeln durch die Natur des Gegenstandes so zusammengesetzt sind, daß sie sich nur als geometrische Wahrheiten ansehen lassen, die für sich selbst höchst schätzbar sind, nicht aber als Sinnbilder, welche geschickt wären, die wirkliche physische Bewegung flüßiger Massen sinnlich abzubilden.

Es gibt Wissenschaften, die nach ihrem Gegenstand nur bestimmt sind, eine Lieblingsneigung oder unruhige Geschäftigkeit des menschlichen Geistes zu befriedigen; dagegen gibt es andere, deren Bestimmung nicht bloße Befriedigung für den Verstand ist, sondern Anwendung auf die Bedürfnisse der menschlichen Gesellschaft; und von dieser Art ist insbesondere die Hydrodynamik. Die Bestimmung der durch eine gegebene Oefnung auslaufenden Wassermenge, die Untersuchung der Bewegung des Wassers in künstlichen oder natürlichen Kanälen, die Kenntnis der Kräfte, welche die flüßigen Massen durch ihren Druck oder durch ihren Stos ꝛc. ausüben, sind Gegenstände, die ihren beständigen Nutzen in der Ausübung haben. Man muß es sich also äußerst angelegen seyn lassen, die erwähnte Wissenschaft immer zur höhern Vollkommenheit zu bringen; und wenn Fragen vorfallen, zu deren Auflösung die Geometrie nur zu beschwerliche oder ganz unzulängliche Mittel an die Hand gibt, so muß man diesen Mangel durch die Erfahrung zu ersetzen suchen. Die Sache ist nicht unmöglich; oft wiederholte Beobachtungen, ihre aufmerksame Zergliederung und Anordnung, so gut es möglich ist, nach einem allgemeinen Gesetz, können eine Art von Theorie geben, der zwar die geometrische Strenge fehlt, die aber einfach, lichtvoll und brauchbar ist. Dieses ist die Richtschnur, wonach ich gegenwärtiges Werk ausgearbeitet habe; den Entwurf dazu hatte ich noch als Professor der Mathematik auf der kön. Ingenieurschule zu Mézières gemacht.

gemacht. Es war daselbst mein Beruf, die jungen Ingenieurs in der Mechanik flüßiger Körper, die ihnen unentbehrlich ist, zu unterrichten. Ich diktirte ihnen verschiedene Aufsätze, welche nicht zur öffentlichen Bekanntmachung bestimmt waren; ich bemerkte in vielen Punkten die Unzulänglichkeit der Theorie, und wollte daher vor der Ausarbeitung eines Lehrbegriffs erst die Erfahrung zu Rath ziehen. Meine Gedanken über diesen wichtigen Gegenstand wurden von den aufgeklärten und für das Wohl eifrigst bedachten Männern, welche die Vorsteher der Ingenieurschule waren, beliebt. Der Herr Herzog von Choiseul, damaliger Minister beim Kriegsdepartement, bewilligte einen gewissen Aufwand zu anzustellenden Beobachtungen; ich stellte solche an, überlegte alles genau, und machte 1771. ein neues Werk von der Hydrodynamik bekannt, die man weder für was Unnützes noch für eine Wiederholung derer schon vorher erschienenen gehalten hat.

Diese Schrift ist in zween Theile abgetheilt, wovon der eine die Theorie und der andere die Erfahrungen enthält. Seit der ersten Ausgabe habe ich darin eine so große Menge von Zusätzen aller Art gemacht, daß ich mich genöthigt sahe, ihm hier eine fast ganz neue Gestalt zu geben, und neue Kupfer stechen zu lassen.

Da die Grundgesetze der Hydrostatik sehr einfach und bekannt und sonsten schon durch unzählige Erfahrungen bestättigt worden sind, so war mir dabei nichts weiter übrig, als sie methodisch und umständlich genug zu entwickeln, um ihren Gebrauch zu erleichtern, und

dieses war hierbei mein beständiges Ziel. Die Gesetze der Hydraulik sind weit verwickelter und führen oft auf Schwierigkeiten, welche der Mechanik und Analysis unübersteiglich sind. Ich habe alle meine Kräfte aufgebothen, um auf eine deutliche und einfache Weise die theoretischen Grundsätze festzusetzen, aus welchen sich einiger Nutzen schöpfen ließe.

Bei der über meinen Gegenstand vorfallenden Menge von Fragen, welche sich auf das Gleichgewicht und die Bewegung flüßiger Massen beziehen, gibt es viele, die noch gar nicht untersucht worden waren; andere waren es nur auf eine unvollkommene Weise und unter Verhältnissen, die von aller Anwendung entfernt waren. Meine Arbeit wird daher in diesem Betracht das Verdienst der Neuheit haben, wofern ich sie meinem Zweck gemäs ausgeführt habe.

Das Publikum hat die ersten Versuche dieser Arbeit mit Nachsicht beurtheilt; ich bitte es bei dieser neuen Ausgabe, worauf ich alle mögliche Sorgfalt verwendet habe, um eben diese Güte; es hat es ohne Zweifel schon bemerkt und wird es auch hier finden, daß ich im Vortrag meiner eigenen Untersuchungen keine Gelegenheit habe vorbeigehen lassen, den Entdeckungen solcher Schriftsteller, welche mir in diesem Fache vorgegangen sind, Gerechtigkeit wiederfahren zu lassen.

Inhalt
dieses Werks

Erster Theil.
Allgemeine Begriffe.

Erste Abtheilung.
Hydrostatik.

I. Kap. Allgemeine Gründe vom Gleichgewicht flüßiger Massen.

II. Kap. Vom Gleichgewicht einer den Eindrücken der Schwere überlassenen flüßigen Masse, und dem Druck, den solche gegen die Wände und den Boden des Gefäßes, worin sie enthalten ist, ausübt.

III. Kap. Vom Gleichgewicht und dem Druck vermischter oder ungleich dichter flüßiger Massen.

IV. Kap. Von der Dicke, welche die Wände der Röhrenleitungen haben müssen, wenn sie dem Druck einer darin enthaltenen ruhigen flüßigen Masse hinlänglich widerstehen sollen.

V. Kap. Vom Gleichgewicht flüßiger Massen in beugsamen Gefäßen.

VI. Kap. Von elastischen flüßigen Massen und insbesondere vom Gleichgewicht der Luft; Erfahrungssätze, auf welchen dieses Gleichgewicht beruht.

VII. Kap. Theorie der Pumpen in ihrem Zustand des Gleichgewichts.

VIII. Kap. Fortsetzung der vorigen Untersuchung ꝛc.

IX. Kap. Von der Dichtigkeit der Atmosphäre in verschiedenen Höhen ꝛc.

X. Kap. Von den Veränderungen der Barometerhöhen ꝛc.

XI. Kap. Vom Gleichgewicht schwimmender Körper.

XII. Kap. Von den Lagen schwimmender Körper im Stand des Gleichgewichts.

XIII. Kap. Von der Sicherheit und den einfachen Schwankungen schwimmender Körper.

XIV. Kap. Fortsetzung.

XV. Kap. Von der Gestalt der Erde ꝛc.

Zwote

Zwote Abtheilung

Hydraulik.

I. Kap. Allgemeine Lehren von der Bewegung flüßiger Massen.

II. Kap. Vom Ausfluß durch eine kleine Oefnung.

III. Kap. Vom Ausfluß durch eine kleine Oefnung unter besonderer Einschränkung.

IV. Kap. Vom Ausfluß durch iede horizontale Oefnung ꝛc.

V. Kap. Methoden, die genauer als die vorigen sind.

VI. Kap. Vom Ausfluß aus zusammengesetzten Gefäßen ꝛc.

VII. Kap. Fortsetzung.

VIII. Kap. Vom Ausfluß, wenn das auslaufende Gefäs sich selbsten in Bewegung befindet.

IX. Kap. Von der Schwungbewegung des Wassers in einem Heber.

X. Kap. Von der Reibung des Wassers ꝛc.

XI. Kap. Von der Bewegung elastischer flüßiger Massen ꝛc.

XII. Kap. Von der schwingenden Bewegung der Lufttheilgen.

XIII. Kap. Vom Stos oder Widerstand flüßiger Massen.

XIV. Kap. Von den hydraulischen Maschinen ꝛc.

XV. Kap. Fortsetzung und von den vertikalen unterschlächtigen Wasserrädern.

XVI. Kap. Von den horizontalen.

XVII. Kap. Von den oberschlächtigen.

XVIII. Kap. Von den Maschinen, welche durch die Rückwirkung des Wassers betrieben werden.

XIX. Kap. Theorie von der Bewegung des Wassers bei Pumpen.

Nöthige Verbesserungen, welche vor Durchlesung dieses Buchs vorgenommen werden müssen.

Seite 27 Zeile 27 statt 200 Toisen, lies: 100 Toisen

— 38 — 24 — πHED, lies: πhED

— 39 Hier ist folgender Satz einzuschalten:

34. I. Zus. Wenn also eine flüßige Masse, deren specifische Schwere π ist, unter einer Höhe h auf eine Fläche oder auf eine andere flüßige Masse druckt, so kann man für diesen Druck den Druck einer flüßigen Masse substituiren, deren specifische Schwere p ist, wenn man dieser letztern eine Höhe gibt, die durch $\frac{\pi h}{p}$ ausgedruckt wird.

— 54 Zeile 27 statt p = lies: p' =

— 57 — 7 — $\pm\sqrt{\left(\frac{}{b^2} - y^2\right)}$ lies: $\pm\sqrt{\left(\frac{c^4}{b^2} - y^2\right)}$

— 97 — 28 — π lies: Π

— 100 — 1 — $y + \frac{Au}{KZ}$ lies: $y \times \frac{Au}{KZ}$

— 104 — 2 Hier setze man nach den Worten: seyn müsse, noch hinzu: man hat also

$$y' = \frac{h(a-x)}{hb + a - x'}$$

— 17 statt y^{n-1} lies: x^{n-1}

— 158 — 25 — SE : SG lies: SE . SG

— 159 — 23 — $a\sqrt{\frac{\pi - p}{a}}$ lies: $a\sqrt{\frac{\pi - p}{p}}$

— 178 — 15 — iz lies: i'z

Seite

Seite 188 Zeile 5 statt $\frac{dPdds}{dt^2}$ lies: $\int \frac{dPdds}{dt^2}$

— 191 — 11 — $\int \frac{r'dpddr'}{dt^2}$ lies: $\int \frac{q'dpddr'}{dt^2}$

— 199 — 13 — pMddt lies: pMddϑ —

— 205 — 31 — $\frac{(ZB)^2}{(BZ)^2}$ lies: $\frac{(ZP)^2}{(BZ)^2}$

— 209 — 9 — $16\,b^2\,a^2\,\vartheta$ lies: $16\,b^2\,a^3\,\vartheta$

— 220 — 20 — $-\frac{fb^2}{k2}$ lies: $-\frac{fb^2}{2k}$

— 248 — 27 — Rq : S lies: Rq : Sq

— 258 — 17 — $K'\sqrt{{}^{\vartheta}h'}$ lies: $K'\sqrt{h'}$

— 269 — 22 — $\frac{{}^{\vartheta}A\sqrt{h}}{K\sqrt{h}}$ lies: $\frac{{}^{\vartheta}A\sqrt{h}}{K\sqrt{a}}$ —

— 297 und 298 — $\left(1-c^{-\frac{f}{z}}\right)$ lies: $\left(1-c^{-fz}\right)$

— 305 Zeile 3 — $\left(\frac{H^2}{Z^2}\right)$ lies: $\left(\frac{H^2}{z^2}\right)$

— 321 — 14 — $\frac{p^r dq}{(a+q)^r}$ lies: $\frac{p^n dq}{(a+p)^r}$

— 366 — 23 im Nenner statt $G^2.M'$ lies: $G^2.M^2$

— 386 — 13 statt $\frac{P+M}{gP}$ lies: $\frac{gP}{P+M}$

— 416 — 15 — $\sqrt{\frac{aHQ(q-D)}{p.(Q-D)}}$ l. $\sqrt{\frac{aHQ(q-D)}{q(Q-D)}}$

— 446 — 23 — $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ lies: $\left(\frac{ddz}{dS^2}\right)$

— 447 — 1 — $\frac{kdQ}{qdS}$ lies: $\frac{kdQ}{QdS}$ —

Seite

Seite 447 Zeile 10 statt $-k\left(\frac{d\,d\,s}{d\,S^2}\right)$ lies: $-k\left(\frac{d\,d\,x}{d\,S^2}\right)$

— 448 — 23 — $\varphi^2\,\alpha\,\delta\,d\,t$ lies: $\varphi'\,\alpha\,\delta\,d\,t$

— 450 — 1 — $\left(\frac{d\,d\,x}{d\,y\,d\,y}\right)$ lies: $\left(\frac{d\,d\,x}{d\,u\,d\,y}\right)$

— 452 — 1 — $-\sqrt{k}:f':S$ lies: $-\sqrt{k}.f':S$

— 487 — 7 u. 8 — $=R^2\left(V-u\frac{(C\,M)^2}{(C\,Q)^2}\right)^2\times\frac{(C\,Q)^2}{(C\,M)^2}$ setze man $=R^2.(n\,z)^2$, oder $V'^2\times\sin(D\,M\,z)^2=$
$=R^2\left(V-u\frac{(C\,M)^2}{(C\,Q^2)}\right)\times\frac{(C\,Q)^2}{(C\,M)^2}$

— 497 — 3 — Werth lies: Werth $\frac{V}{3}$

— 6 — $\frac{F}{A.U^2}$ lies: $\frac{F}{A:U^2}$

— 522 — 16 — $\sin z\,M\,n=\frac{a.V.\cos p-u\,(a-x)}{a.\,M\,z}$
setze man $=\frac{n\,z}{M\,z}=\frac{a.V\cos p-u(a-x)}{a.\,M\,z}$

— 522 — 20 — $n\,d\,x\,(a\,V.\cos p-u\,(a-x)^2$ lies: $\frac{n\,d\,x.\,(a.\,V.\cos p-u\,(a-x)^2}{a^2}$

— 523 — 11 — $a-\frac{c\,h}{\cos p}$ lies: $a-\frac{c\,k}{\cos p.}$

— 528 — 16 — $c\int\pi\,d\,t$ lies: $c\int\Pi\,d\,t$

— 534 — 7 — $-\frac{1}{\cos(m-(\theta+r).q)}$ lies: $-\frac{1}{\cos(m-\theta+1)\,q)}$

Seite

Seite 535 Zeile 9 statt π c lies: $\pi' c$

— 536 — 5 — π. c lies: $\pi' c$

— 545 — 4 — $(\sin z^2)$ lies: $(\sin z)^2$

— 547 — 4 von unten, statt $Z \frac{y}{2}$ lies: $Z = \frac{y}{2}$

— 549 bis 553 ist zu bemerken, daß die in der Anmerkung vorgetragene Berechnung des Windstoßes in der Ausübung zwar bei weitem richtigere Resultate gibt, als die gemeine Theorie; in der That beruht diese größere Uebereinstimmung der Berechnung mit der Erfahrung keineswegs auf der Verdichtung der Luftmasse. Ich habe seitdem weiter hierüber nachgedacht, und werde in einer besondern Abhandlung meine ietzige Theorie vom Stos flüßiger Massen überhaupt mittheilen.

— 554 Zeile 10 statt IV, lies: 386. IV.

— 566 — 19 — Pp, CM lies: Pp. CM

— 595 — 5 v. u. statt $\frac{Ku. \sin \lambda}{y. X}$ l. $= \frac{Ku. \sin \lambda}{yX}$

— 629 — 19 statt Formel l. Formel $mvdv = Fds$

Ich gestehe gerne, daß mir im Manuskript selbsten manche Fehler entwischt waren, und daß dieserwegen und wegen des allzu schwierigen Setzens einer Schrift dieser Art bei meiner Entfernung vom Druckort gewiß eine weit größere Anzahl von Fehlern zu erwarten gewesen wäre, wenn nicht mein Freund, der geschickte Hr. Doktor Grambs in Frankfurt die Gütigkeit gehabt hätte, die verdrießliche Korrektur von diesem Werk zu übernehmen, wofür ich ihm hier meinen öffentlichen Dank abstatte.

Erster

Erster Theil
welcher die
Hydrostatik
und
Theorie der Hydraulik
enthält

Erste Abtheilung
Hydrostatik

Hydrodynamik

Allgemeine Begriffe

I.

Die Hydrodynamik ist im allgemeinen Verstand eine Wissenschaft von den Gesetzen des Gleichgewichts und der Bewegung flüßiger Massen; derjenige Theil dieser Wissenschaft, welcher das Gleichgewicht flüßiger Massen betrachtet, heißt die Hydrostatik, und der, welcher ihre Bewegung betrachtet, die Hydraulik.

II.

Flüßig nennt man eine Masse, die aus lauter äußerst kleinen Theilgen besteht, wovon keines an das andere gebunden ist, und die nach allen Seiten hin vollkommen bewegbar sind; dahin gehören das Wasser, das Queckſilber, die Luft, die Flamme u. dgl. (†)

Nach

(†) Das Queckſilber ist eigentlich ein metallischer Stof; da es sich aber gewöhnlich im Stand der Flüßigkeit befindet, so sehen wir ihn aus diesem Gesichtspunkt als einen ordentlich flüßigen Körper an.

Nach dieser Erklärung werden die flüßigen Massen als vollkommen flüßig angesehen; aber nach der physischen Beschaffenheit gibt es keine flüßige Masse, deren Theilgen nicht mit einer gewissen Kraft unter einander zusammenhiengen, die nicht bei allen gleich groß ist, und die bei einerlei flüßigen Masse wegen der Wärme, Kälte oder andern physischen Ursachen verschieden seyn kann. Wir haben täglich Beweise dieses Zusammenhangs vor unsern Augen: wenn man Wasser auf den Boden ausschüttet, so verrathen die Theilgen bei ihrer Zerstreuung einigen Zusammenhang, der ihrer Trennung hinderlich fällt; wenn man eine flüßige Masse tropfweis fallen läßt, so bemerkt man, daß ihre Theilgen sich gleichsam in einen Faden ziehen, der mehr oder minder merkbar ist; mehrere Queckſilberkügelgen, die einander so nahe kommen, daß sie sich berühren, laufen zusammen und erscheinen als ein einziges Ganzes u. s. w. Es ist wahrscheinlich, daß die erwähnte Eigenschaft von der Rauhigkeit der flüßigen Theilgen herrührt, die mit der gegenseitigen Anziehung der Theilgen unter einander verbunden ist. Hier ist es meine Absicht nicht, mich tief in diese Untersuchung einzulassen, oder zu untersuchen, worinn die Natur der Flüßigkeit bestehe, oder nachzuforschen, was die flüßigen Theilgen für eine Gestalt haben, oder ob diese Theilgen vermöge einer verborgenen Ursache das haben, was man eine innerliche Bewegung nennt, die von den Eindrücken der Schwere oder anderer bekannten Kräfte unabhängig wäre. Alle diese Untersuchungen, die doch nichts anders als Muthmaßungen verstatten, überlasse ich Physikern und Chemisten.

Einige Schriftsteller unterscheiden liquidité von fluidité als Species vom Genus. Nach ihnen ist ein Körper fluide, wenn seine Theilgen nicht mit einander verbun-

verbunden sind, beim Berühren leicht ausweichen und sich gleichsam von selbst ausbreiten; in dieser Bedeutung sind feiner Sand, Asche, iede Anhäufung von kleinen Körngen u. dgl. fluides; aber, sagen sie, wenn ein Körper liquide seyn soll, so müssen seine Theilgen eine solche Bewegbarkeit haben, und dergestalt mit ihrem Gewicht gegen einander wirken, daß sie sich, wofern sie in hinlänglicher Menge vorhanden sind, in eine horizontale Oberfläche ausbreiten. Ich werde hier auf diese Unterscheidung nicht achten; und um dem allgemeinern Sprachgebrauch zu folgen, werde ich beide Benennungen unter einander gebrauchen, so daß ich zur Bezeichnung einer eigentlich flüßigen Masse die Benennungen liqueur oder fluide ohne Unterschied gebrauchen werde. In gegenwärtiger Schrift ist nur von den eigentlich flüßigen Körpern die Rede, und niemalen von den unvollkommenen, wie Sand, Asche u. dgl. sind (*).

III.

Alle bekannte flüßige Körper lassen sich in solche abtheilen, die sich nicht zusammendrücken lassen, und in solche, die sich zusammendrücken lassen oder elastisch sind.

Unter denen von der erstern Art versteht man diejenigen, deren Umfang sich weder vergrößern noch verkleinern läßt, wenn man solches durch die gewöhnlichen Kräfte des Drucks oder des Stoßes zu bewirken sucht; von dieser Art ist z. B. das Wasser. Wenn man

(*) Man sieht, daß sich die letzten Sätze lediglich auf das französische Original beziehen, und daß solche in dieser Uebersetzung sehr wohl hätten wegbleiben können.

man nämlich nach den Versuchen der ersten Akademiker zu Florenz, die nachher von allen Physikern wiederholt worden sind, in eine hohle Kugel von Gold, Silber, Kupfer, Zinn oder Blei Wasser verschließt, und nun, um das Wasser zu verdichten oder den Raum, den es einnimmt, zu verkleinern, die Kugel vermittelst einer Presse mit Gewalt zusammenzudrucken bemüht ist oder sie sogar mit Hammerschlägen trifft, so findet sich, daß sich das Wasser in keinen engern Raum treiben läßt, und daß es sich eher wie Thau durch die es umgebende Wand durchdrängt als einen kleinern Raum einnimmt. Eben so verhält es sich mit Wein, Quecksilber u. dgl. Es ist aber zu merken, daß diese Wirkung, welche sich durch die nur angezeigten Mittel auf keine Art erhalten oder wenigstens nicht anders als durch die Anwendung weit größerer Kräften als die Natur unserer wirkenden Ursachen und derer bei dieser Art Versuchen gebrauchten Materien verstattet, merkbar machen läßt; es ist zu merken, sage ich, daß diese Wirkung durch die Kraft der Wärme oder Kälte sehr leicht und sehr geschwind zu erhalten ist. So nimmt das Wasser, bei gleicher Masse, warm einen größern Raum ein als kalt; das Quecksilber, das man vergebens versuchen würde, durch Gewichte oder durch den Stoß zu verdichten oder auszudehnen, ist gegen die Eindrücke der Kälte oder Wärme ungemein empfindlich; iene verdichtet es, diese dehnt es auseinander mit großer Bewegbarkeit, wie sich aus den Quecksilberthermometern urtheilen läßt.

Man sieht hieraus, daß bei unelastischen flüßigen Massen die gewöhnlichen Kräfte des Drucks oder des Stoßes in Vergleichung mit den Kräften der Ausdehnung oder Zusammenziehung, welche die Wirksamkeit der Wärme oder der Kälte hervorbringen, für nichts zu achten sind.

Die

Die elastischen flüßigen Massen sind diejenigen, welche in einen größern oder kleinern Raum gebracht werden können, nachdem sie mehr oder weniger gedruckt werden. Z. B. ein Luftballon, den man mit den Händen zusammendruckt, nimmt einen kleinern Raum ein, und dehnt sich hiernächst wieder aus, sobald der äußere Druck wieder nachläßt oder geringer wird; hierbei ist zu bemerken, daß zu eben dem Effekt die Wirksamkeit der Wärme und Kälte weit beträchtlicher ist, als der äußere Druck; so breitet sich erwärmte Luft sehr schnell aus, oder strebt sich auszubreiten, und wenn sie fest eingeschlossen ist, so erlangt sie eine größere Federkraft; durch die Wirksamkeit der Kälte verdichtet sich eben diese flüßige Masse.

Wir brauchen nicht zu erinnern, weil wir es anderswo bemerkt haben, daß diese beiden Klassen von Flüßigkeiten nicht so angesehen werden dürfen, als ob sie geometrisch von einander abgesondert wären. Es gibt keine flüßige Masse, die vollkommen unelastisch oder vollkommen elastisch wäre; alles geht in der Natur stufenweise; wir sind aber bei unsern Untersuchungen öfters genöthigt, die äußersten Fälle zu untersuchen, um die Effekte, welche sich auf verschiedene Eigenschaften eines Körpers beziehen, desto besser zu entwickeln, und ieder dieser Eigenschaften ihre eigenthümliche Bestimmung und nicht die von einer andern anzuweisen.

IV.

Jede flüßige Masse, die, soweit sie ausgebreitet ist, überall gleiche Dichtigkeit hat, oder die aus lauter Theilen von einerlei Beschaffenheit zusammengesetzt ist, wenn gleich die Dichtigkeit an verschiedenen Stellen verschieden wäre, heißt eine **gleichartige flüßige**

Masse. Von dieser Art ist ieder Wasservorrath; die Theilgen am Boden werden zwar stärker an einander gedruckt, als die an der Oberfläche, aber dieser größere Druck verkleinert den Umfang nicht oder vergrößert nicht die Dichtigkeit, und das Wasser ist außerdem nach dem ganzen Raum, den es einnimmt, aus lauter gleichen und ähnlichen Theilen zusammengesetzt. Die Luft ist gleichfalls eine gleichartige Flüßigkeit, wenn sie gleich in den tiefern Gegenden (nach Verhältnis des von ihrem eigenen Gewicht herrührenden stärkern Drucks) eine größere Dichtigkeit hat, als in den höher liegenden, weil sie durch die ganze Atmosphäre hindurch aus gleichen und ähnlichen Theilen zusammengesetzt ist. Inzwischen müssen wir bemerken, daß man, um diejenigen Arten von flüßigen Massen, deren Dichtigkeit verschieden ist, ohne daß sie sonst verschiedene Natur haben, besonders auszuzeichnen, solche **gleichartige Flüßigkeiten mit veränderlicher Dichtigkeit** nennen sollte.

Eine aus verschiedenen flüßigen Massen z. B. aus einer Schichte Queckſilber, einer Schichte Wasser, einer Schichte Oel u. s. w. zusammengesetzte Flüßigkeit, würde eine **ungleichartige Flüßigkeit** heisen. Unter der blosen Benennung einer flüßigen Masse werde ich allemal eine gleichartige verstehen, und zwar eine von unveränderlicher Dichtigkeit, wofern nicht ausdrücklich das Gegentheil erinnert wird.

V.

Man muß sich erinnern, daß die **Dichtigkeit** eines (festen oder flüßigen) Körpers die Menge der in einem zur Einheit angenommenen Raum enthaltenen Materie dieses Körpers ist; oder, welches auf eben das hinauslauft, der Quotient, welchen die Masse

des

des Körpers durch die Anzahl Kubikfuse oder Kubikzolle (nachdem man zur Bestimmung des körperlichen Raums den Kubikfus oder den Kubikzoll als Einheit gebraucht) die er enthält, dividirt gibt. Wenn also M die Masse, G ihr körperlicher Raum oder ihre Größe, D die Dichtigkeit genennt wird, so hat man $D = \frac{M}{G}$ und daher $M = G.\ D$, das ist: die Masse ist gleich dem Produkt aus dem körperlichen Raum in die Dichtigkeit. Man sieht, daß die Dichtigkeit eines Körpers sich allemal auf die eines andern bezieht. Dabei muß man nicht vergessen, die körperlichen Räume verschiedener Massen nach Einheiten von einerlei Art zu bestimmen.

Eben so ist die specifische Schwere eines Körpers das Gewicht, das mit einer bestimmten zur Einheit angenommenen Größe dieses Körpers verbunden ist; oder, welches das Nämliche ist, der Quotient, welchen das absolute Gewicht des Körpers durch seinen körperlichen Inhalt dividirt gibt. Setzt man also das absolute Gewicht eines Körpers $= P$, seinen körperlichen Inhalt $= G$, und seine specifische Schwere $= p$, so hat man $p = \frac{P}{G}$ und daher $P = G.\ p$ das ist: **das absolute Gewicht ist gleich dem Produkt aus dem körperlichen Inhalt in die specifische Schwere.** Es sey z. B. der gegebene Körper süßes Wasser; man weis, daß ein Kubikfus süßes Wasser beinahe 70 Pfund wiegt; nimmt man also das Gewicht eines Kubikfuses Wasser für die specifische Schwere dieser Flüßigkeit an, so haben wir $p = 70$ ℔ und $P = G.\ 70$ ℔; wenn $G = 100$ Kubikfus ist, so kommt $P = 7000$ ℔; ist $G = 25$ Kubikfus, so erhält man $P = 1750$ ℔.

In einerlei Gegend der Erde oder in einerlei Breite sind die Massen den Gewichten proportional; man muß also für diesen Fall annehmen, daß die Dichtigkeiten zweener Körper ihren specifischen Schweren proportional sind, weil die Dichtigkeiten dieser beiden Körper Massen sind, die gleichen Raum einnehmen, und ihre specifische Schweren gleichfalls zweene Gewichte unter einerlei Raum sind.

Erste Abtheilung

Hydrostatik

Erste Abtheilung

welche die

Hydrostatik

enthält

Erstes Kapitel.

Allgemeine Gründe vom Gleichgewicht flüßiger Massen.

1.

Die Anzahl, Größe und Richtung der Kräfte, welche auf einen festen Körper oder auf ein System fester Körper wirken, mag beschaffen seyn wie man will, so kann man allemal die Bedingungen des Gleichgewichts oder der Bewegung durch mehr oder weniger einfache analytische Formeln bestimmen, nachdem es die Bedingungen der Aufgabe mehr oder weniger sind; und wenn sich in einer großen Anzahl von Fällen diese Formeln zu verwickelt finden, als daß sie zur Befriedigung und mit Nutzen angewendet werden könnten, so muß man diesen üblen Erfolg der Unvollkommenheit der Analysis und nicht der Mechanik beimessen, welche alles geleistet hat, was man von ihr fodern konnte. Mit den flüßigen Körpern verhält es sich anders; denn wir kennen weder die Anzahl, noch die Masse, noch die Gestalt, noch den körperlichen

Raum

Raum der kleinsten Theilgen, woraus die flüßigen zusammengesetzt sind, und es ist uns daher schlechterdings unmöglich, die Wirkung und Gegenwirkung, welche die flüßigen Theilgen vermöge derer sie druckenden Kräfte gegen einander ausüben, gradezu in Rechnung zu bringen. Und wenn man übrigens auch die Gleichungen der Aufgabe zu erfinden im Stand wäre, so würde man doch in der Ausübung gar keinen Nutzen daraus ziehen können, weil ihre Verwickelung unvermeidlich und für die Analysis unübersteiglich wäre. Man muß also hier die Erfahrung bei der Mechanik zu Hülfe nehmen, und die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüßiger Massen auf eine Haupteigenschaft gründen, die ihnen allen gemein ist und sie auf eine besondere Art auszeichnet. Es ist aber unter den Eigenschaften flüßiger Massen die einfachste, und welche unmittlbar aus ihrer Natur folgt, diese, daß eine flüßige Masse nicht im Gleichgewicht seyn kann, wofern nicht iedes Theilgen nach allen Seiten gleich stark gedruckt wird. Wir wollen daher diesen Satz zur Grundlage der Hydrostatik annehmen.

Fundamentalgesetz des Gleichgewichts flüßiger Massen.

2. **Wenn eine flüßige Masse im Gleichgewicht ist, so mögen was für Kräfte man will, auf ihre Theilgen wirken, es wird alsdann iedes Theilgen oder unendlich kleine Stückgen der Masse nach allen möglichen Seiten gleich stark gedruckt; und umgekehrt: wenn iedes Theilgen nach allen Seiten gleich stark gedruckt wird, so muß das ganze System im Gleichgewicht seyn.**

Denn 1stens) weil alle Theilgen der flüßigen Masse von einander unabhängig und nach allen Seiten hin

hin gleich bewegbar sind, so erhellet, daß wenn irgend ein Theilgen nach einer Seite weniger als nach einer andern gedruckt würde, so müßte es nothwendig nach der Seite sich hinbewegen, von der es den schwächern Druck erhielte und es könnte das System nicht mehr im Gleichgewicht bleiben, welches gegen die Voraussetzung ist.

Dieses Gesetz wird durch die Erfahrung bestättigt; denn wenn man auf einerlei Tiefe einer in einem Gefäß befindlichen Masse in den Wänden eine Oefnung macht, und in diese Oefnung einen Spunden einsteckt, um den Ausfluß zu verhindern, so wird dieser Spunden von der flüßigen Masse allemal gleich stark zurückgetrieben, es mag die Oefnung horizontal oder wie man will gegen den Horizont geneigt seyn. Alles dieses gilt ebensowohl von unelastischen als von elastischen flüßigen Massen. Dabei hat man zu merken, daß es physisch möglich ist, daß wegen der gegenseitigen Anziehung der Theilgen das Gleichgewicht bestehen kann, wenn gleich ein Theilgen von einer Seite weniger als von einer andern gedruckt würde; aber diese Ungleichheit des Drucks darf nur äußerst gering seyn, und der vorgetragene Satz für vollkommen flüßige Massen, wie wir sie hier annehmen, ist in aller Schärfe richtig.

2tens) Es ist eben so klar, daß eine flüßige Masse, deren Theilgen von allen Seiten gleich stark gedruckt werden, in Ruhe bleiben müsse; hieraus entsteht in allen nach einander folgenden Stellen, soweit sich die flüßige Masse erstreckt, Ruhe oder Gleichgewicht.

3. Anmerk. Man sieht aus dieser Eigenschaft den Unterschied, welchen man zwischen dem Gleichgewicht fester und dem Gleichgewicht flüßiger Körper machen muß. Bei den festen Körpern macht der Zusammenhang der Theile, daß eine an irgend einem

Punkt

Punkt angebrachte Kraft die ganze Masse parallel treibt, und daß sich folglich ein Gleichgewicht ergeben muß, wenn man dieser Kraft eine andere eben so große grade entgegensetzt; wenn aber bei den flüßigen Massen nicht ieder Tropfen besonders genommen in allen Punkten seiner Oberfläche nach allen Seiten gleich stark gedruckt wird, so muß er sich nach der Seite hinziehen, von der er den schwächsten Druck erhält. Man setze z. B. es werden an einem Tropfen zwo gleiche Kräfte in entgegengesetzter Richtung angebracht, und wieder zwo andere unter einander gleiche aber grade entgegengesetzte Kräfte senkrecht auf die beiden ersten; iede der beiden erstern sei = 1, und iede der letztern = 2, so kann der Tropfen nicht in Ruhe bleiben; er muß sich nach der Richtung der Kräfte 1 verlängern und nach der Richtung der Kräfte 2 platt gedruckt werden; zugleich müssen seine Theilgen durch die zwischen den angebrachten Kräften 1 und 2 vorhandene Zwischenräume ihren Ausweg nehmen. Wäre aber der Tropfen ein fester Körper, so verbliebe er offenbar im Gleichgewicht. Indem man ihn also als flüßig betrachtet, bildet er eine Vereinigung von Theilgen, deren Zahl und Gestalt von der Art sind, daß der Tropfen nicht im Gleichgewicht bleiben kann, wenn er nicht in iedem Punkt nach allen Seiten auf gleiche Art gedruckt wird.

4. I. Lehrs. **Wenn man an irgend einer Stelle M eines Gefäßes ABCD (fig. 1.) das von allen Seiten verschlossen und mit einer ohne Schwere angenommenen Flüßigkeit angefüllt ist, eine Oefnung macht, woran ein Kolben angebracht wird, den eine Kraft P andruckt, so muß sich die Wirkung dieser Kraft nach allen Seiten durch die flüßige Masse fortpflanzen, und ieder Punkt eines Tropfens wie fgkh muß**

eben

eben den Druck leiden, wie ieder unmittelbar am Kolben anliegende Punkt.

Denn der Druck, den ieder unmittelbar am Kolben anliegende flüßige Punkt leidet, pflanzt sich in die anliegenden Punkte fort; ieder von diesen theilt solchen wieder seinen nächstanliegenden mit und so immer weiter, soweit sich die flüßige Masse erstreckt. Der Druck eines ieden Punkts der flüßigen Masse ist also nothwendig grade der nämliche, wie der von iedem unmittelbar der Wirkung des Kolbens ausgesetzten Punkt.

5. I. Zus. Wenn man also in N eine zwote Oefnung macht, in die ein Kolben durch eine Kraft Q getrieben wird, so folgt, daß ein Gleichgewicht entstehen müsse, oder wird weder der eine noch der andere Kolben eindringen können, wofern sich nur die Kräfte P und Q unter einander wie die Oefnungen M und N verhalten, das ist wofern nur $P : Q = M : N$. Denn der Druck eines ieden Punkts in M pflanzt sich zu iedem Punkt in N fort, und umgekehrt der Druck von iedem Punkt in N pflanzt sich zu iedem Punkt in M fort; es müssen also diese einzele Druckungen, die einander entgegengesetzt sind, ein Gleichgewicht bewirken, wofern sie gleich groß sind. Nun ist die Summe der Druckungen von M oder die Kraft P der Größe M proportional, und die Summe der Druckungen von N oder die Kraft Q ist der Größe N proportional; es folgt also, daß für das Gleichgewicht $P : Q = M : N$.

Eben so würde es sich bei einer größern Anzahl von Oefnungen verhalten; es mögen ihrer so viel man will seyn, bringt man in ieder einen Kolben an, der von einer Kraft angedruckt wird, die der Oefnung proportional ist, so erhalten alle diese Kräfte einander gegenseitig im Gleichgewicht, und es kann keiner von

den Kolben eindringen und irgend einen andern zurücktreiben.

6. II. Zus. Wenn die beiden Oefnungen M und N und eine von den Kräften gegeben ist, so ergibt sich daraus die andere, denn man hat

$$Q = \frac{P.N}{M} \text{ oder } P = \frac{Q.M}{N}$$

7. III. Zus. Eben so sieht man, daß vermöge der Kraft P oder Q iede Seite fg des Tropfens fgkh einen Druck leidet, der durch $P.\frac{fg}{M}$ oder durch $Q.\frac{fg}{N}$ ausgedruckt wird; denn der Druck von iedem Punkt in M oder in N pflanzt sich bis zu iedem Punkt in fg fort, und ieder Punkt von fg wirkt wieder mit der nämlichen Kraft gegen ieden Punkt in M oder N zurück; wenn man also p den gesammten Druck gegen fg nennt, so erhält man

$$P : p = M : fg \text{ und } Q : p = N : fg$$

also $$p = \frac{P.fg}{M} \text{ oder } p = \frac{Q.fg}{N}$$

8. II. Lehrs. **Wenn man sich vorstellt, die Oberfläche einer flüßigen Masse ABCDO (fig. 2.), die ohne Schwere und als vollkommen frei angenommen wird, in unendlich viele Elementen A, B, C, D getheilt sey, und daß senkrecht auf alle diese Elementen Kolben angebracht seyen, die von Kräften angedruckt werden, welche ihren Grundflächen proportional sind; so erhalten alle diese Kräfte einander im Gleichgewicht.**

Man kann sich nämlich vorstellen, die Masse ABCDO sey ringsum von einem Gefäß eingeschlossen, das

das unendlich viele Löcher A, B, C, D habe, in welchen Kolben von Kräften angetrieben werden, die den Größen dieser Oefnungen proportional sind; alsdann erhellet (5.), daß alle diese Kräfte einander gegenseitig im Gleichgewicht erhalten und keiner von den Kolben also eindringen kann.

9. Erinner. Da keiner von den Kolben eindringen kann, so ist klar, daß die flüßige Masse beständig ihre anfängliche Gestalt behält, und daß sie daher in dieser Rücksicht so angesehen werden kann, als ob sie einen festen Körper bildete. Aber einige Leser werden vielleicht zweiflen, ob sie nicht nach einer oder der andern Richtung ihre Lage verändere. Inzwischen will ich beweisen, daß, wenn die Elementen der Oberfläche irgend eines festen Körpers durch Kräfte, die diesen Elementen proportional sind, und durch ihre Schwerpunkte durchgehen und alle von außen nach innen oder von innen nach außen gerichtet sind, senkrecht gedruckt werden, alle diese Kräfte einander im Gleichgewicht erhalten müssen; hieraus werden wir schließen, daß der Körper in einer absoluten Unbeweglichkeit verbleiben müsse. Wir wollen nach der Ordnung fortgehen.

10. I. Lehns. Wenn die Seiten eines unbeugsamen Polygons ABCDE (fig. 3.) senkrecht auf ihre Mitten gedruckt werden, von Kräften P, Q, R, S, T die diesen Seiten proportional sind, so müssen alle diese Kräfte unter einander im Gleichgewicht seyn.

Man ziehe die Diagonalen AC, AD; so wird in der Mechanik bewiesen, daß zwo in einem Punkt zusammenlaufende Kräften, und die daraus entstehende dritte, welche nothwendig durch eben den Punkt durchgeht, durch die Seiten eines Dreiecks vorgestellt

werden können, wovon immer eine auf der andern von den drei gegebenen Kräften senkrecht ist. Es geben also die beiden Kräfte P und Q, welche auf die Seiten AB, BC des Dreiecks ABC senkrecht und diesen Seiten proportional sind, eine dritte Kraft, (die ich X nennen will) welche auf die Seite AC eben dieses Dreiecks senkrecht und dieser Seite proportional ist. Es ist ferner die Kraft X auf die Mitte von AC senkrecht; denn sie muß durch den Vereinigungspunkt a der beiden angebrachten Kräfte P, Q, durchgehen, welcher offenbar der Mittelpunkt des Kreises ist, der sich um das Dreieck ABC beschreiben ließe, und hieraus folgt, daß die Kraft X senkrecht durch die Mitte der Sehne AC geht. Auf die nämliche Art läßt sich beweisen, daß die beiden Kräfte X und R, die im Punkt b zusammen laufen, eine dritte Kraft Y geben, die der Seite AD proportional ist und senkrecht durch ihre Mitte geht; ferner daß die beiden Kräfte Y und S, die im Punkt c zusammen laufen, eine dritte Z geben, die der Seite AE proportional ist und senkrecht durch ihre Mitte geht, und so fort, wenn das Polygon eine größere Anzahl von Seiten hätte. Daher geben die Kräfte P, Q, R, S vereinigt eine Kraft Z, die der letzten T gleich und grade entgegengesetzt ist, und es ist also das ganze System der Kräften P, Q, R, S, T im Gleichgewicht.

11. I. Zus. Da eben der Beweis immer statt hat, das Polygon mag so viele Seiten haben als man will, also auch dann noch, wann die Anzahl der Seiten unendlich wird; so erhellet, daß, wenn man irgend eine in sich selbst zurückkehrende unbeugsame krumme Linie hat, solche in unendlich viele Elementen zertheilt, und senkrecht auf die Mitten dieser Elementen Kräfte anbringt, die ihnen proportional sind, diese Kräfte alsdann unter einander im Gleichgewicht seyn müssen.

12. II.

12. II. Zus. Man betrachte das Polygon ABCDE als den Querschnitt, welcher sich ergeben würde, wenn man ein grades Prisma in der Mitte seiner Höhe mit seiner Grundfläche gleichlaufend durchschnitte, so ist klar, daß die Mitten der Seiten AB, BC u. s. w. die Schwerpunkte der rechtwinklichten Seitenflächen des Prismas sind, und daß, wenn man an eben diesen Punkten Kräfte anbringt, die auf diese Flächen senkrecht und ihnen proportional sind, diese Kräfte unter einander die nämliche Verhältnis haben, wie die Kräften P, Q, R, S, T. Nun sind die Kräfte P, Q, R, S, T im Gleichgewicht; es sind also auch die auf die Schwerpunkte der rechtwinklichten Flächen eines graden Prismas senkrechten und diesen Flächen proportionalen Kräfte im Gleichgewicht.

Das Nämliche erhält man, wenn der Querschnitt und die einander gegenüber liegenden oberste und unterste Fläche des Prismas krummlinigt, und an allen Punkten der rechtwinklichten Seitenflächen des prismatischen Körpers gleiche Kräfte senkrecht angebracht sind.

13. II. Lehns. Wenn auf den Mittelpunkt G (fig. 4.) der mittlern Breite EF eines Trapez ACDB eine Kraft P senkrecht und der Fläche des Trapez proportional angebracht ist; so kann diese Kraft in zwo andere zerlegt werden, wovon die eine auf die senkrechte Projektion A c d B (†) des Trapez senkrecht und solcher proportional, die andere auf das Rektangel LEMN FK senkrecht und diesem Rektangel proportional ist,

(†) Man nennt die senkrechte Projektion einer Figur, diejenige Figur, welche auf einer Ebene dadurch gebildet wird, daß aus allen Punkten der gegebenen Figur Perpendikel auf diese Ebene gezogen werden.

ist, das auf den beiden parallelen Flächen AcdB, MCDN, an die es anstößt, senkrecht steht.

Man lege nach der Richtung der Kraft P und senkrecht auf die graden Parallelen AB, CD, cd, LK, EF, MN die Ebene SRT, die also auf die vier Ebenen ACDB, AcdB, CDdc, LMNK senkrecht ist; hiernächst zerlege man die Kraft P in zwo andere V, H, deren Richtung in die Ebene SRT fällt, so daß die erstere V auf ST senkrecht, die zwote H auf RT senkrecht ist. Da nun die drei Kräfte P, V, H auf die drei Seiten des Dreiecks RST senkrecht sind, so erhält man

$$P : V : H = SR : ST : RT \text{ oder } ML$$

oder auch (indem man durch gleich große Linien multiplizirt)

$$P : V : H = SR.EF : ST.LK : ML.LK$$
$$= ACDB : AcdB : LMNK$$

Nun ist die Richtung der Kraft V auf AcdB senkrecht, und die der Kraft H senkrecht auf LMNK, weil solche in einer auf die beiden Ebenen AcdB, LMNK senkrechten Ebene SRT liegen, und überdas die erstere auf ST senkrecht ist, die andere auf RT, welche mit den graden Linien LM, KN gleichlaufend ist. Daher ꝛc.

14. I. Zus. Wenn die Höhe SR des Trapez ACDB unendlich klein ist, so ist G der Schwerpunkt des Trapez, und der Punkt g, der auf der Linie GV liegt, der Schwerpunkt der Projektion AcdB; und da der Punkt G allemal der Schwerpunkt des Rektangels LMNK ist, so folgt, daß, wenn im Schwerpunkt eines unendlich kleinen Trapez eine Kraft senkrecht und der Fläche proportional angebracht wird, diese Kraft in zwo andere zerlegt werden kann,

wovon

wovon die erstere auf den Schwerpunkt senkrecht und der Fläche des Projektionstrapez proportional ist; die zwote ist auf den Schwerpunkt senkrecht und der Fläche eines Rechtangels proportional, das zur Grundlinie eine Linie hat, die der mittlern Breite des Trapez gleich ist, und zur Höhe die Entfernung zwischen zwo parallelen Ebenen, die durch die entgegengesetzten parallelen Grundlinien des Trapez gelegt sind, und auf deren einer die senkrechte Projektion eben dieses Trapezes liegt.

15. II. Zus. Unter eben der Voraussetzung gedenke man sich eine unendlich dünne Schichte, deren oberste und unterste Fläche parallel laufen, und deren gewölbte Oberfläche aus unendlich vielen Trapezen zusammengesetzt sey, wie ACDB, die durch die Kraft P senkrecht gedruckt werden; und man mache von allen diesen Trapezen die senkrechten Projektionen auf eine von den Grundflächen der Schichte. Wenn man nun statt der Kraft P die beiden Kräfte H und V substituirt, so sieht man 1) daß (12) die Kräfte H am ganzen Umfang der Schichte sich im Gleichgewicht erhalten; 2) da die Kräfte V auf die Schwerpunkte der Projektionstrapezen senkrecht und diesen Trapezen proportional sind, so entsteht aus ihnen eine neue Kraft, die durch die Summe eben dieser Trapezen ausgedruckt wird und die durch den Schwerpunkt ihres Systems durchgeht.

16. Bew. des Satzes §. 9. Man theile fürs erste den gegebenen Körper in zween Theile, durch eine Ebene, die ich als horizontal annehme, um die Begriffe festzusetzen, und die einen Querschnitt macht, den ich eben deswegen den Hauptquerschnitt nenne. Nunmehr stelle man sich vor, es sey ieder Theil durch Flächen, die mit dem Hauptquerschnitt parallel laufen, in unendlich viele Schichten getheilt, und die gewölbten

Flächen aller dieser Schichten seyen endlich jede durch vertikale Flächen in unendlich viele Trapezen getheilt. Nimmt man nun an, es werden die auf die Schwerpunkte der Seitentrapezen senkrechte und diesen Trapezen proportionalen Kräfte in zwo andere zerlegt, wovon die eine horizontal, die andere vertikal ist; so erhellet aus dem vorigen §. 1stens, daß bei allen Schichten, welche zusammen den ganzen Körper ausmachen, die horizontalen Kräfte einander im Gleichgewicht erhalten. 2tens. Nicht weniger erhellet in Ansehung der beiden Theile des Körpers, daß bei dem untern Theil die Kraft, welche aus den vertikalen Kräften entsteht, der Fläche des Hauptquerschnitts proportional ist und durch dessen Schwerpunkt senkrecht durchgeht, indem sie aufwärts wirkt; und daß eben so bei dem obern Theil die aus den vertikalen Kräften entstehende der Fläche des Hauptquerschnitts proportional ist und senkrecht durch dessen Schwerpunkt geht, indem sie niederwärts wirkt; woraus also folgt, daß diese beiden aus allen übrigen entstehenden Kräfte gleich groß und einander grade entgegen gesetzt sind, folglich einander aufheben. Es sind also die vertikalen Kräfte unter einander im Gleichgewicht. Es müssen also endlich alle auf die Oberfläche des Körpers angewendete Kräften einander im Gleichgewicht erhalten, und dieser Körper muß also in einer absoluten Unbeweglichkeit bleiben.

17. Zus. Aus allem bisherigen müssen wir schließen, 1stens, daß die flüßige Masse A B C D O (fig. 2.) ihre Lage unverändert behalten müsse, 2tens daß auch die Theile unter einander nicht ihre Lage verändern können.

18. Allgem. Erinner. Aus beiden vorhergehenden Lehrsätzen und denen daraus gezogenen Folgen sieht man, wie die äußern Kräfte bei einer flüßigen

Masse

Masse auf ihre Theile und auf die Wände, zwischen denen sie enthalten ist, wirken. Wir wollen nun die Wirkungen untersuchen, welche aus der Schwere der flüßigen Masse selbsten entstehen, es mögen solche allein oder noch mit Wirkungen äußerer Kräfte verbunden, vorhanden seyn.

Ich setze allemal mit dem Galiläus voraus, 1) daß die Schwere eines Körpers für alle Fälle, wo ihre Entfernungen vom Mittelpunkt der Erde nicht beträchtlich verschieden sind, eine beständige und der Masse proportionale Kraft ist. 2) Daß die Richtungen der Schwere der einzelen Theile eines Körpers, wenn solcher nicht außerordentlich weit ausgedehnt ist, ohne merklichen Fehler unter einander als parallel angenommen werden können. Wo andere Voraussetzungen der Schwere statt finden, werde ich es ausdrücklich erinnern.

Zweites Kapitel.

Vom Gleichgewicht einer den Eindrücken der Schwere überlassenen flüßigen Masse, und dem Druck, den solche gegen die Wände und den Boden des Gefäßes, worin sie enthalten ist, ausübt.

19.

I. Lehrs. **Die Oberfläche einer der freien Wirkung ihrer Schwere überlassenen und im Gefäß ABCD (fig. 5.) ruhig befindlichen flüßigen Masse ist in allen ihren Punkten auf die Richtung der Schwere senkrecht.**

Es sey AmD die freie Oberfläche der flüßigen Masse; iedes solches Theilgen wie m wird von der Schwere nach der lothrechten Richtung mn gedruckt; man drucke diese Kraft durch mn aus, und zerlege sie in zwo andere Kräfte mp, mq, die nach den beiden in m an einander stoßenden Elementen der krummen Linie AmD gerichtet sind. Wenn nun das Theilgen m in Ruhe bleiben soll, so müssen die Kräfte mp, mq den iedesmaligen Kräften gleich seyn, welche die angrenzenden Theilgen gegen sie nach den entgegengesetzten Richtungen pm, qm ausüben. Nun sind diese letztern Kräfte, dem allgemeinen Gesetz (2.) gemäs, einander gleich. Es sind also auch die Kräfte mp, mq einander gleich; folglich theilt die Richtung der Kraft mn den Winkel pmq in zween gleiche Theile, und sie hat also gegen das Element mp keine stärkere Neigung als gegen das Element mq, oder, welches eben das ist, sie ist auf die krumme Linie AmD in m senkrecht;

recht; und da die nämliche senkrechte Lage in allen übrigen Punkten der krummen Linie A m D statt hat, so folgt, daß umgekehrt die Fläche A m D der flüßigen Masse in allen ihren Punkten auf die Richtung der Schwere senkrecht ist.

20. Zus. Wenn also die Richtungen der Schwere aller Theilgen der flüßigen Masse in einen Punkt zusammen laufen, so muß die krumme Linie A m D ein Kreisbogen seyn; oder die Oberfläche der flüßigen Masse muß ein Stück einer Kugelfläche seyn, deren Mittelpunkt derienige Punkt ist, nach dem alle Theilgen hinstreben.

Wenn die Abmessungen von der Oberfläche einer flüßigen Masse in Ansehung des Halbmessers der Erde sehr klein sind, so kann diese Oberfläche als eine Ebene angesehen werden, weil alsdann der Mittelpunkt der Erde, wo die Schweren der flüßigen Theilgen zusammenlaufen, als unendlich weit entfernt angesehen werden kann. Von dieser Art ist die Oberfläche des Wassers in einem Behältnis, oder in einem Bassin eines Gartens ꝛc. Es sey nämlich A der Mittelpunkt der als sphärisch angenommenen Erde, B C irgend ein Bogen ihrer Oberfläche, B D die Tangente am Punkt B, A D die Sekante, so findet der Hr. Abt Picard in seinem *Traité du nivellement*, daß, wenn man den Durchmesser der Erde zu 6538594 Toisen annimmt, (welches von der Wahrheit nicht merklich abweicht) auf eine Entfernung B D von 200 Toisen der Unterschied D C nur $5\frac{1}{3}$ Linien, und auf eine Entfernung B D von 300 Toisen, D C einen Zoll betrage ꝛc.

21. II. Lehrs. Wenn ein Heber K M N O (fig. 7.), von welcher Gestalt man will und dessen Schenkel gleich oder ungleich seyn mögen, Wasser oder sonst was flüßiges enthält, so sind die Oberflächen A B, D E dieser flüßigen Masse

in

in den beiden Schenkeln des Hebers in der Waage, das ist, sie liegen in einer horizontalen Ebene.

Man gedenke sich in dem Behälter FGHL (fig. 8.) einen Heber KMNO, der dem gegebenen vollkommen ähnlich ist, und stelle sich hierauf vor, sämtliches Wasser im Behälter außer demjenigen Theil ABMDEN, welcher zu dem eingebildeten Heber gehört, verwandle sich in eine harte Masse, ohne sonsten seine Stelle oder seinen körperlichen Raum zu verändern, so ist klar, daß der flüßig gebliebene Theil des Wassers in dem nämlichen Zustand der Ruhe und der Pressung bleiben müsse, worin er sich befand, bevor der übrige Theil der flüßigen Masse erhärtete, und daß also die beiden Oberflächen AB, DE in einer Horizontalfläche bleiben müssen. Nun ist aber alles in den beiden Hebern (fig. 7. und 8.) einerlei; wenn also die Oberflächen AB, DE in dem (fig. 8.) horizontal liegen, so müssen sie auch in dem Heber (fig. 7.) in einerlei Horizontalfläche liegen.

22. Zus. Der Mechanismus der Heber findet seine Anwendung bei unendlich vielen Erscheinungen in der Natur. Wenn man zum Beispiel in der Nähe eines Sees, eines Meeres, eines Flusses einen Brunnen gräbt, so steigt das Wasser in diesem Brunnen und setzt sich mit dem umliegenden Wasser in die Waage, weil der Brunnen und das benachbarte Behältnis als zween aufwärtsgehende Schenkel eines Hebers angesehen werden, welche vermittelst der Spalten und Klüfte, welche sich im Innern der Erde finden, unter einander kommuniciren. Ebenso würde sich das Wasser, das von einer Stelle zu einer andern durch eine lange Röhrenfahrt geleitet wird, wie z. B. Wasser, das zu einem öffentlichen Brunnen bestimmt ist — solches Wasser würde sich an beiden Stellen der Röhrenfahrt

in

in die Waage setzen, wenn der Ort, wo es hingeleitet wird, so hoch läge, als der von welchem es abgeleitet wird; liegt aber iene Stelle niedriger als diese, so fließt das Wasser fort und bildet also den verlangten Brunnen.

23. Anmerk. Das **Wasserwägen** beruht auf dem vorhergehenden Satz. Hier ist meine Absicht nicht, diese Kunst vorzutragen, da man sie aus andern Werken und vorzüglich aus des Herrn Abts Picard Schrift erlernen kann; inzwischen glaube ich, eine sehr bequeme Methode in der Kürze vortragen zu müssen, der man sich beim Wasserwägen bedienen kann, um sich die Mühe zu ersparen, eine Menge von Profilen zu verfertigen.

Es seyen A, B, C, D, E (fig. 9.) eine Anzahl von Gegenständen, deren Lage in Rücksicht einer Horizontalfläche man zu bestimmen hat. Man betrachte diese Gegenstände, als wenn sie auf dem Boden eines Meeres sich befänden, dessen Wasserspiegel MN wäre, so ist klar, daß die Lage der gegebenen Punkte in Ansehung der Horizontalfläche MN gegeben wäre, wenn man im Stand ist, die Vertikallinien Aa, Bb, Cc, Dd, Ee zu bestimmen. Man bilde sich ein, die Ebene MN sey über den obersten Punkt A um eine gegebene beliebige Höhe z. B. 100 Fus erhaben, so schreibe man in die Charte oder in den beiläufigen Entwurf einer Charte, der die Lage des Bodens einigermaßen vorzustellen dient, bei dem Punkt A 100. Wenn das Abwäginstrument in A gesetzt wird, so zeigt gleich die erste Arbeit, um wie viel die Stelle A höher liegt als B; diese Höhe betrage 3 Fus, so schreibe man 103 in die Charte bei den Punkt B, welches dann so viel bedeutet, daß Bb 103 Fus beträgt, wenn die Vertikallinie Aa = 100 Fus ist. Man bringe das Instrument aus A in B, und sehe B als den

Anfangs-

Anfangspunkt an, so zeigt die Fortsetzung der Arbeit, um wie viel B höher liegt als C; diese Höhe sey 4 Fus 6 Zoll, so schreibe man in die Charte bei C 107 Fus 6 Zoll für den Werth von Cc. Wenn man nun beständig so fortfährt, so ergeben sich nach und nach die verschiedenen Erhöhungen der übrigen Punkte; ich setze, die gefundenen Erhöhungen seyen so wie sie fig. 9. vorstellt. Will man nun wissen, wie viel die Stelle A höher liegt als die C, so zieht man die Erhöhung der Stelle A von der des Punkts C ab, das ist 100 Fus von 107 Fus 6 Zoll, der Rest 7 Fus 6 Zoll ist die gesuchte Höhe. Will man wissen, um wie viel die Stelle A höher liegt als die E, so zieht man 100 Fus von 101 Fus ab, der Rest 1 Fus ist die gesuchte Höhe u. s. f.

Gewöhnlich schränkt man sich nicht auf die bloße Abwägung einer Gegend ein, das ist auf die bloße Bestimmung der Lage verschiedener Gegenstände in Ansehung einer Horizontalfläche; man mißt auch noch die Entfernungen dieser Gegenstände von einander und die Winkel, die sie unter einander machen, um einen vollständigen Begriff von der Gegend zu erhalten.

24. Erinner. Es ist zu merken, daß der Satz des 21. §. wegen der wirklichen physischen Beschaffenheit der flüßigen Massen eine Einschränkung leidet. Wenn sich die Flüßigkeit in den beiden Schenkeln des Hebers wirklich waagrecht setzen soll, so müssen beide eine gewisse Weite haben, ohne daß sie iedoch darum einerlei Weite zu haben bräuchten oder einerlei Gestalt. Wenn aber der eine Schenkel sehr enge ist, z. B. nur etwa 2 Linien im Durchmesser, indeß der andere viel weiter wäre, so tritt die Flüßigkeit in beiden Schenkeln nicht in die Waage. Die meisten Flüßigkeiten als Wein, Wasser, Oel, Weingeist ꝛc. steigen in dem engern Schenkel (den man Haarröhrgen, capillaire, vom

Lateini-

lateinischen capillus, Haar, nennt) höher als in dem andern; im Gegentheil erhält sich das Queckſilber in dem haarröhrartigen Schenkel niedriger als in dem weiten Schenkel. Diese Erscheinungen haben eine eigene Ursache, deren Untersuchung in die Physik gehört (†). Hier setze ich diese Ursache beiseite, und betrachte die flüßigen Massen nur in sofern sie den bloßen Eindrücken der Schwere nach dem Mittelpunkt der Erde zu unterworfen sind; es folgt also, daß sich alsdann die Flüßigkeit allemal in beiden Schenkeln des Hebers in die Waage setzen müsse, was auch übrigens die Durchmesser der Schenkel für eine Verhältnis gegen einander haben.

25. III. Lehrs. **Wenn die in dem Gefäß ABCD (fig. 10.) enthaltene flüßige Masse in Ruhe und den bloßen Eindrücken der Schwere unterworfen ist, so wird iedes Theilgen m auf gleiche Art von allen Seiten von einer Kraft gedruckt, die dem Gewicht der zugehörigen kleinen vertikalen Wassersäule o m gleich ist.**

Denn 1stens wird das Theilgen m von allen Seiten gleichstark gedruckt, sonsten könnte es nicht in Ruhe bleiben (2).

2tens. Der Druck, den es leidet, ist dem absoluten Gewicht der kleinen Wassersäule o m gleich; denn wenn man sich vorstellt, die gesammte flüßige Masse, außer der Wassersäule o m, verwandle sich in eine harte Masse, ohne ihre Stelle oder ihren körperlichen Raum zu verändern, so bleibt das Theilgen m allemal in der nämlichen Pressung wie zuvor. Wenn nun das Säulgen o m allein flüßig ist, indem die übrige

(†) Man sehe über diesen Gegenstand den Traité de la figure de la Terre de Mr. Clairaut und die Institut. Newton. de Mr. l'Abbé Sigorgne.

übrige Masse verhärtet ist, so trägt jenes Theilgen offenbar das ganze Gewicht dieses Säulgens o m. Es ist also das Maas des Drucks, den es von allen Seiten leidet, das absolute Gewicht eben dieser Säule o m.

26. I. Zus. Man gedenke sich irgend eine krumme Linie F m Q (fig. 11.), welche das Theilgen m von der Seite der Wand A B berühre, und nehme an, das Stück der flüßigen Masse A F m Q B werde hart ohne seine Stelle oder körperlichen Raum zu verändern; so wird das Theilgen m beständig nach allen Seiten eben so gedruckt, als wenn die ganze Masse flüßig geblieben wäre. Man kann sich auch, ohne das Gleichgewicht zu stöhren, vorstellen, daß noch ein Theil D H S C verhärtet sey. Wenn man also irgend ein Gefäß F Q S H hat (fig. 12.), so wird ieder Punkt m ihrer Wände von der flüßigen Masse mit einem Gewicht gedruckt, das dem absoluten Gewicht des kleinen vertikalen Wasserfadens o m gleich ist, der sich in der Oberfläche der flüßigen Masse, die nötigen Falls verlängert werden muß, endigt; denn man kann die flüßige Masse im Gefäß F Q S H (fig. 12.) als das Stück F Q S H des Wassers in dem fig. 11. vorgestellten Gefäß ansehen, da beide Stücke A F m Q B, D H S C als verhärtet angenommen werden.

27. II. Zus. Es sey m y irgend ein unendlich kleiner Theil von der Wand des Gefäßes F Q S H (fig. 12.); der senkrechte Druck den dieser Theil leidet, ist aus der Verhältnis der Anzahl der Theilgen, welche die kleine Fläche m y bedecken, und der lothrechten Höhe o m, die man für alle Punkte des Elements m y als gleichgroß ansehen kann, zusammengesetzt. Wenn man also die specifische Schwere der flüßigen Masse p nennt, so ist der nur gedachte Druck = p. o m. m y, weil (Allgem. Begr. N°. V.) das absolute

Gewicht

Gewicht das Produkt aus der specifischen Schwere in die Masse ist.

28. IV. Lehrs. Wenn die in dem Gefäß ABCD (fig. 13.) in Ruhe und der bloßen Wirkung der Schwere unterworfen ist; so ist die Summe der senkrechten Druckungen, welche alle Elementen irgend eines endlichen Theils fnr vom Boden oder der Wand des Gefäßes leiden, dem absoluten Gewicht einer Säule gleich, welche die Fläche fnr (die nöthigen Falls in eine ebene Fläche verwandelt wird) zur Grundfläche, und den vertikalen Abstand GO des Schwerpunkts G der Fläche fnr von dem Wasserspiegel AD zur Höhe hätte.

Man theile die Fläche fnr in unendlich viele Elementen fg, gx, xy &c. und ziehe die Vertikallinien ft, gu, xz &c. die bis zum Wasserspiegel reichen. Ist nun p die specifische Schwere der flüßigen Masse, so ergeben sich senkrechte Druckungen, welche die Elementen fg, gx, xy &c. leiden, durch die zugehörigen Produkte p. fg. ft, p. gx. gu, p. xy. xz &c. Wenn man nun diese Produkte als die Momenten so vieler kleinen Gewichte in Ansehung der Oberfläche der flüßigen Masse betrachtet, so hat man aus der Mechanik

$$p.fg.ft + p.gx.gu + p.xy.xz + \&c.$$
$$= p(fg + gx + xy + \&c.).GO = p.fnr.GO$$

welches mit der Behauptung des Lehrsatzes übereinstimmt.

29. I. Zus. Wenn daher der Boden BC eines Gefäßes, von welcher Gestalt man will, (fig. 14, 15, 16.) horizontal ist, so ist der Druck, welchen der Boden leidet, = p. BC. GO, wo p die specifische

Schwere der flüßigen Masse bedeutet, und GO die vertikale Höhe des Schwerpunkts G des Bodens BC bis zur Oberfläche des Wassers, die man sich nöthigen Falls verlängert gedenken muß.

Man sieht hieraus, daß wenn die Böden der dreien Gefäße (fig. 14, 15, 16.) gleich groß sind, und einerlei Flüßigkeit in den dreien Gefäßen gleich hoch steht; man sieht, sage ich, daß die Böden alsdann einerlei Druck auszuhalten haben. Denn es ist klar, daß wenn man (fig. 15, 16.) die lothrechten Linien Bm, Cn zieht, und nun annimmt (fig. 15.), daß die zween Theile der flüßigen Masse ABm, DCn mit Beibehaltung ihrer Stelle und ihres körperlichen Raums erhärten, und daß, wenn die Räume ABm, DCn mit Wasser angefüllt, angenommen werden, die Wände AB, DC weggenommen würden, hiernächst alles, wie zuvor, im Gleigewicht bleiben, und die drei Böden gleich stark gedruckt werden müssen.

30. II. Zus. Es ist daher sehr wohl möglich, daß der Druck auf den Boden eines Gefäßes und das gesammte Gewicht der in diesem Gefäß enthaltenen Flüßigkeit äußerst verschiedene Dinge sind. In dem zilindrischen Gefäß (fig. 14.) ist der Druck auf den Boden dem Gewicht der ganzen flüßigen Masse gleich; aber in den Gefäßen (fig. 15 und 16.) ist die erstere Kraft kleiner oder größer als die letztere.

Wenn man ein mit Wasser angefülltes Gefäß lothrecht in die Höhe zu heben oder auf einer schiefen Ebene zu erhalten hat, so hat man bei Berechnung der Kraft auf das absolute Gewicht des Wassers und des Gefäßes Rücksicht zu nehmen, und keineswegs auf den Druck gegen den Boden und die Wände; denn alsdann kann man in iedem Augenblick das System so ansehen, als wenn es eine einzige feste Masse ausmachte.

31. III. Zus. Es sey DC eine rechtwinklichte lothrechte Fläche (fig. 17.), wie z. B. ein Schutzbrett an einem Wasserbehältnis, die dem Druck des ruhig stehenden Wassers DABC ausgesetzt ist, dessen horizontale Ausbreitung DA so gros oder so klein man will, seyn mag, denn dieses ist für die Wirkung des Drucks völlig gleichgültig. Es sey G die Mitte oder der Schwerpunkt der Fläche DC, und ihre horizontale Seite heiße a; so ist

1stens der senkrechte Druck, welchen die Fläche DC auszuhalten hat, $= p \cdot a \cdot DC \cdot GD$ oder $p \cdot a \cdot \frac{DC^2}{2}$, wo p die specifische Schwere des Wassers bedeutet. Setzt man also, um eine besondere Anwendung zu machen, $a = 3$ Fus, $DC = 12$ Fus, und daher $a \cdot \frac{DC^2}{2} = 216$ Kubikfus, und erinnert sich, daß der Kubikfus süßes Wasser 70 ℔ wiegt, welches $p = 70$ gibt, so findet sich, den Kubikfus als die Einheit beim Maas des körperlichen Raums angenommen, der Druck $p \cdot a \cdot \frac{DC^2}{2} = 15120$ ℔.

2tens. Um den Mittelpunkt des Drucks P, das ist, denjenigen Punkt zu bestimmen, durch welchen die aus allen Druckungen gegen alle Punkte in DC entstehende mittlere Kraft durchgeht, theile ich DC in unendlich viele Elementen Rr und bemerke, daß, da das Moment des gesammten Drucks $p \cdot a \cdot \frac{DC^2}{2}$ (nach den Grundlehren der Statik) der Summe der Momente der Elementardruckungen gegen alle Rr gleich seyn muß, man die Gleichung hat

$$p \cdot a \cdot \frac{DC^2}{2} PD = \int p \cdot a \cdot Rr \cdot DR \cdot DR$$

oder auch $\frac{DC^2}{2} . PD = \int Rr . (RD)^2$

Nun entsteht aus der Summe der Größen $Rr . (RD)^2$, auf die ganze Höhe DC genommen, offenbar eine Pyramide, deren Grundfläche $= (DC)^2$ und deren Höhe $= DC$. Demnach

$$\frac{DC^2}{2} . PD = \frac{DC^3}{3}$$

und daher $PD = \frac{2}{3} DC$

Der Mittelpunkt des Drucks liegt also unter dem Wasserspiegel in einer Tiefe, die $\frac{2}{3}$ der ganzen Höhe DC beträgt. Dieses ist der Punkt, wo das Wasser die größte Kraft anwendet, und daher die Stelle, wo man die Kraft senkrecht anbringen müßte, welche dem Druck des Wassers zu widerstehen bestimmt wäre, vorausgesetzt, daß die Fläche DC übrigens völlig frei und von aller Unterstützung entfernt wäre.

Ebenso würde man den Druck und den Mittelpunkt des Drucks finden, wenn die Fläche DC schief stände.

32. IV. Zus. Man hat gesehen (5.), daß die beiden Kräfte P und Q (fig. 1.), die an zween Kolben angebracht sind, welche gegen eine flüßige Masse drucken, die in einem von allen Seiten, außer in M und N, verschlossenen Gefäß enthalten ist, sich gegen einander wie die Oefnungen M und N verhalten müssen, wofern sie einander im Gleichgewicht halten sollen; dieses gibt $Q = P . \frac{N}{M}$. Nun setze man, die in N angebrachte Kraft habe nicht nur der Kraft P, sondern auch dem aus dem Gewicht der flüßigen Masse gegen N entstehenden Druck das Gleichgewicht zu halten;

da

da nun, wenn p die specifische Schwere der Flüßigkeit bedeutet, dieser letzte Druck = p. N. ND ist, so ist klar, daß die in N angebrachte Kraft = P. $\frac{N}{M}$ + p. N. ND seyn muß.

Was nun die Kraft betrift, welche erfodert wird, um das Gefäß fest zu tragen, wenn es auf einer horizontalen Tafel stünde, so muß diese Tafel einen Druck aushalten, welche so groß ist, als die Summe von dem Gewicht des Gefäßes, dem Gewicht des Wassers und dem der Kraft P gleichen Gewicht, wenn diese Kraft lothrecht herab wirkt. Ueberdas muß die Stärke der Kraft Q durch die Reibung des Gefäßes auf der Tafel oder durch sonst eine der Q gleiche und entgegengesetzte Kraft vollen Widerstand erhalten.

Drittes Kapitel.

Vom Gleichgewicht und dem Druck vermischter oder ungleich dichter flüßiger Massen.

33.

1. Lehrs. **Zwo flüßige Massen von verschiedener Art AFIG, EDMK (fig. 18.) deren Grundflächen AF, ED in einer waagrechten Ebene liegen und deren Druckungen, die auf irgend eine dazwischen angebrachte flüßige Masse ABCD ausgeübt werden, einander im Gleichgewicht erhalten, haben Höhen AH, EK, die ihren beiderseitigen specifischen Schweren proportional sind.**

Es müssen nämlich die Druckungen der beiden flüßigen Massen AFIG, EDMK auf ihre Grundflächen als Gewichte angesehen werden, welche durch ihren Druck auf die Fläche der flüßigen Masse ABCD einander im Gleichgewicht erhalten, und es verhalten sich also (5.) diese Druckungen gegen einander wie die Grundflächen AF, ED. Wenn man nun p die specifische Schwere der flüßigen Masse AFIG nennt, H ihre Höhe AH, π die specifische Schwere der flüßigen Masse EDMK, h ihre Höhe EK, so sind die beiderseitigen Druckungen, von denen hier die Rede ist (29) p. H. AF; π. H. ED. Man hat also die Proportion

$$p.\ H.\ AF : \pi.\ h.\ ED = AF : ED$$

und dieses gibt

$$p.\ H = \pi.\ h, \text{ und } H : h = \pi : p$$

Wenn

Wenn z. B. die flüßige Masse AFIG Wasser ist, und die flüßige Masse EDMK Queckſilber, ſo erhält man $p : \pi = 1 : 14$, und daher $H : h = 14 : 1$. Hieraus folgt, daß zum Gleichgewicht mit einer 32 Fus hohen Waſſerſäule eine Queckſilberſäule erfodert wird, die beinahe 28 Zoll hoch iſt.

35. II. Zuſ. Hieraus ergibt ſich das Verfahren, den Druck auf die Grundfläche MN (fig. 19.) eines Gefäßes zu beſtimmen, das horizontale Schichten von verſchiedenen Flüßigkeiten MNKD, DKGC, CGFB, BFEA enthielte; denn es ſeien ML, LP, PQ, QH die Höhen oder vertikalen Dicken dieſer Schichten; p, p', p'', p''' ihre ſpecifiſchen Schweren: ſo iſt der Druck auf den Boden MN der nämliche, als wenn man anſtatt der obern Schichten DKGC, CGFB, BFEA andere Schichten, die der untern Schichte MNKD ähnlich wäre, und welche die Höhen $\frac{p'.LP}{p}$, $\frac{p''.PQ}{p}$, $\frac{p'''.QH}{p}$ hätten, ſubſtituirte; es iſt daher der Druck auf MN =

$$p.MN.\left(ML + \frac{p'.Lp}{p} + \frac{p''.PQ}{p} + \frac{p'''.QH}{p}\right)$$

$$= MN.(p.ML + p'.Lp + p''.PQ + p'''.QH)$$

das iſt: um den Druck auf den Boden MN zu erhalten, muß man dieſen Boden durch die Summe der Produkte aus den Höhen in die ſpecifiſchen Schweren derer im Gefäße enthaltenen flüßigen Maſſen multipliciren.

36. II. Lehrſ. Wenn die in einem Gefäß enthaltene ſchwere flüßige Maſſe ABC, als aus unendlich vielen Schichten zuſammengeſetzt,

angenommen wird, deren Dichtigkeit sich nach irgend einem Gesetz abändert, so muß bei dieser flüßigen Masse ein Gleichgewicht vorhanden seyn, wenn alle Schichten waagrecht liegen oder eine auf die Richtung der Schwere senkrechte Lage haben.

Man stelle sich anfangs vor, es sey die unterste Schichte MNB allein vorhanden und solche im Gleichgewicht; so muß ihre Oberfläche MN waagrecht seyn (19.) Außerdem ist klar (8.) daß diese Schichte ihre Lage behalten müsse, wenn man senkrecht auf sie in iedem Punkt gleiche Kräfte, so groß man will, anbringt; denn sie mag schwer seyn oder nicht, so wirken diese Kräfte allemal auf die nämliche Art gegen einander und gegen die Wände des Gefäßes. Es sind aber die erwähnten Kräfte nichts anders als die Druckungen, welche von dem Gewicht der obern Querschnitte MNQP, PQSR .... DECA entstehen; und man sieht, daß alle Punkte in MN gleiche Druckungen leiden müssen, wenn alle Flächen PQ, RS ... DE, AC horizontal sind. Es ist also bei dieser Voraussetzung die Schichte MNB im Gleichgewicht. Auf eben die Art beweißt man, daß der Querschnitt MNQP im Gleichgewicht ist, wenn die Flächen RS ... DE, AC, horizontal sind u. s. f. Es ist also durch die gesammte flüßige Masse hindurch alles im Gleichgewicht, wenn ihre Schichten horizontal liegen.

37. Aufg. Den Druck zu bestimmen, welchen im vorhergehenden Lehrsatz die flüßige Masse gegen irgend einen Theil der Wände des Gefäßes ausübt.

BH sey eine aus dem untersten Punkt B der flüßigen Masse aufwärts gezogene Vertikallinie, so sieht man z. B. daß der Punkt B das ganze Gewicht

des

des vertikalen Wasserfadens (*), oder die Summe von den Gewichten der einzelen Wasserfäden Bb, bc, cd u. s. w. zu tragen hat. Nennt man nun π, π', π'' &c. die iedesmaligen Dichtigkeiten oder specifischen Schweren der Schichten MNB, MNQP, PQRS &c. so ist das Gewicht des Fadens $Bb = \pi . Bb$, des Fadens $bc = \pi' . bc$, des Fadens $cd = \pi'' . cd$ &c.

Es ist also der Druck auf den Punkt B
$= \pi . Bb + \pi' . bc + \pi'' . cd +$ &c.
und da dieser Werth einerlei ist mit

$$\pi . \left(Bb + \frac{\pi' . bc}{\pi} + \frac{\pi'' . cd}{\pi} + \text{&c.} \right)$$

oder $$\pi' . \left(bc + \frac{\pi . Bb}{\pi'} + \frac{\pi'' . cd}{\pi'} + \text{&c.} \right)$$

oder $$\pi'' . \left(cd + \frac{\pi . Bb}{\pi''} + \frac{\pi' . bc}{\pi''} + \text{&c.} \right)$$

oder ꝛc. so sieht man, daß man statt der gegebenen Flüßigkeit eine andere substituiren kann, die durch die ganze Höhe BH hindurch einerlei Dichtigkeit hat.

Durch irgend zween einander unendlich nahe Punkte F, f lege man die zwo horizontale Flächen GT, gt, wodurch sich die beiden Elementen Gg, Tt der Wand ergeben; so entsteht auf ieden Punkt von Gg oder Tt ein senkrechter Druck, welcher dem Druck auf den Punkt F gleich ist; dieses ist offenbar (25), wenn man für unsere flüßige Masse eine andere von gleicher Dichtigkeit substituirt. Es ist aber der Druck auf den Punkt

(*) Vielleicht hätte Manchem Wassersäulgens oder Wasserzilindergens besser geklungen; ich finde inzwischen keinen Anstand, filet d'eau auch ganz wörtlich zu übersetzen, wenn gleich das Wort Wasserfaden bisher noch nicht eingeführt worden ist.

Punkt F dem absoluten Gewicht des vertikalen Fadens HF gleich; und da, wenn man HF = x und die Dichtigkeit oder specifische Schwere der flüßigen Masse in F = φ setzt, das Gewicht des Fadens HF offenbar $\int \varphi dx$ ist, so folgt, daß der senkrechte Druck, welchen Gg leidet, = Gg. $\int \varphi dx$ und die Summe der Pressungen gegen AG = $\int$Gg. $\int \varphi dx$. Wir wollen von dieser Formel einige besondere Anwendungen machen.

I. Exempel. Man sucht den Druck, welchen der horizontale Boden KD des Gefäßes AKDC (fig. 21.) auszuhalten hat, wenn sich die Dichtigkeiten der Querschnitte GT, MN unter einander wie die Höhen HF, Hb verhalten.

Es sey HB = a, die Dichtigkeit der flüßigen Masse in KD = π, so hat man

$$\Phi = \frac{\pi x}{a} \cdot \int \varphi . dx$$

$$= \int \frac{\pi x dx}{a} = \frac{\pi x^2}{2a} = \frac{\pi a}{2}$$

wenn man x = a setzt. Es ist also der Druck auf den Boden KD = $\frac{\pi a}{2}$. KD. Dieses Resultat läßt sich nach den Lehren der gemeinen Geometrie finden, wenn man überlegt, daß die Dichtigkeiten eine arithmetische Reihe ausmachen, deren erstes Glied dem Punkt H zugehört und = o ist, das letzte = π und die Anzahl der Glieder = HB.

II. Exempel. Das Gefäß AKDC (fig. 22.) wird rechtwinklicht angenommen, man sieht den Druck, welchen der Theil VY der lothrechten Wand AK leidet, wenn wie vorhin die Dichtigkeiten den Höhen proportional sind.

Wenn

Wenn man HB = a und die Dichtigkeit der flüßigen Masse in KD = π setzt, so erhält man $\phi = \frac{\pi x}{a}$, $\int \phi dx = \int \frac{\pi x dx}{a} = \frac{\pi x^2}{2a}$ und $\int G g \int \phi dx = \int \frac{\pi x^2 dx}{2a} = \frac{\pi x^3}{6a} + A$. Die beständige Größe A muß so beschaffen seyn, daß das Integral oder der Druck für $x = AV$ verschwindet; dieses gibt

$$A = -\frac{\pi . (AV)^3}{6 HB}$$

Setzt man hierauf $x = AY$, so erhält man den gesammten Druck auf VY

$$= \frac{\pi . (AY)^3 - \pi . (AV)^3}{6 . HB}$$

Eben dieses Resultat ließe sich auch ohne Beihülfe der Integralrechnung finden, wenn man überlegt, daß die absoluten Gewichte der Fäden HF und daher auch die Druckungen gegen die Elemente von VY wie die Quadrate der Höhen HF oder wie die Höhen einer abgekürzten Pyramide zunehmen, welche VY zur Höhe, sodann $\frac{\pi . (AV)^2}{2 HB}$ zur obern und $\frac{\pi . (AY)^2}{2 HB}$ zur untern Grundfläche hat. Hieraus ergibt sich der Werth für die abgekürzte Pyramide oder für den Druck gegen VY $= \frac{\pi . (AY)^2}{2 AB} \cdot \frac{AY}{3} - \frac{\pi . (AV)^2}{2 HB} \cdot \frac{AV}{3}$

oder $\frac{\pi . (AY)^3 - \pi . (AV)^3}{6 . HB}$

Viertes Kapitel.

Von der Dicke, welche die Wände der Röhrenleitungen haben müssen, wenn sie dem Druck einer darin enthaltenen ruhig stehenden flüßigen Masse hinlänglich widerstehen sollen.

38.

Man nennt Röhrenleitungen Röhren, welche das Wasser aus einem Behälter nach einem tiefern Ort hinführen, um daselbst ein Springwerk, einen Brunnen u. dgl. zu erhalten.

39. Lehnsatz. Wenn an allen Winkelpunkten eines regulären beugsamen Vielecks ABCDEF (fig. 23.) Kräfte P, Q, R u. s. w. angebracht werden, welche von dem Mittelpunkt O nach dem Umfang gerichtet und im Gleichgewicht sind, so sind 1stens alle diese Kräfte gleich groß; 2tens alle Seiten dieses Polygons sind gleich stark angespannt; 3tens die Summe aller Kräfte verhält sich zur Spannung irgend einer Seite des Polygons, wie der ganze Umfang des Polygons zum Halbmesser des umschriebenen Kreises.

Man nehme willkührlich nach der Richtung einer der Kräfte P das Stück Ay, um iene hierdurch auszudrucken, und verzeichne das Parallelogramm Axyz, dessen Seiten Ax, Az auf die Seiten AB, AF des Polygons fallen. Wenn die Kraft P, die Spannung

der

der ausgespannten Schnur AB und die Spannung der Schnur AF im Gleichgewicht sind, so müssen sie den drei Linien Ay, Ax, xy oder (wegen der ähnlichen gleichschenklichten Dreiecke xAy, OAB) den drei Linien AB, OB, OA proportional seyn; eben so sind die Kraft Q, die Spannung der Schnur BC und die der Schnur BA den drei Linien BC, OC, OB proportional, u. s. f. Nun beruhen alle diese Reihen von Proportionen offenbar auf einerlei Verhältnis, weil vermöge des Gleichgewichts iede Polygonseite gleichstark nach entgegengesetzter Richtung angespannt ist. Wenn man also x, g, h, x, l, z die Spannungen der Seiten AB, BC, CD &c. des Polygons nennt, so hat man

P: Q: R: S: T: V: x: g: h: k: l: z
= AB: BC: CD: DE: EF: FA: OB: OC: OD: OE: OF: OA.

Man hat daher 1) weil AB = BC = CD = DE = EF = FA ist,

P = Q = R = S = T = V

2) weil OB = OC = OD = OE = OF = OA, so hat man

x = g = h = k = l = z

3) P + Q + R + S + T + V : x = AB + BC + CD + DE + EF + FA : OB.

40. Lehrs. Wenn ABCD, abcd (fig. 24 und 25.) zween, grade oder schiefe, beugsame Zilinder sind, mit Flüßigkeiten von verschiedener Art angefüllt, so sind die Spannungen der beiden Umkreise BMNC, bmnc, nach den Richtungen der Tangenten in iedem ihrer Punkte, unter einander in der zusammengesetzten Verhältnis ihrer Halbmesser BH, bh, der specifischen Schweren der Flüßigkeiten und der lothrechten Höhen der Zilinder.

Ich

Ich setze voraus, daß die Grundflächen BMNC, bmnc horizontal sind, oder daß zum wenigsten alle ihre Punkte in iedem Zilinder von der obern Fläche der flüßigen Massen als gleichweit entfernt angesehen werden können; dieses findet in der Ausübung statt, weil man die Dicke der Röhrenwände nur für solche Röhren sucht, deren Höhen in Vergleichung mit ihren Durchmessern von beträchtlicher Größe sind.

Es seyen AB, ab die lothrechten Höhen unserer beiden Zilinder; p und π die specifischen Schweren der beiden Flüßigkeiten; F und f die Spannungen der beiden Umkreise BMNC, bmnc, so ist klar, daß die Summen der Druckungen, welche die flüßigen Massen ABCD, abcd gegen alle Punkte der beiden Umkreise BMNC, bmnc von innen nach außen nach den Richtungen der Halbmesser ausüben, durch die Produkte p. BMNC . AB und π . bmnc . ab ausgedruckt werden. Nun hat man nach dem vorigen §. die beiden Proportionen

p. BMNC . AB : F = BMNC : BH

π. bmnc . ab : f = bmnc : bh

Es verhalten sich aber die Umkreise BMNC, bmnc unter einander wie ihre Halbmesser BH, bh das ist

BMNC : BH = bmnc : bh

Man hat also

p. BMNC . AB : F = π . bmnc . ab : f

oder auch

F : f = p. BMNC . AB : π. bmnc . ab

oder (wenn man statt der Verhältnis BMNC: bmnc die BH : bh setzt)

F : f = p. BH . AB : π . bh . ab

41. Aufg. Die Verhältnis der Dicken zu bestimmen, welche zween aus beugsamen Ringen zus.m-

zusammengesetzte Zilinder haben müssen, um die Gewalt zwoer flüßigen Massen aushalten zu können, welche sie zu zerreißen streben.

Man schneide die beiden Zilinder des vor. §. nach ihren Grundflächen BMNC, bmnc. und es seyen die beiden Ringe BSERKM, bserkm, (fig. 26 und 27.) die entstehenden Schnitte. Man stelle sich vor, es seyen diese Ringe aus unendlich vielen Fäden zusammengesetzt, dergleichen durch die Kreise XYVZ, xyvz, vorgestellt werden; so ist der Widerstand, den solche dem Zerreißen entgegen setzen, offenbar aus der Verhältnis der Menge dieser Fäden oder der Dicken BS, bs, und der Festigkeit der Materien, woraus die Röhren bestehen, zusammengesetzt; wenn man also die beiden Widerstandskräfte, wovon hier die Rede ist, R, r nennt; E und e die Dicken BS und bs bedeuten; T und t die Festigkeiten der Materien ausdrucken, woraus die Röhren bestehen, so hat man

$$R : r = ET : et$$

Nun müssen zur Erhaltung des Gleichgewichts die Kräften R und r den zugehörigen Kräften F und f, wovon im vorigen §. geredet worden ist, gleich seyn. Nennt man also H und h die Höhen der Flüßigkeiten in den beiden Zilindern, D und d die Durchmesser der Grundflächen eben dieser Zilinder, so hat man

$$ET : et = \frac{p.H.D}{2} : \frac{\pi.h.d}{2}$$

$$\text{also} \quad E : e = \frac{pH.D}{T} : \frac{\pi.h.d}{t}$$

das ist: die Dicken der beiden erwähnten Ringe verhalten sich wie die Produkte der specifischen Schweren beider Flüßigkeiten, ihrer Höhen und der Durchmesser der Röhren, dividirt durch die Festigkeiten der Materien, woraus die Röhren verfertigt sind.

42. I.

42. I. Zus. Wenn die Flüßigkeiten sowohl als die Materien, woraus die Röhren bestehen, von einerlei Art sind, so hat man $p = \pi$, $T = t$, und die vorhergehende Proportion verwandelt sich in

$$E : e = HD : hd$$

43. II. Zus. Wenn man $p = \pi$, $T = t$ und $D = d$ hat, so erhält man $E : e = H : h$. Hieraus erhellet, daß, alles übrige gleich angenommen, die Dicke eines Ringes desto beträchtlicher seyn müsse, je größer die Höhe der druckenden flüßigen Masse ist.

Man macht also einen überflüßigen und ganz unnützen Aufwand, wenn man allen Röhren einer Röhrenfahrt, worin das Wasser auf eine beträchtliche Höhe erhalten werden soll, gleiche Dicke gibt; denn wenn die untern Stücke diejenige hinlängliche Dicke, welche ihnen gebührt, wirklich haben, so haben die höher liegenden nothwendig eine überflüßige Dicke. Man begeht diesen Fehler sehr häufig, und hat ihn insbesondere bei den alten Röhren der Maschine zu Marly begangen. Gleichwohl würde es sehr leicht gewesen seyn, Röhren von gleichem innern Durchmesser und von drei- oder viererlei verschiedenen Dicken mit einander zu verbinden, da man zu unterst die dicksten und so nach und nach die schwächern nach Verhältnis der verschiedenen Wasserhöhen nehmen müßte.

44. Erinner. Um die vorgetragene Theorie auf wirkliche Anlagen anwenden zu können, muß man aus einer unmittelbaren Erfahrung die Dicke kennen, welche eine gewisse Röhre haben muß, um den Druck einer gegebenen Flüßigkeit aushalten zu können; man muß überdas die Festigkeit der Materien kennen, woraus die Röhren verfertigt worden sind. Die Schriftsteller, welche Versuche dieser Art angestellt haben, geben

geben Resultate an, die oft sehr von einander abweichen. Ich will sogleich die Dicken bleierner und kupferner Röhren bestimmen, und zwar nach einer vormals zu Versailles gemachten Erfahrung und einem Satze des Herrn Mariotte, die beide in einer Sammlung vorkommen, welche folgenden Titel führt: *Divers ouvrages de Mathematiques & de Physique par Mrs. de l'Académie Royale des Sciences; Paris* 1693.

Die Erfahrung ist diese, daß eine bleierne 16 Zoll im Durchmesser weite Röhre bei einer Dicke von $6\frac{1}{2}$ Linien den Druck einer 50 Fus hohen Wassersäule ausgehalten hat. (S. 516 des angef. Werks.)

Herrn Mariotte Satz ist dieser, daß eine kupferne Röhre von 6 Zoll im Durchmesser bei dem Druck einer 30 Fus hohen Wassersäule die Dicke von $\frac{1}{2}$ Linie haben müsse. (S. 513.)

Es kann seyn, daß die angeführten Dicken stärker sind, als sie zum blosen Stande des Gleichgewichts zu seyn bräuchten; denn es wird bei der erwähnten Erfahrung nicht gesagt, daß man die Dicke des Bleies bis zum Bersten der Röhre vermindert habe, und eben so wenig in dem Satz des Herrn Mariotte, daß man eine eben solche Probe mit dem Kupfer gemacht habe. Man thut aber in der Ausübung sehr wohl, wenn man die Maaße hiernach stärker nimmt, als sie für das blose Gleichgewicht nöthig wären.

Wendet man auf die beiden vorgetragenen Voraussetzungen die allgemeine Proportion (41.) $E : e = \frac{p.H.D}{T} : \frac{\pi.h.d.}{t}$ an, so verwandelt sich solche in $6\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{50.16}{T} : \frac{30.6}{t}$ also

$$\frac{T}{t} = \frac{40}{117}$$

Diese Verhältnis der Festigkeit des Bleies zu der des Kupfers ist von derjenigen sehr verschieden, welche man finden würde, wenn man die Gewichte mit einander vergliche, welche zween Fäden, einer von Blei und einer von Kupfer, tragen können, ohne zu zerbrechen. Demohngeachtet behalten wir bei den Anwendungen, die wir von unsern Formeln zu machen haben, die Erfahrung von Versailles bei und den Satz des Hrn. Mariotte, weil sie sich unmittelbar auf solche Bestimmungen beziehen, worauf es bei denen hier vorfallenden Fragen ankommt.

I. Exempel. **Man soll die Dicke bestimmen, welche eine 6 Zoll im Durchmesser haltende bleierne Röhre haben muß, wenn sie den Druck einer 100 Fus hohen Wassersäule aushalten soll.**

Wenn die gesuchte Dicke x heißt, so hat man

$$50.16 : 100.6 = 6\tfrac{1}{2} \text{ Linien} : x = 4\tfrac{7}{8} \text{ Linien.}$$

II. Exempel. **Man sucht die Dicke, welche eine 4 Zoll im Durchmesser weite kupferne Röhre haben muß, um den Druck einer 50 Fus hohen Queckſilbersäule auszuhalten.**

Die specifische Schwere des Wassers verhält sich zu der des Queckſilbers wie 1 zu 14: wendet man also des Hrn. Mariotte Satz an, und nennt die gesuchte Dicke x, so hat man

$$3c.6.1 : 50.4.14 = \tfrac{1}{2} : x = 7\tfrac{7}{9} \text{ Linien (*).}$$

(*) Mehr hiervon findet man in meinem Versuch einer neuen Theorie hydrodynamischer und pyrometrischer Grundlehren, wo ich eigene Erfahrungen von hölzernen und eisernen Röhren mitgetheilt habe.

Fünftes Kapitel.

Vom Gleichgewicht flüßiger Massen in beugsamen Gefäßen.

45.

Wenn ein Gefäß aus einer festen Masse besteht, so nimmt die darin enthaltene Flüßigkeit die innere Gestalt des Gefäßes an, und die Oberfläche dieser Flüßigkeit, wenn sie frei ist, tritt allemal in die horizontale Lage; wenn aber die Wände des Gefäßes beugsam sind, so nimmt dieses Gefäß eine besondere Gestalt an, wie sie nämlich das Gleichgewicht der Kräfte erfodert, denen die flüßige Masse ausgesetzt ist; und zwar allemal so, daß wenn der oberste Theil die gehörige Freiheit hat, solcher eine waagrechte Lage annimmt, wie wenn das Gefäß eine feste Masse wäre; denn sobald das Gleichgewicht in einem beugsamen Gefäße hergestellt ist, ist es gar wohl verstattet, das Gefäß als fest anzusehen. Ich will nun die Gründe vortragen, wonach sich die Gestalt eines beugsamen Gefäßes allgemein bestimmen läßt.

46. Lehns. Die Bedingungen des Gleichgewichts bei einem beugsamen Polygon zu bestimmen, wenn an iedem Winkelpunkt zwo Arten von Kräften, die von innen nach außen wirken, angebracht sind, wo die von der einen Art die Polygonwinkel in zween gleiche Theile theilen, die von der andern aber einer Linie von gegebener Lage gleichlaufend sind.

Es seyen AB, BC, CD (fig. 28.) drei auf einander folgende Seiten des gegebenen Polygons; P

und P' die Kräfte, welche die beiden Polygonwinkel ABC, BCD in zween gleiche Theile theilen: p und p' die unter einander und mit einer Linie von gegebener Lage parallelen Kräfte. Die beiden Kräfte P und p auszudrucken nehme ich BM und BN, und verzeichne das Parallelogramm BMON, um diese beiden Kräfte auf eine einzige zu bringen, welche durch die Diagonale BO ausgedruckt wird. Ich verzeichne das zweite Parallelogramm BOKH, wovon BO eine Seite ist; die Diagonale fällt in die verlängerte Seite CB, und die Seite BH auf die Polygonseite AB. Nun ist klar, daß BK die Spannung der Seite CB nach der Richtung CB ausdruckt. Verfährt man eben so bei dem Winkel C wie bei dem Winkel B, das ist, verzeichnet man auf ähnliche Weise, wie das Parallelogramm BMON verzeichnet worden ist, das Cmon und das Cokh nach Art des BOKH, so erhellet, daß Ck die Spannung der Seite BC nach der Richtung BC ausdruckt. Nun muß zur Erhaltung des Gleichgewichts die Seite BC nach beiden entgegengesetzten Richtungen BC und CB gleichstark gespannt werden. Es kommt also nur noch drauf an, die Ausdrücke für die Linien BK, CK zu finden, und solche einander gleich zu setzen.

Das Dreieck BOK gibt

$$BO : BK = \sin BKO : \sin BOK$$

folglich $$BK = \frac{BO . \sin BOK}{\sin BKO}$$

Nun ist $BKO = ABK$, und $BOK = BOM + MOK = OBp + ABZ$

also $$BK = \frac{BO . \sin (OBp + ABZ)}{\sin ABK}$$

oder $$BK = \frac{BO . (\sin ABZ . \mathrm{Cos} OBp + \mathrm{Cos} ABZ . \sin OBp)}{\sin ABK}$$

den

den Sinus totus für die Einheit angenommen. Wenn man aber aus dem Punkt O die OR senkrecht auf Bp fällt, so erhält man

$$\sin OBp = \frac{OR}{BO} = \frac{ON.\sin ONR}{BO} = \frac{P.\sin PBp}{BO}$$

$$Cos OBp = \frac{BR}{BO} = \frac{BN + NR}{BO} = \frac{p + P.Cos PBp}{BO}$$

Daher

$$BK = \frac{\sin ABZ.(p + P.Cos PBp) + P.Cos ABZ.\sin PBp}{\sin ABK}$$

$$= \frac{p.\sin ABZ + P.(\sin ABZ.Cos PBp + Cos ABZ.\sin PBp)}{\sin ABK}$$

$$= \frac{p.\sin ABZ + P.\sin (ABZ + PBp)}{\sin ABK}$$

$$= \frac{p.\sin ABZ + P.\sin ABY}{\sin ABK}$$

Eben so findet man

$$Ck = \frac{p'.\sin DCZ' + P'.\sin DCY'}{\sin DCk}$$

Diesen Werth dem von BK gleich gesetzt, gibt

A) $\frac{p.\sin ABZ + P.\sin ABY}{\sin ABK} = \frac{p'.\sin DCZ' + P'.\sin DCY'}{\sin DCk}$

wodurch die Bedingungen des Gleichgewichts für iede drei auf einander folgende Polygonseiten bestimmt werden.

47. Anmerk. Man begreift leicht, daß die Bedingungen des Gleichgewichts immer die nämlichen sind, folglich immer auf einerlei Art ausgedruckt werden, es mag das Polygon eine ununterbrochene Figur bilden, oder es mögen z. B. die Seiten AS, DX an feste Punkte S, X befestigt seyn und der Theil SVX des Polygons ganz fehlen; denn da das Polygon beugsam ist, so muß das Gleichgewicht in allen seinen Theilen besonders statt finden, und es ist gleichgültig,

wie die Kräfte an den Endpunkten eines Theils im Gleichgewicht erhalten werden.

48. Aufg. **Die krumme Linie zu bestimmen, welche ein beugsames Gefäß bilden muß, wenn jeder Punkt desselben von zwo Kräften getrieben wird, deren eine auf die krumme Linie senkrecht, die andere aber der Abscissen- oder Ordinatenaxe gleichlaufend ist.**

Die Auflösung dieser Aufgabe ergibt sich aus dem vorhergehenden Lehnsatz, wenn man annimmt, das dort erwähnte Polygon habe unendlich viele Seiten oder bilde eine krumme Linie (fig. 29.). Es seyen AB, BC, CD drei auf einander folgende Elemente dieser krummen Linie; OU, ON die beiden Axen der senkrechten Koordinaten, und, indem die Kräfte P, P′ senkrecht auf die krumme Linie sind, seyen die Kräfte p, p′ der Axe OU gleichlaufend. Man ziehe auf die Axe ON die Ordinaten AL, BL′, CL″, und setze nun $OL = x$, $OL' = x'$, $OL'' = x''$, $AL = y$, $BL' = y'$, $CL'' = y''$, ein Element der krummen Linie $= ds$, das ich als ein beständiges Differential ansehe; ferner nenne man R den Halbmesser der abgewickelten Linie bei B, und R′ den Halbmesser der abgewickelten bei C; so erhellet, daß hier $\sin ABZ = \frac{dx}{ds}$, $\sin ABY = 1$, $\sin ABK = \frac{ds}{R}$, $\sin DCZ' = \frac{dx''}{ds}$, $\sin DCk = \frac{ds}{R'}$, $P' = P + dP$, $p' = p + dp$, und daß sich also die Gleichung (A§. 46.) in nachstehende verwandelt.

$$R(p\,dx + P\,ds) = R'[(p + dp)\,dx'' + (P + dP)\,ds]$$

oder auch (wenn man bemerkt, daß $dx'' = d(x' + dx') = d(x + 2\,dx + d\,dx) = dx + 2\,ddx + d^3x$; $R' = R + dR$, und die Glieder, welche sich aufheben, wegstreicht und die unendlich kleinen Größen, welche über

über die zwote Ordnung hinausgehen, außer Acht läßt.

B) $pdxdR + Rdxdp + 2Rpddx + RdPds + PdRds = o$

Diese Gleichung muß man nun, wo es angeht, integriren, wenn das Gesetz der Kräfte P und p bekannt ist, wie man sogleich aus einigen Beispielen ersehen wird.

49. I. Zus. Wir wollen setzen, es liege die krumme Linie MANG in einer horizontalen Ebene, die Kräfte p verschwinden und die auf die krumme Linie senkrechten Kräfte P seyen unveränderlich; so hat man $p = o$, $dp = o$, $P = C$, $dP = o$, und die Gleichung B verwandelt sich schlechtweg in $CdR = o$, welches für R eine beständige Größe gibt, woraus man sieht, daß für diesen Fall die krumme Linie ein Kreis ist.

Es folgt also, daß ein lothrechtes prismatisches Gefäß, dessen Wände vollkommen beugsam sind, ohne sich aus einander zu dehnen, mit Wasser angefüllt die Gestalt eines geraden Zilinders annehmen müsse; denn wenn man die äußere gewölbte Fläche durch horizontale Flächen in unendlich viele Ringe theilt, so muß ieder Ring in allen seinen Punkten von der flüssigen Masse senkrecht mit unveränderlicher Kraft gedruckt werden, und daher im Stande des Gleichgewichts die Gestalt eines Kreises annehmen.

50. Es liege die krumme Linie MAN, die als gleichförmig schwer angesehen wird, in einer lothrechten Ebene, und sey in M und N als zweenen in der Waage liegenden festen Punkten befestigt, daß also das Stück MGN fehlt; so ist die Oberfläche der flüßigen Masse MN waagrecht, die Kräfte P, welche die senkrechten Druckungen dieser flüßigen Masse auf ieden Punkt von den Wänden des Gefäßes ausdrucken,

sind den lothrechten Linien BL' proportional, und die Kräfte p sind die Gewichte der Elemente der krummen Linie. Man nenne g die Schwere, b die Breite der Fläche, auf welche der Druck der flüßigen Masse wirkt, c^2 die Fläche des auf die beugsame zilindrische krummlinigte Masse MAN senkrechten Queerschnitts; so hat man $P = gby\,ds = gb(y + dy)\,ds$; $dP = gb(dy + ddy)\,ds$, $p = gc^2\,ds$, $dp = o$. Diese Werthe in der Gleichung B substituirt, gibt $c^2\,dx\,dR + 2Rc^2\,ddx + bR\,dy\,ds + by\,dR\,ds = o$, oder auch $c^2\,dx\,dR + c^2R\,ddx + bR\,dy\,ds + by\,dR\,ds = -c^2R\,ddx$, oder, (wenn man für R seinen Werth $\frac{ds\,dy}{ddx}$ in dem andern Theil der Gleichung gebracht) $c^2\,dx\,dR + c^2R\,ddx + bR\,dy\,ds + by\,dR\,ds = -c^2\,ds\,dy$, und dieses integrirt gibt

$$c^2R\,dx + by\,R\,ds = A\,ds - c^2y\,ds$$

Schafft man R weg, so erhält man

$$c^2\,dx\,dy\,ds + c^2y\,ds\,ddx = A\,ds\,ddx - by\,dy\,ds^2$$

und das Integral hievon

$$c^2y\,dx\,ds = B\,ds^2 + A\,dx\,ds - \frac{by^2\,ds^2}{2}$$

woraus sich endlich die nachstehende Gleichung ergibt

$$dx = \frac{(2B - by^2)\,dy}{\sqrt{[(2c^2y - 2A)^2 - (2B - by^2)^2]}}$$

die sich durch die Quadraturen krummer Linien allgemein integriren läßt.

Diese Integration bringt eine dritte beständige Größe C in die Rechnung. Um die drei beständigen Größen A, B, C zu bestimmen, bemerke man 1stens, daß $y = o$, $x = o$ gibt, oder $x =$ einer bestimmten Größe, weil man den Anfang der krummen Linie, wo man will, hinbringen kann; 2tens, daß die äussersten Punkte M, N, der Lage nach gegeben sind; 3tens, daß die Länge der beugsamen zilindrischen krum-

krummen Masse MAN gegeben ist, oder daß die krumme Linie z. B. in M einen gegebenen Winkel mit der Axe MN macht, oder daß solche einer andern dergleichen Bedingung Genüge thut.

51. III. Zus. Wenn unter der Voraussetzung des vorigen §. $A = o$, und $B = o$ ist, so findet man $x = C \pm \sqrt{\left(\frac{}{b^2} - y^2\right)}$ die Gleichung für den Kreis.

52. IV. Zus. Unter eben den Voraussetzungen des §. 50. erhält man

1stens wenn man $c^2 = o$ setzt, oder wenn die krumme Linie MAN als nicht schwer angesehen werden kann,

$$dx = \frac{(2B - by^2)\,dy}{\sqrt{(4A^2 - (2B - by^2)^2)}}$$

die ordentliche Gleichung für die krumme Linie, nach der ein Seegel vom anstoßenden Wind angespannt wird.

2tens Setzt man $b = o$, oder kann die flüßige Masse als ohne Schwere angesehen werden, so hat man

$$dx = \frac{B\,dy}{\sqrt{((c^2 y - A)^2 - B^2)}}$$

die Gleichung für die Kettenlinie.

53. Erinner. Es ließe sich diese Theorie leicht auf die Untersuchung der Gestalt anwenden, welche eine von Luft ausgedehnte Blase, ein mit Wein angefüllter Schlauch ꝛc. annehmen müssen, wenn man das Gesetz kennte, wonach sich die Theile, woraus diese Arten von Gefäßen zusammengesetzt sind, ausdehnen. Die Bedingungen des Gleichgewichts erhalten ihre Bestimmung immer auf einerley Art, die

äußere Fläche des beugsamen Gefäßes mag, von welcher Art man will, seyn. Die einzige Schwierigkeit liegt in der Integrirung der Gleichungen, auf welche man geführt wird. Da alle Berechnungen dieser Art auf etwas hypothetischen Sätzen beruhen und nicht eigentlich zur Hydrostatik gehören, so will ich mich nicht weiter dabei aufhalten.

Die erste Aufgabe, welche man von dieser Art aufgelößt hat, ist die bei einem beugsamen Gefäß, das dem Druck einer schweren flüßigen Masse ausgesetzt ist; dieses geschah 1692. von den beiden berühmten Brüdern Jakob und Johann Bernoulli. Seit dieser Zeit haben Daniel Bernoulli, Euler und andere Geometer in den Denkschriften der Akademien zu Petersburg, Berlin ꝛc. diese Untersuchungen erweitert und in größerer Allgemeinheit vorgetragen.

Sechstes Kapitel.

Von elastischen flüßigen Massen, und insbesondere vom Gleichgewicht der Luft; Erfahrungssätze, auf welchen das Gleichgewicht beruht.

54.

Die elastischen flüßigen Massen haben, als flüßige Massen, alle Eigenschaften dieser Art von Körpern; und es lassen sich in diesem Betracht die allgemeinen Sätze auf sie anwenden, welche wir in Ansehung des Gleichgewichts flüßiger Massen festgesetzt haben. Sie haben aber außerdem noch andere eigenthümliche Eigenschaften, welche von der Natur der Federkraft abhängen oder von der Eigenschaft, vermög der sich ihr körperlicher Raum vermindert oder vergrößert, nachdem sie mehr oder weniger zusammengedruckt werden.

Unter allen elastischen Flüßigkeiten ist die Luft die bekannteste, die ausgebreitetste und unter allen wirkenden Kräften in der Physik und Mechanik die allgemeinste. Wir wollen daher hier ihre Eigenschaften untersuchen, nicht nur weil sie einer solchen Aufmerksamkeit würdig ist, sondern auch um die Begriffe festzusetzen und um hiernächst eben diese Theorie auch auf andere Arten elastischer Flüßigkeiten leicht anwenden zu können.

55. I. Lehrs. Die Luft ist eine schwere flüßige Masse.

Denn

Denn es ist die Schwere eine allgemeine durch die ganze Natur ausgebreitete Kraft, und es gibt keinen Körper, der ihr nicht unterworfen sey. Alle Erscheinungen auf unserer Erde und dem großen Weltgebäude beweisen diese Wahrheit. Die Schwere der Luft, wovon hier die Rede ist, wird durch die Queckſilbersäule, welche in den Barometerhöhen schwebend hängen bleibt, einem Jeden vor Augen gestellt.

Die alten Philosophen kannten die Schwere der Luft nicht. Sie nahmen in der Natur zweierlei Arten von Körpern an, die schweren Körper als Steine, Bleistücke und überhaupt alle Körper, die sich selbst überlassen zur Erde niederfallen; und die leichten Körper als die Luft, die Flamme ꝛc. weil diese Körper sich von der Erde zu entfernen und sich oberwärts zu bewegen scheinen; man wußte dämals nicht, daß diese aufsteigende Bewegung entweder von ihrer Elasticität oder von der Wirkung dichterer und schwererer Körper verursacht würde, welche unterwärts streben und die flüßigen Massen, die sie aus ihrer Stelle treiben, oberwärts zu bewegen bemüht sind. Man hat dem Galileus die Meinung oder den Gedanken zu verdanken, daß die Luft eine schwere flüßige Masse sey; aber sein Schüler Toricelli ist der Erste, der diesen Satz durch die Erfahrung bewiesen hat. Schon nach den Gründen des Galileus geneigt zu glauben, daß das Wasser in den Pumpen vermög des Drucks der Atmosphäre stiege, und mit der hierauf gegründeten Vermuthung, daß eine flüßige Masse, die dichter oder schwerer als Wasser sey, in einer luftleeren Röhre nicht so hoch erhoben werden würde, nahm er eine etwa 3 Fus lange gläserne Röhre AB (fig. 30.) die am Ende A offen und am Ende B verschlossen war; diese füllte er mit Queckſilber, verschloß hierauf das Ende A mit dem Finger und kehrte nunmehr die Röhre um, so daß das Ende B oben war und das Ende A unten in einem

Gefäß

Gefäß MCN, worin sich schon vorher Quecksilber befand: endlich nahm er seinen Finger weg, um die Quecksilbersäule der Wirkung der Schwere frei zu überlassen. Nun blieb nach einigem Schwanken die Quecksilbersäule AE in der Höhe von 28 Zoll über der Oberfläche des in dem Behältnis MCN befindlichen Quecksilbers unbeweglich stehen. Hieraus schloß Toricelli ganz richtig, daß die Quecksilbersäule vermög des Drucks der äußern Luft auf die Oberfläche des in dem Behältnis MCN befindlichen Quecksilbers auf solche Art schwebend erhalten werde, indem dieser Druck auf die in der Röhre befindliche Säule, da das obere Ende B hermetisch verschlossen ist, nicht wirken kann. Sobald man auch dieses Ende eröfnet, um der Luft den Zutritt in die Röhre zu gestatten, fällt die Säule sogleich herab, und breitet sich in dem Behältnis aus. Unsere gewöhnlichen Barometer sind nichts anders als die Toricellische Röhre zu täglichen Beobachtungen angewendet. Ich brauche nicht zu bemerken, daß der Schluß immer der nämliche bleibt, man mag nun annehmen, daß die Luft durch ihr Gewicht unmittelbar auf die Oberfläche des im Behältnis befindlichen Quecksilbers wirke, oder daß sie solches durch ihre Federkraft thue, weil in diesem letzten Fall die Federkraft von der Zusammendrückung oder dem Gewicht der obern Luft verursacht wird.

56. I. Anmerk. Die Höhe des Quecksilbers in der Barometerröhre ist verschieden und größer oder kleiner, nachdem die Oerter in Ansehung einer gewissen Horizontalfläche niedriger oder höher liegen, z. B. in Ansehung des Meeres. Die erste Erfahrung dieser Art ist die, welche Pascal auf dem Berg Puy de Dome nicht weit von Clermont in Auvergne machen ließ. Vom Fus bis zum Gipfel dieses Berges, der etwa 500 Toisen über Clermont erhaben ist, fiel das

Queck-

Queckſilber in der Röhre um 3 Zoll $1\frac{1}{2}$ Linie. Wir werden hiernächſt die Urſache dieſer Veränderung angeben.

57. II. Anmerk. An einem und eben dem Ort iſt die Queckſilberhöhe im Barometer nicht immer einerlei; ſie ändert ſich nach Beſchaffenheit der Veränderungen ab, welche in dem Gewicht oder der Federkraft der Atmoſphäre durch Regen, Winde u. dgl. verurſacht werden. Wir werden in der Folge wieder auf dieſen Gegenſtand zurück kommen.

58. I. Zuſ. Da alſo die Luft ſchwer iſt, und ihr Druck auf ieden Punkt der Erdfläche dem Druck eines Queckſilberfadens gleich iſt, deſſen mittlere Höhe ich als bekannt annehme, ſo läßt ſich leicht das Gewicht der ganzen Luftmaſſe angeben, welche die Erdkugel umgibt. Denn es ſey R der Halbmeſſer der Erdkugel, r die gegebene Höhe des erwähnten Queckſilberfadens, π die Verhältnis des Umfangs zum Durchmeſſer, π die ſpecifiſche Schwere des Queckſilbers, das iſt, z. B. das Gewicht von einem Kubikfus Queckſilber, wenn man den Kubikfus für die Einheit des körperlichen Raums annimmt; ſo ſucht man den Inhalt zwoer Kugeln, deren eine $R + r$ und die andere R zum Halbmeſſer hat; den Inhalt der zwoten zieht man von dem der erſten ab, dieſes gibt $\frac{4\pi (R+r)^3}{3} - \frac{4\pi r^3}{3}$ oder $4\pi \left(R^2 r + r^2 R + \frac{r^3}{3} \right)$ zum Reſt, der in Kubikfußen ausgedruckt und hierauf durch π oder durch das Gewicht von einem Kubikfus Queckſilber multiplicirt das Gewicht der Atmoſphäre gibt.

Bei der Berechnung kann man zur Abkürzung die Glieder, welche r^2 und r^3 enthalten, als ſehr klein in Vergleichung mit dem erſten weglaſſen.

Es

Es sey z. B. r = 28 Zoll, das Gewicht von einem Kubikfus Queckſilber 980 Pfund. Man ſetze ferner, Beobachtungen gemäs, ieden Grad eines größten Erdzirkels auf 57000 Toiſen; ſo findet man, wenn man die erwähnte Berechnung nach der Formel $4 \pi R^2 r$ führt, daß das geſammte Gewicht der Atmoſphäre beiläufig 1102898214981818181818 Pfund beträgt.

59. II. Zuſ. Zwo Säulen, die eine von Queckſilber und die andere von Waſſer, die einander im Gleichgewicht erhalten, haben Höhen, die ihren ſpecifiſchen Schweren umgekehrt proportional ſind (33), ſo daß, wenn die Höhe der Queckſilberſäule 28 Zoll beträgt, die der Waſſerſäule ohngefähr 32 Fus betragen muß. Nun iſt die Atmoſphäre, wie wir eben geſehen haben, mit der erſten von dieſen beiden im Gleichgewicht, folglich muß ſie auch der letztern das Gleichgewicht halten. Es muß alſo im leeren Raum der Druck der Atmoſphäre eine Waſſerſäule von etwa 32 Fus hoch ſchwebend erhalten.

Will man ſolches unmittelbar durch die Erfahrung beſtättigt finden, ſo nehme man eine Röhre oder vertikalen Pumpenſtiefel QH (fig. 31.), der mit dem Ende Q, welches offen iſt, im Waſſer MCDN ſteht; man ziehe längſt der Röhre einen genau eingepaßten dichten Kolben K in die Höhe, ſo wird das Waſſer in der Röhre ſo lange in die Höhe ſteigen, bis es ſich über dem Waſſerſpiegel MN etwa 32 Fus hoch befindet und hiernächſt in dieſer Lage unverrückt ſtehen bleiben, wenn gleich der Kolben in die Höhe zu gehen fortfährt. Der Grund davon fällt in die Augen. Der Kolben läßt, indem er ſteigt, einen leeren Raum hinter ſich, in welchen die äußere Luft keinen Zutritt hat, und der freie Druck dieſer Luft auf den Waſſerſpiegel im Behältnis nöthigt das Waſſer durch die Oefnung Q

zu dringen und in der Röhre in die Höhe zu steigen. Das Wasser bleibt in der Höhe von 32 Fus stehen, weil alsdann sein Gewicht mit dem Druck der Atmosphäre im Gleichgewicht ist.

60. III. Zus. Man setze, das Wasser sey in vorstehendem Versuch bis zu seiner größten Höhe AB gestiegen, der Kolben steige aber hierauf noch weiter fort und es entstehe zwischen der Wasserfläche BT und des Kolbens Grundfläche eine Leere wie BP. Macht man hierauf zwischen den Punkten A und B eine Seitenöfnung E in der Röhre, so muß die äußere Luft mit Gewalt in diese Oefnung eindringen und die aus sehr bewegbaren Theilgen zusammengesetzte Säule AT in zween Theile AF, ET absondern. Der erste muß vermög seiner Schwere in das Behältnis MCDN zurückfallen, weil der Druck der durch E beitretenden Luft mit dem Druck der Luft, welcher das Wasser durch das Ende Q der Röhre aufwärts zu treiben strebt, im Gleichgewicht ist; aber der andere Theil ET, welcher von der durch E eindringenden Luft, die nach allen Seiten sowohl ober- als unterwärts wirkt, getrieben wird, muß nothwendig in dem oberhalb befindlichen leeren Raum BP in die Höhe steigen. Es verhält sich mit der Erhebung der Säule ET wie mit dem Wasser, das in einer umgekehrten Bouteille, deren Mündung offen ist, schwebend erhalten wird. Das Wasser wird in der Flasche durch den Druck der äußern Luft gegen die Mündung erhalten.

Hieraus erklärt man die Erfahrung, welche man mit der Pumpe zu Seville 1766. gemacht hat. Ein Blechschmied in dieser Stadt, welcher das Wasser auf eine Höhe von 60 Fußen mittelst einer gemeinen Saugpumpe zu heben unternommen hatte, und hierin nicht zum Zweck gelangen konnte, gab der Saugröhre aus Verdruß einen Schlag mit dem Hammer, wodurch an

dieser

dieser Stelle, etwa 10 Fus hoch über dem Wasserspiegel im Behältnis ein Loch von etwa 1 Linie im Durchmesser entstand. Plötzlich stieg hierauf das Wasser bis zur Höhe von 60 Fusen. Setzt man das Pumpen fort, so daß die Seitenöfnung allemal wieder verschlossen und hierauf wieder geöfnet wird, und so abwechselnd fort, so kann man ein Springwerk, das ununterbrochen fortgeht, auf eine Höhe erhalten, die beträchtlich über 60 Fus hinausgehen kann, wie man weiter unten sehen wird. Dieser Versuch ist mehrmalen, und auf verschiedene Weise abgeändert, in Frankreich wiederholt worden; man hat dabei Queckſilber statt des Wassers gebraucht, um kürzere Röhren gebrauchen zu können und die Vorrichtungen zu erleichtern (Mem. de l'Acad. des Sc. de Paris an. 1766 pag. 431.).

Die Pumpen dieser Art und alle die auf eben dem Grunde beruhen, haben die Ungemächlichkeit, daß sie eine besondere mechanische Einrichtung zur wechselseitigen Oefnung und Verschließung der Oefnung E mittelst eines Hahns erfordern, und daß sie bei gleichen Bewegungskräften weniger Wasser als die gemeinen Pumpen geben. Man begreift nämlich, daß sich mit der schon in der Wassersäule ET befindlichen Luft noch Kügelgen verbinden, welche von der durch die Oefnung E beitretenden Luft herrühren; daß alle diese Luft durch ihre nach allen Seiten wirkende Ausdehnungskraft einen Theil der Wassersäule ET losreist und solche der abwärts gerichteten Wirkung der Schwere überläßt, und daß dieser für die Wirkung der Pumpe nachtheilige Erfolg desto beträchtlicher seyn müsse, ie größer der Durchmesser der Pumpe ist.

61. IV. Zus. Es sey ABHO (fig. 32.) ein umgebogener aus zween ungleich langen Schenkeln zusammengesezter Heber; den kürzern BA tauche man

in die flüßige Masse CN eines Gefäßes CD, und bringe dadurch, daß man an der Oefnung O saugt, die Luft aus dem Innern des Hebers; alsdann muß die Flüßigkeit aus dem Gefäß in dem Heber steigen und zur Oefnung O herauslaufen, wofern diese Oefnung tiefer liegt, als der Wasserspiegel MN.

Diese Erscheinung ist mit der bei dem Barometer einerlei. Man stelle sich nämlich vor, es sey das Ende O des Hebers in ein Behältnis EF, worin eine Flüßigkeit befindlich ist, eingetaucht. Man sieht, daß ieder Theil des Hebers AB, OH als eine besondere, der Toricellischen ähnliche, Röhre angesehen werden kann. Wenn man also den Druck der Atmosphäre durch KX ausdruckt, das Gewicht der flüßigen Säule AB durch KU, und das der Säule HO durch KZ; so ist klar, daß VX die Kraft ausdruckt, welche die Flüßigkeit in der Röhre AB hebt, und ZX die Kraft, welche die Flüßigkeit in der Röhre OH aufwärts zu heben strebt. Da nun diese beide letzten Kräfte einander entgegen wirken, so wird die schwächere aufgehoben, und ZV ist die noch übrige Kraft, welche den Abfluß nach der Richtung ABHO bewirkt.

Man sieht hieraus 1) daß wenn KV = KZ, alsdann kein Abfluß statt findet; 2) daß wenn der Druck des kürzern Schenkels größer als der atmosphärische ist, kein Abfluß erfolgen könne, weil alsdann der Druck der Atmosphäre nicht Kraft genug hat, die Flüßigkeit bis in B zu erheben. Wenn also die Flüßigkeit z. B. Wasser ist, so muß die Höhe des kürzern Schenkels weniger als 32 Fus betragen; für Queckßilber muß AB weniger als 28 Zoll ausmachen ꝛc.

Dieser Mechanismus des umgebogenen Hebers mit ungleichen Schenkeln dient zur Erklärung des abwechselnden Laufens und Stillestehens gewisser Brunnen. Es ist eine allgemeine Erfahrung, daß die Brunnen und Flüsse ihre Quellen in großen

Wasser-

Wasserbehältnissen haben, welche die Natur in dem Innern und am Fus der Berge ausgehöhlt hat, welche durch die auf den Rücken der Berge und in denen umherliegenden Gegenden niederfallenden Regenwasser unterhalten werden, indem solche durch die Spalten des Erdreichs bis zu dem Behältnis durchdringen, von da sie ausfließen und Brunnen, Bäche ꝛc. erzeugen. Wenn die in dem Behältnis versammelten Regenwasser in hinlänglicher Menge vorhanden sind, um den Abgang immer wieder zu ersetzen, so muß der Brunnen oder der Bach ohnunterbrochen fortlaufen; wo nicht, so lauft er unterbrochen und hängt von der nassen oder trockenen Witterung ab. Aber die ordnungsmäsig periodisch laufenden und wieder stille stehenden Brunnen, wovon hier die Rede ist, haben eine andere Ursache. Es sey MANE ein am Fus eines Berges befindliches Behältnis, das von Regenwassern unterhalten wird; statt dieser Art des Beiflusses substituire ich in Gedanken den Zufluß aus einer Röhre KS, die dem Behältnis MANE durch die Oefnung S die nämliche Wassermenge zuführte. Man setze, die Wasser dieses Behältnisses fließen an der Stelle A ab, von da ein Abflußkanal ABHO in der Gestalt eines umgebogenen Hebers ausgeht, dessen kleinerer Schenkel AB ist, wie fig. 32. Das durch die Röhre KS dem Behältnis MANE zugeführte Wasser muß darin nach und nach steigen, und zugleich muß es in der Röhre AB steigen, worin es die Luft vor sich wegtreibt; wenn seine Oberfläche MN bis zur Höhe gestiegen ist, welche mit dem Punkt B in der Waage liegt, so muß es durch den Schenkel BHO ablaufen; und man sieht, daß dieser Abfluß ohnunterbrochen fortgehen müßte, wenn die durch KS zufliessende Wassermenge größer oder doch eben so groß wäre als die durch HO abfließende. Man setze aber, es sey iene kleiner als diese, so sinkt der Spiegel MN

allmälig, und der Ausfluß durch HO geht gleichwohl fort wie der bei dem Heber fig. 32. solang das Wasser die Oefnung A bedeckt; wenn aber endlich die Oefnung A entblößt wird, und nun Luft durch diese Oefnung in den Heber ABHO kommt, so hört der Ausfluß in O auf. Da aber die Röhre KS fortfährt, dem Behältnis Wasser zuzuführen, so steigt solches aufs Neue bis zur Höhe des Punkts B, da dann wieder ein neuer dem ersten ähnlicher Abfluß erfolgt, der sich auch ebenso wieder endigt; der Lauf des Brunnens geht also periodisch fort.

Man sieht, daß diese Arten von Brunnen mehreren Abwechslungen unterworfen seyn können, wenn mehrere Behältnisse und mehrere umgebogene Heber mit einander verbunden sind.

62. II. Lehrs. **Die Luft ist eine elastische flüßige Masse.**

Man nehme eine Blase und blähe sie durch eingelassene Luft auf, so erhält man einen Ballon, der sich zusammendrücken läßt und sich wieder ausdehnt, sobald der äußere Druck nachläßt. Folglich ꝛc.

63. III. Lehrs. **Die Federkraft der zusammengedrückten Luft ist der Kraft gleich, welche die Zusammendrückung bewirkt.**

Der Heronsbrunnen gibt hier einen Beweis ab. Diese Maschine (fig. 34.) die man gewöhnlich aus weissem Blech macht, besteht aus einem Behältnis ABCD, das von allen Seiten verschlossen und bis in EF ein wenig unter AB mit Wasser angefüllt ist; sodann aus einem andern Behältnis GHKI, das gleichfalls von allen Seiten verschlossen, dem vorigen gleich und voll Luft ist; ferner aus einer Röhre OT, die genau auf die Platten AB, DC, GH angelöthet ist, und die mit der äußern Luft durch die Oefnung O,

und

und mit dem untern Behältnis durch die Oefnung T, die dem Boden IK sehr nahe ist, kommunicirt; überdas aus einer Röhre XY, die mit den beiden Gefäßen verlöthet ist, und deren oberes Ende X dem Boden AB sehr nahe liegt; endlich aus einer Röhre QP, deren unteres Ende P sich nahe an dem Boden DC befindet, und deren oberes Ende Q an den Boden AB angeschweißt und mit einem Aufsatzröhrgen verbunden ist.

Nun verschließe man das Aufsatzröhrgen Q mit dem Finger oder mit einem Hahn, man gieße durch die Oefnung O der Röhre OT ein wenig Wasser ein, so muß solches bis in IK herabfallen und z. B. in VS steigen. Alsdann hat die äußere Luft mit derienigen, welche in den beiden Behältnissen zurückbleibt, gar keine Kommunikation mehr. Man fahre fort, Wasser einzugießen; so muß sich die in den Räumen GHSV, XY, ABFE allmälig verdichten, bis daß ihre Federkraft mit dem Druck des durch OT eingegossenen Wassers ins Gleichgewicht kommt. Wenn der Wasserspiegel, im Behältnis GHKI, MN ist, so muß die eben gedachte Luft ieden Theil der anliegenden Fläche mit einer Kraft drucken, die dem Gewicht einer Wassersäule gleich ist, welche den gedruckten Theil zur Grundfläche und OL zur Höhe hätte. Es wird also die in dem obern Behältnis befindliche Wasserfläche EF von der nämlichen Luft niederwärts getrieben, und das Wasser streht durch die Röhre PQ aufwärts zu steigen, so daß wenn man nun die Aufsatzröhre eröfnet, ein Strahl hervorspringt, der bis zur Höhe RZ = OL hinaufsteigt. Diese von der Federkraft der Luft herrührende Höhe ist dieienige, welche der Druck der Wassersäule OL hervorbringen würde, wie man in der Hydraulik sehen wird.

Man kann bemerken, daß wenn man das hervorspringende Wasser durch O wieder zurückgehen läßt,

dieses Wasser in das untere Behältnis tritt, und daß also das Springwerk so lange fortdauert, bis alles von P bis in EF befindliche Wasser herausgesprungen ist.

64. VI. Lehrs. **Die Luft komprimirt sich selbsten durch ihr eigenes Gewicht.** Denn die Luft ist eine schwere flüßige Masse; wenn man sich nun die Atmosphäre in unendlich viele Schichten getheilt vorstellt oder vielmehr in lauter Lagen, welche auf die Richtung der Schwere senkrecht sind, so ist klar, daß die untern Lagen von dem Gewichte der obern gedruckt werden, woraus nothwendig eine Zusammendrückung erfolgt, die desto stärker ist (alles übrige gleich angenommen), ie tiefer die Lage der Schichte in der Atmosphäre ist.

Ich sage **alles übrige gleich angenommen**, denn es gibt andere Ursachen, wie Kälte und Wärme, die zur Zusammendrückung und Ausdehnung der Luft mit beitragen. Die Dichtigkeit dieser Flüßigkeit ist äußerst verschieden; sie ist beiläufig acht- oder neunhundertmal geringer als die des gemeinen Wassers. Die mittlere Verhältnis dieser Dichtigkeiten läßt sich in unsern Gegenden ohne großen Irthum durch den Bruch $\frac{1}{850}$ ausdrücken.

65. Zus. Hieraus und aus §. 63. folgt, daß wenn die Luft, nachdem sie sich durch ihr eigenes Gewicht zusammengedruckt hat, nunmehr blos mittelst ihrer Federkraft zu wirken anfängt, sie den nämlichen Effekt thun muß, den sie durch ihr Gewicht hervorbringen würde. Dieses wird durch folgende Erfahrung bestättigt.

Man nehme eine gläserne Flasche ABCD (fig. 35.) von zilindrischer Gestalt; man gieße Queckßilber AEFD hinein, und in solches tauge man eine enge gläserne Röhre K von 29 bis 30 Zoll hoch, die an beiden

beiden Enden offen ist und deren unteres Ende einige Linien tief unter der Oberfläche des Queckſilbers liegt. Man verschließe diese Röhre genau in dem Hals der Flasche, so daß die in dem Raum EBCF enthaltene Luft mit der äussern gar nicht kommunicire; man setze hierauf diese Flasche mit ihrer Röhre unter den Recipient IHLM einer Luftpumpe; die im Recipient enthaltene Luft pumpe man soviel möglich aus; nun wird das Queckſilber in NO sinken, und in der Röhre über NO in die Höhe steigen, beinahe zu der nämlichen Höhe, in der es sich an dem Ort, wo man den Versuch macht, im Barometer erhält.

66. V. Lehrs. **Wenn man einerlei Masse oder Menge von Luft zusammendruckt, und solche zwingt, verschiedene Räume einzunehmen, so verhalten sich diese Räume umgekehrt wie die komprimirenden Kräfte.**

Dieser Satz wird aus folgender Erfahrung bewiesen, welche den Physikern sehr bekannt und von Herrn Mariotte zuerst gemacht worden ist. Es sey ABC (fig. 36.) eine umgebogene Glasröhre, die am Ende C hermetisch verschlossen, an dem Ende A aber offen ist. Die beiden Schenkel DA, EC sind vertikal, aber der Verbindungsschenkel DE ist horizontal. Man gibt dem innern Durchmesser dieser Röhre gewöhnlich drei bis vier Linien. Der kleine Schenkel EC muß vollkommen zilindrisch seyn, um die verschiedenen Räume der Luftmasse, welche man darin verdichtet, unter einander vollkommen vergleichen zu können. Wir wollen setzen, er sey 12 Zoll hoch; der andere DA ist viel höher. Man gieße langsam in die Röhre ein wenig Queckſilber, um den horizontalen Schenkel anzufüllen, so daß die beiden Flächen DV, IE in den beiden vertikalen Schenkeln in eine waagrechte Ebene zu liegen kommen, damit die in

dem Raum EC eingesperrte Luft in eben dem Zustand sey wie die äußere Luft; denn wenn die Federkraft der innern Luft EC stärker oder schwächer als die der äussern Luft gespannt wäre, so würden die Flächen IE, DV ungleich gedruckt, und sie könnten also nicht in der Waage liegen. Nun fahre man fort, Quecksilber in den Schenkel DA zu gießen, so wird man sehen, daß ie mehr sich solches gegen H erhebt, die Fläche EI desto höher nach F hinaufsteigt. Angenommen, daß der Druck der Atmosphäre dem Druck einer 28 Zoll hohen Quecksilbersäule gleich sey, findet man, daß, wenn FG horizontal gezogen und die Höhe GH = 14 Zoll gesetzt wird, die Höhe FC des mit Luft angefüllten Raums = 8 Zoll seyn wird; wenn GH = 28 Zoll, so wird FC = 6 Zoll ꝛc. Es folgt aber hieraus, daß die verschiedenen Räume der anfangs in EC eingesperrten Luft sich umgekehrt, wie die Gewichte verhalten, welche sie zusammendrucken; denn in dem ersten Augenblick, wo diese Luft nur den Druck der Atmosphäre auszuhalten hat, kann sie so angesehen werden, als ob sie von dem Gewichte einer 28 Zoll hohen Quecksilbersäule gedruckt würde; wenn man hierauf in dem Schenkel DA das Quecksilber bis auf die Höhe von 14 Zoll über die Horizontallinie FG bringt, so ist der Druck, den unsere Luftmasse auszuhalten hat, dem Gewicht einer Quecksilbersäule gleich, die 28 + 14 oder 42 Zoll zur Höhe hat; wenn die Höhe des Quecksilbers in dem Schenkel DA über FG 28 Zoll beträgt, so ist der Druck auf die nämliche Luftmasse dem Gewicht einer Quecksilbersäule gleich, welche 28 + 14 + 14 also in allem 56 Zoll zur Höhe hat ꝛc. Man sieht also, daß die Räume der Luftmasse durch die Zahlen 12, 8, 6 ausgedruckt werden, wenn die komprimirenden Gewichte 28, 42, 56 sind. Nun hat man diese verschiedenen Proportionen

12 : 8 = 42 : 28
12 : 6 = 56 : 28
8 : 6 = 56 : 42

Es stehen also die Räume in der umgekehrten Verhältnis der komprimirenden Gewichte.

Es lassen sich eben dergleichen Betrachtungen bei Queckſilberhöhen anstellen, die iede andere Verhältnis in den beiden Schenkeln der Röhre hätten; und dergleichen auf die Erfahrung gegründete Betrachtungen führen zuletzt auf den nämlichen Schluß.

Alle diese Erfahrungen müssen so angestellt werden, daß die in EC eingesperrte Luft mit der äußern einerlei Temperatur hat, und daß also die Aenderung ihres körperlichen Raums nur allein von der Beschaffenheit der komprimirenden Gewichte herrührt. Ohne diese Vorsicht würden Kälte und Wärme, wenn solche auf diese beiden Luftmassen nicht auf einerlei Art wirken, die Resultaten abändern, und es würde schwer seyn die hiervon herrührenden Wirkungen von denen, welche von den komprimirenden Gewichten herrühren, durch eine sichere und nicht hypothetische Methode abzusondern.

67. I. Zuſ. Weil die Federkraft der Luft der komprimirenden Kraft gleich ist (63.), so folgt, daß die verschiedenen elastischen Kräfte von einerlei Luftmasse, die man in verschiedene Räume zwängt, sich umgekehrt wie diese Räume verhalten.

68. II. Zuſ. Aus den allgem. Begriffen No. V. ersieht man, daß bei einerlei Masse die Dichtigkeiten sich wie die körperlichen Räume verhalten. Wenn also einerlei Luftmasse nach und nach verschiedene Räume einnimmt, so sind die komprimirenden Kräfte, oder die elastischen Kräfte, die sie dadurch bekommt, ihren Dichtigkeiten in diesen verschiedenen

Zuständen proportional. Es findet daher allemal, für einerlei Luftmasse, dieses allgemeine Gesetz zwischen den körperlichen Räumen, den elastischen Kräften und den Dichtigkeiten statt, daß die elastischen Kräfte verhältnismäsig zu- oder abnehmen, so wie die körperlichen Räume durch irgend ein Mittel verkleinert oder vergrößert werden.

69. III. Zus. Hierdurch ergibt sich das Gesetz, wonach die Verdünnung der Luft in der Luftpumpe erfolgt.

Man weis, daß die Haupttheile der gemeinen Luftpumpe, von der hier die Rede ist und worauf sich alle andern bringen lassen, diese sind: der Recipient, die Platte, der Pumpenstiefel oder der Zilinder, der längst dem Zilinder auf- und nieder spielende Stempel, und ein so durchbohrter Hahn, daß er nach einer Richtung gedreht den Recipient mit dem Zilinder in Kommunikation bringt, ohne die Kommunikation mit der äußern Luft zu gestatten, und daß er nach einer andern Richtung gedreht, die Kommunikation der äußern Luft mit dem Zilinder bewirkt, ohne die Kommunikation derselben mit dem Recipient zu gestatten.

Wenn nun A die Summe der innern Räume vom Recipienten und vom obern Theil des Zilinders bedeutet, welcher leer bleibt, wann der Stempel in die Höhe gestiegen ist, B die Summe von den Räumen des Recipienten und des leeren Raums im Zilinder, wann der Stempel niedergegangen ist, n die Anzahl, wie oft der Stempel hin und her gegangen ist, $\frac{m}{1}$ die Verhältnis der Dichtigkeit der äußern Luft zur Dichtigkeit der innern, nachdem der Stempel n mal auf und niedergegangen ist; und wenn wir nun setzen, der Stempel sey anfangs in der Höhe, der Hahn nach außen zu offen und nach dem Recipienten ver-

verschlossen, und so bringe man den Recipient auf die Platte; so ist klar, daß in diesem Augenblick die Dichtigkeit der in dem Raum A enthaltenen Luft mit der Dichtigkeit der äußern einerlei ist; ich drücke solche durch D aus. Verschließt man nun den Hahn nach außen und öfnet ihn gegen den Recipienten, und stößt den Stempel nieder; so muß sich die in A enthaltene Luft vermöge ihrer Federkraft ausdehnen und durch den Raum B gleichförmig verbreiten. Es muß sich ferner die Dichtigkeit, die sie in dem Raum B hat, zur Dichtigkeit, die sie im Raum A hatte, umgekehrt wie A zu B verhalten, weil die Masse die nämliche bleibt. Setzt man also diese Proportion an

$$B : A = D : \text{vierten Glied}$$

so druckt dieses vierte Glied D. $\frac{A}{B}$ die Dichtigkeit der innern Luft nach dem ersten Stos des Stempels aus. Eben so, wenn man den Hahn nun wieder gegen den Recipienten verschließt, nach außen zu aber eröfnet und den Stempel nunmehr wieder zurückzieht, hierauf den Hahn nach außen verschließt und gegen den Recipienten eröfnet, alsdann den Stempel zum andernmal hineinstößt: so muß die in dem Raum A enthaltene Luft, deren Dichtigkeit D. $\frac{A}{B}$ ist, sich in dem Raum B ausbreiten, so daß, wenn man die Proportion

$$B : A = D. \frac{A}{B} : \text{vierten Glied}$$

ansetzt, dieses vierte Glied D. $\frac{A^2}{B^2}$ die Dichtigkeit der innern Luft nach dem zweeten Stos des Stempels angibt. Wenn man diese Betrachtung so fortsetzt, so erhellet, daß die Dichtigkeit der innern Luft nach dem dritten Stos des Stempels durch D. $\frac{A^3}{B^3}$, nach dem

vierten

vierten durch D. $\frac{A^4}{B^4}$ und nach dem n ten durch D. $\frac{A^n}{B^n}$ ausgedruckt wird. Man hat also nach der Voraussetzung diese Proportion

$$D : D. \frac{A^n}{B^n} = m : 1$$

also $m. A^n = B^n$; nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen, so erhält man

$$\log (m. A^n) = \log B^n$$

oder $$\log m + n. \log A = n. \log B$$

Wenn also von den vier Größen m, n, A, B, die in dieser Gleichung vorkommen, drei gegeben sind, so läßt sich die vierte finden. Dieses gibt die Auflösung nachstehender Aufgaben.

I. Wenn die innern Räume A und B und die Verhältnis m der Dichtigkeit der äußern Luft zur Dichtigkeit der innern gegeben ist, die Anzahl n der Stempelstöße zu finden.

Die vorstehende Gleichung gibt diese

$$n = \frac{\log m}{\log B - \log A},$$

welche die Aufgabe auflößt.

Exempel: Es sey $A = 5$, $B = 7$, $m = 4$, so findet sich $n = \frac{60206}{14613}$ beinahe $= 4\frac{1}{8}$.

II. Aus den Räumen A, B und der Anzahl der Stempelstöße n, die Verhältnis m der Dichtigkeit der äußern Luft zur Dichtigkeit der innern zu finden.

Die Auflösung dieser Frage ergibt sich durch die Gleichung

$$\log m = n. (\log B - \log A)$$

Exem-

Exempel: Es sey $A = 5$, $B = 7$, $n = 10$, so findet sich

$\log m = 1,46128$ also beinahe $m = 29$.

III. Aus der Verhältnis m der Dichtigkeit der äußern Luft zur innern, der Anzahl der Stempelstöße n und dem Raume A, die Größe des Raums B zu finden.

Die Auflösung ergibt sich durch die Gleichung

$$\log B = \frac{\log m + n. \log A}{n}$$

Exempel: Es sey $m = 29$, $n = 6$, $A = 5$; so gibt sich

$\log B = 0,94270$ also beinahe $B = 9$.

IV. Aus der Verhältnis m der Dichtigkeit der äußern Luft zur innern, der Anzahl n der Stempelstöße und dem Raum B, den Raum A zu finden.

Diese Frage wird durch die Gleichung

$$\log A = \frac{n. \log B - \log m}{n}$$

aufgelöst.

Exempel: Es sey $m = 29$, $n = 9$, $B = 7$; so findet sich

$\log A = 0,68261$, also A beinahe $= 5$.

Eben diese Grundsätze dienen zur Erklärung des Gleichgewichts bei den Pumpen, wie man bald sehen wird.

70. Erinner. Der Satz, daß die Luft nach der Verhältnis der auf sie druckenden Gewichte komprimirt wird und die daraus fliessenden

senden Folgen dürfen nicht nach der Strenge als allgemein richtig angesehen werden. Denn bei den Erfahrungen, die man bis hierhin bei dieser Regel zum Grund gelegt hat, sind nur mittelmäßige Kräfte zu den Verdichtungen angewendet worden. Man weiß aber, daß diese Regel bei sehr weit getriebenen Fällen nicht mit Genauigkeit angewendet werden kann. Man stelle sich nämlich anfangs vor, die Zusammenpressung werde bis ins Unendliche getrieben, so müßte die Verdichtung eben so weit gehen, so daß die Luft zuletzt nur noch einen unendlich kleinen Raum einnehmen könnte. Nun mögen die Lufttheilgen eine Gestalt haben, welche man will, so ist klar, daß wenn ihre elastische Theilgen so sehr komprimirt wären, daß alle Theile einander berührten, die gegenseitige Undurchdringlichkeit dieser Theilgen keine fernere Komprimirung mehr verstattete. Man erwäge noch überdas, daß die Luft mit harten Theilgen vermischt seyn kann, welche gar keine oder eine höchst unvollkommene Elasticität haben. Setzt man im Gegentheil, daß die Komprimirung bis ins Unendliche abnehme, so kann man darum nicht annehmen, daß auch die Luft sich bis ins Unendliche ausbreite, denn die Federkraft der Lufttheilgen, sie mag vollkommen oder unvollkommen seyn, kann nur eine bestimmte Ausdehnung leiden, und es läßt sich unmöglich begreifen, wie eine endliche Masse einen unendlichen Raum einnehmen kann. Es ist also nicht in der Strenge wahr, daß die Verdichtungen der Luft nach der Verhältnis der komprimirenden Kräfte erfolgen. Da aber die komprimirenden Kräfte, welche wir bei unsern Erfahrungen anwenden können, niemalen über gewisse Grenzen hinausgehen, so kann der Satz (66) in dieser Rücksicht ohne weitere Einschränkung als wahr angenommen werden.

Siebentes Kapitel.

Theorie der Pumpen in ihrem Zustande des Gleichgewichts.

71.

Man macht von den Pumpen einen so häufigen Gebrauch, daß ich es nöthig finde, die Theorie des Gleichgewichts dieser Maschinen etwas umständlich vorzutragen.

Die Pumpen sind in der allgemeinen Bedeutung Röhren, worin das Wasser auf eine bestimmte Höhe erhoben werden soll, und zwar mittelst einer Bewegungskraft, welche das Gewicht oder die Federkraft der Luft in eine spielende Bewegung bringt und so zum Mittel dient, dieses Gewicht oder diese Federkraft zur Erhebung des Wassers zu benutzen.

Man hat drei Hauptarten von Pumpen, **Saugwerke**, **Druckwerke** und **vereinbarte Saug- und Druckwerke**. Alle Maschinen dieser Art sind nur aus diesen drei erwähnten Arten zusammengesetzt, wie in der gemeinen Mechanik alle Maschinen nur aus den sieben einfachen Grundmaschinen zusammengesetzt sind.

Von den Saugwerken.

72. Das Saugwerk (fig. 37.) ist aus zwo vertikalen Röhren AMNC, ABDC, die einerlei Axe haben und in AC zusammengestoßen sind, zusammengesetzt. Die erste, welche in dem Wasser steht, heißt die **Saugröhre**, die andere der **Stiefel** (corps de pompe). In AC ist eine Absonderung oder Schiedwand mit einem Loch, das mit einem sich aufwärts öfnen-

öfnenden Ventil E verschlossen wird. In dem Stiefel steigt und sinkt wechselsweis ein Kolben, der mittelst der Kolbenstange Z durch einen Hebel oder auf eine sonst beliebige Art in Bewegung gesetzt wird. Durch diesen Kolben geht nach der Richtung seiner Axe ein Loch durch, das durch ein oberwärts aufgehendes Ventil F verschlossen wird. Er spielt in einem Raum auf und nieder, dessen Höhe ich durch GK ausdrücken will, das ist, wenn der Kolben **ausgeschoben** hat, so ist seine untere Grundfläche in der horizontalen Fläche GH; und wenn er **ausgehoben** hat, so ist eben die Grundfläche in der horizontalen Ebene KI. Die tiefste Stelle des Kolbenschubs GH muß so nahe als möglich am Ventil E liegen.

Man sieht, daß von den zweien Ventilen E und F, die sich übrigens auf einerlei Art wechselsweis öfnen und verschließen, das erste E immer an der nämlichen Stelle bleibt (daher man es das beharrliche, la soupape *dormante* nennt), und das zweite mit dem Kolben, auf dem es ruht, fortgeführt wird (la soup. *mobile* das fortgehende Ventil). (*).

Der Druck der Atmosphäre ist an einem und eben dem Ort manchen Veränderungen unterworfen, wie wir unten näher zeigen werden; aber in gegenwärtiger kurzen Abhandlung von den Pumpen, sehen wir solchen als eine unveränderliche Kraft an, die, nach ihrem mittlern Werth genommen, verstanden werden muß. Diese Größe ist in unsern Gegenden beiläu-

(*) In der deutschen Kunstsprache sind diese Unterscheidungswörter, das **beharrliche** und das **fortgehende** Ventil nicht eingeführt. Man nennt eines wie das andere schlechtweg Ventil, letzteres im Unterscheidungsfall das **Kolbenventil**, ersteres bei Bergwerken auch insbesondere das **Stöckel**.

beiläufig dem Gewicht einer 32 Fus hohen Wassersäule gleich, oder dem Gewicht einer 28 Zoll hohen Quecksilbersäule.

Um nun das Spiel eines Saugwerks zu erklären, nehme man an, es befinde sich des Kolbens Grundfläche zuerst in GH. In diesem Fall haben die in dem Raum MC und die in dem Raum AH enthaltene Luftmassen mit der natürlichen oder atmosphärischen Luft, in der Gegend, wo sich die Maschine befindet, einerlei Dichtigkeit und einerlei Federkraft, wobei vorausgesetzt wird, daß die beiden Ventilen E und F durch die Leichtigkeit, die sie haben, sich zu öfnen und sich wieder zu verschließen, den drei erwähnten Lüften Kommunikation verstatten, wonach diese beiden Ventilen durch ihre Gewichte zufallen. Nun erhebe man den Kolben von GH in KI; das Ventil F bleibt durch sein Gewicht und durch den Druck der drüber liegenden Luft verschlossen; die Luft in MC und in AH dehnt sich aus; iene öfnet durch ihre Ausdehnungskraft das Ventil E; beide Luftmassen vermischen sich mit einander und machen nur noch eine einzige Luftmasse aus, deren Federkraft, die in eben der Verhältnis schwächer wird wie der Raum in den sie sich ausbreitet, größer wird, mit dem Druck der äußern Luft auf die Oberfläche MN im Behälter nicht mehr im Gleichgewicht bleiben kann; es muß also diese letzte Kraft das Wasser in der Saugröhre auf eine gewisse Strecke Mx in die Höhe treiben, während dem der Kolben von GH in KI steigt. Die Höhe Mx ist so beschaffen, daß das Gewicht der Wassersäule Mu mit der Federkraft der verschwächten, in dem Raum xI ausgebreiteten Luft und dem Gewicht des Ventils E verbunden mit dem Druck der äußern Luft das Gleichgewicht hält. Wann der Kolben in KI gekommen ist, so fällt das Ventil E durch sein Gewicht wieder zurück,

und schneidet die Luft in dem Raum xC ab, und die Wassersäule M u bleibt in der Höhe M x schweben. Nun schiebe man den Kolben aus KI in GH, so druckt die in dem Raum AI enthaltene verschwächte Luft durch ihre nach allen Seiten wirkende Federkraft gegen das Ventil E, das sie verschlossen erhält, und gegen das Ventil F, das sie aufzugehen nöthigt; die von AC bis zur Grundfläche des Kolbens enthaltene verschwächte Luft ströhmet durch die Oefnung F heraus und vermischt sich mit der äußern Luft. Diese Wirkung dauert so lange fort, bis der Kolben in GH angekommen ist, alsdann fällt das Ventil F wieder zu. Man erhebe den Kolben wieder von GH in KI, so bleibt das Ventil F verschlossen, das Ventil E geht auf und das Wasser steigt aufs Neue um eine gewisse Strecke xy in der Saugröhre in die Höhe, u. s. f. Man sieht hieraus, daß nach einer gewissen Anzahl Kolbenhübe das Wasser in den Stiefel gelangen und entweder durch die obere Oefnung desselben oder durch eine in demselben seitwärts angebrachte Röhre O abfließen muß. Dieser Ausfluß muß so lange fortdauern, als das Spielen des Kolbens fortgeht.

Es ist klar, daß der Abfluß des Wassers nicht ohnunterbrochen fortgeht, und daß er nur statt findet oder doch so angesehen werden kann, als fände er nur statt, während dem der Kolben steigt (*).

73. An-

(*) Beim Niedergang des Kolbens, d. i. beim Kolbenschub sinkt ein Theil der Kolbenstange durch das über dem Kolben befindliche Wasser, dessen Länge der Tiefe des Kolbenschubs gleich ist; wenn also der Querschnitt der gleichdicken Kolbenstange δ heist und die Tiefe des Kolbenschubs x, so muß bei einer gutgehenden oder vollkommenen Pumpe während dem Kolben-

73. Anm. Es ist zu merken, daß, wenn man auch das Gewicht des Ventils E beiseit setzt und annimmt, man könne in der Saugröhre die nämliche Leere wie in dem obern Theil der Barometerröhre erhalten, die Höhe AM dennoch geringer seyn müsse als die Höhe einer Wassersäule, die an dem Ort wo die Maschine spielt mit einer Quecksilbersäule im Barometer das Gleichgewicht hielte, weil das Wasser durch AC noch in den Stiefel kommen muß. Wenn also die Quecksilbersäule zu 28 Zoll hoch angenommen wird, so muß die Höhe AM weniger als 32 Fus betragen. Wofern aber nur dieser Bedingung ein Genüge geschieht, so kann die Höhe LV der Wasserfläche BD im Stiefel über dem Wasserspiegel MN im Behälter größer seyn als die Höhe der dem Druck der Atmosphäre gleichen Wassersäule. Dabei muß man dennoch besorgt seyn, daß, da die Kolbenstange Z in dem Stiefel ABDC in Bewegung ist, die Höhe AB des Stiefels nicht so groß sey, weil man sonsten Gefahr lauft, daß die Stange Z sich beuge oder breche.

74. Der Ausguß des Wassers durch die Ausgußröhre O oder die Wirkung der Pumpe läßt sich leicht

---

Kolbenschub eine Wassermasse $= \delta . x$ ausgegossen werden. Für diesen Ausguß oder für den Kolbenschub ist daher iedes Saugwerk ein wahres Druckwerk. Ist die Weite des Stiefels oder Grundfläche des Kolbens $= \omega$, so ist die beim Kolbenschub ausgegossene Wassermenge $= \omega . x - \delta . x = x . (\omega - \delta)$, und es dauert also der Ausguß allerdings beständig fort, nur daß die Stärke des Ausgusses beim Hub und beim Schub wie die Größen $x (\omega - \delta)$ und $x . \delta$ verschieden sind. Für $\delta = \frac{1}{2} \omega$ ist er in beiden Fällen gleich groß.

leicht bestimmen; denn es ist klar, daß in der Zeit, da der Kolben von GH bis KI steigt, eine Wassermenge ausgegossen werden muß, die dem Wasserzilinder GI gleich ist.

75. Da dieser nämliche Ausfluß immer erfolgt, so druckt dem Kolben im Steigen unaufhörlich eine Last entgegen, die dem Gewicht einer Wassersäule gleich ist, welche die Grundfläche des Kolbens zur Grundfläche, und die Höhe der Oberfläche des Wassers im Stiefel über dem Wasserspiegel des Behälters zur Höhe hätte; das ist, wenn man F die auf den Kolben druckende Last nennt, a^2 die durch GH angedeutete Kreisfläche, h die Höhe LV von der Oberfläche des Wassers BD im Stiefel bis zum Wasserspiegel MN im Behälter; so hat man $F = a^2 . h$. Denn es sey VS die Höhe der Wassersäule, welche mit dem Druck der Atmosphäre im Gleichgewicht ist, und man setze, der Kolben sey im Steigen in irgend eine Lage gh gekommen, wozu die Höhe rV gehört, so erhellet 1) daß der Kolben von der Atmosphäre mit einer Kraft niedergedruckt wird, die $= a^2 . VS$ und von dem Druck der Wassersäule gD mit einer Kraft, die $= a^2 . rL$, so daß die gesammte Kraft, mit welcher der Kolben niedergedruckt wird, $= a^2 VS + a^2 . rL$. 2) Der Kolben wird oberwärts von dem Druck der Atmosphäre auf den Wasserspiegel MN des Behälters gedruckt, deren Kraft $= a^2 . VS$ ist; diese Kraft wird durch das Gewicht der Wassersäule, welche die Kreisfläche gh oder GH zur Grundfläche und rV zur Höhe hat, zum Theil aufgehoben, daß also der Kolben noch oberwärts mit einer Kraft gedruckt wird, die $= a^2 . VS - a^2 . rV$. Man hat daher

$$F = (a^2 . VS + a^2 . rL) - (a^2 . VS - a^2 . rV)$$

und dieses gibt

$$F = a^2 . LV = a^2 h$$

Zu

Zu diesem Gewicht muß man noch das Gewicht des Kolbens im Wasser und die Reibung rechnen, welche der Kolben an der Stiefelwand leidet, um den gesammten Widerstand zu erhalten, welchen der Kolben im Steigen zu überwinden hat.

Der Kolben sinkt vermöge seines Gewichts im Wasser nieder, dabei hat er keine andere Hindernis zu überwinden als die Reibung und einen geringen Gegenstos des Wassers.

Von den Druckwerken.

76. Fig. 38. stellt ein Druckwerk vor. Der Stiefel ABDC steht in einem Wasserbehälter, dessen Spiegel MN ist; der Kolben treibt, indem er niedergeht, das Wasser in die Höhe; seine Stange ist an einen beweglichen Gatter TYX, der mittelst eines Hebers oder auf irgend eine andere Art auf und nieder geschoben wird, hinlänglich befestigt (*); mitten durch ihn geht längst seiner Axe ein Loch mit einem drauf gepaßten Ventil F, das sich nach obenzu öfnet. In AC, ein wenig unter dem Wasserspiegel MN im Behälter ist eine durchlochte Queerwand mit einem drauf passenden Ventil E, das sich wieder oberwärts öfnet. Der Stiefel ist in AC mit der Steigröhre ACV verbunden, welche das Wasser an den Ort bringt, wohin man es erheben will.

Um die Wirkungsart dieser Maschine zu erklären, setze man, es befinde sich zuerst des Kolbens Vorderfläche in KI, der tiefsten Stelle seines Spiels. Der Stiefel ist alsdann mit Wasser angefüllt und dieses Wasser steht mit dem im Behälter in der Waage, indem

(*) Das Gatter ist in Deutschland nicht üblich, doch aber bei importanten Druckwerken zu empfehlen.

indem die beiden Ventilen E und F durch ihre leichte Bewegbarkeit dem Wasser diese Kommunikation verstatten; hierauf fallen diese beiden Ventile vermög ihrer im Wasser noch habenden Gewichte wieder zu. Man erhebe den Kolben von KI bis in GH, die oberste Stelle seines Spiels, so bleibt das untere Ventil F verschlossen und das Ventil E öfnet sich, und das in dem Raum KH enthaltene Wasser steigt über GH und tritt in die Steigröhre; überdas folgt dem Kolben, während dem er steigt, das Wasser nach, welches aus dem Behälter in den Stiefel tritt. Man ziehe den Kolben wieder aus GH in KI herab, so öfnet sich das Ventil F und das Ventil E fällt zu und verwehrt dem darüber stehenden Wasser den Rückfall; treibt man den Kolben zum andernmal in die Höhe, so fällt das Ventil F zu, das Ventil E öfnet sich und das Wasser fährt fort, in der Steigröhre ACV zu steigen u. s. f. Es ist klar, daß bei wiederholtem Spielen des Kolbens das Wasser in der Röhre ACV immer höher steigen und endlich in der verlangten Höhe ankommen müsse.

Die Erhöhung des Wassers geschieht, wie bei der Pumpe der vorigen Art, unterbrochen.

77. Anmerk. Die Höhe der Steigröhre ist hier nicht, wie bei dem Saugwerk, eingeschränkt, weil die Kolbenstange Z hier ausserhalb dieser Röhre liegt. Man macht diese Stange nur so lang, als sie zum Spielen des Kolbens und zur Erreichung des untern Gatterriegels von TYX erfordert wird.

78. Es ist klar, daß diese Pumpe während dem Schub des Kolbens von KI bis in GH eine dem Zilinder KH gleiche Wassermasse gibt.

79. Aus ähnlichen Betrachtungen, wie bei dem Saugwerk, erhellet, daß der Kolben im Steigen von dem

dem Wasser einen Gegendruck leidet, der dem Gewicht einer Wassersäule gleich ist, welche des Kolbens Vorderfläche zur Grundfläche und die von dem Wasserspiegel im Behälter bis zur Oberfläche des Wassers in der Steigröhre vertikal gemessene Höhe zur Höhe hätte. Hierzu kommen noch das Gewicht des Gatters, TYX, das Gewicht des Kolbens im Wasser, und die Reibung an der Stiefelwand.

Der Kolben fällt vermög seiner Schwere herab; durch die Reibung und einen geringen Gegenstos des Wassers wird er verzögert (*).

Von den vereinbarten Saug- und Druckwerken.

80. Das Fig. 39. vorgestellte vereinbarte Saug- und Druckwerk ist aus einer Saugröhre AMNC, welche in dem Wasserbehälter MN steht, einem Stiefel ABDC, worin der Kolben P wie in den beiden vorigen Arten von Pumpen spielt, und einer Steigröhre CQV zusammengesetzt. In AC und QR befinden sich zwei Ventile oder zwo Klappen mit Gewerben, die

(*) Herr Bossût muß wegen der bisherigen Bestimmung der Last, die der Kolben zu wältigen hat, nicht misverstanden werden. Die Ueberschrift des Kapitels zeigt, daß er nur von der Last redet, welche einer darauf angewendeten Kraft in iedem Augenblick entgegen wirkt, so daß bei einer gleich großen Kraft ein Gleichgewicht entstehen würde. Von der Kraft aber, welche erfodert wird, um die hier bestimmte Last mit einer verlangten Geschwindigkeit zu bewegen, ist hier die Rede nicht. Inzwischen hat Hr. Bossût diese Frage, in Ansehung der Druckwerke, auch in der Hydraulik unbeantwortet gelassen.

die sich oberwärts aufthun. Der Kolben spielt in dem Raum GK, er ist durchaus dicht und nicht wie bei vorigen beiden Arten durchlocht. Man sieht, daß wenn man ihn abwechselnd auf und niedergehen läßt, das Wasser anfangs in der Saugröhre und dem Stiefel wie bei dem gemeinen Saugwerk steigen müsse, nur mit dem Unterschied, daß iezt die Luft durch die Steigröhre und nicht durch den Kolben ihren Ausweg nimmt. Die abwechselnden Bewegungen beider Ventilen E und F sind in beiden Fällen vollkommen einerlei. Das Wasser gelangt nach einigen Kolbenspielen in den leeren Raum, den der Kolben durch seinen Aufgang im Stiefel bewirkt. Hierauf treibt solches der Kolben im Niedergang vor sich weg, so daß es in die Steigröhre CQV treten muß. Bei wiederholtem Aufgang saugt er neues Wasser ein, das er beim Niedergang wieder in die Steigröhre druckt u. s. f.

Offenbar gilt auch hier die Anmerkung §. 73.

81. Die Wirkung der Pumpe oder die Wassermenge, welche sie am obern Ende der Steigröhre ausschüttet, wird allemal durch den Wasserzilinder KH ausgedruckt, der in der Zeit des ganzen Kolbenschubs von KI bis GH ausgegossen werden müßte.

82. Um den Werth für die bewegende Kraft zu finden, setze man, es befinde sich die Vorderfläche des Kolbens in gh, also in der lothrechten Höhe gM über dem Wasserspiegel im Behälter; MS sey die Höhe der Wassersäule, welche mit dem Druck der Atmosphäre im Gleichgewicht ist, und ML die ganze Höhe, bis zu der das Wasser erhoben wird. Man nenne a^2 die Fläche des Kreises gh, h die Höhe gM, H die Höhe gL, P das Gewicht des Kolbens mit Zubehör; X die Kraft, welche auf den Kolben wirkt, wann er

aufwärts

aufwärts geht oder während dem Ansaugen, (die Reibung beiseit gesetzt), Y die Kraft, welche den Kolben treibt, wann er niedergeht oder während dem Druck, allemal mit Beiseitsetzung der Reibung. Wenn nun

1) der in g h gekommene Kolben als steigend angenommen wird oder als saugend, also das Ventil F verschlossen ist, so ist offenbar

$$X = P + a^2 . SM - (a^2 SM - a^2 gM)$$
$$= P + a^2 . gM = P + a^2 h$$

2) Wenn der in g h angekommene Kolben als sinkend angenommen wird, oder als druckend, also das Ventil E verschlossen ist, so hat man

$$Y = a^2 . SM + a^2 . gL - a^2 . SM - P$$
$$= a^2 . H - P.$$

Die Summe der beiden Kräfte X und Y ist $a^2 h + a^2 H$ oder $a^2 ML$. Also ist die gesammte Kraft, welche auf die Bewegung der Maschine verwendet werden muß, dem Gewicht einer Wassersäule gleich, welche die Vorderfläche des Kolbens zur Grundfläche, und die Höhe vom Wasserspiegel im Behälter bis zur Stelle, wo das Wasser die Steigröhre verläßt, zur Höhe hätte. Man hat aber hierbei den Vortheil, daß sich diese Kraft in zwei Stücke vertheilt, wovon das eine zum Saugen und das andere zum Drucken verwendet wird, anstatt daß bei beiden vorigen Arten von Pumpen die ganze Kraft angewendet wird, während dem der Kolben steigt und das Wasser ausschüttet (*).

83. Wir

(*) Hier könnte wieder Herr B. leicht zu einem Tadel Anlaß geben, weil er ausdrücklich von der zur Bewegung erfoderlichen Kraft redet; inzwischen ist seine Sprache nur nicht deutlich genug und der wahre Sinn nur dieser, daß die bewegende Kraft iedesmal mit der hier bestimmten Last zu kämpfen habe; von der Ueberwucht der Kraft aber, welche erfodert wird, um diese Last mit einer gewissen Geschwindigkeit zu bewegen, ist keine Rede.

83. Wir müssen hierbei eine wichtige Bemerkung machen. Da es bei allen Maschinen eine wesentliche Erfodernis ist, eine soviel möglich gleichförmige Bewegung zu erhalten, so muß man sich alle Mühe geben, die beiden Kräfte X und Y einander gleich zu machen. Diese Gleichheit gibt $P + a^2 h = a^2 H - P$, und hieraus folgt $P = \frac{a^2.(H-h)}{2}$. Es muß also 1) von den beiden Theilen gL, gM der ganzen Höhe ML der erste größer seyn als der zweete; denn wenn man $H = h$ oder $H < h$ hätte, so wäre das Gewicht $P = o$ oder verneint, es kann aber keiner von diesen beiden Fällen statt finden. 2) Wenn, alles übrige ungeändert gelassen, die Oberfläche MN des Wassers im Behälter zum Sinken oder zum Steigen kommt (welches statt findet, wenn die Saugröhre in einem Fluß steht), so folgt, daß man P vermindern oder vergrößern müsse; dieses läßt sich allemal erhalten, wenigstens bis zu einem gewissen Punkt, wenn man den Kolben mit Gewichten beschwert, die sich nach Gefallen vergrößern oder vermindern lassen.

Der Mangel des Gleichgewichts zwischen den Kräften X und Y ist sehr gewöhnlich (*). Man ist in eben diesen Fehler bei den vorgeblichen Verbesserungen verfallen, die man vor einigen Jahren bei einer von den sogenannten Samariter Pumpenkünsten vorgenommen hat. Es scheint nicht, daß man den wahren Grund von den üblen Folgen eingesehen hat, die aus diesen Abänderungen entstanden sind.

84. Das

(*) In Teutschland nicht, wo man zu dem Ende das leichte Mittel hat, doppelte Pumpenwerke anzulegen.

84. Das vereinbarte Saug- und Druckwerk kann eine andere Gestalt oder eine andere Anordnung haben, als fig. 39. In dieser Zeichnung saugt der Kolben im Steigen und drückt im Niedergehen. Man kann aber die Einrichtung so machen, daß (fig. 40.) der Kolben im Niedergehen saugt und im Steigen druckt.

Nennt man a^2 die Fläche des Kreises g h; h die Höhe r M des in g h oberhalb dem Wasserspiegel des Behälters angekommenen Kolbens; H die Höhe r L von g h bis zu dem Punkt, wohin das Wasser getrieben werden soll; P das Gewicht des Kolbens mit Zubehör; X die Kraft, welche den Kolben treibt, wann er niedergeht oder während dem er saugt; Y die Kraft, welche den Kolben treibt, wann er steigt oder während dem er druckt, so findet man (die Reibung beiseitgesetzt)

$$X = a^2 h - P; \quad Y = a^2 H + P;$$

also wenn man $X = Y$ setzt,

$$a^2 h - P = a^2 H + P$$

und dieses gibt $P = \frac{a^2 (h - H)}{2}$

Es muß also in diesem Fall von den beiden Theilen Mr, r L der ganzen Höhe M L der zweete kleiner seyn als der erste.

Wenn die Höhe M L, zu der man das Wasser erheben soll, gegeben ist, so muß man nach der Verhältnis der vertikalen Entfernungen von g h bis zum Wasserspiegel im Behälter und bis zur obersten Stelle beim Ausguß bestimmen, welche von den beiden Pumpen (fig. 39 und 40.) die dienlichste ist.

In der Ausübung nimmt man die Mitte von G I für den mittlern Kolbenstand g h an.

Wir brauchen nicht zu erinnern, daß wir bei unsern Berechnungen der Kräfte auf den bloßen Zustand des Gleichgewichts sehen.

85. I. Erinner. Bei den drei vorerwähnten Arten von Pumpen ist der Abfluß des Wassers aus der obern Oefnung der Steigröhre nicht immer gleichstark und er geschieht schubweis; denn es wird ohngefähr die Hälfte der Zeit zum Sinken oder zum Steigen des Kolbens verwendet, um neues Wasser beizuziehen; und während diesem Theil der Zeit wird kein Wasser ausgegossen oder doch sehr wenig. Man kann diese Unterbrechung des Ausflusses dadurch vermeiden, oder einen ununterbrochenen Ausfluß erhalten, daß man an der Steigröhre, wie bei dem Druckwerk (fig. 41.), eine Art von hohler Tromme anbringt, die außen ringsum verschlossen ist, aber mit der in G, H abgesetzten Steigröhre kommunicirt. Diese Tromme, welche man einen Windkessel (réservoir d'air) nennt, enthält anfänglich Luft, die mit der äußern gleiche Dichtigkeit hat. Erhebt man den Kolben, so breitet sich das in dem Schenkel CBDQ steigende Wasser zum Theil in dem Kessel Gx aus, und preßt die darin enthaltene Luft zusammen; es benimmt solcher die Kommunikation mit der äußern Luft und zwingt sie in den Raum kryx sich zusammenzudrängen. Wenn man nun den Kolben niedersinken läßt, so breitet sich die auf solche Art verdichtete Luft vermög ihrer Federkraft aus und zwingt das Wasser von kr in KR zu sinken, und folglich in dem Schenkel GHQD in die Höhe zu steigen (*).

Man

(*) Die hier gegebene Erklärung ist nicht hinlänglich, die Wirkung des Windkessels oder der verdichteten Luft im Windkessel zu erläutern. Wenn z. B. die gesammte Höhe des Wassers über kr bis zur Ausgußöffnung der Steigröhre h heißt, so ist im Stand des Gleichgewichts die Luft im Kessel soweit verdichtet, als es dem Druck der Wassersäule von der Höhe h gemäs ist; diese verdichtete Luftmasse steht also mit der Wassersäule in der Steigröhre im Gleichgewicht, und wenn also der Kolben nun niedersinkt,

so

Man sieht, daß beim fortgehenden Spielen des Kolbens das Wasser in diesem Schenkel unaufhörlich steigt, und daß der Ausfluß des Wassers beim Ausgang der Steigröhre gar nicht oder doch nicht merklich unterbrochen wird.

Es gibt Pumpenmacher, welche in dem Wahn stehen, der Windkessel verdoppele den Effekt der Maschine; denn, sagen sie, weil nun der Ausfluß ohnunterbrochen fortgeht, so muß auch die Pumpe doppelt soviel geben, als sie geben würde, wenn der Windkessel nicht vorhanden wäre und der Ausfluß unterbrochen geschähe. Sie vergessen aber zu bedenken, daß

---

so vermag die eingesperrte Luft sich nicht wieder auszudehnen und den Fortlauf des Wassers zu unterhalten. Soll dieser Erfolg der Ausdehnung statt finden, so muß nothwendig auf die wirkliche Bewegung des Kolbens Rücksicht genommen werden, und diese Erinner. hätte daher in die Hydraulik gehört. Bei der wirklichen Bewegung übt nämlich der Kolben gegen jeden Querschnitt der Steigröhre eine Kraft aus, die größer seyn muß, als der Druck einer Wassersäule, welche diesen Querschnitt zur Grundfläche und die Höhe des Wassers von diesem Querschnitt bis zur Ausgußöfnung der Steigröhre zur Höhe hätte. Von diesem Ueberschuß der Kraft rührt in der Steigröhre selbst die Geschwindigkeit des steigenden Wassers her, bei der eingesperrten Luft aber, welche nicht ausweichen kann, ist der Effekt die stärkere Verdichtung, so daß solche nicht der bloßen wirklich vorhandenen Wasserhöhe h, sondern der größern vom Kolben angewendeten Kraft gemäs ist. Sobald also der Kolben wieder sinkt, tritt die Federkraft der eingesperrten Luft an die Stelle der Kraft, welche zuvor der Kolben ausübte; weil ihre Federkraft größer als der Druck der wirklich vorhandenen Wassersäule ist, so dehnt sie sich wirklich aus und verursacht also das fortdauernde Steigen des Wassers in der Steigröhre.

daß die Wirkung der Pumpe allemal nur in der Wassermenge besteht, welche der Kolben im Steigen forttreibt, und daß (bei unveränderter Geschwindigkeit des Kolbens) die bewegende Kraft immer einerlei Gewalt ausübt, es mag solche das Wasser unmittelbar bis zur Ausgußstelle oder einen Theil dieses Wassers in den Windkessel treiben und die nachherige Erhebung dieses Theils der Federkraft der Luft überlassen. Denn im letztern Fall muß man die elastische Luft im Kessel G x zusammendrucken, und die hierzu erforderliche Kraft macht mit der, welche einen Theil des Wassers in dem Schenkel GHQD wirklich in die Höhe treibt, die ganze Kraft aus, welches mit dem ersten Fall auf Eins hinauslauft. Wenn daher der Ausfluß in Einem fortgeht, wann ein Windkessel angebracht ist, so schießt das Wasser nur halb so geschwind ab, als es herausschießen würde, wenn ein dergleichen Windkessel nicht vorhanden und der Ausfluß unterbrochen erfolgte, und die Pumpe gibt in iedem Fall das Nämliche. Der Windkessel hat also schlechterdings keinen andern Nutzen, als dem Gang der Maschine mehr Gleichförmigkeit zu verschaffen, und einen beständig fortgehenden Auslauf des Wassers zu erhalten, welches bei Feuersprützen sehr nützlich ist, weil ein beständiger Wasserstrahl ein Feuer leichter löscht, als wenn solcher abgesetzt, obgleich mit größerer Geschwindigkeit erfolgt.

86. II. Erinner. Man bedient sich zur Betreibung aller Arten von Bewegungskräften, als Menschen, Pferde, fließende Wasser, den Windstoß ꝛc. Die kleinen Maschinen dieser Art, z. B. bei Brunnen, bei Feuersprützen, werden gewöhnlich durch Menschenhände betrieben. Wenn man eine beträchtliche Menge Wasser zu erheben hat, so vergrößert man verhältnismäßig die Bewegungskräfte, und damit solche beständig

fort

fort einerlei Gewalt anwenden, wenigstens beinahe, ohne iemalen vergebens anzugreifen, so legt man mehrere Pumpenkünste an, so daß allemal ein Theil der Kolben niedergeht, wenn der andere Theil steigt.

Das ganze Spiel dieser Maschinen hängt von der ordnungsmäßigen wechselseitigen Bewegung der Ventilen oder der Klappen ab. Es müssen daher diese Stücke so zugerichtet und angeordnet seyn, daß sie, wann sie verschlossen sind, das Wasser gut halten, und daß sie, wann es erfordert wird, sich allemal leicht öfnen. Meine ietzige Absicht erlaubt mir nicht, mich in alle einzelen Punkte, die in der Ausübung zu beobachten sind, einzulassen.

Die Röhren bei Pumpen leiden oft ausserordentlich beträchtliche Gewalt. Wenn diese Röhren aus zähen Materien verfertigt sind, z. B. aus Blei oder Kupfer und sogar aus Eisen, und nun die Druckungen, welche sie auszuhalten haben, durch Wassersäulen von gegebenen Höhen bestimmt worden sind (*), so findet man die Dicke, welche ihre Wände haben müssen, nach der Theorie des vierten Kapitels.

(*) Aber diese Höhen dörfen nicht nach dem Stand des Gleichgewichts, sondern nach der zum voraus zu bestimmenden schnellsten Bewegung des Kolbens berechnet werden, für welche z. B. die Wand des Windkessels stärker ausfallen muß, als für den Stand des Gleichgewichts.

Achtes Kapitel.

Fortsetzung der vorigen Untersuchung, wie das Wasser in den Pumpen allmälig höher steigt, und in welchen Fällen es bei einer bestimmten Höhe stehen bleibt.

87.

Man nehme zuerst das Saugwerk (fig. 37.), wo das beharrliche Ventil E an dem Zusammenstoß des Stiefels und der Saugröhre AN, deren Höhe AM weniger als 32 Fus betragen muß (72.), angebracht ist. Ich nehme an, daß, um die Saugröhre soviel möglich von Luft ausleeren zu können, die tiefste Stelle des Kolbenstandes GH, beinahe an das Ventil E anstoße, welches sich umsomehr annehmen läßt, da das Ventil E sich erst eröfnen muß, wann der Kolben wieder im Steigen begriffen ist.

88. Aus §. 72. folgt, daß iedesmal, da der Kolben steigend in KI ankommt, der Druck der Atmosphäre oder der natürlichen Luft mit dem Druck der von KI bis auf die Oberfläche des in der Saugröhre aufwärts gestiegenen Wassers enthaltenen verdünnten Luft und dem Gewicht dieser Wassersäule zusammengenommen im Gleichgewicht ist. Um nun die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen diesen dreien Kräften deutlich zu bestimmen, wollen wir solche auf einerlei Art bringen, und daher die beiden ersten durch Druckungen von Wassersäulen unter gehörigen Höhen ausdrücken, die ich Kürze halber Höhen, welche

welche den erwähnten Kräften zugehören, nennen will. Die dem Druck der Atmosphäre zugehörige Höhe ist unveränderlich, oder kann wenigstens so angesehen werden; aber die dem Druck der nach und nach verdünnten Luft zugehörige Höhe, hängt von dem Grad der Verschwächung dieser Luft ab.

Nun ist klar, daß unter den drei erwähnten Kräften ein Gleichgewicht vorhanden ist, wenn die dem Druck der Luft zugehörige Höhe so groß ist, als die Summe der dem Druck der eingesperrten schwächern Luft zugehörigen Höhe und der Höhe der in der Saugröhre sich über den Wasserspiegel MN des Behälters erhobenen Wassersäule. Es ist übrigens gleichgültig, ob die Druckungen auf gleiche oder ungleiche Grundflächen ausgeübt werden, so wie es bei einem Heber gleichgültig ist, ob die beiden Schenkel gleich- oder ungleichweit sind (21).

89. Man setze, es steige vermög des ersten Kolbenschubs von GH bis KI das Wasser in der Saugröhre bis xu, und stelle sich vor, der Kolben bleibe einen Augenblick in KI, so setzt sich der Druck der Atmosphäre oder der natürlichen Luft mit dem Druck der Wassersäule Mu und der Federkraft der in dem Raum Ku verbreiteten Luft ins Gleichgewicht. Man nenne

die Höhe AM der Saugröhre . . . . . a
die Höhe des Kolbenhubs GK oder AK . b
den Halbmesser des Stiefels AD . . . R
den Halbmesser der Saugröhre AN . . . r
die Verhältnis des Umkreises zum Durchmesser . . . . . π
die dem Druck der natürlichen Luft zugehörige Höhe . . . . . h
die Höhe xM der Säule Mu x

die dem Druck oder der Federkraft der im Raum Ku ausgebreiteten Luft zugehörige Höhe . . . . . y

so hat man sogleich die Gleichung

A) $h = x + y$

Weil die der Federkraft der natürlichen Luft, welche vor dem Aufsteigen des Kolbens den Raum AN einnahm, durch h vorgestellt wird, und diese Luft während dem Saugen sich in den Raum Ku ausbreitet, so muß die der Federkraft dieser Luft im zweeten Zustand zugehörige Höhe $y = h. \frac{AN}{Ku}$ seyn (67). Nun ist der Raum oder Zilinder $AN = \Pi. r^2 a$; der Raum Ku oder die Summe der Zilinder KC, $Au = \Pi. R^2. b + \Pi. r^2 (a - x)$; wir haben also die zwote Gleichung

B) $y = \frac{h r^2 a}{R^2 b + r^2 (a - x)}$

Die beiden Gleichungen A und B mit einander verglichen, und zur Abkürzung $\frac{R^2}{r^2} = k$, $h + a + kb = p$ gesetzt, gibt

$$x = \frac{p \pm \sqrt{(p^2 - 4khb)}}{2}$$

$$y = \frac{2h - p \mp \sqrt{(p^2 - 4khb)}}{2}$$

Von den beiden von x und von y durch das zweideutige Zeichen ausgedruckten Werthen darf man die mit dem untern Zeichen gebrauchen; denn ieder von den Werthen von x oder von y muß kleiner seyn als h. Wenn man aber das obere Zeichen für x gebrauchte, so hätte man

$$\frac{p + \sqrt{(p^2 - 4khb)}}{2} \gtrless h$$

oder $+\sqrt{(h + a + kb)^2 - 4khb} \gtrless h - a - kb$

weil

weil man durch Quadrirung und Reducirung $4ah > c$ erhält. Wenn man im Gegentheil das untere Zeichen für x gebraucht, so findet man, daß der Werth von x kleiner ist als h, und daß der zugehörige Werth von y, das ist, die Größe

$$\frac{h - a - kb + \sqrt{((h+a+kb)^2 - 4khh)}}{2}$$

gleichfalls kleiner als h ist, weil

$$\frac{\sqrt{((h+a+kb)^2 - 4khh)}}{2} < h + a + kb$$

indem das Glied $- 4khh$ allemal verneint ist. Es sind also die beiden Werthe von x und y, welche der Aufgabe ein Genüge thun.

$$\text{I.} \begin{cases} x = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4khh)}}{2} \\ y = \frac{2h - p + \sqrt{(p^2 - 4khh)}}{2} \end{cases}$$

Da man auf diese Art die Werthe von x und y für den ersten Kolbenhub hat, so findet man auf ähnliche Weise die analogischen Werthe, welche nach der Reihe zum zweeten, dritten, vierten u. s. f. Kolbenhub gehören. Es sey nämlich My die Höhe des Wassers in der Saugröhre, welche zum zweeten Kolbenhub gehört, das ist, wann der Kolben wieder von KI bis GH niedergegangen und hierauf wieder von GH in KI aufwärts gestiegen ist. Diese Höhe heiße x', und y' die der Federkraft der zwoten verschwächten Luft zugehörige Höhe; so haben wir sogleich die Gleichung

$$\text{C)} \quad h = x' + y'$$

Da aber überdas die erste verschwächte Luft, welche beim Anfang des zweiten Hubs den Raum Au einnahm und damals eine Federkraft hatte, welche der Höhe y zugehört, nun in den Raum Kz ausgebreitet ist, so hat sie iezt eine Federkraft, welche zur

Höhe $y + \frac{Au}{Kz}$ oder $\frac{yr^2(a-x)}{R^2b + r^2(a-x')}$ gehört. Man hat also

$$y' = \frac{yr^2(a-x)}{R^2b + r^2(a-x')}$$

oder D) $y' = \frac{y.(a-x)}{a - x^1 + kb}$

die beiden Gleichungen C und D mit einander verglichen, und für y seinen Werth $h - x$ gesetzt, gibt

$$\text{II.} \begin{cases} x' = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4khb - 4x(h+a-x))}}{2} \\ y' = \frac{2h - p + \sqrt{(p^2 - 4khb - 4x(h+a-x))}}{2} \end{cases}$$

Ich habe aus eben der Ursache, wie für die Werthe von x und y, hier die untern Zeichen gebraucht; und eben das findet in der Folge statt.

Eben so, wenn man nach dem dritten Kolbenhub die Höhe des Wassers in der Saugröhre x' nennt, und y'' die der Federkraft dieser dritten verdünnten Luft zugehörige Höhe, und nun erwägt, daß x'' und y'' nach eben dem Gesetz aus x' und y'' entstehen, wie x' und y' aus x und y, so findet man

$$\text{III.} \begin{cases} x'' = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4khb - 4x'(h+a-x'))}}{2} \\ y'' = \frac{2h - p + \sqrt{(p^2 - 4khb - 4x'(h+a-x'))}}{2} \end{cases}$$

u. s. f.

Wenn man also allgemein unter $x^{(n)}$ den Werth von x nach dem $n+1$sten Kolbenhub versteht, unter $y^{(n)}$ den zugehörigen Werth von y, unter $x^{(n-1)}$ den Werth von x nach dem nten Kolbenhub, und unter $y^{(n-1)}$ den zugehörigen Werth von y, so erhält man

$x^{(n)} =$

$$x^{(n)} = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4khb - 4x^{(n-1)}(h + a - x^{(n-1)}))}}{2}$$

$$y^{(n} = \frac{2h - p + \sqrt{(p^2 - 4khb - 4x^{(n-1)}(h + a - x^{(n-1)}))}}{2}$$

90. Es ist klar, daß sich aus vorstehenden Gleichungen nach irgend einer Anzahl von Kolbenhüben die Höhe des Wassers in der Saugröhre, und die Federkraft der in der Maschine eingesperrten Luft, bestimmen läßt. Man kann auch die Höhen angeben, welche von iedem einzelen Kolbenhub herrühren und die Unterschiede von den elastischen Kräften der nach und nach auf einander folgenden eingesperrten Luftmassen, weil sich aus den Werthen von x, x', x'' ꝛc. und y, y', y'' ꝛc. auch die Werthe von x, x' — x, x'' — x' ꝛc. y, y' — y, y'' — y' ꝛc. ergeben.

91. Wenn man das Gewicht des Ventils E als unbeträchtlich ansieht, so muß sich nach einer gewissen Anzahl von Kolbenhüben eine Luftleere in der Pumpe ergeben und das Wasser muß endlich allemal durch E steigen, wofern die Höhe A M höchstens = h ist. Dieser Satz, der eine Folge von der Voraussetzung ist, daß die dem Druck der Atmosphäre zugehörige Höhe h ist, ergibt sich aus unsern Formeln. Denn wenn nach einer gewissen Anzahl n + 1 von Kolbenhüben, das Wasser in der Saugröhre haften bliebe, so hätte man

$$x^{(n)} = x^{(n-1)}$$

folglich $x^{(n-1)} = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4khb - 4x^{(n-1)}.(h + a - x^{(n-1)}))}}{2}$

und hieraus ergibt sich $x^{(n-1)} = h$

woraus man schließen muß, daß für a oder A M ∠ h das Wasser in der Saugröhre nicht haften bleiben kann, sondern in den Stiefel tretten muß.

92. Wenn man das Gewicht des Ventils E in Betrachtung ziehen muß, so muß man solches als eine Wassersäule betrachten, das die Ventilöfnung zur Grundfläche und eine Höhe, die also bekannt ist, zur Höhe hätte; diese Höhe muß man von h abziehen, und den Rest h' statt h in den vorhergehenden Rechnungen gebrauchen. Es müssen alsdann alle Resultate, welche in Ansehung der Größe h eintreten, auch für h' statt finden, das man als die Höhe ansehen kann, die der äußern Kraft zugehört, welche ietzt das Wasser in der Saugröhre in die Höhe treibt, weil der Druck des Ventils E dem von der Atmosphäre entgegengesetzt ist, und davon abgezogen werden muß.

93. Wenn das Ventil E an der Stelle angebracht wird, wo die Saugröhre mit dem Stiefel verbunden ist, so hat sie die vortheilhafteste Lage, um die innere Luft zu evakuiren und der Pumpe alle Vollkommenheit zu geben, deren sie fähig ist. Die einzige üble Folge von dieser Lage ist diese, daß, wenn die Pumpe eine Zeitlang feiert und die Scheiben, womit das Ventil gewöhnlich beschlagen ist, alsdann vertrocknen, es geschehen kann, daß das Ventil E sich nicht gehörig zuschließt, welches in die Nothwendigkeit setzen könnte, die Saugröhre kürzer zu machen, als es vorstehende Rechnungen erfodern. Man sieht, daß die nämliche Bemerkung auch für das fortgehende Ventil F statt hat.

94. Wir wollen nunmehr eine Art von Saugwerk betrachten, wo das beharrliche Ventil unten an der Saugröhre angebracht ist, anstatt daß es zuvor oben an dieser Röhre angebracht war. Ich nehme also an, es befinde sich, alles übrige ungeändert gelassen, das Ventil E (fig. 37.) in MN, ganz unter das Wasser im Behälter eingetaucht. Läßt man den Kolben

abwech-

abwechselnd steigen und fallen, so muß das Wasser in die Steigröhre treten und darin steigen, aber nicht nach eben dem Gesetz wie im vorigen Fall. Es kann haften bleiben, selbst wenn man die Höhe der Saugröhre viel kleiner als zu 32 Fus annimmt. Denn es sey z. B. Mr die Höhe, zu der das Wasser nach einer gewissen Anzahl von Kolbenhüben gestiegen ist; da nun, wenn der Kolben in GH herabgesunken ist, in dem Raum rH sich natürliche Luft befindet, so kann es kommen, daß die Federkraft dieser ausgebreiteten Luft, wann der Kolben in KI ankommt, mit dem Druck der Wassersäule in der Saugröhre eine Summe oder eine Kraft ausmacht, die dem Druck der Atmosphäre gleich ist, da dann folgt, daß das Wasser ferner nicht höher steigen kann. Man suche nun durch Berechnung die Art wie das Wasser steigt: dieses wird uns die Fälle kennen lernen, wo der Stillstand des Wassers erfolgen kann.

95. Es seyen Mx, My ꝛc. die auf einander folgenden Höhen, zu denen das Wasser in der Saugröhre steigt. Wenn man nun alle Benennungen in 89 hier beibehält, so ist sogleich klar, daß man hier wie dort nach dem ersten Kolbenhub die beiden Gleichungen erhält

$$x + y = h;\ y = \frac{ha}{kb + a - x}$$

und daher $x = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4khb)}}{2}$

$$y = \frac{2h - p + \sqrt{p^2 - 4khb)}}{2}$$

Aber die analogischen folgenden Gleichungen sind nicht die nämlichen. Um solche zu finden, muß man bemerken, daß beim Anfang des zweiten Ansaugens die im Raum Au enthaltene Luft natürliche ist; hieraus folgt, daß da diese Luft nach dem zweiten Ansaugen in

dem Raum Kz ausgebreitet ist, die ihrer Federkraft zugehörige Höhe h. $\frac{Au}{Kz}$ oder $\frac{h.(a-x)}{kb+a-x'}$ seyn müsse; und da man allemal $x'+y'=h$ hat, so findet sich

$$x' = \frac{p-\sqrt{(p^2-4kbh-4hx)}}{2}$$

$$y' = \frac{2h-p+\sqrt{(p^2-4khb-4hx)}}{2}$$

Eben so, wenn man bemerkt, daß x'' und y'' eben so aus x' und y' entstehen, wie x' und y' von x und y, so findet man

$$x'' = \frac{p-\sqrt{(p^2-4khb-4hx')}}{2}$$

$$y'' = \frac{2h-p+\sqrt{(p^2-4khb-4hx')}}{2}$$

Und allgemein

$$x^{(n)} = \frac{p-\sqrt{(p^2-4khb-4hx^{(n-1)})}}{2}$$

$$y^{(n)} = \frac{2h-p+\sqrt{(p^2-4khb-4hx^{(n-1)})}}{2}$$

96. Nun setze man, das Wasser gerathe nach $n+1$ Hüben in Stillstand, so erhält man alsdann $x^{(n)} = x^{(n-1)}$, folglich

$$y^{(n-1)} = \frac{p-\sqrt{(p^2-4khb-4hx^{(n-1)})}}{2}$$

und hieraus gibt sich

$$x^{(n-1)} = \frac{a+kb\pm\sqrt{((a+kb)^2-4khb)}}{2}$$

Es erhellet hieraus, wegen des zweideutigen Zeichens, daß das Wasser in Stillstand kommt, wenn die Wurzelgröße einen möglichen Werth hat; soll diese Bedingung statt finden, so muß entweder $(a+kb)^2 = 4khb$ oder $(a+kb) > 4khb$ seyn. Bei der ersten Voraussetzung sind die beiden Werthe

von

von $x^{(n-1)}$ einander gleich, und das Wasser bleibt nur an einer einzigen Stelle stehen, zu der der Werth $x^{n-1} = \frac{a+kb}{2}$; bei der andern Voraussetzung bleibt das Wasser an zwoen Stellen hafften, zu denen die zween Werthe von $x^{(n-1)}$ gehören. Wenn die Wurzelgröße eine eingebildete ist, so ist kein Stillstandspunkt zu fürchten. Wir wollen diese Theorie mit einem oder zweien Beispielen erläutern.

I. Exempel. Es sey $h = 32$ Fus, $a = 20$ Fus, $b = 4$ Fus, $k = 1$ oder der Halbmesser der Saugröhre dem des Stiefels gleich, so daß diese Röhren nur eine einzige ausmachen; so findet man für $x^{(n-1)}$ diese beiden Werthe $x^{(n-1)} = 8$ Fus, $x^{(n-1)} = 16$ Fus. Es entsteht also sogleich ein Stillstand, wann das Wasser in der Saugröhre 8 Fus hoch über MN gekommen ist. Wenn man alsdann von oben herab Wasser in die Pumpe gießt, indem man das Ventil F z. B. mit einem Haken in die Höhe hebt, so muß dieser Stillstand des Wassers solange dauern, als die Höhe des Wassers in der Saugröhre geringer als 16 Fus ist oder nicht über 16 Fus hinausgeht, aber sobald sie über diesen Punkt hinausgeht, ist kein Stillstand mehr vorhanden. Alles dieses ist leicht unmittelbar einzusehen, denn in dem Zwischenraum von 8 Fus bis zu 16 Fus machen die Höhe der eingesogenen Wassersäule und die Federkraft der innern Luft zusammen eine Summe aus, die > 32 Fus ist, aber die analogische Summe in dem Zwischenraum von 16 bis zu 20 Fus, von da der Kolben zu spielen anfängt, ist < 32 Fus.

II. Exempel. Es sey $h = 32$ Fus, $a = 25$ Fus, $b = 2$ Fus, $k = 4$; so findet man die beiden Werthe $x^{(n-1)} = \frac{33 \pm \sqrt{65}}{2}$. Das Wasser muß also an

zwoen Stellen stehen bleiben. Wenn man aber, alles übrige ungeändert gelassen, $k = 6$ setzte, so erfolgte kein Stillstand; es würde auch keiner statt finden, wenn man, $k = 4$ gelassen, $b = 4$ Fus setzte ꝛc.

97. Man sieht aus diesen Berechnungen die nachtheiligen Folgen, welche es hat, wenn man dies beharrliche Ventil in MN anbringt. Es ist zwar nicht zu läugnen, daß es, weil es beständig mit Wasser bedeckt ist, dem Verderben weniger als in der Luft ausgesetzt ist. Auch setzt sein durch das Wasser vermindertes Gewicht dem Druck der Atmosphäre weniger Widerstand entgegen: aber ebendarum kann es auch im Wasser schwanken und sich nicht genau genug auf den Rand der Oefnung, die es verschließen soll, anlegen. Es ist also weit besser, das beharrliche Ventil E in AC als in MN anzubringen.

Zuweilen bringt man ausser dem in AC angebrachten beharrlichen Ventil E noch ein anderes in MN an; alsdann vertritt solches in Ansehung des erstern nur die Stelle eines Sicherheitsventils. Diese beiden Ventile spielen zu gleicher Zeit immer auf einerlei Art.

98. In der Ausübung läßt man allemal einen gewissen, bald größern bald kleinern Zwischenraum zwischen dem tiefsten Kolbenstand GH und dem in AC angebrachten beharrlichen Ventil E. Dieser Fall liegt zwischen dem §. 87. wo angenommen wurde, es solle GH fast ganz an dem Ventil E anliegen, und dem §. 94. wo das beharrliche Ventil in MN angebracht ist. Er nimmt daher sowohl an dem Vortheil als an dem Nachtheil, der mit diesen beiden Fällen verbunden ist, Antheil. Die zur Bestimmung der Bewegung und des Stillstands des Wassers erforderliche Berechnungen sind bei dieser Voraussetzung so

leicht

leicht nach Art der vorigen anzustellen und in Anwendung zu bringen, daß ich in eine überflüßige Weitschweifigkeit zu verfallen glaubte, wenn ich mich länger dabei aufhielte.

99. Das Druckwerk (fig. 38.) ist keinem Stillstand des Wassers unterworfen, wenn das beharrliche Ventil E unter dem Wasser im Behälter liegt. Wäre aber dieses Ventil über dem Wasserspiegel MN z. B. in rs auf einer Höhe st angebracht, so daß der innere Raum AC sr großer als die Wassermasse wäre, welche der Kolben erhebt, indem er von KI bis in GH steigt, so könnte es kommen, daß das Wasser nicht in rs ankommen könnte, und daß es irgendwo unter dieser Linie stehen bleiben müßte. Denn man setze, das Wasser gelange mit dem ersten Kolbenhub in uz, so ist in diesem Augenblick die von der Oberfläche dieses Wassers bis in rs enthaltene Luft natürliche, die sich ausbreitet und verschwächt, wann der Kolben niedergeht, und so abwechselnd fort, während der ganzen Zeit, da der Kolben spielt. Wenn der Kolben niedergeht, so wird die Wassersäule Az durch sein eigenes Gewicht und durch Federkraft der im Raum us enthaltenen Luft niederwärts gedruckt, so daß die hieraus entstehende Kraft oder die Summe dieser beiden Kräfte mit dem Druck der Atmosphäre auf den Wasserspiegel MN im Behälter im Gleichgewicht steht. Nun geht die Wassersäule Az mit dem Kolben auf und nieder; wenn es also, welches offenbar möglich ist, geschieht, daß von einem Kolbenhub bis zum folgenden das Sinken der Wassersäule Az ihrem Steigen gleich ist, so kann solche niemalen rs erreichen. Es entsteht also alsdann in der Maschine ein Stillstand des Wassers. Die Berechnung der auf einander folgenden Erhebungen des Wassers und ihres Stillstands geschieht völlig auf die nämliche Art wie für das Saugwerk.

100. Bei dem vereinbarten Saug- und Druckwerk kann gleichfalls ein Stillstand des Wassers erfolgen, der sich allemal auf eben die Weise bestimmen läßt, es mag der Kolben im Steigen (fig. 39.) oder im Niedergehen (fig. 40.) saugen. Man muß sich bei allen Fällen erinnern, daß die Federkraft der Luft in der nämlichen Verhältnis abnimmt, wie ihr körperlicher Raum größer wird.

101. Ich will nun mit einer kurzen Untersuchung über das Steigen des Wassers in den Pumpen beschliessen, wann solches mittelst einer dreifachen Kurbel, mit dem Druck der Luft verbunden getrieben wird. Die nämliche Theorie läßt sich sodann auch auf die übrigen Arten von Kurbeln anwenden.

Es sey AMNC (fig. 42.) eine vertikale unter das Wasser MN greifende Röhre, die oben mit drei gleichen Stiefeln verbunden ist, worin drei Kolben mittelst dreier Hebeln RV, TY, SX auf und nieder geschoben werden. Diese drei Hebeln selbst werden durch drei Ketten oder durch drei andere Hebeln RB, TK, SH, in Bewegung gesetzt, deren Endpunkte B, K, H die Spitzen eines gleichseitigen Dreiecks BKH sind und die dreifache Kurbel ausmachen, welche sich um den Mittelpunkt O dieses Dreiecks im Kreise herumdreht. Das Rad BKDH wird von irgend einer bewegenden Kraft, z. B. von einem fließenden Wasser, das solches nach der Richtung BKDH herumdreht, in Bewegung gesetzt.

Die Anordnung und Bewegung der Ventile sind bei ieder Pumpe grade die nämlichen, wie bei dem gemeinen Saugwerk. Wir bringen die beharrlichen Ventile E, E′, E″ unmittelbar da an, wo ieder Stiefel mit der Saugröhre AMNC verbunden ist.

Die Lage der Unterstützungspunkte der drei Hebeln RV, TY, SX ist in Ansehung der Grundsätze, von welchen

welchen die Auflösung der Aufgabe abhängt, gleichgültig; um aber den Vortrag und die Ausdrücke der Rechnung einfach zu erhalten, so wollen wir annehmen, daß diese Ruhepunkte in der Mitte der Hebeln liegen, so daß die Höhe eines ieden Kolbenhubs dem Durchmesser des Kreises gleich ist, den die Kurbel beschreibt.

102. Die anfängliche Lage der Kurbel mag seyn welche man will, so ist klar, daß alsdann die in der Saugröhre und dem Stiefel enthaltene Luft, natürliche Luft ist. Wenn man hiernächst die Kurbel zur Umdrehung bringt, so wird die in der Saugröhre und dem Stiefel, dessen Kolben steigt, enthaltene Luft verdünnt und ausgebreitet, blos weil dieser Kolben steigt: ein niedergehender Kolben verstattet der äußern Luft den Zutritt in den Raum, welcher zwischen seinem fortgehenden und seinem beharrlichen Ventil enthalten ist. Wenn nämlich irgend ein Kolben steigt, so wird das fortgehende Ventil verschlossen und das beharrliche geöfnet; das Gegentheil erfolgt bei einem Kolben, welcher niedergeht.

103. Wir wollen nun zuerst annehmen, es befinde sich im ersten Augenblick die Warze der Kurbel B am obern Ende des lothrechten Durchmessers BD, und die Horizontallinie KH, welche die beiden andern Kurbelwarzen mit einander verbindet, theile also den Halbmesser OD in zween gleiche Theile. In diesem Augenblick berührt das fortgehende Ventil F das beharrliche Ventil E, oder kann doch so angesehen werden, und die fortgehenden Ventile F′, F″ sind beide von ihren beharrlichen Ventilen E′, E″ um eine Höhe = BG entfernt. Es seyen die Punkte Q, M die Mitten der Bögen BK, BH, und QM eine gezogene grade Linie: so findet sich der Umkreis des Rads auf solche Art in sechs gleiche Theile BQ, QK, KD, DH, HM, MB getheilt, und man hat BL = DG. Da die Warzen

der

der Kurbel B, K, H beim Sinken oder Steigen die Kolben im Gegentheil aufwärts oder niederwärts treiben, so sieht man, daß, wenn nach dem sechsten Theil der ganzen Umdrehung, B in Q, K in D und H in M gekommen ist, der zu B gehörige Kolben um eine Höhe = BL, der zu K gehörige, welcher schon auf die Höhe BG erhoben ist, noch um die Höhe GD steigt, und endlich der zu H gehörige, welcher anfangs auf die Höhe BG erhoben ist, um die Tiefe GL niedersinkt. Man sieht auch, daß, wenn die innere Luft sich ausbreitet, das Wasser in der Saugröhre auf eine gewisse Höhe Mr steigt. Weil nun die Ausbreitung der innern Luft nur durch das Steigen der Kolben bewirkt wird, so folgt, daß, wenn die Verhältnis des Umkreises zum Durchmesser Π, der Halbmesser der Saugröhre m und der Halbmesser von iedem der drei Pumpenstiefel n heißt; so folgt, sage ich, daß der Theil der innern Luft, welcher im ersten Augenblick einen Raum einnahm, der durch $\Pi m^2 . AM + \Pi n^2 . BG$ ausgedruckt wird, und der sich allein ausbreitet, am Ende des sechsten Theils der Umdrehung einen Raum einnimmt, der $= \Pi m^2 . Ar + \Pi n^2 (BD + BL)$. In diesem zweeten Zustand muß die Federkraft der so verbreiteten Luft in Verbindung mit dem Gewicht der Wassersäule rN mit dem Druck der Atmosphäre im Gleichgewicht stehen. Es läßt sich also nach der Methode §. 89. die Höhe Mr nach dem ersten Sechstheil der Umdrehung bestimmen. Ebenso kann man die Höhe Mr des Wassers nach dem zweiten Sechstheil der Umdrehung angeben, wenn man erwägt, daß, sobald die Warze K, ietzt in D, über diesen Punkt hinausgeht, der Theil der ausgebreiteten Luft, welcher im Innern der Pumpe geblieben ist, und der sich in diesem Augenblick in die Größe $\Pi m^2 . Ar + \Pi n^2 . BG$ verwandelt, den Raum $\Pi m^2 . Ar + \Pi n^2 . BG$ einnimmt, wann der Punkt K in H ankommt u. s. f.

104. Es seyen überhaupt im ersten Augenblick die drei Warzen der Kurbel in den Punkten b, k, h befindlich. Man ziehe auf den lothrechten Durchmesser BD die Perpendikel bf, kg, hi; hierauf suche man zuerst die Höhe Mu, zu der sich das Wasser in der Saugröhre erhebt, während dem b in Q, k in D und h in M gelangt. Nun nahm am Ende dieser Zwischenzeit der Theil der innern natürlichen Luft, der sich ausbreitet und einen Raum einnahm, welcher durch $\Pi m^2 . AM + \Pi n^2 . (Bf + Bg)$ ausgedruckt wird, einen Raum ein, der $= \Pi m^2 . Au + \Pi n^2 (BD + BL)$. In dem Augenblick, da der Punkt K durch den Punkt D geht, schränkt sich die Masse der ausgebreiteten innern Luft auf den Raum $\Pi m^2 . Au + \Pi n^2 . BL$ ein; und wann der Punkt K in H kommt, so tritt sie in den Raum $\Pi m^2 . Az + \Pi n^2 . BG$, indem die Höhe Mz alsdann die von dem Wasser in der Saugröhre ist: u. s. f.

Es ist leicht, die nach einander folgenden Erhebungen des Wassers in der Saugröhre analytisch auszudrucken und sich hierdurch außer Zweifel zu setzen, ob das Wasser in den Stiefel steigen werde oder nicht. Die umständliche Ausführung dieser Berechnungen würde mich zu weit von meinem Zweck führen.

Neuntes Kapitel.

Von der Dichtigkeit der Atmosphäre in verschiedenen Höhen, und dem Gebrauch des Barometers, um die Unterschiede dieser Höhen zu bestimmen.

105.

Da die untern Schichten der Atmosphäre das Gewicht der obern zu tragen haben, so muß die Luft um dieser einzigen Ursache willen in tiefer liegenden Gegenden eine größere Dichtigkeit und größere Federkraft haben, als in höher liegenden. Wenn man das Gesetz, wonach sie sich zusammendruckt oder von einem Grad zu einem andern verdünnt, genau kennte, so könnte man entweder aus dem Zustand der Luft an irgend einer Stelle, die Höhe dieser Stelle über einer gegebenen Horizontalfläche, z. B. über dem Meer bestimmen, oder umgekehrt, den Zustand der Luft aus der Höhe. Jede von diesen Aufgaben ist die umgekehrte der andern; und die Geometrie gibt allemal Mittel an die Hand, wenigstens näherungsweis die bei dieser Art von Aufgaben vorkommende unbekannte Größe zu bestimmen.

106. Es sey AB (fig. 43.) eine lothrechte Säule von der Atmosphäre; MBN eine gegebene Horizontalfläche; g bedeute die Schwere, q die Höhe AQ des obersten Punkts A über irgend einer Stelle Q; x die Höhe QB des Punkts Q über der bekannten Stelle B; ϕ die Dichtigkeit der Luft in Q, die eine Funktion von der Höhe AQ oder BQ und überdas von der Wärme

der

der Luft in Q oder von sonst einer physischen Eigenschaft ist; so ist klar, daß das Gewicht des Fadens AQ $= \int g \Phi dq$ oder $= \int - g \Phi dx$ ist. Nun muß dieses Gewicht durch den Druck ruhig erhalten werden, welchen die ringsum befindliche Luft gegen den Punkt Q ausübt, und welcher, indem er nach allen Seiten wirkt, den Faden QA aufwärts zu heben strebt; setzt man also solchen $= p$, so hat man $p = \int - g \Phi dx$ oder $dp = - g \Phi dx$, wo man für Φ seinen aus bekannten Erscheinungen hergeleiteten Werth setzen muß.

107. Wenn sich die Luft blos vermög ihres Gewichts verdichtet, und alle Ursachen beiseit gesetzt werden, welche das natürliche Gesetz dieser Verdichtung stöhren können, so ist die Dichtigkeit ieder Schichte dem Druck proportional. Nennt man also P den Druck der Luft in B, und D ihre Dichtigkeit, so hat man

$$P : D = p : \Phi = \frac{pD}{P}$$

folglich $$dp = - \frac{gDpdx}{P}$$

oder $$dx = - \frac{P}{gD} \cdot \frac{dp}{p}$$

und hiervon das Integral

$$x = C - \frac{P}{gD} \cdot \log p$$

Die beständige Größe C muß von der Art seyn, daß man, für $x = o$, $p = P$ erhält, folglich

$$C = \frac{P}{gD} \cdot \log P$$

und $$x = \frac{P}{gD} \cdot \log \left(\frac{P}{p}\right)$$

Nun können die Druckungen P und p durch die Gewichte von Queckſilberſäulen ausgedruckt werden, welche bei dem Barometer zu den Punkten B und Q gehören, und wenn man die Höhen dieser Säulen H

und h nennt, und die Dichtigkeit des Queckſilbers δ, ſo hat man

$$P = g.H\delta\,;\; p = g.h\delta$$

alſo $$x = \frac{H\delta}{D} . \log\left(\frac{H}{h}\right)$$

Es bedeutet aber in dieſem Ausdruck x den Logarithmen der Zahl $\left(\frac{H}{h}\right)$ in einem Logarithmenſyſtem, deren Model (*) $\frac{H\delta}{D}$ iſt; es ſey $L\left(\frac{H}{h}\right)$ der Logarithme der nämlichen Zahl nach dem Syſtem der gemeinen logarithmiſchen Tafeln, wo die Baſis 10 iſt und der Model = 0,4342944, den ich zur Abkürzung κ nennen will; ſo hat man bekanntlich

$$x : L\left(\frac{H}{h}\right) = \frac{H\delta}{D} : \kappa$$

alſo $$x = \frac{H\delta}{D\kappa} . L\left(\frac{H}{h}\right)$$

oder $$x = \frac{H\delta}{D\kappa} . (L\,H - L\,h)$$

Wenn man alſo aus den gemeinen Tafeln den Logarithmen der Zahl $\left(\frac{H}{h}\right)$ oder die Differenz der Logarithmen von H und h nimmt, und dieſe Differenz mit der Größe $\frac{H\delta}{D.\kappa}$ multiplicirt, ſo erhält man die Höhe des Punkts Q über dem B.

Wenn man alſo dieſen letztern Punkt als den betrachtet, gegen welchen man die Lage von mehrern andern

---

(*) Das heißt: deren Verhältnis zu den natürlichen Logarithmen $\frac{H\delta}{D}$ iſt. Bei dem Briggiſchen Syſtem iſt der Model in dieſer Bedeutung 0,434294480903 — ſ. H. H. Käſtner An. d. Un. S. 161.

andern Oertern bestimmen will, so kommt es zuerst auf die Bestimmung des Koefficienten $\frac{H\delta}{D\varkappa}$ an.

108. Man lege mit Hrn. Bouguer (Mém. de l'Acad. année 1753. page 515.) den Satz zum Grund, daß in Amerika, auf Carabourou, dem mitternächtigen Endpunkt von der ersten Grundlinie der Dreiecke, welche in diesem Welttheil zur Bestimmung der Gestalt der Erde gedient haben, das Queckſilber im Barometer die Höhe von 21 Zoll $2\frac{3}{4}$ Linien hatte, und auf der Spitze des Berges Pichincha die Höhe von 15 Zoll 11 Linien, und daß sich durch geometrische Messung die zwote Stelle um 1208 Toisen höher als die erste befunden hat. Wenn man also hier die Stelle B als Carabourou ansieht, und die Stelle Q als die Spitze des Pichincha, so haben wir $x = 1208$ Toisen, $H =$ 21 Zoll $2\frac{3}{4}$ Linien $= 254,75$ Linien, $h = 15$ Zoll 11 Linien $= 191$ Linien; $LH = 2,4061142$, $Lh =$ $2,2810334$, $LH - Lh = 0,1250808$. Folglich hat man

$$1208 = \frac{H\delta}{D.\varkappa} \cdot 0,1250808,$$

hieraus ergibt sich

$$\frac{H\delta}{D\varkappa} \text{ beinahe } = 9658 \text{ Toisen.}$$

In diesem Ausdruck ist die Zahl $\varkappa$ unveränderlich und gegeben, nämlich $= 0,4342944$; die Zahlen H, $\frac{\delta}{D}$ hängen von der Lage des Punkts B ab. Wenn H bekannt ist, so erhellet, daß man aus der vorhergehenden Formel auch die Größe $\frac{\delta}{D}$ findet, das ist: die Verhältnis der Dichtigkeit des Queckſilbers zur Dichtigkeit der Luft in B.

Wir wollen nunmehr einige Anwendungen von der allgemeinen Formel

$$x = \frac{H^{\delta}}{D^{\varkappa}} (LH - Lh)$$

oder $x = 9658 (LH - Lh)$

machen.

I. Exempel. Man sucht die Lage von Alaussy, einem Dorf am Fus des Berges Choussai, in Vergleichung mit Carabourou, unter der Voraussetzung, daß, wie Herr Godin beobachtet hat, in diesem Dorf die Barometerhöhe 21 Zoll $1\frac{1}{4}$ Linie beträgt.

Man hat $H = 254,75$ Linien, $h = 253,25$ Linien, $LH - Lh = 0,0025648$; daher $x = 24,77$ Toisen, für die Höhe von Alaussy über Carabourou, welches ungemein nahe mit der geometrischen Messung übereinstimmt.

II. Exempel. Man sucht die Lage des Gipfels vom Berg Choussai in Vergleichung mit Carabourou, vorausgesetzt, daß das Queckſilber im Barometer auf dem Gipfel des Choussai 17 Zoll $10\frac{1}{2}$ Linien hoch steht, wie Herr Godin beobachtet hat.

Man hat $H = 254,75$ Linien, $h = 214,5$ Linien, $LH - Lh = 0,0746869$, also $x = 722,95$ Toisen für die Höhe des Gipfels vom Choussai über Carabourou, welches von der geometrischen Messung nicht merklich verschieden ist.

I. Anmerk. So einfach auch die hier vorgetragene Methode ist, so hat sie doch Bouguer noch einfacher gemacht. Er hat bemerkt, daß es zur Bestimmung der Unterschiede zwischen den Höhen verschiedener Oerter hinlänglich ist, die Differenz der Logarithmen dieser in Linien ausgedruckten Höhen zu nehmen; die vier ersten auf die Charakteristik folgenden

Ziffern

Ziffern dieser Differenz als einen Ausdruck von Toisen anzusehen und seinen dreißigsten Theil davon abzuziehen; der Rest druckt die Höhe eines Orts über dem andern aus. So ist z. B. der Unterschied der Logarithmen von den Queckſilberhöhen in Carabourou und auf der Spitze des Pichincha in Linien ausgedruckt = 0,1250808; man setze, es beziehe sich 1250 auf Toisen, und ziehe den dreißigsten Theil, das ist beiläufig 42 davon ab, so gibt der Rest 1208 die Höhe des Pichincha über Carabourou aus. Eben so verhält es sich mit allen andern Fällen, wo die Formel $x = \frac{H\delta}{D_x}(LH - Lh)$ gebraucht werden kann.

110. II. Anmerk. Wir müssen im Vorbeigehen bemerken, daß die Bestimmung der Höhe, auf welche die durch die Oefnung E (fig. 31.) dringende Luft bei der mit der Pumpe zu Seville gemachten Erfahrung das Wasser im leeren Raum zu erhalten vermag, eine Aufgabe ist, welche auf eben diesen Gründen beruht; denn es ist klar, daß die Wassersäule ET als ein Gewicht angesehen werden kann, das der untern Luft, die es trägt, entgegen wirkt; eben so ist klar, daß dieses Gewicht mit dem Druck der Atmosphäre in RP im Gleichgewicht seyn würde. Man setze daher z. B. daß in der Stelle A, wo der Versuch angestellt wird, der Druck der Atmosphäre das Wasser 32 Fus hoch in dem leeren Raum erhebe, oder, welches eben das ist, das Queckſilber im Barometer auf die Höhe von 28 Zoll, und daß die Wassersäule ET 24 Fus hoch oder dem Druck einer Queckſilbersäule über eben der Grundfläche und von der Höhe von 21 Zoll gleich sey. Die vorgelegte Frage läßt sich nun auf folgende bringen: Man weis, daß sich in einer Stelle A das Queckſilber im Barometer 28 Zoll hoch erhält; man sucht die Höhe einer Stelle R, wo das Queckſilber sich

nur 21 Zoll hoch erhält. Man findet die Stelle R über der A etwa 1217 Toisen erhaben. Die Wassersäule ET würde also bis zu dieser Höhe hinaufsteigen, wenn sie nicht der Luft den Durchgang durch ihre Masse verstattete und die Reibung an der Röhrenwand ihr keine Hindernis entgegensetzte.

III. Erinner. Es ist (unter den Einschränkungen §. 70.) ausgemacht, daß sich einerlei Luftmasse nach der Verhältnis der auf sie druckenden Gewichte komprimirt. Ohne Rücksicht auf die Beweise, welche man schon davon hatte, erzählt Hr. Bouguer in der angeführten Abhandlung, daß er die Richtigkeit dieses Gesetzes aus einer Menge von Erfahrungen, die er in den Thälern und auf den Gipfeln der Gebirge von Peru gemacht habe, kennen gelernt habe. Es folgt hieraus, wie wir gesehen haben, daß wenn man schlechthin auf die Gewichte der Luftschichten sieht, die Höhen der Oerter sich wie die zugehörigen Barometerhöhen verhalten; oder, welches eben das sagt, wenn sich diese letztere Höhen in einer geometrischen Reihe befinden, so liegen die erstern in einer arithmetischen. Diese Folge hat in den vorhergehenden Beispielen auf die Erfindung der iedesmaligen Höhen mehrerer Stellen mit großer Genauigkeit geleitet. Hr. Bouguer hat sich gleichfalls eben dieses Satzes auf der ganzen Höhe Cordeliere in Peru mit gutem Erfolg bedient. Je höher ein Ort liegt, destomehr Freiheit hat die Luft, da sie von den Ursachen abgesonderter ist, welche das natürliche Gleichgewicht stöhren können, das von ihrem Gewicht entstehen müßte; und desto wenigern Veränderungen ist daher das Gesetz der Dichtigkeiten ausgesetzt, die von diesem Gewicht herrühren. Dagegen ist die erwähnte Methode in dem untern Theil vom Cordeliere und auf mehrern andern Gebirgen des heissen Erdstrichs merklich von der Wahrheit abgewichen.

wichen. Auch in mehreren Gegenden von Europa hat man sie fehlerhaft befunden: die Ursache dieser Abweichungen liegt in der Verschiedenheit der Temperatur der Luft an verschiedenen Stellen. Eine größere oder geringere Wärme dehnt die Luft mehr oder weniger aus, und verändert das Gesetz der Dichtigkeiten. Man muß daher in solchem Fall bei der Formel §. 107. eine gewisse Korrektion anbringen, wie man im folgenden Kapitel sehen wird.

Zehntes Kapitel.

Von den Veränderungen der Barometerhöhen, und den Mitteln, welche das Thermometer an die Hand gibt, die durch das erste Werkzeug gefundenen Höhen zu berichtigen.

112.

Die Barometer, welche zu Beobachtungen, die man unter einander vergleichen will, dienen sollen, müssen regulär und nach einerlei Gründen verfertigt seyn, sonsten erhält sich das Queckſilber in zweien Barometern, die an einerlei Stelle gebracht werden, nicht auf einerlei Höhe; zuweilen stimmen sogar die Resultate eines Barometers, das an mehreren Stellen nach einander gebraucht wird, mit den Resultaten eines andern an eben diesen verschiedenen Stellen gebrauchten Barometers nicht einmal überein.

113. Man findet in mehrern physikaliſchen Schriften und insbesondere in des Herrn de Lüc *Recherches sur les modifications de l'atmoſphère* die besten Verfertigungsarten der Barometer. Man hat dabei vorzüglich auf folgende Stücke zu sehen, 1) daß man das Queckſilber wohl von Luft reinige, so daß man versichert ist, daß das so behandelte Queckſilber in mehrern Barometern gleiche Beschaffenheit und gleiche specifische Schwere hat. 2) Man muß die Barometerröhre im innern Durchmesser $2\frac{1}{2}$ bis 3 Linien weit machen, theils um die Wirkung der Haarröhrgen zu vermeiden, theils um der Luft den Ausgang aus der Röhre zu erleichtern, wenn man das Barometer verfer-

verfertigt, theils endlich um die Ausdehnungen des Queckſilbers, die von der Wärme herrühren, weniger merkbar zu machen.

3) Man muß dergleichen elaſtiſchen Dunſt verhüten, wovon Herr Daniel Bernoulli in ſeiner Abhandlung ſur les Courans de la mer redet, welche von der Akademie der Wiſſenſchaften zu Paris 1751. den Preis erhalten hat. Dieſer große Geometer, deſſen Geſchicklichkeit, in die Geheimniſſe der Natur zu dringen, außerordentlich war, hat zuerſt bemerkt, daß ſich um alle flüßige Körper herum im leeren Raum eine Atmoſphäre oder ein elaſtiſcher Dunſt bildet; dieſer Dunſt wird von der leichteſten Feuchtigkeit erzeugt und iſt gegen die Eindrücke der Wärme und Kälte äuſſerſt empfindlich. Wenn daher eine Barometerröhre noch einige Feuchtigkeit behält, wenn ihre innere Wand mit etwas Flüſſigem beſtrichen oder überfahren wird, als mit Weingeiſt u. dergl. ſo ſteigt das Queckſilber in dieſer Röhre nicht ſo hoch als in einer andern, die ganz trocken und rein iſt. S. Herrn Bernoulli's Abhandlung pag. 25—28.

114. In Barometern, die auf gradwohl gemacht ſind, ſteht das Queckſilber faſt immer niedriger als in einem ächten Barometer d. h. in einem ſolchen, das nach den eben erwähnten Regeln gemacht worden iſt. Die Urſache dieſer geringern Höhe liegt gewöhnlich ganz allein darin, daß man bei Verfertigung des Barometers in dem obern Theil der Röhre etwas weniges Luft gelaſſen hat. Es iſt leicht, die Verhältnis zwiſchen der ganzen Höhe der Röhre, der des Queckſilbers, der, welche die eingeſperrte Luft in ihrem natürlichen Zuſtand einnehmen müßte, oder wann das obere Ende der Röhre offen wäre, und der Höhe des Queckſilbers in einem ächten Barometer zu finden. Denn es ſey (fig. 30.) in einem unächten Barometer,

AB die Höhe der Röhre; AE die des Queckſilbers; BH die, welche die eingeſperrte Luft einnehmen würde, wann ſie in Freiheit wäre, und man ſetze AB = a, AE = p, BH = q, die Höhe des Queckſilbers in einem ächten Barometer = h; ſo iſt die Federkraft der Luft BH, welche ſich in BE verbreitet, (67.) $= h. \frac{BH}{BE}$ oder $= \frac{hq}{a-p}$, und dieſe Kraft mit dem Gewicht der Queckſilberſäule AE verbunden, muß dem Druck der Atmoſphäre gleich ſeyn. Man hat alſo die Gleichung

$$p + \frac{hq}{a-p} = h$$

oder

$$ap - pp + hq - ah + hp = o$$

eine Gleichung, welche die geſuchte Verhältnis enthält. Da a und h als bekannt angenommen werden, ſo erhellet, daß, wenn p gegeben iſt, q gefunden werden kann, oder p wenn q gegeben iſt.

115. Man ſetze, es habe ein Barometer alle mögliche Vollkommenheit die man ihm nur geben kann, und man gebe auf ſeinen Zuſtand an einerlei Ort eine lange Zeit hindurch Achtung, ſo findet man, daß die Höhe der Queckſilberſäule nach den verſchiedenen Witterungsabwechslungen häufigen Veränderungen unterworfen iſt.

1) Gewöhnlich ſteht das Barometer hoch, wann das Wetter ſchön, beſtändig, windſtill und trocken iſt; hingegen fällt es, wann das Wetter veränderlich, regneriſch, ungeſtüm und die Luft von ſtarken Winden getrieben wird oder ſehr mit Dünſten beladen iſt.

2) Die höchſten und niedrigſten Barometerſtände treten allemal im Winter ein; und ie größer

in

in einerlei Klima die Abwechslungen von Kälte und Wärme sind, desto beträchtlicher sind auch die Veränderungen der Barometerhöhen.

3) Auf den hohen Bergen sind die Veränderungen des Barometers sehr gering und zuweilen ganz unmerklich: alsdann findet man die Unterschiede der Höhen verschiedener Oerter mit diesem Werkzeug genau.

4) Um den Aequator herum sind die Veränderungen des Barometers weit weniger merkbar als gegen die Pole hin. Z. B. zu Quito verändert sich die Barometerhöhe nur höchstens anderthalb Linien und unten am Meeresufer dritthalb bis drei Linien; in Paris beträgt die Veränderung mehr als 26 Linien.

5) Wenn in einem unveränderten Ort das Barometer bei schöner Witterung zu fallen anfängt, so wird sich Regen oder Wind einfinden; wenn es hingegen bei regnerischer Witterung zu steigen anfängt, so ist solches ein Zeichen, daß sich schönes Wetter einfinden werde. Bei sehr heisser Witterung kündigt das Fallen des Barometers ein Gewitter an; bei kalter Witterung deutet das Steigen auf Frost, und dagegen das Fallen auf Thauwetter.

Dieses sind die hauptsächlichsten Erscheinungen bei den Barometerveränderungen. Die Erzählung aller Systeme, die über diesen Gegenstand ausgebrütet worden sind, gehört nicht zu meinem Zweck; ich begnüge mich, nur von einigen der vorzüglichsten eine allgemeine Vorstellung zu geben.

System

System des Herrn Leibnitz.

Nach Herrn Leibnitz müssen die zur Erzeugung des Regens bestimmten Dünste, die anfänglich in der Luft zerstreut und in solcher schwebend erhalten werden, nothwendig das Gewicht der Atmosphäre vergrößern und folglich auch den Druck, welchen die Luft auf die Oberfläche des in dem untern Barometerknopf enthaltenen Queckſilbers ausübt. Solang also die Dünste in der Luft schweben oder das schöne Wetter dauert, muß das Barometer seinen hohen Stand behalten. Wann aber die Dünste, von Winden oder irgend einer andern Ursache, wie man sich solche gedenken mag, gegen einander getrieben, sich mit einander verbinden, so bilden sie kleine Körpergen, die specifisch schwerer sind als die Luft und sie müssen daher in Regen niederfallen. Während dem aber solche fallen, erleichtern sie um einen gewissen Theil ihres Gewichts die Luft, den Gesetzen der Mechanik gemäs. Man stelle sich nämlich vor, daß ein fester Körper von eben der specifischen Schwere wie die Luft, der also an der Stelle, wo er sich befindet, ruhig liegt, durch irgend eine Ursache in einen größern Raum (*) ausgedehnt werde, ohne einen Zuwachs in seiner Masse oder in seinem Gewicht zu erhalten; so muß alsdann der Körper nothwendig niedersinken, und der Theil seines Gewichts, der zum Sinken angewendet wird, muß aufhören, die Atmosphäre zu drucken, die ihn zuvor schwebend trug. Der Stoß, den dieser Körper gegen die Luft ausübt, ersetzt die gedachte Verminderung des Drucks nicht, wie man sich

(*) Der Körper, in einen größern Raum ausgedehnt, müßte mehr als vorher von seinem Gewicht in der Luft verlieren, folglich steigen anstatt zu sinken; es sollte also statt größern Raum ohne Zweifel kleinern Raum heißen.

sich überzeugen kann, wenn man den Stoß flüßiger Massen zu bestimmen weiß; die Luft wird also beim Fallen des Regens leichter, und das Barometer muß fallen. Das Fallen des Barometers fängt etwas vor dem Regen an, entweder weil eine gewisse Zeit nöthig ist, Tropfen zu bilden, oder weil die Winde solche bisweilen aus sehr entfernten Gegenden beiführen. Wenn der Regen nicht allemal die Folge vom Fallen des Barometers ist, so schreibt Herr Leibnitz die Ursache davon den Winden zu, welche die Tropfen in andere Gegenden führen oder solche zertheilen und in der Atmosphäre zerstreuen. Es ist dieses System in der That sehr sinnreich; es ist zur Erklärung der hauptsächlichsten Erscheinungen von Regen und schönem Wetter ganz befriedigend; aber es erklärt die Erscheinungen nicht, die sich auf Gewitter, auf Frost, auf Winde ꝛc. beziehen.

System des Herrn Halley.

Herr Halley erklärt die Bewegungen des Barometers aus der Wirkung der Winde auf die Regendünste, welche in der Luft schweben. Nach seinen Grundsätzen fällt das Barometer gewöhnlich bei stiller und auf Regen zielender Witterung, weil zweene nach entgegengesetzter Richtung gehende Winde die Luft verdünnen und leichter machen: bei einer hellen und beständigen Witterung ist das Barometer gleichsam der Mittelpunkt, wo die Winde die Luft zusammentreiben und schwerer machen; das Barometer muß also steigen: bei stiller und kalter Witterung steigt das Barometer, weil alsdann kalte Winde aus Norden wehen, welche die Luft zusammendrängen: die stärksten Barometeränderungen befinden sich nach Norden, weil die Nordwinde stärker und veränderlicher sind als die Südwinde ꝛc. Man sieht, daß dieses System auf mehrere Voraussetzungen gegründet ist, worunter einige schwer anzunehmen sind oder sich sogar zu widersprechen scheinen.

System

System des Hrn. v. Mairan.

Die Hypothese des Hrn. v. Mairan bezieht sich gleichfalls auf die Wirkung der gewöhnlichen Winde, die Luft zu verdichten oder zu verdünnen. Ueberdas setzt er noch die Wirkung des Zentralfeuers hinzu, welches (nach ihm) unaufhörlich aus den Eingeweiden der Erde ströhmt, und welches in der Luft Erschütterungen und Bewegungen verursacht, deren Stärke und Richtungen durch mehrere physikalische und Lokalursachen abgeändert werden können: ein neues Feld von unzulänglichen oder ganz grundlosen Voraussetzungen.

Neueres System.

Seitdem Hr. le Roi, Mitglied der kön. Soc. zu Montpellier gezeigt hat (Mém. de l'Académie année 1751. page 481), daß die Luft allemal eine gewisse Menge aufgelößtes Wasser enthält, hat man hierauf eine neue Erklärung von den Veränderungen des Barometers gegründet. Man setzt voraus, daß die mit der Luft vermischte Wassertheilgen das Gewicht derselben vermindern; und dieses kann, wie Herr de Saussüre in seinem treflichen Werk über die Hygrometrie bemerkt, daher rühren, daß die Dünste bei der Verwandlung des Wassers zu einer elastischen flüßigen Masse werden, dessen körperlicher Raum bei gleichem materiellem Gehalt viel größer als der von reiner Luft ist. Die Voraussetzung einer solchen Verminderung in dem Gewicht der Luft durch die Anhäufung der Regendünste erklärt, warum das Fallen des Barometers ein Zeichen des Regens ist. Das Wasser wird durch einen gewissen Wärmegrad in der Luft aufgelößt erhalten: wann die Luft mit Wasser gesättigt ist und nun wieder kälter zu werden anfängt, so läßt sie den größten Theil davon fahren, der dann

in

in Thau oder Regen niederfällt. Aber diese Wirkungen angenommen ist man noch weit entfernt, darinn die Ursachen von den Veränderungen des Barometers zu finden; denn Hr. de Sausſüre beweißt, sowohl durch Schlüsse als aus der Erfahrung, daß der größte Unterschied zwischen trockener und feuchter Luft bei dem Barometer keine größere Veränderung als von zwo bis drei Linien bewirken kann, welches von denen Veränderungen, die man in unsern Gegenden beobachtet, noch sehr weit verschieden ist. (s. dessen Werk pages 283 & suiv.) Ich komme nun wieder näher auf meinen Zweck zurück.

117. Hr. Amontons, einer von den besten Physikern zu Anfang dieses Jahrhunderts, hatte behauptet (Mém. de l'Acad. 1704. pages 164 & 271), die Wärme habe einen beträchtlichen Einfluß auf die Veränderungen des Barometers. Gelehrte, durch zweideutige Erfahrungen verleitet, widersprachen diesen Satz. Hr. de Lüc hat gefunden, daß Barometer, deren Queckſilber nicht durchs Feuer gereinigt worden war, bei Veränderung der Wärme irregulären Veränderungen ausgesetzt waren; bald waren sie bei zunehmender Wärme unveränderlich, bald steigend, bald fallend: hieraus hat er geschlossen, daß die vorhin erwähnten Gelehrte durch dergleichen Barometer in Irrthum geführt worden sind. Er hat sich überdas überzeugt, daß die durchs Feuer von Luft gereinigten Barometer bei der Kälte allemal stiegen und bei der Wärme fielen. Dieses sind also reguläre Barometer und solche, wie man sie gebrauchen muß.

118. Bevor wir weiter gehen, müssen wir bemerken, daß der Unterschied der Wärme in der Atmosphäre die Ursache von gewissen Ströhmen ist, welche man in ihr bemerkt. Es befinden sich (fig. 44.)

über

über einerlei horizontalen Ebene ABEF zwo Luftmassen ABCD, EFGH, wovon die erste wärmer ist als die letzte; man gedenke sich zwo horizontale Kommunikationsröhren mn, pq, und setze, es sey im ersten Augenblick in der untern Röhre der Druck in m dem Druck in n gleich, welches statt finden kann, wenn man annimmt, daß die Säule mC, welche dünner und specifisch leichter als die Säule nH ist, durch ihre größere Höhe diesen Abgang wieder ersetzt; so ist klar, daß in der obern Röhre der Druck in p größer ist als der Druck in q, weil die Säule mp leichter ist als die nq; es ströhmt also aus ABCD Luft durch die Röhre pq in EFGH. Nun vergrössert diese so beidringende Luft die Luftmasse in EFGH und den Druck in n, woraus ein zweeter Luftstrohm erfolgt, der dem ersten entgegengesetzt ist, nämlich aus EFGH durch die untere Röhre nm in ABCD. Es würde sich eben so verhalten, wenn man im ersten Augenblick den Druck in p dem in q gleich setzte, denn alsdann wäre der Druck in n größer als der Druck in m, welches zuerst einen Luftstrohm aus EFGH in die Luft ABCD durch die Röhre nm, und hiernächst einen Luftstrohm aus ABCD in die Luft EFGH durch die Röhre pq hervorbrächte. Man sieht hieraus, daß wenn zwei an einander liegende Zimmer, ein warmes und ein kaltes, durch Oefnung einer gemeinschaftlichen Thüre in Kommunikation versetzt werden, zween entgegengesetzte Luftströhme entstehen müssen, wovon der untere aus dem kalten Zimmer in das warme, und der obere aus dem warmen in das kalte zieht. Eben so wenn man ein Feuer auf einem Kaminherd anzündet, so erzeugen die in dem Zimmer enthaltene Luft und die, welche durch die offenen Räume oder Ritze der Thüre unaufhörlich eindringt, einen untern Zug, der gegen das Kamin gerichtet ist, und einen obern, welcher durch die Kaminröhre zu ziehen genöthigt ist.

und

und den Rauch mit sich fortführt, wofern nur die Kaminröhre nicht für das Zimmer zu weit ist, oder dieser zweete Zug in seinem Weg oder bei seinem Ausgang keinen Hindernissen begegnet, da sich in diesen Fällen der Rauch in dem Zimmer verbreiten würde ꝛc.

119. Die Temperatur der Luft wird vermittelst des Thermometers bestimmt. Man weiß, daß dieses Werkzeug aus einer Kugel und einer Röhre von Glas besteht, worinn man eine gewisse Menge einer elastischen Flüßigkeit hermetisch verschlossen hat, die durch ihre Ausdehnung in der Wärme oder durch ihre Verdichtung in der Kälte in iedem Augenblick den Zustand der Luft an dem Ort zu erkennen gibt, wo sich das Thermometer befindet. Die erwähnte Flüßigkeit kann Weingeist, Queckſilber, Leinöl ꝛc. seyn. Man zieht das Queckſilber vor, weil es gegen die Eindrücke der Kälte oder Wärme ungemein empfindlich ist, und es nicht durch die Länge der Zeit verdirbt. S. die Abhandlung von den Thermometern des Doktor Martine, und des Hrn. de Luc schon angeführtes Werk.

120. Da Wärme und Kälte relative Größen sind, so müssen die Ausdehnungen oder Zusammenziehungen der thermometrischen Flüßigkeit wo möglich von völlig bestimmten Grenzen an gerechnet werden, theils um Wärme und Kälte verschiedener Oerter mit einander vergleichen zu können, um die Verhältnis der Temperatur in verschiedenen Klimaten zu erforschen, theils um überall im Stand zu seyn, eine Menge von physischen und chymischen Beobachtungen anzustellen, welche einen bestimmten Grad von Wärme oder Kälte erfodern. Das Folgende enthält noch einige allgemeine Bemerkungen über die gebräuchlichsten Thermometer.

121. Herr von Reaumür nimmt zum Anfang seiner Stufenleiter die Gefrierung des Wassers an, nicht aber die natürliche Gefrierung, welche nicht allemal bei einerlei Grad der Kälte erfolgt, sondern eine durch Eis und Salz hervorgebrachte künstliche Gefrierung. Um dem Fehler zu entgehen, welcher aus der größern oder geringern Kälte des hierbei gebrauchten Eises entstehen könnte, bewirkt er die Gefrierung zu einer Zeit, wo die Luft nicht kalt genug ist, das Wasser zum Gefrieren zu bringen, und nimmt den fixen Punkt in dem Augenblick, wo die oberste Fläche des Wassers bei der künstlichen Kälte zu gefrieren anfängt. Diesen Punkt bemerkt er auf der Thermometerröhre mit Null; und unter der Voraussetzung, daß die ganze thermometrische Flüßigkeit, die in dem untern Theil enthalten ist, von diesem Punkt an gezählt in 1000 gleiche Theile getheilt ist, findet oder schließt er, daß sie sich bei der Wärme des siedenden Wassers ohngefähr um 84 Theile ausdehnt, welches einen andern Punkt der Stufenleiter gibt. Ich habe gesagt, er findet oder schließt, weil der Weingeist, welchen Hr. v. Reaumür fast allemal bei seinen Thermometern gebraucht hat, etwas früher als das Wasser zu sieden anfängt, und daher nur auf eine unsichere Art das Sieden des Wassers angeben kann. Ueberdas hat die Wärme des siedenden Wassers nur für eine bestimmte Barometerhöhe einen bestimmten Grad: denn man hat bemerkt, daß das Wasser desto schwerer zum Wallen kommt, aber auch einen desto größern Wärmegrad annimmt und unterhält, ie höher das Barometer steht. Das Queckſilber hat den Vorzug, daß es ohne zu sieden eine Hitze ertragen kann, welche die Wärme des siedenden Wassers bei weitem übertrift, und daß es nur in einem ausserordentlichen Grad von Kälte gefriert. Wenn man diese flüßige Materie bei dem Reaumürschen Thermometer gebraucht, so bestimmt

man

man die Wärme des siedenden Wassers für eine gegebene Barometerhöhe mit der nämlichen Genauigkeit wie die künstliche Gefrierung des Wassers, und man hat alsdann zween bestimmte Punkte für die thermometrische Stufenleiter, unter und ober welchen man solche fortsetzen kann.

122. Bei dem Thermometer des Fahrenheits, welcher allemal Quecksilber gebraucht hat, steht der Punkt Null um 32 Grade tiefer als bei dem Reaumürschen, und der 212te Grad bezeichnet die Wärme des siedenden Wassers, so daß vom 32sten Grad an, welcher mit dem Reaumürschen Null zusammentrift, bis zum 212ten Grad, der zum siedenden Wasser gehört, 180 Grade liegen. Die höhern Grade dienen zur Bestimmung der Wärme von siedenden Oelen, geschmolzenem Zinn ꝛc. Man sieht, daß ieder Reaumürsche Grad ohngefähr zween Fahrenheitschen gleichgesetzt werden kann.

123. Die Stufenleiter bei dem Thermometer des Herrn de l'Isle geht nicht auf- sondern abwärts. Er nimmt an, wenn das Thermometer in siedendes Wasser getaucht ist, es sey die Quecksilbermasse in 10 oder 100 tausend Theile getheilt, und bemerkt in solchen Theilen ober- und unterhalb dieses fixen Punkts alle Wärmegrade, die zu allen möglichen Graden der Ausdehnung und der Verdichtung gehören. Diese Abtheilungen werden gegen die sonstige Gewohnheit durch Zahlen ausgedruckt, die desto größer werden, iemehr die Wärme abnimmt. Die Genauigkeit dieses Thermometers hängt lediglich von dem Wärmepunkt des siedenden Wassers ab, an dessen richtiger Bestimmung daher sehr viel gelegen ist, und der sich allemal auf eine bestimmte Barometerhöhe beziehen muß.

124. In den Transact. philos. an. 1701. befindet sich eine Abhandlung von Newton mit der Ueberschrift: *Scala graduum caloris & frigoris*, worin der Verfasser mittelst eines Leinölthermometers und eines warmen Eisens die Grade der Wärme und Kälte mehrerer Körper bestimmt. Er nimmt für den Ursprung oder den Nullgrad des Thermometers die Gefrierungskälte des Wassers im Winter an. Die verschiedenen Wärmegrade druckt er durch Glieder zwoer Reihen aus, einer arithmetischen und einer geometrischen, die mit einander korrespondiren und eine solche Gestalt haben, daß wenn 1 und 12 zwei einander zugehörige Glieder dieser Reihen sind, die übrigen Paare von zusammengehörigen Gliedern 2 und 24, 3 und 48, 4 und 96 ꝛc. sind. Hierdurch findet Newton, durch bloßen Gebrauch des Thermometers, daß, wenn der Wärmegrad des menschlichen Körpers in der arithmetischen Reihe 1 und in der geometrischen 12 ist, der Wärmegrad, wobei ein in warmem Wasser schwimmendes Stück Wachs zu schmelzen beginnt, in der ersten Reihe 2 und in der andern 24 ist; der Wärmegrad des siedenden Wassers ist in der ersten $2\frac{1}{2}$ und in der andern 34, und so bei mehrern andern Materien vom Eis an bis zum schmelzenden Zinn. Aber für Wärmegrade, die höher waren als daß die Thermometerkugel solche, ohne zu schmelzen oder zu zerspringen, hätte aushalten können, setzt Newton die doppelte Stufenleiter mittelst eines warmen Eisens auf folgende Art fort. Er läßt ein Stück Eisen im Feuer rothglühend werden; er beobachtet die Stufen in der Abnahme der Wärme dieses Körpers, wenn er der freien Luft ausgesetzt wird; er nimmt an, die in iedem Augenblick, während der Zeit der Abkühlung, verlohren gehende Wärme sei dem Ueberschuß der Wärme des Körpers über die Wärme der ihn umgebenden Luft proportional, so daß wenn

die

die Zeiten der Abkühlung in einer arithmetischen Reihe stehen, die Wärmegrade in einer geometrischen liegen; diese letztere Reihe verbindet er mit der, welche man durch das Thermometer erhalten hat, indem er das Stück Eisen bis zur Temperatur der Wärme des menschlichen Körpers abkühlen läßt, und setzt dabei zugleich die durchs Thermometer erhaltene arithmetische Reihe fort. Eben so bestimmt er die Wärme, welche verschiedene Metalle zum Schmelzen bringt, oder, welches auf eben das hinauslauft, die Wärme, bei welcher diese zuerst zum Schmelzen gebrachten Metalle, hiernächst zu erhärten beginnen, indem er auf ein rothglüendes Eisen eine geschmolzene metallische Masse legt und die Abkühlungszeit beobachtet, bis zu der das Metall hart zu werden anfängt und die Wärme des Eisens der des menschlichen Körpers gleich wird. Diese ganze Theorie ist sehr sinnreich; allein man hat gefunden, daß Newtons Hypothese in Ansehung der Abnahme der Wärme der Metalle, beträchtlich von der Wahrheit abweiche, und man hat andere genauere Mittel gefunden, zu seinem Zweck zu kommen (*); aber es ist gegen meine Absicht, mich in diese Untersuchung einzulassen.

125. Alle Thermometer haben einen wesentlichen und unvermeidlichen Fehler. Das Glas ist den Veränderungen der Kälte und der Wärme unterworfen; es zieht sich auf verschiedene Weise zusammen und dehnt sich aus, nach Verhältnis seiner Dicke, und dieses stöhrt

(*) Hier hätte doch Herrn Lamberts Pyrometrie, das erste Werk in seiner Art, vorzüglich eine Erwähnung verdient. Wirklich scheint Herr Bossüt, so wie fast alle französischen Mathematiker, die grossen Verdienste der Teutschen in der Mathematik gar nicht zu kennen.

stöhrt den natürlichen Gang der Flüßigkeit im Thermometer (*). Ueberdas kann es kommen, daß die Grade der Ausdehnung dieser Flüßigkeit die Wärmegrade nicht genau ausdrucken; es ist sehr leicht möglich, daß die Wärme bei gleicher Zunahme mehr oder weniger Schwierigkeit findet, die nämliche flüßige Masse auszudehnen. Endlich dünkt es mich, daß, um zwei Thermometer, so genau als es die Natur der Sache erlaubt, übereinstimmend zu machen, diese beiden Werkzeuge, wenigstens beinahe, einerlei Gestalt, einerlei Abmessungen und einerlei Art und gleiche Menge von Flüßigkeit haben müssen.

126. Wenn ich ein Buch über die Physik schriebe, so würde ich hier von der Trockenheit und Feuchtigkeit der Luft reden; ich würde die Verhältnis zeigen, in der diese beiden Eigenschaften mit der Wärme stehen; ich würde die Werkzeuge beschreiben, welche solche zu bestimmen dienen, und die daher Hygrometer genennt werden. Aber ich muß über alle diese Gegenstände nur

(*) Vielleicht ist das Glas gegen die Eindrücke der Wärme und Kälte empfindlicher als irgend ein anderer Körper. Ich setzte auf eine gewöhnliche Bouteille, die etwa 2 ℔ Wasser faßte und ganz mit Wasser angefüllt war, eine Glasröhre, und schloß die obere Mündung der Bouteille gehörig zu. Das eingefüllte Wasser war ziemlich kalt, indem es zu Anfang des Märzes aus einem nicht tiefen Brunnen geschöpft war. In dem nämlichen Augenblick nun, da ich die Bouteille, aus welcher das Wasser in der warmen Stube schon merklich in die Glasröhre in die Höhe gestiegen war, mit der Hand anfaßte, sank die gestiegene Wassersäule, wegen der Ausdehnung des Glases um etliche Linien; dieses habe ich sehr oft wiederholt.

nur auf das schon erwähnte Buch des Herrn de Saussüre verweisen.

127. Sobald man den Einfluß der Wärme auf die Barometerhöhe kennen gelernt hatte, suchten Männer, die Geometer und Physiker zugleich waren, insbesondere Hr. Daniel Bernoulli und Hr. Euler diesen Umstand mit in die Untersuchung von Bestimmung der Höhen durchs Barometer hineinzubringen. Sie lieferten zu dem Ende neue Formeln, die mehr oder weniger geschmeidig und mit geometrischen Messungen mehr oder weniger übereinstimmend waren. Da es aber einigen dieser Messungen selbsten an Genauigkeit fehlte, so war dieser Fehler, den man damals nicht kannte und den man erst in der Folge kennen lernte, Ursache, daß einige Beobachtungen mit dergleichen Formeln gut genug übereinstimmten, andere aber denselben widersprachen, und hierdurch wurde der Fortgang dieses physischen Theils der Hydrostatik gehemmt. Endlich hat man in neuern Zeiten sehr viele neue Versuche über diesen Gegenstand angestellt; und man hat sich Mühe gegeben, den Beobachtungen dadurch beizukommen, daß man in die oben (107) gegebene Formel $x = \frac{H^{\delta}}{D_{*}}(LH - Lh)$ noch ein Glied zur Korrektion hineingebracht hat.

128. Hr. de Lüc, einer von denen, die sich am meisten mit diesem Gegenstand beschäftigt haben, findet aus den Beobachtungen, die er auf den Gebirgen um Genf und auf seinen Reisen angestellt hat, daß die vorstehende Formel die Höhen der Oerter genau genug gibt und keiner Korrektion bedarf, wann das Quecksilber im Reaumürschen Thermometer $16\frac{3}{4}$ Gr. über dem Eispunkt bleibt. Dieses ist also die Stelle, von der er ausgeht, die Formel in Ansehung anderer Wärmegrade zu korrigiren. Die Regel, welche er

daher gibt, den Unterschied der Höhen zweener Oerter A und B zu bestimmen, kommt auf Folgendes an: Man beobachte in A und B die Grade des Thermometers, und nehme die beiden Unterschiede dieser Grade und der erwähnten $16\frac{3}{4}$ Gr. mit Rücksicht auf die vorstehenden Zeichen; beide addire man zusammen und nehme die Hälfte dieser Summe, welches eine absolute Zahl gibt, die ich $\pm$ n nenne. Wenn nun x der Unterschied der Höhen ist, wie ihn die Formel $x = \frac{H^3}{D^3}$ (LH — Lh) ohne Korrektion gibt, und y den wahren Unterschied bedeutet, welchen man sucht, so hat man nach Hrn. de Lüc.

$$y = x \pm \frac{x\,n}{215}$$

129. Im J. 1781. überschickte Hr. Trembley, der sich sehr frühe als einen großen Geometer gezeigt hat, der Akademie der Wissenschaften eine Abhandlung, worin er nach einer großen Menge von Versuchen, welche vom Hrn. R. von Schuckburgh in den Gegenden von Genf, und vom Hrn. Obrist le Roi in England mit aller möglichen Genauigkeit angestellt worden sind, beweist, daß die Methode des Hrn. de Lüc die Unterschiede der Höhen nicht so genau gibt, als das einfache Verfahren oder die Formel $x = \frac{H^3}{D^3}$ (L.H — Lh); und hieraus schliest er, daß Hr. de Lüc den mittlern Thermometergrad unrichtig bestimmt hat. Er zeigt durch die Verbindung der erwähnten Beobachtungen, daß der mittlere Thermometergrad $11\frac{1}{2}$ ist, und daß der Divisor von $\pm$ n nicht 215, sondern 192 seyn müsse. Indem er also $11\frac{1}{2}$ statt $16\frac{3}{4}$, und 192 statt 215 in der Formel des Hrn. de Lüc substituirt, erhält er $y = x \pm \frac{n.x}{192}$,

eine

eine Formel, die sehr genau mit den Beobachtungen des Hrn. R. von Schuckburgh und des Hrn. D. le Roi übereinstimmt. Aber diese ganze Untersuchung hat, wie Hr. Trembley selbsten bemerkt, noch mehrere neue Beobachtungen nöthig. Diese sind um soviel nothwendiger, als ohne alle Rücksicht auf Wärme der Unterschied in den Winden, in der Trockenheit oder Feuchtigkeit der Luft ꝛc. in verschiedenen Stellen Veränderungen in den Barometerhöhen bewirken können, welche festgesetzt und mit in Rechnung gebracht werden müßten (*).

Ich brauche nicht zu bemerken, daß man auf diese Art vermittelst barometrischer und thermometrischer Beobachtungen, die an dem Ort der Abfahrt und in der Luft angestellt werden, die Höhen berechnet, welche die Luftfahrer in ihren aerostatischen Ballons erreichen.

(*) Die neueste hierhin gehörige Schrift ist Hrn. Hofr. Mayers physikalisch-mathematische Abhandlung über das Ausmessen der Wärme in Rücksicht und Anwendung auf das Höhemessen vermittelst des Barometers 1786.

Eilftes Kapitel.

Allgemeine Lehren vom Gleichgewicht schwimmender Körper.

130.

Die Oberfläche eines in eine flüßige Masse getauchten Körpers wird in allen ihren Punkten von der anliegenden Flüßigkeit senkrecht gedruckt, auf eben die Art und aus eben den Gründen, wie der Boden und die Wände eines Gefäßes von der darin enthaltenen Flüßigkeit gedruckt werden. Aus allen diesen Druckungen entsteht eine Kraft, welche den Körper zu erheben bemüht ist, und die nicht anders als durch das Gewicht dieses Körpers selbsten oder durch solches mit einer äußern Kraft verbunden, aufgehoben werden kann. Wir müssen also zuerst die Größe und Richtung der aus allen Druckungen der flüßigen Masse entstehenden Kraft suchen, um die Kraft finden zu können, welche man ihr zur Erhaltung des Gleichgewichts entgegen setzen muß. Wir haben hierzu die mechanischen Grundlehren nöthig, welche §. 10 bis 15 bewiesen worden sind.

131. I. Lehrs. **Ein in eine flüßige Masse getauchter fester Körper A. (fig. 45.) wird von dieser Flüßigkeit lothrecht aufwärts gedruckt, mit einer Kraft, deren Größe das Gewicht der flüßigen Masse, die sie aus ihrer Stelle druckt, zu ihrem Maas hat, und deren Richtung durch den Schwerpunkt eben dieser aus ihrer Stelle weggedruckten flüßigen Masse durch-**

durchgeht, oder, welches das nämliche ist, durch den Schwerpunkt des eingetauchten und als gleichartig betrachteten Theils des Körpers.

Es sey MN die Oberfläche der flüßigen Masse; man stelle sich vor, der eingetauchte Theil des Körpers MON sey durch horizontale Flächen Ss, Rr in unendlich viele Schichten getheilt, und die äußere Fläche, welche iede Schichte umgibt, in unendlich viele Schichten getheilt, und die äußere Fläche, welche iede Schichte umgibt, in unendlich viele Trapezien. Es sey G der Schwerpunkt von irgend einem dieser Seitentrapezien X; durch den Punkt G ziehe man die lothrechte Linie Gg und die auf die Fläche des Trapezes senkrechte Linie PG, und setze, die Ebene MSRN gehe durch diese beide Linien: So ist klar, daß SR die Höhe des Trapezes ist, und daß, wenn man die Vertikallinien SL, RK zieht, die kleine grade Linie LK die Höhe von der senkrechten Projektion des Trapezes auf der Oberfläche der flüßigen Masse seyn muß; so daß, wenn man B die mittlere Breite des Trapezes X nennt, welches auch die des Projektionstrapezes ist, die Fläche des Trapezes X = B. SR, und die Fläche des Projektionstrapezes = B. LK. Ferner ist die Fläche des Rektangels, dessen Grundlinie = B und Höhe = Ry der Entfernung beider horizontalen Flächen Ss, Rr ist, = B. Ry.

Da nun iedes von den Trapezien, welche die äußere Umfangsfläche einer Schichte ausmachen, als ein Theil von den Wänden eines Gefäßes angesehen werden kann, so sieht man (28), daß das Trapez X senkrecht, oder nach der Richtung PG mit einer Kraft gedruckt wird, deren Werth B. SR. Gg ist.

Man zerlege diese Kraft in zwo andere, die in der Ebene MSRN liegen, deren eine V vertikal, die

andere

andere H horizontal ist. Da die Höhe Gg für alle Seitentrapezien von einerlei Querschnitt einerlei ist, so kann die Kraft P, deren absoluter Werth B. SR. Gg ist, für alle diese Trapezen dem Ausdruck B. SR proportional angenommen werden; und nun ist die Kraft V der Größe B. LK und die Kraft H der B. Ry proportional. Es sind aber (15.) alle Kräfte H, die zu allen Rektangeln B. Ry gehören für einerlei Schichte unter einander im Gleichgewicht. Folglich ist nichts mehr übrig als die Kräfte V; und da der absolute Werth der Kraft P = B. SR. Gg ist, so ist der absolute Werth der Kraft V = B. LK. Gg, ein Ausdruck für die kleine feste Masse, welche aus den lothrechten Fäden, die zwischen dem Trapez X und seiner Projektion enthalten sind, zusammengesetzt ist; weil nach dem Lehrsatz des P. Guldin eine solche feste Masse so angesehen werden kann, als ob sie von den Punkten des Projektionstrapezes erzeugt worden wäre, indem sich solches lothrecht bis zur Fläche X fortbewegt hätte. Es wird also iedes Seitentrapez lothrecht von einer Kraft gedruckt, die der zugehörigen festen Masse gleich ist, und die außerdem offenbar durch den Schwerpunkt dieser Masse durchgeht. Nun ist die vom Körper A aus ihrer Stelle verdrängte Flüßigkeit nichts anders als die Summe oder der Unterschied aller dieser kleinen festen Massen. Es ist also die Summe aller Kräfte, welche den Körper A aufwärts drucken, oder die Kraft, welche aus allen diesen zusammengenommen entsteht, so groß als das Gewicht der vom festen Körper verdrängten flüßigen Masse und geht durch den Schwerpunkt dieser flüßigen Masse, oder durch den Schwerpunkt des Theils MON des eingetauchten und als gleichartig betrachteten Körpers.

132. I. Zus. Wenn sich ein Körper, welcher der Wirkung der Schwere überlassen ist, und auf einer flüßigen Materie schwimmt, in einer absoluten Ruhe befindet, so finden allemal folgende beide Bedingungen zugleich statt: 1) Das Gewicht des Körpers ist so groß als das Gewicht der von ihm aus ihrer Stelle verdrängten Flüßigkeit; 2) der Schwerpunkt des Körpers und der Schwerpunkt seines eingetauchten Theils, wenn solcher als gleichartig angenommen wird, liegen in einerlei Vertikallinie. Denn zum Gleichgewicht wird erfordert: 1) daß das Gewicht des Körpers dem Bestreben der flüßigen Masse gleich sey, den Körper lothrecht zu erheben; 2) daß diese beiden Kräfte einander gerade entgegengesetzt seyen.

Wann diese Bedingungen nicht beide zugleich statt finden, so schwankt der Körper und kommt nicht eher ins Gleichgewicht, als bis der Widerstand des Wassers und der Luft oder andere Ursachen alle Bewegungen vernichtet haben, und er endlich eine solche Lage bekommt und behält, bei der sein Gewicht und der vertikale Gegendruck der flüßigen Materie sich einander gegenseitig aufgehoben haben. Wenn also ein Schiff auf dem Meer einen verlangten Theil seines körperlichen Raums unter das Wasser versenken soll, so erhellet, daß man seine Ladung nach einer solchen Verhältniß abmessen und austheilen müsse, daß deren Gewicht mit dem Gewicht des leeren Schiffs zusammengenommen dem Gewicht des Wassers gleich ist, welches aus seiner Stelle verdrängt werden soll, und daß ausserdem die Schwerpunkte dieser beiden Gewichte in einerlei Vertikallinie fallen.

133. II. Zus. Wenn der Körper beständig der Wirkung seiner Schwere und des lothrechten Drucks der flüßigen Masse ausgesetzt ist, und diese beiden Kräfte einander gleich und grade entgegengesetzt angenommen

nommen werden; und wann nun M den gesammten körperlichen Raum dieses Körpers bedeutet, N den Raum seines unter dem Wasser befindlichen als gleichartig betrachteten Theils desselben; p seine specifische Schwere, π die specifische Schwere der flüßigen Materie, so druckt die Gleichung $p.M = \pi.N$ den Zustand des Gleichgewichts aus; wenn man sich erinnert, daß das absolute Gewicht eines Körpers (Allgem. Begriffe No. VI.) das Produkt aus der specifischen Schwere in den körperlichen Raum ist. Nun zeigt diese Gleichung, 1) daß man, für $\pi = p$, $N = M$ erhält; das ist, wenn der schwimmende Körper und die flüßige Materie gleiche specifische Schwere haben, so sinkt der Körper ganz unter, und bleibt innerhalb der flüßigen Materie stehen, wo man es haben will. 2) Für $p < \pi$ erhält man $N < M$, das ist, wenn die specifische Schwere des schwimmenden Körpers geringer als die der flüßigen Materie ist, so taucht er sich nur mit einem Theil unter. 3) Da der größte Werth, welchen N haben kann, M ist; so erhält man, wenn $p > \pi$ ist, $p.M > \pi.N$; es muß daher der Körper A in diesem Fall im Gefäß zu Boden sinken, und mit einer Kraft niederwärts gehen oder auf den Boden drucken, die $= p.M - \pi.N = (p - \pi).M$, weil in diesem Fall $N = M$ wird.

Man sieht hieraus, warum es mehr Kraft erfodert, ein Gewicht außer dem Wasser zu erhalten, als wann es sich unter dem Wasser befindet; im ersten Fall hat man das ganze Gewicht zu heben, im andern Fall hat man nur den Ueberschuß vom Gewicht des Körpers über das Gewicht des Wassers, das er aus seiner Stelle verdrängt, zu tragen.

134. III. Zus. Man setze, es schwimme der Körper frei auf der flüßigen Materie herum, oder seine specifische Schwere sey geringer als die der Flüs-

sigkeit;

sigkeit; so ergibt sich aus der Gleichung $p : \pi = N : M$ das ist: die specifische Schwere des Körpers verhält sich zu der von der flüßigen Materie, wie der körperliche Raum des eingetauchten Theils zum körperlichen Raum des ganzen Körpers. Aus dreien Gliedern dieser Proportion, welche es auch seyn mögen, läßt sich allemal das unbekannte finden.

135. IV. Zus. Wenn man den körperlichen Raum des in der flüßigen Materie sich untertauchenden Theils des Körpers N um eine gewisse Größe n vergrößert oder vermindert, so muß man zur Erhaltung des Gleichgewichts das absolute Gewicht eben des Körpers p. M um ein solches Gewicht q vergrößern oder vermindern, daß man $p. M \pm q = \pi. N \pm \pi. n$ oder $q = \pi. n$ erhalte. Die zu addirende oder zu subtrahirende Größe q ist also allemal dem Gewicht der flüßigen Materie gleich, welche der Körper iezt mehr als in seinem ersten Zustand aus seiner Stelle verdrängt.

Es lassen sich hieraus die Veränderungen bestimmen, welche sich beim Sinken eines Schiffs im Wasser ergeben müssen, wenn man mit seiner Ladung oder mit der Größe des im Meer einsinkenden Theils eine Veränderung vornimmt.

136. Anmerk. Dieses Bestreben der flüßigen Materien, die schwimmenden Körper in die Höhe zu treiben, wird sehr häufig benutzt, sehr beträchtliche Lasten vom Boden eines Flußes oder des Meeres in die Höhe zu heben. Man nimmt zu dem Ende ein sehr geräumiges Schiff, welches man durch Beschwerung mit sehr beträchtlichen Gewichten stark niedertreibt, und verbindet es in dieser Lage fest genug mit der Last, welche in die Höhe gebracht werden soll. Hierauf nimmt man die Gewichte, welche solches zum

Sinken

Sinken vermogt hatten, zum Theil oder ganz weg, und nun steigt es vermög des lothrechten Drucks des Wassers in die Höhe, und zieht die damit verbundene Last mit einer Gewalt aufwärts, die im ersten Augenblick der Summe der Gewichte gleich ist, welche man von dem Schiff weggenommen hat.

137. II. Lehrs. **Wenn man in eine flüßige Masse einen festen Körper eintaucht, der specifisch schwerer als iene ist, so verliert dieser Körper darin einen Theil seines Gewichts, so daß man folgende Proportion erhält: das absolute Gewicht des Körpers zu dem Gewicht, das er in der flüßigen Masse verliert, ist wie die specifische Schwere des Körpers zur specifischen Schwere der Flüßigkeit.**

Denn weil der Körper specifisch schwerer als die flüßige Materie ist, so muß er darin ganz untergehen (133.) und mit einer Kraft $= M.(p - \pi)$ niedersinken. Um nun diese Kraft im Gleichgewicht zu erhalten, setze man, es sey der Körper in die eine Schale einer Waage (die daher eine hydrostatische Waage heißt) gelegt, die unter dem Wasser hängt, indeß die andere Waagschale, welche in freier Luft schwebt, mit dem erfoderlichen Gegengewicht beschwert ist; oder, welches auf eben das hinauslauft, man stelle sich vor, es werde die erwähnte Kraft durch eine gleichgroße und entgegengesetzte Kraft Q aufgehoben; so erhält man $Q = M.(p - \pi)$; oder $pM - Q = M\pi$; oder $p.(pM - Q) = p.M\pi$, und hieraus gibt sich $pM : (pM - Q) = p : \pi$ welches die Proportion des Lehrsatzes ist.

138. Zus. Man sieht hieraus, daß sich aus dem absoluten Gewicht eines festen Körpers, welcher in einer flüßigen Masse ganz untergeht, oder welcher specifisch schwerer als diese flüßige Masse ist, und dem

Gewicht

Gewicht, welches dieser Körper in der Flüßigkeit verliert, die specifische Schwere der flüßigen Materie ergibt, wann die des Körpers gegeben ist, oder umgekehrt die specifische Schwere des Körpers, wann die der flüßigen Materie gegeben ist.

139. III. Lehrs. **Wenn ein und eben der feste Körper in zwo verschiedene flüßige Materien eingetaucht wird, und specifisch schwerer ist als diese beide Materien; so verhalten sich die specifischen Schweren dieser beiden Materien gegen einander, wie die Gewichte, die der Körper in beiden verliert.**

Denn es sey M die Größe des gegebenen Körpers; p seine specifische Schwere; π und π' die specifische Schweren beider flüßigen Materien; Q und Q' die beiden Gegengewichte des Körpers, d. i. die Kräfte, welche nöthig sind, um ihn in beiden Flüßigkeiten zu hindern, daß er nicht niedersinke, so hat man die beiden Gleichungen $Q = M.(p - \pi)$, $Q' = M(p - \pi')$. Die erste gibt $M = \frac{pM - Q}{\pi}$ und die andere $M = \frac{pM - Q'}{\pi'}$. Also $\frac{pM - Q}{\pi} = \frac{pM - Q'}{\pi'}$, oder $(pM - Q).\pi' = (pM - Q').\pi$ und dieses gibt $\pi : \pi' = (pM - Q) : (pM - Q')$ welches die Proportion des Lehrsatzes ist.

140. Zus. Aus den Gewichten, welche ein und eben der Körper in zwo verschiedenen Flüßigkeiten verliert, und der specifischen Schwere der einen Flüßigkeit ergibt sich die specifische Schwere der andern.

141. IV. Lehrs. **Wenn man in einerlei Flüßigkeit zween Körper, die beide specifisch schwerer als iene sind, eintaucht, und diese**

Körper gleichviel von ihren Gewichten verlieren; so haben solche gleiche Größe.

Denn es seyen M und M′ die Größen beider Körper; p und p′ ihre specifischen Schweren; Q und Q′ ihre Gegengewichte, π die specifische Schwere der flüßigen Masse, so hat man

$$Q = pM - \pi M; \quad Q' = p'M' - \pi M'.$$

Wenn man also annimmt, daß die beiden Körper gleichviel von ihren Gewichten in der flüßigen Materie verlieren, oder daß $pM - Q = p'M' - Q'$, so hat man auch $\pi M = \pi M'$ oder $M = M'$, d. i. beide Körper sind gleichgroß.

142. Zus. Hieraus fließt das Verfahren, die Aufgabe von Hierons, des Königs in Sirakus, Krone. Diese Aufgabe bestand in Folgendem.

Hieron, der eine Krone hatte verfertigen lassen, welche nach seiner Uebereinkunft mit dem Goldschmid aus purem Gold bestehen sollte, und nun den Verdacht schöpfte, daß man Silber darunter genommen hätte, verlangte vom Archimed ein Mittel, hierin Gewißheit zu bekommen, ohne daß die Krone beschädiget würde. Man ist nicht hinlänglich von den Mitteln unterrichtet, deren sich Archimed hierzu bediente; aber höchst wahrscheinlich verhielt es sich dabei also.

Weil die Körper, welche gleichviel von ihren Gewichten in einerlei flüßigen Materie verlieren, gleich groß sind, so ist klar, daß wenn man eine Stange Gold nimmt, so daß der Ueberschuß ihres Gewichts in der Luft oder im leeren Raum über ihr Gewicht im Wasser dem Ueberschuß des Gewichts der Krone im leeren Raum über ihr Gewicht im Wasser gleich ist, diese Stange und die Krone gleiche Größe haben müssen. Eben so findet man eine Stange Silber, die mit der Krone gleiches Volumen hat.

Wenn

Wenn man nun gefunden hat, daß die Krone in der Luft weniger wiegt als der Goldklumpen, und mehr als der Silberklumpen, und man übrigens versichert ist, daß sie nur allein aus Gold und Silber besteht, so läßt sich schließen, daß sie weder bloßes Gold, noch bloßes Silber enthalte, sondern aus diesen zweien Metallen zusammengesetzt sey; und durch folgende Rechnung läßt sich allgemein finden, wieviel sich von iedem dieser Metalle dabei befinde. Es seyen A und B die Gewichte der beiden mit einander verbundenen Massen; M das Gewicht der Mischung; G das diesen dreien Massen gemeinschaftliche Volumen; u und z die Theile von den Gewichten A und B, welche man nehmen muß, um M daraus zu erhalten. So hat man sogleich $u + z = M$. Es ist aber überdas das Volumen von $u = \frac{Gu}{A}$ als die vierte Proportionalgröße zu den dreien A, u, G; und eben so das Volumen von $z = \frac{Gz}{B}$. Es ist aber die Summe dieser beiden körperlichen Räume $= G$, und dieses giebt die zwote Gleichung

$$\frac{Gu}{A} + \frac{Gz}{B} = G \text{ oder } Bu + Az = AB$$

also $u = \frac{A.(M-B)}{A-B}$; $z = \frac{B.(A-M)}{A-B}$

Diese Methode wäre unzulänglich, wenn die Art der Metallen unbekannt wäre, wenn man z. B. in der vorhergehenden Aufgabe nicht wüßte, daß die Krone nur Gold und Silber enthielte: denn es ist klar, daß sich aus Gold und einem andern Metall, z. B. Kupfer eine Mischung von eben dem Gewicht und eben dem Volumen machen läßt, wie von Gold und Silber. Wenn noch überdas die Krone mehr als zwo Arten von Metallen enthielte; wenn man z. B. wüßte, daß sie aus Gold, Silber und Kupfer bestünde,

so wäre die Aufgabe unbestimmt; denn es lassen sich diese drei Metalle auf mehrerlei Arten so zusammenmischen, daß die daraus entstehende Mischung immer einerlei Gewicht und einerlei Volumen erhalte. Um soviel mehr gilt solches von einer noch größern Anzahl von Metallen.

143. Anmerk. Auf vorigen Sätzen beruht die Verfertigung und das Gleichgewicht der Areometer oder der Werkzeuge zur Untersuchung der specifischen Schwere flüßiger Materien (pèse-liqueurs) (*).

Die Gestalt eines solchen Werkzeugs ist bis auf einen gewissen Punkt willkührlich; inzwischen muß sie doch so beschaffen seyn, daß es die flüßige Materie, nachdem es mehr oder weniger sinkt, leicht theilt und sich in der vertikalen Stellung erhält. Das von Fahrenheit (fig. 46.) hat diese Eigenschaften. Es besteht aus einer langen zilindrischen Röhre CD, und zwo hohlen Kugeln A, B; in die untere B, welches die kleinere ist, thut man Queckſilber oder irgend eine andere schwere Materie, um dadurch dem Werkzeug eine lothrechte sichere Stellung zu verschaffen; die andere A, die beständig mit der flüßigen Materie bedeckt ist, erhebt den Schwerpunkt von dem eingesenkten Theil der Spindelwaage, und verschafft dadurch der lothrechten Stellung noch mehr Sicherheit. Dieses Werk-

(*) Ich würde dieses Wort durch Wasserwaagen übersetzt haben, wenn dieses Wort nicht schon zur Benennung derer beim Nivelliren dienlichen Werkzeuge eingeführt wäre. Inzwischen ist zur Benennung iener Waagen das Wort Spindel fast allgemein üblich, und ich werde sie daher auch hier entweder schlechtweg unter dieser Benennung begreifen, oder das vielleicht angemessenere Wort Spindelwaagen gebrauchen.

Werkzeug kann zur Erfindung der specifischen Schweren flüßiger Massen dienen, indem man solches entweder durch zugelegte oder weggenommene Gewichte beständig auf einerlei Tiefe in der flüßigen Materie sinken läßt; oder sein Gewicht unverändert bleibt, so daß es sich ungehindert zu verschiedenen Tiefen senken kann; hieraus entstehen zween Fälle.

1) Man setze, die Spindelwaage sinke in zwo verschiedenen flüßigen Materien bis an die Stelle M. Es seyen P und $P \pm q$ die hierzu erfoderlichen absoluten Gewichte derselben; π und π' die spec. Schweren beider Flüßigkeiten; G der körperliche Raum des unveränderlichen Theils MABN der Spindelwaage; so erhält man (133) $P = \pi \times G$, $P \pm q = \pi' . G$; daher $\pi' = \frac{\pi . (P \pm q)}{P}$; wenn also P, π und die zu addirende oder zu subtrahirende q bekannt sind, so gibt sich daraus π'.

2) Wenn die Spindelwaage immer einerlei Gewicht behalten soll, so muß sie sich in zwo verschiedenen flüßigen Materien in verschiedene Tiefen senken. Es seyen K, M die Punkte, zu denen sie sinkt, und P ihr absolutes Gewicht, H und G die körperlichen Räume KABH, MABN, welche in beiden Flüßigkeiten sich eintauchen; π und π' die specifischen Schweren dieser flüßigen Materien; so hat man $P = \pi . H$, $P = \pi' . G$, und $\pi' = \frac{\pi . H}{G}$; wenn also π, H, G gegeben sind, so ergibt sich daraus π'.

Wenn die Spindelwaage eine reguläre und bekannte Gestalt hat, so ist es leicht, die körperlichen Räume H, G nach den Regeln der Geometrie zu berechnen. Aber selten verstattet die Gestalt des Werkzeugs die Anwendung einer solchen Methode mit einiger Genauigkeit, und dann verhält man sich dabei so: Wenn die Punkte V und K die äußersten

Punkte der eingesenkten Theile in der schwerern und leichtern Flüßigkeit sind, deren specifische Schweren man mit einander vergleichen will, so theile man den Zwischenraum VK in eine gewisse Anzahl gleicher Theile. Man lasse die Spindelwaage (durch gehörige Beschwerung ihres untern Theils) nach und nach bis an alle Theilungspunkte einsinken, und zwar in einer flüßigen Materie, deren specifische Schwere gegeben sey; wenn man nun mittelst der gemeinen Waage die auf einander folgenden absoluten Gewichte des Werkzeugs bestimmt hat, so findet man nach (§. 134.) die körperlichen Räume der untergetauchten Theile. Es ist klar, daß man es durch gehörige Gewichte so einrichten könne, daß diese körperlichen Räume in jeder verlangten Verhältnis zu- oder abnehmen.

Die Spindelwaagen werden gewöhnlich aus Glas, Kupfer oder weissem Blech u. dgl. verfertigt. Das Glas ist bei solchen erfoderlich, welche oft in korrosive Flüßigkeiten eingetaucht werden.

Zwölftes Kapitel.

Untersuchung der Lagen verschiedener schwimmender Körper im Stand des Gleichgewichts.

144.

Wenn ein fester Körper auf einer flüßigen Materie schwimmender Körper weder steigen noch sinken, noch eine drehende Bewegung haben soll, so wird erfodert, 1) daß sein Gewicht dem Gewicht der durch ihn aus ihrer Stelle verdrängten flüßigen Masse gleich sey; 2) daß der Schwerpunkt dieses Körpers und der Schwerpunkt des eingetauchten als gleichartig angesehenen Theils in einerlei Vertikallinie fallen. Ich rede von schwimmenden Körpern, die specifisch leichter als die flüßige Materie sind, und die also auf der Oberfläche schwimmen. Es ist diese Betrachtung bei vielen Fällen nützlich und vorzüglich in der Schiffbaukunst. Man bestimmt eben so das Gleichgewicht von Körpern, die ganz untergetaucht sind, wenn man bemerkt, daß alsdann der körperliche Raum des untergetauchten Theils dem körperlichen Raum des ganzen Körpers gleich ist, und daß, wenn man annimmt, der Körper werde durch irgend eine sonstige Kraft in seiner Lage erhalten, diese Kraft aufwärts gerichtet seyn müsse, so daß der Ueberschuß vom Gewicht des Körpers über diese Kraft dem vertikalen Druck der flüßigen Materie gleich seyn müßte.

145. I. Lehrsatz. Jede gleichartige ebene Figur, die durch ihre als vertikal angenommene Axe in zween gleiche und ähnliche Theile getheilt wird; und jeder gleichartige Körper,

der aus der Umwälzung irgend einer krummen Linie um eine lothrechte Axe erzeugt wird, muß, wenn er in dieser Lage auf einer flüßigen Materie schwimmt, im Gleichgewicht bleiben.

Denn es ist klar, daß alsdann 1) das Gewicht der Figur oder des Körpers, der specifisch leichter als die flüßige Materie ist, durch den lothrechten und entgegengesetzten Druck der flüßigen Materie erhalten wird; 2) der Schwerpunkt der Figur oder des Körpers und der Schwerpunkt seines untergetauchten Theils befinden sich in einerlei Vertikallinie.

Man sieht hieraus, daß ein gleichschenklichtes Dreieck, eine Parabel, ein grader Kegel, ein grader Zilinder, eine Kugel ꝛc. auf einer flüßigen Materie im Gleichgewicht bleiben müssen, wenn ihre Axen vertikal stehen.

146. Anmerk. Es ist zu merken, daß der umgekehrte Satz nicht allgemein richtig ist; wenn nämlich ein durch seine Axe in gleiche und ähnliche Theile getheilter gleichartiger Körper sich im Gleichgewicht befindet, so folgt daraus nicht allemal, daß seine Axe vertikal steht.

147. II. Lehrs. Jeder prismatische Körper, dessen Axe horizontal liegt, muß auf einer flüßigen Materie im Gleichgewicht bleiben, wenn der Schwerpunkt des durch seine Mitte mit den beiden Grundflächen parallel gemachten Querschnitts mit dem Schwerpunkt von dem untergetauchten Theil dieses Querschnitts in einerlei Vertikallinie fällt.

Denn man kann die Schwerpunkte des Prismas und seines untergetauchten Theils so ansehen, als ob sie in den beiden erwähnten Punkten vereinigt wären. Das Prisma ist daher alsdann im Gleichgewicht. Um also die Lage dieser Arten von Prismen für das Gleichgewicht zu bestimmen, darf man nur die Lage des in ihrer Mitte genommenen Querschnitts bestimmen.

148. I. Aufg. **Die Lage zu finden, welche das auf der flüßigen Materie MN schwimmende gleichartige Dreieck ESG (fig. 47.) annehmen muß, um im Gleichgewicht zu bleiben, vorausgesezt, daß nur ein einziger Winkel S untergetaucht ist.**

Die beiden zum Gleichgewicht erfoderlichen Bedingungen sind: 1) daß das absolute Gewicht des Dreiecks ESG dem absoluten Gewicht des Wasserdreiecks MSN gleich seyn muß.

2) Daß die Schwerpunkte der beiden Dreiecke ESG, MSN in einerlei Vertikallinie RO, die also auf den Wasserspiegel MN senkrecht ist, fallen müssen. Beiden geschieht auf folgende Art ein Genüge.

Man theile die Grundlinie EG, MN, der beiden Dreiecke ESG, MSN in den Punkten P, Q in zween gleiche Theile, und ziehe die graden Linien SP, SQ; auf solchen nehme man die Theile SR $= \frac{2}{3}$ SP, SO $\frac{2}{3}$ SQ, um die Schwerpunkte eben dieser beiden Dreiecke zu bestimmen. Man ziehe die graden Linien RO, PQ, die einander parallel seyn müssen, weil die Seiten des Dreiecks SPQ in R und O proportional geschnitten werden, und überdas senkrecht auf MN, weil RO vertikal seyn muß. Aus dem Punkt P lasse man die PA, PD auf die, nöthigenfalls verlängerten, Seiten SE, SG des Dreiecks ESG senkrecht; und ziehe die graden Linien PM, PN, welche offenbar einander gleich sind, weil QM $=$ QN, und PQ auf MN senkrecht ist.

Nun sey

SE	$=$ a
SG	$=$ b
SP	$=$ c
der Sinus totus	$=$ 1
der gegebene Winkel PSE . .	$=$ m
der gleichfalls gegebene PSG .	$=$ n

SM . . . . . = x
SN . . . . . = y
die spec. Schwere des Dreiecks . = p
die spec. Schwere der flüßigen Materie = π

Weil nun die beiden Dreiecke ESG, MSN, welche den Winkel S mit einander gemein haben, sich gegen einander wie die Produkte SE, SG, SM, SN verhalten, so hat man nach der ersten Bedingung des Gleichgewichts $pab = \pi xy$.

In dem rechtwinklichten Dreieck PAS hat man
PA = PS. sin PSA = c. sin m
SA = PS. Cos PSA = c. Cos m

Eben so in dem rechtwinklichten Dreieck PDS
PD = c. sin n; SD = c. Cos n
also AM = c. Cos m − x; DN = c. Cos n − y
$(PM)^2 = (c. \sin m)^2 + (c. \cos m - x)^2$
$(PN)^2 = (c. \sin n)^2 + (c. \cos n - y)^2$

Nun ist $(PM)^2 = (PN)^2$; man hat also
$(c. \sin m)^2 + (c. \cos m - x)^2 = (c. \sin n)^2 + (c. \cos n - y)^2$
oder $x^2 - 2cx. \cos m = y^2 - 2cy. \cos n$
weil $(\sin m)^2 + (\cos m)^2 = 1$ und $(\sin n)^2 + (\cos n)^2 = 1$.
Diese Gleichung thut der zwoten Bedingung für das Gleichgewicht ein Genüge.

Es ist leicht, die Werthe von x und y durch Verzeichnung zwoer Hyperbeln zu finden. Wenn man aber die Größen absondert und y wegschaft; so erhält man die bestimmte Gleichung

$$x^4 - 2cx^3. \cos m + \frac{2cpabx. \cos n}{\pi} - \frac{p^2a^2b^2}{\pi^2} = 0$$

deren Wurzeln mit der Gleichung $y = \frac{pab}{\pi x}$ verbunden die verschiedenen Lagen des Dreiecks angeben, welche das Gleichgewicht verstatten.

149. I. Zus. Man weiß aus der Carteſiſchen Regel, daß ſich in ieder Gleichung, deren Wurzeln möglich ſind, ſo viele beiahte befinden, als Abwechslungen der Zeichen + und — darin vorhanden ſind, und ſo viele verneinte, als Paare von einerlei Zeichen, nämlich von + oder von — darin auf einander folgen. Weil nun das Glied, welches x^2 enthalten ſollte, in unſerer Gleichung fehlt, ſo erhellet, daß, wenn alle ihre Wurzeln möglich ſind, nothwendig drei davon beiaht und eine verneint ſeyn müſſen. Die verneinte kann nicht gebraucht werden, weil, da die Schwere nur eine Richtung hat, die grade Linie SM nur auf einer Seite des Punkts S liegen kann. Die beiahten Wurzeln aber müſſen die wirklichen Lagen für das Gleichgewicht anzeigen, wofern man nur über das $x < a$ und $y < b$ hat.

150. II. Zus. Um eine einfache Anwendung von unſerer allgemeinen Gleichung zu machen, ſetze man, das gegebene Dreieck ESG ſey gleichſchenklicht; ſo hat man $b = a$, $\mathrm{Cof}\, n = \mathrm{Cof}\, m$ und die allgemeine Gleichung verwandelt ſich in

$$x^4 - 2cx^3 . \mathrm{Cof}\, m + \frac{2cpa^2x . \mathrm{Cof}\, m}{\pi} - \frac{p^2a^4}{\pi^2} = 0$$

woraus ſich dieſe beiden Gleichungen vom 2ten Grad ergeben

$$x^2 - \frac{a^2p}{\pi} = 0$$

$$x^2 - 2cx . \mathrm{Cof}\, m + \frac{a^2p}{\pi} = 0$$

Die erſte gibt

$$x = \pm a\sqrt{\frac{p}{\pi}} \text{ oder ſchlechtweg } x = a\sqrt{\frac{p}{\pi}}$$

weil die beiahte Wurzel allein gebraucht werden kann.

Da man nun allemal $y = \frac{pab}{\pi x}$ hat, ſo ergibt

ſich

sich auch $y = a\sqrt{\frac{p}{\pi}}$, also $y = x$. Demnach ist das Dreieck MSN gleichschenklicht, so wie das Dreieck ESG; oder welches eben das ist, die Grundlinie EG des gegebenen Dreiecks ist der Oberfläche des Wassers gleichlaufend.

Die zwote Gleichung gibt

$$x = c.\,Cos\,m \pm \sqrt{\left((c.\,Cos\,m)^2 - \frac{a^2 p}{\pi}\right)}$$

Man hat also, weil $y = \frac{p\,a^2}{\pi x}$,

$$y = \frac{p\,a^2}{\pi.\left(c.\,Cos\,m \pm \sqrt{\left((c.\,Cos\,m)^2 - \frac{a^2 p}{\pi}\right)}\right)}$$

$$= c.\,Cos\,m \mp \sqrt{\left((c.\,Cos\,m)^2 - \frac{a^2 p}{\pi}\right)}$$

Dieser zweete Fall gibt also die beiden folgenden zusammengehörigen Paare von Formeln

$$\left\{\begin{array}{l} x = c.\,Cos\,m + \sqrt{\left((c.\,Cos\,m)^2 - \frac{a^2 p}{\pi}\right)} \\ y = c.\,Cos\,m - \sqrt{\left((c.\,Cos\,m)^2 - \frac{a^2 p}{\pi}\right)} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = c.\,Cos\,m - \sqrt{\left((c.\,Cos\,m)^2 - \frac{a^2 p}{\pi}\right)} \\ y = c.\,Cos\,m + \sqrt{\left((c.\,Cos\,m)^2 - \frac{a^2 p}{\pi}\right)} \end{array}\right\}$$

welche zwo neue Lagen für das Gleichgewicht anzeigen, wenn die Werthe von x und y möglich sind, und man überdas $x < a$ und $y < a$ hat. Sollen aber diese beide Bedingungen statt finden, so wird erfodert, daß

1) $\frac{a^2 p}{\pi} < (c.\,Cos\,m)^2$, oder $\frac{p}{\pi} < \frac{(c.\,Cos\,m)^2}{a^2}$.

2) a

2) $a > c.\,\mathrm{Cos}\,m + \sqrt{\left((c.\,\mathrm{Cos}\,m)^2 - \frac{a^2 p}{\pi}\right)}$

oder $\frac{p}{\pi} > \frac{2\,a\,c.\,\mathrm{Cos}\,m - a^2}{a^2}$.

Die Grenzen, in welche alsdann der Werth von $\frac{p}{\pi}$ eingeschlossen ist, sind daher $\frac{(c.\,\mathrm{Cos}\,m)^2}{a^2}$ und $\frac{2\,a\,c.\,\mathrm{Cos}\,m - a^2}{a^2}$.

Ist z. B. das gegebene Dreieck gleichseitig, so hat man $c.\,\mathrm{Cos}\,m = \frac{1}{4}\,a$; und dieses Dreieck kann ausser der ersten Lage, welche schon durch die erste Gleichung angezeigt worden ist, für das Gleichgewicht noch zwo andere Lagen haben, wofern man $\frac{p}{\pi} < \frac{9}{16}$ und $\frac{p}{\pi} > \frac{8}{16}$ oder der Werth von $\frac{p}{\pi}$ zwischen den beiden Brüchen $\frac{9}{16}$ und $\frac{8}{16}$ enthalten ist.

151. II. Aufg. **Die Lage zu finden, welche das auf einer flüßigen Materie MN schwimmende gleichartige Dreieck SEG (fig. 48.) annehmen muß, um im Gleichgewicht zu bleiben, vorausgesetzt, daß die beiden Winkel E und G in der flüßigen Materie untergetaucht sind.**

Es ist zur Auflösung dieser Aufgabe nichts weiter nöthig, als die zum Vorhergehenden gehörige Figur umzukehren, indem man auf folgende Art verfährt.

Die drei Schwerpunkte des Dreiecks SEG, des Trapezes MNGE und des Dreiecks SMN liegen allemal in einer einzigen graden Linie. Soll nun ein Gleichgewicht erfolgen, so muß der Schwerpunkt des gegebenen Dreiecks SEG und der Schwerpunkt seines untergetauchten Theils MNGE in einerlei vertikale Linie fallen. Es liegen also die Schwerpunkte der

beiden

beiden Dreiecke SEG, SMN gleichfalls in einerlei lothrechten Linie. Aus der Spitze S ziehe ich in die Mitten der Grundlinien EG, MN die graden Linien SP, QS, nehme SR $= \frac{2}{3}$ SP, SO $= \frac{2}{3}$ SQ, und ziehe nun durch die Schwerpunkte R, O, der beiden Dreiecke SEG, SMN, die grade Linie RO, welche vertikal auf die Oberfläche der flüßigen Materie senkrecht ist. Man verbinde die Punkte P und Q mittelst der graden Linie PQ, die mit RO parallel ist, und aus P ziehe man die graden Linien PM, PN, und auf SE und SG die Perpendikel PA und PD. So hat man, wie vorhin, PM $=$ PN. Nun sey

SE	$=$ a
SG	$=$ b
SP	$=$ c
der Sinus totus	$=$ 1
der gegebene Winkel PSE . .	$=$ m
der gleichfalls gegebene PSG . .	$=$ n
SM	$=$ x
SN	$=$ y
die spec. Schwere des Dreiecks SEG	$=$ p
die spec. Schwere der flüßigen Materie	$=$ π

So hat man SEG : SMN $=$ SE . SG : SM. SN; folglich SEG — SMN oder EMNG : SEG $=$ SE. SG — SM. SN : SE : SG. Demnach das Viereck $EMNG = \frac{SEG.\,(SE.SG - SM.SN)}{SE.SG}$.

Nun ist nach der ersten Bedingung des Gleichgewichts p. SEG $= \pi$. EMNG; man hat also

$$p.\,SEG = \pi.\frac{SEG.\,(SE.SG - SM.SN)}{SE.SG}$$

oder $pab = \pi\,(ab - xy)$.

Man hat, wie zuvor, PA $=$ c. sin m, SA $=$ c. Cos m, PD $=$ c. sin n, SD $=$ c. Cos n, AM $=$ c. Cos m — x, DN $=$ c. Cos n — y; $(PM)^2 =$

(c. sin

$(c. \sin m)^2 + (c. \cos m - x)^2$; $(PN)^2 = (c. \sin n)^2 + (c. \cos n - y)^2$. Man erhält also, weil $PM = PN$ ist, $x^2 - 2cx. \cos. m = y^2 - 2cy. \cos. n$.

Diese Gleichung mit der vorhergehenden verglichen, gibt

$$x^4 - 2cx^3 . \cos m + \frac{2c(\pi - p). abx. \cos n}{\pi} - \frac{(\pi - p)^2 a^2 b^2}{\pi^2} = 0$$

und dieser Gleichung Wurzeln mit der Gleichung $pab = \pi(ab - xy)$ verbunden, geben die verschiedenen Lagen des Dreiecks für das Gleichgewicht.

Man sieht leicht, daß die allgemeine Bemerkung (149.) hier auf gleiche Art angewendet werden kann.

152. II. Zus. Es sey SEG ein gleichschenklichtes Dreieck; so erhält man $b = a$, $\cos m = \cos n$, und unsere Gleichung verwandelt sich in

$$x^4 - 2cx^3 . \cos m + \frac{2c(\pi - p) a^2 x. \cos m}{\pi} - \frac{(\pi - p)^2 a^4}{\pi^2} = 0$$

woraus sich diese beiden Gleichungen ergeben

$$x^2 - \frac{a^2 . (\pi - p)}{\pi} = 0$$

$$x^2 - 2cx . \cos m + \frac{a^2 (\pi - p)}{\pi} = 0$$

Aus der ersten gibt sich

$$x = a. \sqrt{\frac{\pi - p}{\pi}}; \quad y = a \sqrt{\frac{\pi - p}{a}};$$

und sie zeigt, daß das Dreieck im Gleichgewicht ist, wann die Grundlinie EG horizontal liegt; die zwote gibt diese beiden Paare

$x = c.$

$$\left\{\begin{array}{l} x = c.\,Cos\,m + \sqrt{\left((c.\,Cos\,m)^2 - \frac{a^2(\pi - p)}{\pi}\right)} \\ y = c.\,Cos\,m - \sqrt{\left((c.\,Cos\,m)^2 - \frac{a^2(\pi - p)}{\pi}\right)} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = c.\,Cos\,m - \sqrt{\left((c.\,Cos\,m)^2 - \frac{a^2(\pi - p)}{\pi}\right)} \\ y = c.\,Cos\,m - + \left((c.\,Cos\,m)^2 - \frac{a^2(\pi - p)}{\pi}\right) \end{array}\right\}$$

welche noch zwo neue Lagen für das Gleichgewicht angeben, wofern nur

1) $\frac{p}{\pi} > \frac{a^2 - (c.\,Cos\,m)^2}{a^2}$; 2) $\frac{p}{\pi} < \frac{2a^2 - 2ac.\,Cos\,m}{a^2}$.

Ist z. B. das Dreieck SEG gleichseitig, oder c. Cos m $= \frac{3}{4}$ a, und überdas $\frac{p}{\pi} > \frac{7}{16}$ und $\frac{p}{\pi} < \frac{8}{16}$, so hat dieses Dreieck drei Lagen für das Gleichgewicht auf der flüßigen Materie.

153. III. Aufg. **Die Lage zu finden, welche das auf einer flüßigen Materie schwimmende gleichartige Rektangel BHSK (fig. 49.) annehmen muß, um im Gleichgewicht zu bleiben, vorausgesetzt, daß nur der einzige Winkel S in der flüßigen Masse untergetaucht sey.**

Man ziehe aus S in Q, die Mitte von MN, die grade Linie SQ, und nehme SO $= \frac{2}{3}$ SQ; so ist O der Schwerpunkt des Dreiecks MSN. Da nun der Schwerpunkt des Rektangels BHSK in dem Durchschnittspunkt R der beiden Diagonalen BS, HK liegt, so folgt, daß, wenn man durch diesen Punkt R und den Punkt O die grade RO zieht, diese Linie nach den Bedingungen des Gleichgewichts vertikal oder auf die Oberfläche MN der flüßigen Materie senkrecht ist.

Man

Man nehme $RP = \frac{SR}{2}$ und ziehe die Linie PQ, die offenbar der RO gleichlaufend und daher auf die Mitte von MN senkrecht ist. Hieraus folgt, daß die graden Linien PM, PN einander gleich seyn müssen. Endlich ziehe man aus P auf SH und SK die Perpendikel PA, PD. Nun sey

SH . . . . . = a
SK . . . . . = b
SM . . . . . = x
SN . . . . . = y
die spec. Schwere des Rektangels BHSK = p
die spec. Schwere der flüßigen Materie = π

So gibt die erste Bedingung des Gleichgewichts die Gleichung $pab = \frac{\pi . xy}{2}$. Weil nun $SP = \frac{3}{4} SB$, so hat man ferner $PA = \frac{3}{4} BH = \frac{3}{4} b$, $SA = \frac{3}{4} SH = \frac{3}{4} a$, $PD = \frac{3}{4} BK = \frac{3}{4} a$, $SD = \frac{3}{4} SK = \frac{3}{4} b$. Also $(PM)^2 = \frac{9b^2}{16} + (\frac{3}{4} a - x)^2$, $(PN)^2 = \frac{9a^2}{16} + (\frac{3}{4} b - y)^2$. Folglich, weil PM = PN,

$$x^2 - \frac{3ax}{2} = y^2 - \frac{3by}{2}$$

Diese Gleichung mit der vorhergehenden verglichen und y weggeschafft, gibt die bestimmte Gleichung

$$x^4 - \frac{3ax^3}{2} + \frac{3pab^2x}{\pi} - \frac{4p^2a^2b^2}{\pi^2} = 0$$

woraus sich die verschiedenen Lagen des Rektangels für das Gleichgewicht ergeben.

154. Zus. Es sey das gegebene Rektangel ein Quadrat, so hat man b = a und unsere Gleichung verwandelt sich in

$$x^4 - \frac{3ax^3}{2} + \frac{3pa^3x}{\pi} - \frac{4p^2a^4}{\pi^2} = 0$$

und zerlegt sich in beide nachstehenden

$$x^2 - \frac{2pa^2}{\pi} = 0$$

$$x^2 - \frac{3ax}{2} + \frac{2pa^2}{\pi} = 0$$

die erste gibt $x = a\sqrt{\frac{2p}{\pi}}$; $y = a\sqrt{\frac{2p}{\pi}}$

woraus erhellet, daß das Quadrat im Gleichgewicht ist, wenn seine Diagonale HK horizontal liegt, welches auch für sich klar ist.

die zwote gibt $x = \frac{a\left(3 \pm \sqrt{\frac{(9\pi - 32p)}{\pi}}\right)}{4}$

$$y = \frac{a\left(3 \mp \sqrt{\frac{9\pi - 32p}{\pi}}\right)}{4}$$

woraus zwo neue Lagen für das Gleichgewicht entstehen, wenn man $\frac{p}{\pi} < \frac{9}{32}$ und $\frac{p}{\pi} > \frac{8}{32}$ hat.

155. Anmerk. Durch eben diese Methode findet man für das Gleichgewicht die Lage eines Rektangels, dessen drei Winkel untergetaucht wären. Denn man darf sich zu dem Ende nur die Zeichnung 49. umgekehrt gedenken, so daß die drei Winkel B, H, K unter den Spiegel der flüßigen Materie zu liegen kommen, und das Dreieck MSN der über die Oberfläche MN hervorragende Theil des Rektangels ist. Wenn man nun die vorigen Benennungen beibehält, so erhält man offenbar diese beiden Gleichungen

$$pab = \pi\left(ab - \frac{xy}{2}\right)$$

$$x^2 - \frac{3ax}{2} = y^2 - \frac{3b}{2}$$

welche die neue Aufgabe auflösen.

156.

156. IV. Aufg. **Die Lage zu finden, welche das auf einer flüßigen Materie schwimmende gleichartige Rektangel BHSK (fig. 50.) annehmen muß, um im Gleichgewicht zu bleiben, vorausgesetzt, daß die beiden Winkel H und S in der flüßigen Materie untergetaucht seyen.**

Aus dem Punkt M, wo die Seite BH der Oberfläche MN der flüßigen Materie begegnet, ziehe man auf die entgegengesetzte Seite KS die MI senkrecht, welche das untergetauchte Trapez MHSN in ein Dreieck MIN und ein Rektangel MHSI; durch den Winkelpunkt H ziehe man die Vertikallinie HL; aus den Schwerpunkten T, G, O, R, des Dreicks MIN, des abgeschnittenen Rektangels MHSI, des Trapezes MHSN und des ganzen Rektangels BHSK ziehe man auf HB die Perpendikel TE, GX, OV, RZ; man ziehe ferner aus den Punkten O, V, R, Z, die Horizontallinien OQ, VC, RY, ZL; und durch die Punkte V, Z die Vertikallinien VD, ZA. Es sey nun

SH	. . . . .	= a
HB	. . . . .	= b
HM	. . . . .	= x
SN	. . . . .	= y
die spec. Schwere des Rektangels	.	= p
die spec. Schwere der flüßigen Materie		= π

So hat man sogleich nach der ersten Bedingung des Gleichgewichts $p.\ BHSK = \pi.\ MHSN$, also $MHSN = \frac{pab}{\pi}$ oder $\frac{a(x+y)}{2} = \frac{pab}{\pi}$, oder $x + y = \frac{2pb}{\pi}$, oder $y = \frac{2pb}{\pi} - x$.

Wenn man die Momente des Dreiecks MIN, des Rektangels MHSI und des Trapezes MHSN in Rücksicht auf HB als Axe annimmt, erhält man nach der Eigenschaft der Momente $MHSN . OV = MIN . TE +$

$TE + MHSI.\ GX$; oder $MHSN.\ OV = \frac{MI.\ IN.}{2}$ $\frac{2}{3} MI + HM.\ MI.\ \frac{MI}{2}$, oder, wenn man D die grade Linie OV nennt,

$$\frac{p\,a\,b\,D}{\pi} = \frac{a^2\,(y-x)}{3} + \frac{a^2\,x}{2}$$

oder $$D = \frac{\pi\,(2ay + ax)}{6pb}$$

Der Schwerpunkt O des Trapezes MHSN liegt augenscheinlich in der Mitte der mit den beiden entgegengesetzten Seiten MH, NS gleichlaufenden graden Linie aOb; dieses gibt Oa oder $HV = \frac{HM + ca}{2} = \frac{x}{2} + \frac{D\,(y-x)}{2a}$.

Nun gibt das Dreieck MIN, mit den Dreiecken HCV, ODV, HLZ, RAZ die ihm alle ähnlich sind, nach der Reihe verglichen, $CV = \frac{IN.\ HV}{MN}$, $OD = \frac{MI.\ OV}{MN}$, $LZ = \frac{IN.\ HZ}{MN}$, $RA = \frac{MI.\ RZ}{MN}$, das ist, wenn man zu einiger Abkürzung z statt MN schreibt,

$$CV = \left(\frac{x}{2} + \frac{D\,(y-x)}{2a}\right).\ \frac{y-x}{z}$$

$$OD = \frac{aD}{z};\ LZ = \frac{b.\,(y-x)}{2z};\ Ra = \frac{a^2}{2z};$$

Also $OQ = OD + VC = \frac{aD}{z} + \left(\frac{x}{2} + \frac{D.\,(y-x)}{2a}\right).\left(\frac{y-x}{z}\right)$;

$$RY = RA + ZL = \frac{a^2}{2z} + \frac{b.\,(y-x)}{2z}$$

Da

Da nun vermög der zwoten Bedingung des Gleichgewichts die Schwerpunkte O, R, in einerlei Vertikallinie liegen müssen, so hat man $OQ = RY$, das ist, wenn man z als durchgängigen Divisor weglässt,

$$aD + \left(\frac{x}{2} + \frac{D(y-x)}{2a}\right) \cdot (y-x) = \frac{a^2}{2} + \frac{b.(y-x)}{2}$$

oder $D(2a^2 + (y-x)^2) = a^3 + ab(y-x) - ax(y-x)$

Substituirt man in dieser Gleichung statt D seinen oben gefundenen Werth $\frac{\pi(2ay + ax)}{6pb}$ und hiernächst für y seinen Werth $\frac{2pb}{\pi} - x$, so erhält man folgende bestimmte Gleichung vom dritten Grad

$$\left(\frac{\pi\left(\frac{4pb}{\pi} - x\right)}{6pb}\right)\left(2a^2 + \left(\frac{2pb}{\pi} - 2x\right)^2\right) = a^2 + (b-x)\left(\frac{2pb}{\pi} - 2x\right)$$

oder $\pi a^2\left(\frac{pb}{\pi} - x\right) + 2\pi\left(\frac{4pb}{\pi} - x\right)\left(\frac{pb}{\pi} - x\right)^2 = 6pb(b-x).\left(\frac{pb}{\pi} - x\right)$

eine Gleichung, die sich durch $\frac{pb}{\pi} - x$ theilen läßt, und also gleich $x = \frac{pb}{\pi}$ und sodann folgende Gleichung vom zweeten Grad gibt

$$x^2 - \frac{2pbx}{\pi} + \frac{4p^2b^2}{\pi^2} - \frac{3pb^2}{\pi} + \frac{a^2}{2} = o.$$

Der durch die erste Gleichung $x = \frac{pb}{\pi}$ gegebene Werth von x in der Gleichung $y = \frac{2pb}{\pi} - x$ substituirt, gibt auch $y = \frac{pb}{\pi}$. Es sind also die Linien

x und y einander gleich; hieraus folgt, daß das Rektangel im Gleichgewicht ist, wenn die in der flüßigen Materie untergetauchte Seite horizontal liegt, wie schon für sich klar ist. Die Gleichung vom andern Grad gibt, indem man zuerst x bestimmt und hierauf statt x seinen Werth in die Gleichung $y = \frac{2pb}{\pi} - x$ setzt,

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{pb \pm \sqrt{\left(3b^2(\pi p - p^2) - \frac{a^2\pi^2}{2}\right)}}{\pi} \\ y = \frac{pb \mp \sqrt{\left(3b^2(\pi p - p^2) - \frac{a^2\pi^2}{2}\right)}}{\pi} \end{array}\right\}$$

Es kann also das gegebene Rektangel zwo neue Lagen für das Gleichgewicht annehmen, wofern nur 1) die Werthe von x und y möglich; 2) beiaht, und 3) beide kleiner als b sind.

157. Zus. Man setze, es sey das gegebene Rektangel ein Quadrat oder $b = a$. Dieses Quadrat tritt sogleich ins Gleichgewicht, wann seine in der flüßigen Materie untergetauchte Seite horizontal liegt. Außerdem erhält man noch folgende Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{ap + a\sqrt{\left(3(\pi p - p^2) - \frac{\pi^2}{2}\right)}}{\pi} \\ y = \frac{ap - a\sqrt{\left(3(\pi p - p^2) - \frac{\pi^2}{2}\right)}}{\pi} \end{array}\right\}$$

x =

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{ap - a\sqrt{\left(3(\pi p - p^2) - \frac{\pi^2}{2}\right)}}{\pi} \\ y = \dfrac{ap + a\sqrt{\left(3(\pi p - p^2) - \frac{\pi^2}{2}\right)}}{\pi} \end{array}\right\}$$

woraus sich zwo neue Lagen für das Gleichgewicht ergeben, wann der Bruch $\frac{p}{\pi}$ zwischen $\frac{3}{4}$ und $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ enthalten ist.

158. V. Aufg. **Die Lage zu finden, welche die auf einer flüßigen Materie schwimmende gleichartige Parabel ABC (fig. 51.) annehmen muß, vorausgesezt, daß blos ihr Theil FMN untergetaucht sey, und daß die Punkte B, C außerhalb der flüßigen Materie liegen.**

Es fällt gleich in die Augen, daß die Parabel ABC, die specifisch leichter als die flüßige Masse ist, im Gleichgewicht bleibt, wann ihre Axe vertikal steht. Hier kommt es aber drauf an, allgemein zu untersuchen, ob sie nicht im Gleichgewicht seyn könne, wann ihre Axe eine schiefe Stellung hat.

Es sey AD die Axe der krummen Linie, BD oder BC ihre lezte Ordinate. Durch den Punkt H, die Mitte von MN, ziehe man parallel mit DA den Durchmesser HF; sodann aus dem Punkt F die Ordinate FG, die grade Linie FX in den Brennpunkt X; und die Tangente FT, welche in T der verlängerten Axe DA begegnet, und vermög der Natur der Parabel der MN gleichlaufend ist. Aus dem Punkt M lasse ich MY senkrecht, auf die verlängerte FH. Die Schwerpunkte K und I der Parabel ABC und ihres Theils FMN verbinde ich durch die grade Linie KI, welche

vermög des Gleichgewichts vertikal oder auf MN senkrecht seyn muß. Nun sey

$$\begin{aligned}
&AD \ldots = a\\
&BD \ldots = b\\
&\text{der Parameter der Axe } AD = \frac{b^2}{a} \ldots = c\\
&FH \ldots = x\\
&MH \ldots = y\\
&FG \ldots = z\\
&\text{die spec. Schwere der Parabel} \ldots = p\\
&\text{die spec. Schwere der flüßigen Materie} = \pi
\end{aligned}$$

So erhält man aus der Natur der Parabel $AK = \frac{3}{5} AD = \frac{3}{5} a$; $FI = \frac{3}{5} FH = \frac{3}{5} x$; $GT = 2GA = \frac{2z^2}{c}$; $FT = \frac{z\sqrt{(c^2 + 4z^2)}}{c}$

Die beiden ähnlichen Dreiecke FGT, MYH geben

$$FT; FG = MH: MY = \frac{cy}{\sqrt{(c^2 + 4z^2)}};$$

Nun ist die paraboliſche Fläche $ABC = \frac{4}{3} BD. DA$, und die Fläche $FMN = \frac{4}{3} MY. FH$. Man erhält also aus der ersten Bedingung des Gleichgewichts

$$pab = \frac{\pi cyx}{\sqrt{(c^2 + 4z^2)}}$$

Da die zwote Bedingung des Gleichgewichts offenbar erfüllt wird, wann die Axe der Parabel vertikal steht, also $z = o$ ist, so erhellet aus der vorhergehenden Gleichung, daß man in diesem besondern Fall $pab = \pi yx = \pi x\sqrt{cx}$ erhält, wenn man bemerkt, daß alsdann $y = \sqrt{cx}$ ist. Hieraus ergibt sich $x = a. \sqrt[3]{\frac{p^2}{\pi^2}}$

Aber

Aber wir kommen wieder auf die allgemeine Aufgabe zurück, wo der Punkt F nicht auf den Punkt A fällt.

Die Natur der Parabel gibt $FX = \frac{c^2 + 4z^2}{4c}$;

$y^2 = x.4FX = \frac{x.(c^2+4z^2)}{c}$ und $y = \frac{\sqrt{x}.\sqrt{(c^2+4z^2)}}{\sqrt{c}}$.

Diesen Werth von y in die allgemeine Gleichung $pab = \frac{\pi cyx}{\sqrt{(c^2+4z^2)}}$ gesetzt, gibt $x = a\sqrt[3]{\frac{p^2}{\pi^2}}$; hieraus erhellet, daß der Werth von x immer der nämliche bleibt, die Lage der Parabel auf der flüßigen Materie mag seyn wie sie will (†).

Da die grade Linie KI auf MN senkrecht ist, so sind die beiden Dreiecke FGT, ILH einander ähnlich und geben

$$FT : GT = IH : HL = \frac{4xz}{5\sqrt{(c^2+4z^2)}}$$

Also $LO = HO - HL = FT - HL = \frac{z\sqrt{(c^2+4z^2)}}{c} - \frac{4xz}{5.\sqrt{(c^2+4z^2)}}$

Die beiden ähnlichen Dreiecke FGT, KLO geben

$$GT : FT = LO : OK = \frac{c^2+4z^2}{2c} - \frac{2x}{5}$$

Man

(†) Wir müssen bei dieser Gelegenheit bemerken, daß wenn in einer Parabel die Abscissen von irgend zween Durchmessern, von ihren Scheiteln gerechnet, einander gleich sind, die Parallelogrammen aus den beiden Ordinaten, beiden Tangenten und den andern mit den Durchmessern gleichlaufenden Seiten gleichgroß und die paraboliſchen Räume gleichfalls einander gleich seyn müssen; dieses hat eine Aehnlichkeit mit der Eigenschaft, welche die Parallelogrammen haben, die aus zween einander zugeordneten Durchmessern in einer Ellipse oder Hyperbel verzeichnet werden, daß solche nämlich auch allemal gleich groß sind.

Man hat aber überdas $OK = KA - OA = KA - (OT - AT) = \frac{3}{5}a - x + \frac{z^2}{c}$.

Die beiden Werthe von OK gleichgesetzt, gibt $z^2 = \frac{6ac - 5c^2 - 6cx}{10}$, oder wenn man für x seinen vorhin gefundenen Werth setzt,

$$z^2 = \frac{6ac - 5c^2}{10} - \frac{6a}{10}\sqrt[3]{\frac{p^2}{\pi^2}}$$

welches zwo neue ähnliche Lagen für das Gleichgewicht gibt, die eine zur Rechten, und die andere zur Linken, wofern nur $6a > 5c + 6a\sqrt[3]{\frac{p^2}{\pi^2}}$ oder $\frac{p}{\pi} < \left(\frac{6a-5c}{6a}\right)^{\frac{3}{2}}$, eine als möglich und beiaht angenommene Größe.

159. VI. Aufg. **Wenn nunmehr die Parabel ABC nicht mit ihrer Figur einerlei Schwerpunkt hat, entweder weil sie nicht durchgängig gleichartig ist, oder weil sie mit irgend einem fremden Körper beschwert ist, der außer dem Mittelpunkt der Figur angebracht und fest mit ihr verbunden ist: die Lage zu finden, welche sie annehmen muß, um auf der flüßigen Materie im Gleichgewicht zu seyn.**

Es sey der Punkt K' der Schwerpunkt des Systems aller Gewichte, womit die Parabel ABC beschwert ist, und die mit dem lothrechten und entgegengesetzten Druck der flüßigen Materie im Gleichgewicht sind. Da dieser Punkt K' der Lage nach gegeben ist, so müssen, wenn man die grade Linie K'V auf die Axe AD der Parabel senkrecht zieht, diese Linie und das zugehörige Stück AV der Axe gegeben seyn. Es sey FMN der untergetauchte paraboliſche Raum. Durch den Schwer-

Schwerpunkt I dieses als gleichartig betrachteten Raums und durch den Punkt K' ziehe ich die grade Linie IK', die wegen des Gleichgewichts nothwendig vertikal seyn muß, und welche der Axe AD in K begegnet. Ich vollführe wie im vor. §. die Zeichnung und behalte die nämlichen Benennungen bei, und setze überdas K'V = k, AV = h; wenn man nun bemerkt, daß unter p hier die spec. Schwere eines Körpers von gleichem Gewicht mit der Parabel ABC und dessen Größe der als gleichartig angenommenen Fläche ABC gleich wäre, verstanden werden muß; so findet man wie kurz zuvor $pab = \frac{\pi cyx}{\sqrt{(c^2 + 4z^2)}}$, eine Gleichung, welche der ersten Bedingung des Gleichgewichts ein Genüge thut. Hiernächst findet man $x = a\sqrt[3]{\frac{p^2}{\pi^2}}$.

Die drei ähnlichen Dreiecke FGT, ILH, KLO geben, wie oben, $OK = \frac{c^2 + 4z^2}{2c} - \frac{2x}{5}$, und die beiden ähnlichen Dreiecke FGT, KVK' geben

$$GT : FG = VK' : VK = \frac{ck}{2z}$$

Also $OV = OK - VK = \frac{c^2 + 4z^2}{2c} - \frac{2x}{5} - \frac{ck}{2z}$.

Es ist aber auch ausserdem

$$OV = VT - OT = AV + AT - HF = h + \frac{z^2}{c} - x$$

Diese beiden Werthe von OV nun einander gleich gesetzt, gibt

$10z^3 - (10ch - 6cx - 5c^2)z - 5c^2k = o$

eine Gleichung, deren Wurzeln, wenn man für x seinen zuvor gefundenen Werth setzt, die Lagen der Parabel für das Gleichgewicht angeben.

Setzt

Setzt man $k = o$, $h = \frac{3}{2} a$, so kommt man auf die vorhergehende Auflösung zurück, wie es sich gehört.

Ich will keine weitere Anwendungen mehr hinzusetzen. Man verfährt in andern Fällen auf eine ähnliche Weise, es mögen die schwimmenden Körper gleichartig seyn oder nicht.

Dreizehntes Kapitel.

Von der verschiedenen Sicherheit der Lage schwimmender Körper, und den einfachen Schwankungen, welche diese Körper machen, wann sie aus der Lage des Gleichgewichts gebracht werden.

160.

Alle Lagen des Gleichgewichts eines Körpers zielen auf einen Zweck, nämlich den ruhigen Stand dieses Körpers zu erhalten; es verschaffen ihm aber nicht alle gleiche Sicherheit oder Festigkeit; und wenn durch eine äußere Ursache das Gleichgewicht zerstöhrt wird, so ist es möglich, daß der Körper so lange schwankt, bis er endlich wieder in seine erste Lage kommt. In Ansehung schwimmender Körper gibt es nun wirklich dergleichen äußere Ursachen: z. B. der Stos des Windes, die Bewegung der Meereswogen ꝛc. welche das Gleichgewicht immerfort zu zerstöhren suchen. Es ist daher nicht genug, daß der Schwerpunkt des Körpers und der Schwerpunkt seines untergetauchten Theils, der allemal als gleichartig betrachtet wird, in einerlei Vertikallinie fallen. Die gegenseitige Lage dieser beiden Punkte auf dieser Linie und ihre Entfernungen von einander verschaffen dem Gleichgewicht mehr oder weniger Sicherheit, wie man bald sehen wird.

Um einfache und brauchbare Resultate zu erhalten, werde ich allemal annehmen, daß die Neigungen, unter welchen das Gleichgewicht aufhört, als sehr klein angesehen werden können; ich werde das Schwanken,

welches

welches sie um eine feste Axe bewirken, untersuchen; diese Arten von Schwankungen nenne ich einfache, um sie von solchen zu unterscheiden, welche um mehrere Axen erfolgen und von denen in dem folgenden Kapitel geredet werden soll.

161. Bevor wir mit dieser Untersuchung anfangen, müssen wir einen Lehrsatz aus der Mechanik in Erinnerung bringen, den wir in der Folge gebrauchen. **Wenn ein Körper nach einer Richtung getrieben wird, die nicht durch seinen Schwerpunkt geht, so wird dieser Punkt so bewegt, als wenn er sich in der Richtung der bewegenden Kraft befände, und der Körper dreht sich um diesen Punkt herum, als wenn er ein fester Punkt wäre.** Hieraus folgt, daß wenn ein Körper von zwo parallelen und gleichen Kräften, von entgegengesetzten Richtungen getrieben wird, deren eine durch den Schwerpunkt durchgeht, die andere aber in einer gewissen Entfernung von diesem Punkt, der Schwerpunkt unbeweglich liegen bleiben müsse; aber vermög der zwoten Kraft dreht sich der Körper um den Schwerpunkt, als wenn diese Kraft allein vorhanden und der Schwerpunkt in seiner Stelle befestigt wäre. Den Beweis hiervon und eine weitere Ausführung findet man in meiner Mechanik §§. 449, 450 ꝛc. (*)

162. I. Aufg. **Die Bedingungen der Sicherheit für die ruhige Lage einer ebenen vertikalen Figur, die auf einer flüßigen Materie schwimmt, anzugeben.**

Es

(*) Vielleicht theile ich auch von dem hier angeführten Werk eine Uebersetzung mit; doch nur dann erst, wann ich mich überzeugt sehe, daß das Publikum eine solche Bemühung nicht für unnütz erkennt.

Es kann kommen, daß der Schwerpunkt der ganzen Figur tiefer liegt, als der Schwerpunkt ihres untergetauchten Theils, entweder weil die Figur nicht gleichartig ist, oder weil sie mit einem fremden Körper nach unten zu beschwert ist; oder auch, daß der erste Punkt höher liegt als der letztere.

I. Fall. Es sey (fig. 52.) ABK, die gegebene Figur, anfangs im Gleichgewicht; MN die Wasserlinie, G der Schwerpunkt vom Gewicht der ganzen Figur, F der Schwerpunkt ihres untergetauchten Theils, der allemal so wie der übrige Theil als gleichartig angenommen wird. Die beiden Punkte G und F befinden sich in einer einzigen Vertikallinie GZ, so lange das Gleichgewicht besteht.

Man setze aber, vermög irgend einer äußern Ursache neige sich die Figur ABK nach B zu, oder, welches das Nämliche ist, die Figur bleibe in unveränderter Lage, die Wasserlinie aber nehme die Lage mn an; mit der Bedingung, daß der ietzige eingetauchte Theil dem vorigen MNK gleich sey; und nun sey die Figur lediglich der Wirkung der Schwere und des lothrechten Drucks der flüßigen Materie überlassen. Man sieht gleich, aus dem vorigen §. daß, weil mnK = MNK, der Schwerpunkt der Figur weder steige noch sinke. Da der Theil NVmK den beiden Flächen mnK, MNK gemein ist, so sind die beiden Dreiecke NVn, MVm einander gleich, das ist, wenn man ihre Höhen nf, mh zieht, so hat man $\frac{NV.nf}{2} = \frac{MV.mh}{2}$. Es ist aber Vf : Vh = nf : mh = $\frac{nf.Vh}{Vf}$; und da die Neigung der Figur als äußerst klein angenommen wird, so hat man ohne merklichen Fehler Vf = VN, Vh = VM, und

dieses

dieses gibt $mh = \frac{nf.VM}{VN}$. Diesen Werth von mh in die Gleichung $\frac{NV.nf}{2} = \frac{MV.mh}{2}$ gesetzt, gibt $(NV)^2 = (MV)^2$ oder $NV = MV$; hieraus folgt, daß der Punkt V, wo die beiden Wasserlinien einander scheiden, die Mitte von MN ist.

Zieht man durch I, den Schwerpunkt des untergetauchten Theils mnK, die grade Linie Ig senkrecht auf die wirkliche Wasserfläche mn, welche der vertikalen GZ in g begegnet, so ist klar, daß, da der Punkt g oberhalb dem Schwerpunkt G der Figur liegt, der wirkliche vertikale Druck der flüßigen Materie, welcher nach IG erfolgt und die Figur um eine durch den Schwerpunkt G gehende horizontale Axe herumzudrehen strebt, solche wieder nach der ersten Lage des Gleichgewichts zurückbringt, und daß also die Figur eine sichere Lage hat.

Durch den Schwerpunkt G der Figur, den F des zuerst untergetauchten Theils MNK und die Schwerpunkte der Dreiecken NVn, MVm ziehe man senkrecht auf mn die graden Linien Gi, DFd, yx, zu; ferner durch den Punkt G die grade GDE auf die Parallelen DFd, EIg senkrecht, folglich horizontal. Die Flächen mnK, MNK, NVn, MVm müssen hier als Größen angesehen werden, welche vertikale Druckungen der flüßigen Materie vorstellen, und daher als vertikale Kräfte, die oberwärts gerichtet sind und den Schwerpunkt ihres Systems in der graden Linie GZ haben. Nunmehr müssen, weil $mnK + MVm = MNK + NVn$, die beiden entstehenden Kräfte (mnK + MVm) und (MNK + NVn) im Gleichgewicht seyn; wenn ferner diese beiden Kräfte in Ansehung der Vertikallinie Gi gleiche Momente haben; das ist, wenn man (die Momente der Kräfte durch den ihn vorgesetzten Buchstab M ausgedruckt) die

die Gleichung M. (mnK + MVm) = M. (MNK + NVn). Da nun die Kraft (mnK + MVm) aus zwo Kräften mnK, MVm zusammengesetzt ist, deren Richtungen auf verschiedenen Seiten in Ansehung der Axe Gi liegen, so hat man

$$M\,(mnK + MVm) = M.\,mnK - M.\,MVm$$
$$= mnK.\,GE - \frac{MV.\,mh}{2}.\,iz$$

und da die Kraft (MNK + NVn) aus zwo Kräften MNK, NVn zusammengesetzt ist, deren Richtungen auf eine Seite der Axe fallen, so hat man

$$M.\,(MNK + NVn) = M.\,MNK + M.\,NVn$$
$$= MNK.\,GD + \frac{NV.\,nf}{2}.\,ix$$

Demnach

$$mnK.\,GE - \frac{MV.\,mh}{2}.\,iz = MNK.\,GD + \frac{NV.\,nf}{2}.\,ix$$

oder

$$mnK.\,GE = MNK.\,GD + \frac{NV.\,nf}{2}.\,(iz + ix)$$
$$= MNK.\,GD + \frac{MN.\,nf}{4}.\,\tfrac{2}{3}\,mn$$
$$= MNK.\,GD + \frac{MN^2.\,nf}{6}$$

eine Gleichung, worin mnK. GE das Moment des wirklichen lothrechten Drucks der flüßigen Materie oder das Maas der Sicherheit der Stellung ausdruckt. Es kommt also nur noch drauf an, diese Gleichung auf ihre einfachste Form zu bringen.

Wenn die Wasserlinie aus der Lage MN in die mn gekommen ist, so hat ieder solcher Punkt wie z. B. Z, der in der Vertikallinie GZ liegt, den Bogen ZQ beschrieben, so daß, da die Seite GZ senkrecht auf MN ist, auch die Seite GQ senkrecht auf mn seyn muß, und alle Winkel ZGQ, GFD, NVn, MVm einander gleich sind. Wenn man daher R den gegebenen Halbmesser GZ, Z den Bogen ZQ nennt, so

erhält man $GD = FG \cdot \frac{Z}{R}$; $nf = NV \cdot \frac{Z}{R} = \frac{MN}{2} \cdot \frac{Z}{R}$; diese Werthe in die Gleichung $mnK \cdot GE = MNK \cdot GD + \frac{MN^2}{6} \cdot nf$ gesetzt, gibt

$$mnK \cdot GE = \left(MNK \cdot FG + \frac{(MN)^3}{12}\right) \cdot \frac{Z}{R}.$$

II. Fall. Der Schwerpunkt der Figur liegt hier in G′ oberhalb dem Schwerpunkt F des zuerst untergetauchten Theils MNK; durch diesen Punkt ziehe ich die graden Linien G′i′, D′G′E, deren eine der mn gleichlaufend und die andere darauf senkrecht ist. Alles Uebrige ist übrigens das Nämliche. Man hat allemal

$$M.(mnK + MVm) = M.(MNK + NVn)$$

aber

$$M.(mnK + MVm) = M.\,mnK - M.MVm$$
$$= mnK \cdot G'E' - \frac{MV.mh}{2} \cdot iz$$

und eben so

$$M.(MNK + NVn) = M.NVn - M.MNK$$
$$= \frac{NV.nf}{2} \cdot i'x - MNK.G'D'$$

Man hat daher

$$mnK.G'E' - \frac{MV.mh}{2} \cdot i'z = \frac{MV.nf}{2} \cdot i'x - MNK.G'D'.$$

Hieraus gibt sich, wenn man wie oben verfährt,

$$mnK.G'E' = \left(\frac{(MN)^3}{12} - FG'.MNK\right) \cdot \frac{Z}{R}$$

Wenn man beide Fälle mittelst des doppelten Zeichens $\pm$ zusammenbringt, und D die anfängliche Entfernung des Schwerpunkts der Figur vom Schwerpunkt seines untergetauchten Theils, so erhält man für

das

das Moment des wirklichen vertikalen Wasserdrucks den Ausdruck

$$\left(\frac{(MN)^3}{12} \pm D.\ MNK\right).\ \frac{Z}{R}$$

163. Zus. Man sieht, daß in dem ersten Fall die Figur allemal Sicherheit gegen den Umsturz hat, und daß, wenn alles Uebrige einerlei ist, diese Sicherheit desto größer ist, ie tiefer sein Schwerpunkt in Ansehung des Schwerpunkts des untergetauchten Theils liegt, oder ie größer die Entfernung D dieser beiden Punkte ist.

Die Figur hat in dem andern Fall gleichfalls Sicherheit gegen den Umsturz, wann die Größe $\frac{(MN)^3}{12} - D.\ MNK$ beiaht ist; und um sovielmehr, ie größer diese Größe ist. Wäre aber eben dieser Ausdruck verneint, so würde die Figur keine gesicherte Lage haben; die anfängliche Neigung würde immer größer werden, bis endlich der Umsturz erfolgte.

Hätte man $\frac{(MN)^3}{12} - D.\ MNK = o$ (welches sich allemal auf den andern Fall bezieht), so wäre die Figur gleichviel aufgelegt, nach der einen oder nach der andern Seite zu wanken, und die geringste äußere Kraft wäre vermögend, sie umzustürzen. Man hätte überdas $MNK.\ G'E' = o$ oder $G'E' = o$. Hieraus folgt, daß alsdann der Schwerpunkt der Figur auf den Punkt g fällt, wo die beiden Perpendikel, welche aus den Schwerpunkten der beiden in den zwoen Lagen der Figur untergetauchten Theile auf die beiden Wasserlinien gezogen worden, einander durchschneiden. Wenn daher diese Figur Sicherheit in ihrer Stellung haben soll, so muß ihr Schwerpunkt allemal unterhalb g fallen.

Der Punkt g ist derjenige, welchen Hr. Bouger in seinem Traité du Navire den *métacentre* nennt, und oberhalb den der Schwerpunkt vom ganzen Gewicht eines Schiffs fallen muß, wenn dieses Schiff mit Sicherheit gegen den Umsturz auf dem Meer gehen soll.

164. II. Aufg. **Die Schwankbewegungen zu bestimmen, welche die Figur unter der Voraussetzung der vorigen Aufgabe macht, so daß sie gegen den Umsturz gesichert ist.**

Wenn sich die Figur so geneigt hat, daß der gegebene Punkt Z den Bogen ZQ beschrieben hat, so muß man den Winkel ZGQ als gegeben und als den anfänglichen Neigungswinkel betrachten. Nun tritt die Figur vermög des vertikalen Drucks der flüßigen Materie, welcher nach Gi oder Gi' erfolgt, wieder in ihre Lage zurück; und in der Zeit t beschreibt der Punkt Q einen Bogen QR, so daß man, wenn dieser Bogen z heißt, und S die Summe der Produkten aus den Elementen der ganzen Figur in die Quadrate ihrer Entfernungen vom Punkt G bedeutet, aus den gemeinen Formeln von den beschleunigenden Kräften (s. meinen Traité de Mechan. art. 451. & not. IV.) diese Gleichung erhält

$$\left(\frac{(MN)^3}{12} \pm D.MNK\right) \cdot \frac{Z}{R} = \frac{S}{R} \cdot \frac{ddz}{dt^2}$$

Es ist aber diese Gleichung völlig von eben der Beschaffenheit wie die für ein Pendel, das um einen festen Punkt hin und her schwingt. Es sey nämlich (fig. 53.) ein an einem festen Punkt G aufgehängtes Pendel, das um diesen Punkt schwingt; man erhebe dieses Pendel aus der Vertikallinie GZ, so daß der Winkel ZGQ hier der nämliche sey, wie fig. 52. Da das von der Lage P ausgehende Pendel in der

Zeit

Zeit t den Bogen P p beschreibt und der Punkt Q den Bogen Q R = u; so erhält man (wenn s die Summe der Produkten aus den Elementen von P in die Quadrate ihrer Entfernungen vom Punkt G bedeutet)

$$P.\,GP.\,\frac{Z}{R} = \frac{s}{R} \cdot \frac{ddu}{dt^2}$$

Man sieht hieraus, daß die Bewegungen des Pendels und der gegebenen Figur einander ähnlich sind; und wenn sie vollkommen einerlei seyn sollen, so darf man nur den Werth von $\frac{ddu}{dt^2}$ dem von $\frac{ddz}{dt^2}$ gleich setzen. Diese Bedingung gibt

$$\frac{P.\,GP}{s} = \frac{(MN)^3 + 12\,D.\,MNK}{12\,S}.$$

Es sey P ein einfaches Pendel, das ist ein Gewicht, das klein genug ist, um als eine in einem einzigen Punkt vereinigte Masse angesehen werden zu können; und L sey die Länge dieses Pendels oder die Entfernung GP, so hat man $s = P.\,L^2$; und die vorhergehende Gleichung gibt uns

$$L = \frac{12\,S}{(MN)^3 + 12\,D.\,MNK}$$

für die Länge eines einfachen Pendels, welches seine Schwingungen mit der gegebenen Figur in einerlei Zeit macht. Da nun die Schwingungen dieses Pendels unter sich isochronisch sind, und nur wegen des Widerstandes der Luft oder anderer Hindernisse, welche die Bewegung aufheben können, nachlassen; so müssen die Schwingungen der Figur gleichfalls isochronisch seyn, und sie können nur durch den Widerstand, den sie in der Luft und im Wasser finden, aufgehoben werden.

Exempel. Die gegebene Figur sey ein gleichschenklichtes Dreieck ABK (fig. 54.), und der untergetauchte Theil MNK gleichfalls ein

gleichschenklichtes Dreieck; man sucht den Werth von L.

Man ziehe aus der Spitze K das Perpendikel KCD auf die parallelen Grundlinien MN, AB, und nenne MN, a; KC, c; AB, f; KD. g; p die Dichtigkeit oder specifische Schwere des Dreiecks; π die Dichtigkeit oder specifische Schwere der flüßigen Materie, so hat man sogleich $pfg = \pi ac$, oder auch (wegen der ähnlichen Dreiecke ABK, MNK) $pf^2 = \pi a^2$; $pg^2 = \pi c^2$.

Der Nenner von L hat zum Werth in Rücksicht auf den körperlichen Raum, $a^3 - 4ac.(g - c)$. Da man aber in diesen Aufgaben die Größen in Beziehung auf die Massen nehmen muß, so muß dieser Werth, der sich auf das flüßige Dreieck MNK bezieht, durch π multiplicirt werden. Ich nehme solchen als beiaht an, damit die Figur Sicherheit in ihrer Stellung habe.

Um S auf eine sehr einfache Weise zu finden, suche ich die Summe von den Produkten aus den Elementen des Dreiecks ABK in die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze K und wende folgenden allgemeinen mechanischen Lehrsatz an: (S. meinen Traité &c. articles 487. & 488.) **Die Summe der Produkten aus den Elementen eines Körpers in die Quadrate ihrer Entfernungen von einer Axe, die nicht durch den Schwerpunkt geht, ist gleich der Summe der Produkten aus eben den Elementen in die Quadrate ihrer Entfernungen von einer Axe, welche durch den Schwerpunkt geht und der vorigen gleichlaufend ist, addirt zu dem Produkt aus der Masse des Körpers in das Quadrat der Entfernung von beiden Axen.**

Es sey also VE irgend ein Perpendikel auf die Axe KD des Dreiecks ABK; auf dieser Linie nehme man

man das Element Tt und ziehe TK; so ist die Summe der Produkte aus allen Punkten von VE in die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze K, $\int Tt.(TK)^2 = \int Tt.(EK)^2 + \int Tt.(TE)^2 = VE.(EK)^2 + \frac{(VE)^3}{3} = (EK)^3\left(\frac{AD}{KD} + \frac{(AD)^3}{3(KD)^3}\right)$ weil $VE = EK.\frac{AD}{KD}$. Man nehme den Punkt e unendlich nahe bey E, so ist die Summe der Produkten aus allen Punkten des Dreiecks ABK in die Quadrate ihrer Entfernung von der Spitze K $2\int Ee.(EK)^3.\left(\frac{AD}{KD} + \frac{(AD)^3}{3(KD)^3}\right) = \frac{(KD)^4}{2}.\left(\frac{AD}{KD} + \frac{(AD)^3}{3(KD)^3}\right) = \frac{fg^3}{4} + \frac{gf^3}{48}$.

Und nun hat man nach dem angeführten Lehrsatz

$$\frac{fg^3}{4} + \frac{gf^3}{48} = S + \frac{fg}{2}.\frac{4g^2}{9}$$

woraus sich

$$S = \frac{fg.(3f^2 + 4g^2)}{144}$$

Dieser Werth, der sich auf den körperlichen Raum bezieht und zu dem festen Dreieck ABK gehört, muß mit p multiplizirt werden, um eine Größe zu erhalten, die sich auf die Masse bezieht. Daher ergibt sich endlich

$$L = \frac{pfg.(3f^2 + 4g^2)}{\pi.(12a^3 - 48ac(g-c))}$$

oder $$L = \frac{c.(3f^2 + 4g^2)}{12(a^2 - 4c(g-c))}$$

165. Erinner. Eben diese Theorie läßt sich auf die Untersuchung von der sichern Lage und den einfachen Schwingungen eines festen Körpers, der auf einer flüßigen Materie schwimmt, leicht anwenden.

Denn es sey ABK (fig. 52.) der vertikale Durchschnitt des Körpers, senkrecht auf die Umdrehungsaxe, die hier durch den Punkt G oder G' vorgestellt wird. Es stelle F die horizontale Axe vor, die senkrecht auf ABK ist und durch den Schwerpunkt des untergetauchten Theils des Körpers durchgeht. Uebrigens sey die Zeichnung wie (§. 162.) ausgeführt; so ist klar, daß in beiden Fällen alles einerlei ist, mit dem Unterschied, daß hier MN das Profil von der Fläche ist, worin der Körper den Wasserspiegel schneidet, und daß NVn, MVm zween Abweichungswinkel bedeuten, welche durch die Umdrehung der Flächen NV, MV um die horizontale Axe, welche durch den Punkt G in den Profil ABK angedeutet wird, entstehen. Diese beiden Abweichungswinkel sind nothwendig gleich groß, weil vorausgesetzt wird, daß der Schwerpunkt des Körpers weder steige noch sinke. Es geht also die durch den Punkt V vorgestellte horizontale Axe durch den Schwerpunkt der Fläche MN, worin der Körper den Wasserspiegel schneidet; denn die Gleichheit der beiden Abweichungswinkel macht die Entfernungen der Schwerpunkte beider Flächen NV, MV von der Axe V diesen nämlichen Flächen umgekehrt proportional. Nach diesen Vorstellungen und den festgesetzten Gründen lassen sich die Bedingungen für die sichere Lage des Körpers, und die Länge des einfachen Pendels, das seine Schwingungen mit diesem Körper in einerlei Zeit macht, finden.

Vierzehntes Kapitel.

Fortsetzung der vorigen Untersuchung: Allgemeine Theorie von den unbeträchtlich kleinen steigenden und schwingenden Bewegungen schwimmender Körper.

166.

Die Herren Daniel Bernoulli, Euler und d'Alembert haben nach und nach und in verschiedenen Zeiten die hierhin gehörigen Hauptfragen aufgelößt (s. die Denkschriften der Akademie zu Petersburg 1739; die *Sc. Naual.* des Herrn Euler; Hrn. d'Alembert Werk *sur la Réſiſtance des fluides* und deſſen *Opuſcules mathematiques tome I.*). Ich habe gleichfalls den nämlichen Gegenstand in meinen beiden Abhandlungen *ſur l'avimage des Vaiſſeaux* behandelt, welche von der Acad. des Sc de Paris 1761 und 1765 mit unter die gekrönten Preisschriften geſetzt worden sind. Da er zur Hydrostatik und zur Mechanik gehört, so verdient er sehr wohl in diesem Werk eine Stelle. Ich mache den Anfang mit den Grundsätzen aus der Mechanik und Geometrie, welche ich hier gebrauchen muß.

167. I. Lehrſ. Der Mittelpunkt der Schwere oder der Masse G eines Körpers (fig. 55.) durchlaufe nach einem gewissen Gesetz die grade Linie GX: wenn man nun durch diesen Punkt und senkrecht auf GX die Ebene AD legt, welche in dem absoluten Raum beständig ihre parallele Lage behält, und wenn man nun voraussetzt, daß iedes Theilgen des Körpers in

einer auf AD senkrechten Richtung den Weg pm durchlaufe, so hat man (wenn dP iedes Elementartheilgen des Körpers, p den durchloffenen Weg pm, dt das Zeitelement, und ϕ die beschleunigende Kraft nach pm bedeutet) für die ganze Ausdehnung des Körpers $\int p\,dP = o$, und $\int \phi\,dP = o$ oder $\int \frac{dP.ddp}{dt^2} = o$.

Da die Räume p nur in Ansehung der Ebene AD durchloffen werden, so dürfen wir immer annehmen, diese Ebene sey in Ruhe, indem man sich deshalb vorstellt, man bringe dem Schwerpunkt G eine Bewegung bei, welche der, die er wirklich hat, gleich und entgegengesetzt ist. Nun ist klar, 1) daß das Integral $\int p\,dP$, auf alle Punkte der Masse des Körpers angewendet, den Unterschied ausdruckt, zwischen der Summe der Produkten aus den Theilgen des Stücks AED des Körpers, deren iedes mit dem Weg multiplizirt ist, den es von der Linken nach der Rechten senkrecht auf die Fläche AD beschreibt, und der Summe der Produkten aus den Theilgen des Stücks AFD, wovon iedes mit dem Weg multiplizirt ist, den es von der Rechten gegen die Linke auf eben diese Fläche senkrecht beschreibt. Wenn aber der Schwerpunkt ruhig liegt oder als ruhig betrachtet wird, so ist diese Differenz = Null (s. meinen *Traité de Méchanique art.* 403. & *suiv.*)

2) Die Größe $\phi\,dP$ oder $\int \frac{dP\,ddp}{dt^2}$ ist gleichfalls für die ganze Ausdehnung des Körpers Null; denn wenn die Kräfte ϕ z. B. für den Theil AED des Körpers beiaht sind, so sind sie für den Theil AFD verneint, und es gibt für den einen von diesen Theilen so viele $\phi\,dP$ als für den andern, weil der Schwerpunkt hier als ruhig angesehen wird. Man hat daher für den ganzen Körper $\int \phi\,dP = o$, oder $\int \frac{dP\,ddp}{dt^2} = o$.

168. II. Lehns. **Die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den Kräften, welche einen Körper zu bewegen streben, und den Widerstand zu finden, welchen er solchen vermög seiner Trägheit entgegensetzt.**

I. Man gedenke sich durch einen festen Punkt A (fig. 56.) drei Axen AP, AC, AB unter einander senkrecht und im absoluten Raum ohne Bewegung. Man kann sich, um die Vorstellungen festzusetzen, gedenken, daß die beiden Axen AP, AC, in der Ebene der Tafel liegen und die Axe AB senkrecht auf die nämliche Ebene ist. Die Anzahl und Richtungen der auf den Körper angebrachten Kräfte mögen seyn wie sie wollen, so ist klar, daß allemal diese Kräfte in iedem Augenblick blos auf drei gebracht werden können, so daß sie alle auf den dreien Axen AP, AC, AB, nämlich immer eine andere auf der andern, senkrecht stehen. Ich nehme an, daß diese so reducirten Kräfte nach den Richtungen Ff, Ee, Dd gerichtet sind, und daß sie durch die Linien Ff, Ee, Dd ausgedruckt werden. Aus irgend einem Punkt N des Körpers lasse man MN senkrecht auf die Fläche CAP und ziehe MP senkrecht auf AP. Der Widerstand, welchen das Theilchen des in N der Bewegung durch seine Trägheit entgegensetzt, sey in drei Kräfte zerlegt, Np, Nm, Nn, die den drei Axen AP, AC, AB gleichlaufend sind. Soll nun das Gleichgewicht, wovon wir geredet haben, statt finden, so wird erfodert; 1) daß die Summe aller dieser Elementarkräfte in ihrer Vereinigung der zugehörigen zur Bewegung strebenden Kraft gleich sey; 2) daß das aus den ersten Kräften entstehende Moment gegen iede unserer dreien Axen dem zugehörigen Moment gleich sei, das aus denen zur Bewegung strebenden Kräften entsteht.

Es sey Kraft $Ff = F$, Kraft $Ee = E$, Kraft $Dd = D$, $AP = q$, $PM = r$, $NM = s$, das Zeitelement $= dt$, iedes Theilgen des Körpers $= dP$, so erhält man sogleich diese drei Gleichungen

$$F = \int \frac{dP\,ddq}{dt^2}; \quad E = \int \frac{dP\,ddr}{dt^2}; \quad D = \frac{dP\,dds}{dt^2};$$

welche sich auf die Bewegung des Körpers aus seiner Stelle beziehen. Vorausgesetzt, daß die Richtungen der Kräfte F, E, D, den drei Flächen BAC, BAP, CAP in den Punkten F, E, D begegnen, ziehe man die graden Linien FO, DK der CA gleichlaufend auf die beiden Axen AB, AP; die graden Linien FQ, ER der AB gleichlaufend auf die beiden Axen AC, AP; die graden Linien ES, DH der AP parallel auf die beiden Axen AB, AC. So ist offenbar, daß das Moment der Kraft in Rücksicht auf AP Null ist; daß in Rücksicht auf AC das Moment dieser Kraft $= F.FQ$; in Rücksicht auf AB dieses Moment $= F.FO$; das Moment der Kraft E in Rücksicht auf $AC = o$, in Rücksicht auf $AB = E.ES$, in Rücksicht auf $AP = E.ER$; das Moment der Kraft D in Rücksicht auf $AB = o$, in Rücksicht auf $AC = D.DH$, in Rücksicht auf $AP = D.DK$ ist. Aus der Verbindung dieser Momente entsteht für iede Axe ein besonderes Moment, und wenn man solches durch den vor die Axe geschriebenen Buchstaben M bezeichnet, so erhält man

$$M.AC = F.FQ - D.DH$$
$$M.AB = F.FO - E.ES$$
$$M.AP = E.ER - D.DK$$

Wenn man auf eben die Art die Momente des Widerstands des Theilgens dP in N in Ansehung der drei Axen AC, AB, AP entwickelt, so ergibt sich

$$M.AC = \int \frac{sdP\,ddq}{dt^2} - \int \frac{qdP\,dds}{dt^2}$$

M. A

$$M.\ AB = \int \frac{rd\,P\,ddq}{dt^2} - \int \frac{qd\,P\,ddr}{dt^2}$$

$$M.\ AP = \int \frac{sd\,P\,ddr}{dt^2} - \int \frac{rd\,P\,dds}{dt^2}$$

Wenn man alle diese Momente den iedesmaligen zugehörigen Momenten der zur Bewegung strebenden Kräfte gleich setzt, so erhält man folgende drei Gleichungen, welche sich auf die Umdrehungsbewegungen beziehen

$$F.FQ - D.DH = \int \frac{sd\,P\,ddq}{dt^2} - \int \frac{qd\,P\,dds}{dt^2}$$

$$F.FO - E.ES = \int \frac{rd\,P\,ddq}{dt^2} - \int \frac{qd\,P\,ddr}{dt^2}$$

$$E.ER - D.DK = \int \frac{sd\,P\,ddr}{dt^2} - \int \frac{rd\,P\,dds}{dt^2}$$

II. Durch des Körpers Schwerpunkt G gedenke man sich drei neue Axen GV, GT, GY die mit den Axen AP, AC, AB parallel laufen, nämlich allemal eine mit einer der letztern. Diese Axen GV, GT, GY bewegen sich mit dem Schwerpunkt; aber iede bleibt sich allemal selbst parallel. Man nehme in Ansehung des Punkts G die drei Koordinaten GV, VL, LN welche zum Punkt N gehören. Die Axe VG verlängere man, bis sie der Fläche BAC in Z begegnet, und ziehe hierauf aus dem Punkt Z die graden Linien ZI, ZX mit den Axen AC, AB parallel. Man behalte die vorigen Benennungen bei und setze überdas $ZG = \Pi$, $AX = \pi$, $AI = \theta$, $GV = q'$, $VL = r'$, $LN = s$, die Entfernung der graden Linie Ff von der Fläche $TGV = \alpha$, die Entfernung eben dieser Linie von der Fläche $YGV = \beta$, die Entfernung der graden Linie Ee von der Fläche $YGT = \delta$, die Entfernung eben der Linie von der Fläche $TGV = \gamma$, die

Ent-

Entfernung der graden Linie Dd von der Fläche YGT $= \phi$, die Entfernung eben der Linie von der Fläche YGV $= \xi$; so hat man offenbar $q = \Pi + q'$, $r = \pi + r'$, $s = \theta + s'$, $ddq = dd\Pi + ddq'$, $ddr = dd\pi + ddr'$, $dds = dd\theta + dds'$, $FQ = \theta + \alpha$, $FO = \pi + \beta$, $ES = \Pi + \delta$, $ER = \theta + \gamma$, $DH = \Pi + \phi$, $DK = \pi + \xi$. Substituirt man alle diese Werthe in den 6 Fundamentalgleichungen der vorigen Nummer, so erhält man 1) die drei Gleichungen $F = \int \frac{dP dd\Pi}{dt^2} + \int \frac{dP ddq'}{dt^2}$, $E = \int \frac{dP dd\pi}{dt^2} + \int \frac{dP ddr'}{dt^2}$, $D = \int \frac{dP dd\theta}{dt^2} + \int \frac{dP dds'}{dt^2}$. Man hat aber nach dem andern Theil des vorhergehenden Lehnsatzes

$$\int \frac{dP ddq'}{dt^2} = 0, \int \frac{dP ddr'}{dt^2} = 0, \int \frac{dP dds'}{dt^2} = 0.$$

Da ferner $dd\Pi$, $dd\pi$, $dd\theta$ für alle Punkte des Körpers einerlei sind, so erhellet, daß unsere drei ersten Gleichungen sich in folgende verwandlen,

$$F = \frac{P.dd\Pi}{dt^2}, \quad E = \frac{P dd\pi}{dt^2}, \quad D = \frac{P.dd\theta}{dt^2}.$$

2) Um zu sehen, was aus den drei andern Gleichungen werde, betrachte man zuerst die zusammengehörigen Theile der ersten Gleichung F. QF und $\int \frac{sdP ddq}{dt^2}$.

Man hat $F.QF = F.\theta + F.\alpha$

und $\int \frac{sdP ddq}{dt^2} = \int \frac{(\theta + s')\, dP\,(dd\Pi + ddq')}{dt^2}$

$= \int \frac{\theta d P dd\Pi}{dt^2} + \int \frac{s' dP dd\Pi}{dt^2} + \int \frac{\theta dP ddq'}{dt^2} + \int \frac{s' dP ddq'}{dt^2}$

$= \int \frac{P\theta dd\Pi}{dt^2} + \frac{dd\Pi}{dt^2} \int s' dP + \theta \int \frac{dP ddq'}{dt^2} + \int \frac{s' d P ddq'}{dt^2}$

eine

eine Größe, die sich in F. $\theta + \int \frac{s' dP dd q'}{dt^2}$ verwandelt, wenn man für $\frac{P \theta dd \pi}{dt^2}$ seinen Werth F. θ setzt, und bemerkt, daß nach dem ersten Theil des vorhergehenden Lehnsatzes $\int s' dP = o$, und nach dem andern $\int \frac{dP dd q'}{dt^2} = o$. Wenn man eben so mit den übrigen korrespondirenden Theilen unserer Gleichungen verfährt, und die einander aufhebenden Glieder wegstreicht, so findet man, daß solche Gleichungen sich zuletzt in nachstehende verwandlen

$$F. \alpha - D. \Phi = \int \frac{s' dP dd q'}{dt^2} - \int \frac{q' dP dd s}{dt^2}$$

$$F. \beta - E. \delta = \int \frac{r' dP dd q'}{dt^2} - \int \frac{r' dP dd r'}{dt^2}$$

$$E. \gamma - D. \xi = \int \frac{s' dP dd r'}{dt^2} - \int \frac{r' dP dd s'}{dt^2}$$

III. Es mag die Bewegung von iedem Punkt N des gegebenen Körpers in Ansehung des Schwerpunkts seyn wie sie will, so kann man sich allemal vorstellen, daß sie aus der Umdrehung des Körpers um drei Axen GY, GV, GT entstanden sey. Man setze (fig. 57.), es sey der Punkt N im ersten Augenblick in H, und es seyen GE, EF, FH die zusammengehörigen Koordinaten. Man stelle sich vor, es nehme die grade Linie FH vermög der Umdrehung des Körpers um die Axe GY, indem sie sich selbst parallel herumdreht, die Lage SK an; vermög der Umdrehung um die Axe GV gelange der Punkt K in R; vermög der Umdrehung um die Axe GT gelange der Punkt R in N. Die Koordinaten NL, LV, GV sind hier die nämlichen wie in der vorigen Figur. Man ziehe die graden Linien GF, GS, DK. Aus R lasse man RO senkrecht auf die Fläche TGV, und durch den Punkt O senkrecht auf

GT

GT die grade Linie XO, die nothwendig durch den Punkt L durchgeht. Man ziehe ferner die graden Linien XR, XN; endlich ziehe man aus den Punkten D und X senkrecht auf die Fläche TGV, oder mit der Axe GY gleichlaufend, die graden Linien DZ, XP. Man setze GE = ψ, EF = λ, FH = μ, den Umdrehungswinkel um die Axe GY = x, den Umdrehungswinkel um die Axe GV = y und den Umdrehungswinkel um die Axe GT = z.

Weil der Winkel DGS die Summe des Winkels EGF und des Winkels FGS (x) ist, so hat man DS = GF. sin DGS = λ. Cos x + ψ. sin x; GD = GF. Cos DGS = ψ. Cos x − λ. sin x.

Da der Winkel RDZ oder ORD die Summe des Winkels KDZ oder DKS und des Winkels RDK (y) ist, so erhält man DO = DK. sin RDZ = DS. Cos y + SK sin y = λ. Cos x. Cos y + ψ. sin x. Cos y + μ. sin y; RO = DK. Cos RDZ − SK. Cos y − DS. sin y = μ. Cos y − λ. Cos x. sin y − ψ. sin x. sin y.

Weil der Winkel NXP oder XNL der Unterschied des Winkels RXP oder XRO und des Winkels RXN (z) ist, so hat man XL = XR. sin NXP = XO. Cos z − RO. sin z = ψ. Cos x. Cos z − λ. sin x. Cos z − μ. Cos y. sin z + λ. Cos x. sin y. sin z + ψ. sin x. sin y. sin z; LN = XR. Cos NXP = RO. Cos z + XO. sin z = μ. Cos y. Cos z − λ. Cos x. sin y. Cos z − ψ. sin x. sin y. Cos z + ψ. Cos x. sin z − λ. sin x. sin z. Hieraus folgt, daß (weil XL = GV = q′, DO = VL = r′, LN = s′)

q′ = ψ. Cos x. Cos z − λ. sin x. Cos z − μ. Cos y. sin z + λ. Cos x. sin y. sin z + ψ. sin x. sin y. sin z;

r′ = λ. Cos x. Cos y + ψ. sin x. Cos y + μ. sin y;

s′ =

$s' = \mu . \mathrm{Cos}\, y . \mathrm{Cos}\, z - \lambda . \mathrm{Cos}\, x . \sin y . \mathrm{Cos}\, z - \psi . \sin x . \sin y . \mathrm{Cos}\, z + \psi . \mathrm{Cos}\, x . \sin z - \lambda . \sin x . \sin z;$

Man kann also q', r', s', ddq', ddr', dds' aus den vorhergehenden Gleichungen wegschaffen. Es ist in Ansehung der drei Größen

$\int s' d P\, ddq' - \int q' d P\, dds'$, $\int r' d P\, ddq' - \int q' d P\, ddr'$, $\int s' d P\, ddr' - \int r' d P\, dds$;

die mit diesen einerlei sind

$\int d P\, d(s' dq' - q' ds')$, $\int d P\, d(r' dq' - q' dr')$, $\int d P\, d(s' dr' - r' ds')$;

zu bemerken, daß in den beiden auf einander folgenden Differentiationen, die man zuerst machen muß, um $d(s' dq' - q' ds')$, $d(r' dq' - q dr')$, $d(s' dr' - r' ds')$ zu finden, die Winkel x, y, z veränderlich und die Größen ψ, λ, μ beständig sind; daß man aber in der nachfolgenden Integration nur die vier Größen dP, ψ, λ, μ als veränderlich angesehen werden müssen, und daß man die übrigen vor das Integrationszeichen schreiben muß, weil alsdann die Integralien die Bewegungen von den Theilen des Körpers ausdrucken.

Diese allgemeinen Formeln dienen, die Bewegungen eines ieden Körpers, was auch für Kräfte auf ihn angewendet werden, zu bestimmen. Nachfolgendes zeigt ihre Anwendung auf unsern Gegenstand.

169. Aufg. **Die Bewegungen zu bestimmen, welche ein schwimmender Körper annehmen muß, der anfänglich durch irgend eine Ursache um ein wenig aus der Lage des Gleichgewichts gebracht worden und hierauf einzig der Wirkung seiner Schwere und dem vertikalen Druck der flüßigen Materie überlassen ist.**

Es sey im ersten Augenblick der Bewegungen, von deren Bestimmung die Rede ist, ABK (fig. 58.) ein lothrechter Durchschnitt des schwimmenden Körpers

mit einer Fläche, die durch seinen Schwerpunkt G durchgeht, und welche die vertikale Axe GY und die horizontale Axe GV enthält; HPK (fig. 59) ein anderer vertikaler Durchschnitt, senkrecht auf den ersten, der gleichfalls durch den Schwerpunkt G durchgeht und die vertikale Axe GY und die horizontale Axe GT enthält; MENI (fig. 60.) der horizontale Querschnitt, welchen die Oberfläche des Wassers mit dem Körper macht, und worin MN der gemeinschaftliche Durchschnitt der zwo Flächen MENI und ABK ist; und EI der gemeinschaftliche Durchschnitt der zwo Flächen MENI und HPK. Die drei Axen GY, GV, GT sind hier die nämlichen wie in den Figuren 56 und 57. Man nehme zu mehrerer Simplicität in der Rechnung an, die Ebene ABK (fig. 58.) gehe durch den Schwerpunkt L der Fläche MENI (fig. 60); eine Voraussetzung, die allemal verstattet ist, weil die Lage der Axen in dem Raum willkührlich ist. Den Schwerpunkt F (fig. 61.) des im ersten Augenblick untergetauchten Theils in einer gewissen (sehr kleinen) Entfernung von der Vertikallinie GY angenommen, lege man durch diesen Mittelpunkt F und durch die Vertikallinie GY die Ebene CDK, welche die Fläche MENI nach RS schneidet. Aus dem Punkt F ziehe man die graden Linien FQ, Ff, deren eine auf GY, die andere auf RS, senkrecht ist. Auch ziehe man durch den Punkt f (fig. 60.) Ff senkrecht auf MN. Es müssen hier und in der Folge allemal die vier Figuren 58, 59, 60 und 61 mit einander verbunden werden; man muß sich ihre iedesmalige Lage genäu vorstellen, und in ieder von ihnen die Linien, Flächen und körperlichen Räume suchen, welche man zu bemerken nöthig hat.

Nunmehr ist klar, daß wenn der erwähnte Körper einzig der Wirkung seiner Schwere und des lothrechten Drucks der flüßigen Materie unterworfen ist, die Kräfte, welche wir zuvor F und E genennt haben,

hier

hier = o ist, und daß nur die einzige Kraft D übrig ist, die = dem Unterschied zwischen dem lothrechten Druck der flüßigen Materie und der Schwere des Körpers; daß also dieser Körper keine horizontal fortgehende Bewegung haben kann oder daß $\Pi = o$ und $\pi = o$; daß aber vermög der Kraft D sein Schwerpunkt steigen oder sinken kann (hier nehmen wir an, er steige um eine Größe = Oq), indeß sich der Körper um die drei Axen GY, GV, GT herumdreht. Wenn man ferner die Lage des Schwerpunkts des untergetauchten Theils betrachtet, so erhellet, daß vermög der Umdrehung um die Axe GT der Punkt B steigt, der Punkt A sinkt, und der Durchschnitt MN des Körpers die Lage mn annimmt; daß vermög der Umdrehung um die Axe GV der Punkt H steigt, der Punkt P sinkt und der Durchschnitt EI des Körpers die Lage ei annimmt. Nun geht während der Zeit t aller dieser Bewegungen aus dem Wasser ein Prisma, das MENI zur Grundfläche und Oq oder Oq′ zur Höhe hat, und hierzu noch die beiden Ausschnitte nqc, eq′r; dagegen treten in das Wasser die beiden Ausschnitte mqd, tq′i; dabei ist zu bemerken, daß die beiden Ausschnitte eq′r, tq′i gleich groß sind, als Größen die aus der Umdrehung der Räume MNE, MNI um die Axe mn oder MN, welche durch den Schwerpunkt ihres Systems durchgeht, entstanden sind. Dieses sind die einzigen Veränderungen, welche bei dem untergetauchten Theil des Körpers erfolgen, und es ist offenbar, daß die Umdrehung um die vertikale Axe GY nichts dazu beiträgt. Man setze, es begegnen die aus den Schwerpunkten der vier Ausschnitten nqc, mqd, eq′r, tq′i der Fläche MENI in den Punkten g, z, l, s und es seyen die grade Linien gh, zk, lp, su senkrecht auf MN gezogen. Man nenne

die specifische Schwere des Körpers . p

die der flüßigen Materie . . . π
den ganzen körperlichen Raum des Körpers M
den körperlichen Raum des im ersten Augenblick untergetauchten Theils . N
den Flächeninhalt MENI . . a^2
den Abstand OL ihres Schwerpunkts L vom Punkt O . . . . . b
die Höhe GQ (fig. 61.) vom Schwerpunkt des untergetauchten Theils über dem G des Körpers . . . . h
Of (fig. 60.) . . . . . δ
Ff . . . . . δ'
Oq (fig. 58.) . . . . . θ
der Umdrehungswinkel um die vertikale Axe GY x
der Umdrehungswinkel um die horizontale Axe GV . . . . . y
der Umdrehungswinkel um die horizontale Axe GT . . . . . z
der Ausschnitt eq'r oder tq'i . . i^3y
Op . . . . . k
lp . . . . . k'
Ou . . . . . n
su . . . . . n'
den Ausschnitt nqc . . . . c^3z
Oh . . . . . e
gh . . . . . ϵ
den Ausschnitt mqd . . . f^3z
Ok . . . . . g
Zk . . . . . g'

Ich brauche nicht zu erinnern, daß die Größen a, b, c, f, g, g', h, i, k, k', e, ϵ, δ, δ' gegeben sind oder sich durch die Geometrie bestimmen lassen.

Man erhält sogleich $D = \pi . (N - MENI. Oq - nqc + mqd - eq'r + iq't) - p. M = \pi (N -$

$\pi(N - MENI. Oq - nqc + mqd) - p.M = \pi N - \pi a^2\vartheta - \pi c^3 z + \pi f^3 z - p\dot{M}$.

Wenn man nun ferner überlegt, daß vermög der Neigung des Körpers gegen A der Schwerpunkt F sich der Ebene HPK um die Größe hz nähert, oder daß Of sich in $\vartheta - hz$ verwandelt, und daß vermög der Neigung gegen P der nämliche Punkt F sich der Fläche ABK um die Größe hy nähert, oder daß $F'f = \vartheta' - hy$ wird; so sieht man ohne Schwierigkeit, daß nach der Zeit t das Moment des vertikalen Drucks der flüßigen Materie in Ansehung der Axe GT, oder $D.\Phi = \pi(N(\vartheta - hz) + a^2b\vartheta - c^3ez - f^3gz - i^3ky - i^3ny)$ und das Moment der nämlichen Kraft in Ansehung der Axe GV, oder $D.\xi = = - \pi(N(\vartheta' - hy) + c^3e'z + f^3g'z - i^3k'y - i^3n'y)$.

Nun ist noch übrig, die Werthe von $\int dPd(s'dq' - q'ds')$, $\int dPd(r'dq' - q'dr')$, $\int dPd(s'dr' - r'ds')$ in Funktionen der Winkel x, y, z auszudrucken. Da nun die Schwingungen als äußerst klein angenommen werden, so ist klar, daß man in den oben gefundenen Werthen von q', r', s' alle Glieder, welche mehr als einen Sinus enthalten, weglassen, in denen Gliedern, welche einen Sinus und einen Kosinus oder zween Kosinussen enthalten, ieden Kosinus = 1 setzen und den Winkel für den Sinus nehmen kann. Demnach

$s'dq' - q'ds' = - \lambda\mu dx - (\mu^2 + \psi^2)dz + \psi\lambda dy$;

$r'dq' - q'dr' = - (\psi^2 + \lambda^2).dx - \lambda\mu dz - \psi\mu dy$;

$s'dr' - r'ds' = \psi\mu dx + (\lambda^2 + \mu^2)dy + \psi\lambda dz$;

$\int dPd(s'dq' - q'ds') = - pddx.\int\lambda\mu dM - pddz\int(\mu^2 + \psi^2).dM + pddy\int\psi\lambda dM$;

$\int dPd(r'dq' - q'dr') = - pddx\int(\psi^2 + \lambda^2)dM -$

$$= \mathrm{d}M - p\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}z \int \lambda\mu\,\mathrm{d}M - p\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}y \int \psi\mu\,\mathrm{d}M$$

$$\int \mathrm{d}P\mathrm{d}(s'\mathrm{d}r' - r'\mathrm{d}s') = p\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}x \int \psi\mu\,\mathrm{d}M + p\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}y \int (\lambda^2+\mu^2)\,\mathrm{d}M - p\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}z \int \psi\lambda\,\mathrm{d}M$$

Größen, worin die unter dem Integrationszeichen begriffenen Theile durch die Gestalt des Körpers gegeben sind. Wir wollen zur Abkürzung $\int \lambda\mu\,\mathrm{d}M = A$, $\int (\mu^2+\psi^2)\,\mathrm{d}M = B$, $\int \psi\lambda\,\mathrm{d}M = C$, $\int (\psi^2+\lambda^2)\,\mathrm{d}M = G$, $\int \psi\mu\,\mathrm{d}M = H$, $\int (\lambda^2+\mu^2)\,\mathrm{d}M = K$ setzen.

Aus allem bisherigen folgt, daß man nachstehende vier Gleichungen erhält, welche allgemein alle (äußerst kleine) Schwingungen ausdrucken, die sich bei einem schwimmenden Körper eräugnen können.

A.) $(\pi N - \pi a^2\theta - (\pi c^3 - \pi f^3).\ z - pM)\,\mathrm{d}t^2 = pM\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}\theta$

B.) $-\pi(N(\delta - hz) + a^2 b\theta - (c^3 e + f^3 g)z - (i^3 k + i^3 n)y)\,\mathrm{d}t^2 = -pA\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}x - pB\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}z + pC\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}y$

C.) $pG\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}x + pA\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}z + pH\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}y = o$

D.) $\pi(N(\delta' - hy) + (c^3 e' + f^3 g')z - (i^3 k' + i^3 n)y)\,\mathrm{d}t^2 = pH\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}x + pK\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}y - pC\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}z.$

Da die vier veränderliche Größen θ, x, y, z in den Gleichungen (A), (B), (C), (D), nur vom ersten Grad vorkommen, so lassen sich diese Gleichungen, mit einander verbunden, leicht durch diejenigen Methoden integriren, welche Herr d'Alembert in den Denkschriften der Akademie zu Berlin 1748 und 1750 mitgetheilt hat. Ich werde hier diese Berechnungen nicht im Allgemeinen anstellen, da sich weiter keine Schwierigkeit dabei findet, als daß sie sehr weitläuftig ausfallen. Ich schränke mich nur auf die Untersuchung einiger besonderer Fälle ein.

170. I. Zus. Man setze, wie es bei den Schwankungen derer auf dem Meer gehenden Schiffe geschieht, die Fläche ABK theile den schwimmenden Körper in zween völlig gleiche Theile und die Schwerpunkte der beiden Ausschnitte eqr, iq't befinden sich, wenigstens beinahe, in der Fläche HPK, so erhält man genau $e' = o$, $g' = o$, und in der Gleichung (B) kann man die Glieder $i^3 ky$, $i^3 ny$ als solche, die ohne Vergleich kleiner als die andern sind, weglassen. Ueberdas erhält man aus der Eigenschaft des Schwerpunkts $\int \lambda \mu d M = o$, $\int \psi \lambda d M = o$. Unsere Gleichungen verwandeln sich also in diese

E.) $(\pi N - \pi a^2 \theta - (\pi c^3 - \pi f^3) z - pM) dt^2 = pM ddt$;

F.) $\pi (N(\delta - hz) + a^2 b\theta - (c^3 e + f^3 g) z) dt^2 = pB ddz$;

G.) $G ddx + H ddy = o$;

H.) $\pi N(\delta' - hy) - 2 i^3 k' y) dt^2 = pH ddx + pK ddy$.

welche ienen Resultaten entsprechen, die ich etwas anders in den angeführten beiden Abhandlungen gefunden habe.

Da man in der letzten Gleichung statt $pH ddx$ seinen Werth $- \frac{pH^2 ddy}{G}$ setzen kann, und H eine Größe ist, deren Quadrat zum wenigsten als eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung angesehen werden kann, so kann man das Glied $- \frac{pH^2 ddy}{G}$ ausser Acht lassen. Es sey zur Abkürzung der Rechnung

$\frac{\pi N - pM}{pM} = I$, $\frac{\pi a^2}{pM} = L$, $\frac{\pi c^3 - \pi f^3}{pM} = P$,

$\frac{\pi N \delta}{pB} = Q$, $- \frac{\pi a^2 b}{pB} = R$, $\frac{\pi (Nh + c^3 e + f^3 g)}{pB} = S$,

$= S$, $\frac{\pi N \delta'}{pK} = T$, $\frac{\pi (Nh + 2i^3 k')}{pK} = V$; so verwandlen sich unsere vier Gleichungen in

$$dd\theta - Idt^2 + L\theta dt^2 + Pz dt^2 = 0$$
$$ddz - Qdt^2 + R\theta dt^2 + Szdt^2 = 0$$
$$G ddx + H ddy = 0$$
$$ddy - T dt^2 + Vy dt^2 = 0$$

Die beiden ersten Gleichungen mit einander verbunden werden auf nachfolgende Art nach der sinnreichen Methode des Herrn d'Alembert integrirt. Die erste mit einem unbestimmten Koefficienten v multiplicirt, addire ich zu der zwoten; dieses gibt

$$v\,dd\theta - vIdt^2 + vL\theta dt^2 + vPz dt^2 + ddz - Qdt^2 + R\theta dt^2 + Szdt^2 = 0$$

Nun nehme ich an, man habe die Gleichung

$$vL\theta + vPz + R\theta + Sz = \varepsilon(v\theta + z)$$

wo ε ein unbestimmter Koefficient ist; dieses gibt, wenn man die gleichartigen Glieder mit einander vergleicht, diese zwo Gleichungen

$$vL + R = \varepsilon v; \quad vP + S = \varepsilon;$$

Hieraus ergeben sich zween Werthe von v, die ich v und v' nenne, und zween Werthe von ε, die ich ε und ε' nenne. Es sey $v\theta + z = s$; $v'\theta + z = s'$, so gibt die Gleichung $v\,dd\theta - vIdt^2$ &c. diese zwo neuen

$$dds + \varepsilon s\,dt^2 - (vI + Q).\,dt^2 = 0$$
$$dds' + \varepsilon' s'dt^2 - (v'I + Q).\,dt^2 = 0$$

Multiplicirt man nun die erste durch ds, die zwote durch ds', und integrirt hierauf zweimal, so findet man leicht

$$s = \left(\frac{vI + Q}{\varepsilon}\right).\ (1 - \mathrm{Cos.}\, t\sqrt{\varepsilon})$$

$s' =$

$$s' = \left(\frac{v'I+Q}{\varepsilon}\right) \cdot (1 - \mathrm{Cos}\, t\sqrt{\varepsilon})$$

und daher

$$\theta = \frac{vI+Q}{\varepsilon(v-v')} \cdot (1-\mathrm{Cos}\, t\sqrt{\varepsilon}) - \frac{v'I+Q}{\varepsilon(v-v')} \cdot (1-\mathrm{Cos}\, t\sqrt{\varepsilon})$$

$$z = \frac{(v'I+Q).v}{\varepsilon(v-v')} \cdot (1-\mathrm{Cos}\, t\sqrt{\varepsilon}) - \frac{(vI+Q).v'}{\varepsilon(v-v')} \cdot (1-\mathrm{Cos}\, t\sqrt{\varepsilon})$$

Diese Werthe von θ und von z sind vollständig, weil man für $t = 0$, $\theta = 0$ und $z = 0$ erhalten muß, und $t = 0$ die Werthe $\mathrm{Cos}\, t\sqrt{\varepsilon} = 1$, $\mathrm{Cos}\, t\sqrt{\varepsilon'} = 1$ gibt.

Was die letzten Fundamentalgleichungen $Gddx + Hddy = 0$, $ddy - Tdt^2 + Vydt^2 = 0$ betrifft; so lassen sich solche ohne Anstand nach einander integriren und geben

$$y = \frac{T}{V} \cdot (1 - \mathrm{Cos}\, t\sqrt{V})$$

$$x = -\frac{H.T}{G.V} \cdot (1 - \mathrm{Cos}\, t\sqrt{V})$$

171. II. Zus. Es ist aus den eben gefundenen Ausdrücken für θ und z klar, daß, wenn ε und ε' mögliche und beiahte Größen sind, die Bewegung θ des Schwerpunkts und die Umdrehungsbewegung z um die Axe GT sehr klein sind, wie man sie vorausgesetzt hat, und daß also der Körper Schwingungen machen muß, die ihn nicht der Gefahr aussetzen, umzustürzen. Wenn aber ε und ε' verneinte mögliche Größen wären, so würde man finden, daß die Werthe von z und θ von den Logarithmen abhiengen, und daß also solche desto größer werden müßten, ie größer t wird. Hieraus folgt, daß die Schwingungen nicht mehr unendlich klein seyn würden, wie man sie vorausgesetzt hat und daß der Körper keine sichere Lage hätte, oder dem

Umsturz ausgesetzt wäre. Man findet eben so, daß die Werthe von θ und z Logarithmen enthalten, wenn v und v′ und folglich auch ε und ε′ eingebildete Größen sind, oder wenn v und v′ möglich und beide einander gleich sind. Aber diese beiden letzten Fälle sind blos geometrisch und finden in unserer Aufgabe nicht statt.

Auf gleiche Art werden die Werthe von y und x unendlich klein, wenn V eine beiahte Größe ist; wäre aber V eine verneinte Größe, so hätte der Körper in Ansehung der beiden Axen GV, GY keine sichere Lage und müßte endlich umstürzen.

Man sieht, daß die Bedingungen der sichern Lage, wovon ich eben geredet habe, von der Lage des Schwerpunkts des ganzen Körpers in Ansehung des Schwerpunkts seines untergetauchten Theils abhängen. Allemal wann iener Punkt tiefer liegt als dieser, hat der schwimmende Körper nach allen Seiten Sicherheit gegen den Umsturz; wenn aber der erstere Punkt höher liegt als der letztere, so kann es diesem Körper an der Sicherheit fehlen; unsere Formeln zeigen die größte Höhe, welche man alsdann zwischen den beiden Schwerpunkten annehmen kann. Dieses Verfahren, die **Umsturzpunkte** (les métacentres) zu bestimmen, ist allgemein und sehr einfach.

172. III. Zus. Wenn die Vertikallinie GY durch den Schwerpunkt der Fläche geht, in welcher der Wasserspiegel den Körper schneidet, und iede der beiden Flächen ABK, HPK den Körper in zween gleiche und ähnliche Theile theilt, so sind die beiden Ausschnitte nqc, mqd, ingleichem die beiden Ausschnitte eq′r, iq′t einander gleich. Ferner hat man $\int \lambda \mu \, dM$ oder $A = o$, $\int \psi \lambda \, dM$ oder $C = o$, $\int \psi \mu \, dM$ oder $H = o$. Nimmt man also an, es sey im ersten Augenblick das Gewicht der aus ihrer Stelle verdrängten flüßigen Materie dem absoluten Gewicht des

Körpers

Körpers gleich, oder man habe $\pi N = pM$, so kann der Körper weder steigen noch sinken und man hat $l = o$. Zugleich erhält man $x = o$, alle anfänglich mitgetheilte horizontale Umdrehungsbewegung beiseitgesetzt. Unsere vier Fundamentalgleichungen (170.) werden also auf nachstehende zwo gebracht

$$ddz - Qdt^2 + Szdt^2 = o$$
$$ddy - Tdt^2 + Vydt^2 = o$$

und diese geben

$$z = \frac{Q}{S}(1 - \text{Cos}\, t\sqrt{S})$$
$$y = \frac{T}{V}(1 - \text{Cos}\, t\sqrt{V})$$

Der gegebene Körper hat also alsdann nur zwo Umdrehungsbewegungen, welche um die beiden horizontale Axen GT, GV erfolgen, die durch seinen Schwerpunkt durchgehen und auf einander senkrecht sind. Diese Schwingungen bleiben allemal sehr gering, und der Körper hat also eine sichere Lage, wenn S und V beiahte Größen sind. Sie sind vollkommen von eben der Art, wie die von einem schwingenden Pendel, und wenn man die Weiten ihrer ganzen Schwünge Z, Y nennt, so hat man offenbar $Z = \frac{2Q}{S}$, $Y = \frac{2T}{V}$.

Was die Zeiten betrifft, welche nöthig sind, die Winkel Z, Y zu durchlaufen, so sind solche leicht zu bestimmen. Denn damit $z = Z$ und $y Y$ werde, muß man $1 - \text{Cos}\, t\sqrt{S} = 2$, $1 - \text{Cos}\, t\sqrt{V} = 2$ oder $\text{Cos}\, t\sqrt{S} = -1$, und $\text{Cos}\, tV = -1$, folglich $t = \frac{180°}{\sqrt{S}}$, $t = \frac{180°}{\sqrt{V}}$ erhalten.

Substituirt man statt S und V ihre Werthe, so ergibt sich, daß die Zeit einer ieden Schwingung Z

durch

durch $180° \cdot \sqrt{\frac{\int p(\psi^2+\mu^2)\,dM}{\pi(Nh+2c^3e)}}$ ausgedruckt werde, und daß eben so die Zeit von ieder Schwingung $Y = 180° \cdot \sqrt{\frac{\int(\lambda^2+\mu^2)p\,dM}{\pi Nh+2i^3k}}$.

Da nun diese Werthe die anfänglichen Entfernungen δ, δ' des Schwerpunkts des untergetauchten Theils von den Flächen HPK, ABK enthalten, so ist klar, daß die Schwingungen ieder Art isochronisch seyn müssen, ihre Weiten mögen seyn wie sie wollen, wofern sie nur allemal sehr klein sind. Der Körper schwingt also nach Art der Pendeln. Um die Längen der Pendeln zu bestimmen, welche ihre Schwingungen mit diesem Körper in gleichen Zeiten machen, muß man bemerken, daß wenn ein einfaches Pendel, dessen Länge L ist, in dem ersten Augenblick von der Vertikallinie um die sehr kleine Größe δ absteht, und in der Zeit t den Winkel u beschreibt, dessen Halbmesser L ist, so ist die Gleichung für dieses Pendel $ddu = \frac{(\delta-u).dt^2}{L}$, oder $u = \delta(1-\text{Cof}\frac{t}{\sqrt{L}}$; und hieraus ergibt sich die Zeit einer ganzen Schwingung $= 180° \cdot \sqrt{L}$. Es ergibt sich also die Länge des Pendels, welches seine Schwingungen mit den Schwingungen Z in gleichen Zeiten macht, durch die Gleichung

$$L = \frac{\int p(\psi^2+\mu^2)\,dM}{\pi(Nh+2c^3e)}$$

und des mit den Schwingungen Y übereinstimmenden durch die Gleichung

$$L' = \frac{\int p(\lambda^2+\mu^2)\,dM}{\pi(Nh+2i^3k')}$$

173. Ich will diese Untersuchungen mit der Anwendung der Formeln des vorhergehenden §. auf ein besonderes Exempel beschließen.

Es sey der schwimmende Körper (fig. 62.) ein gleichartiges halbes elliptisches Sphäroid AKBPAH, das aus der Umdrehung der halben Ellipse AHB um seine Axe AB entstanden ist. Die Fläche AHBP, welche die Grundfläche des halben Sphäroids ausmacht und die Fläche MENI, worin der Wasserspiegel den Körper schneidet, sind gleichlaufend und um eine gegebene Größe ZO von einander entfernt. Der Punkt G ist der Schwerpunkt des halben Sphäroids, und die drei Axen GY, GV, GT sind die nämlichen wie oben. ABK ist der Durchschnitt des Körpers nach der Länge, HPK der Durchschnitt nach der Breite. Hier kommt es nun drauf an, die Werthe der Größen $N, h, c^3e, i^3k', \int(\psi^2+\mu^2)\,dM, \int(\lambda^2+\mu^2)\,dM$ zu finden. Wir wollen sie nach der Reihe suchen.

1) Um allzu viele Linien und ihre Verwirrung zu vermeiden, wollen wir MENI als einen unbestimmten Schnitt der halben Ellipsoide betrachten. Auf die Axe MN der krummen Linie MENI ziehe man eine Ordinate CD, und lege durch diese Ordinate die vertikale Fläche SCXCL, welche die vertikale Fläche ABK nach XR schneidet; so sieht man, daß CD auch die Ordinate eines Kreises seyn müsse, dessen Halbmesser RX ist. Also $(CD)^2 = (XR)^2 - (DR)^2$. Aber nach den Eigenschaften der Ellipse ist $(XR)^2 = ((BZ)^2 - (RZ)^2) \cdot \frac{(ZP)^2}{(BZ)^2} = ((BZ)^2 - (DO)^2) \cdot \frac{(ZP)^2}{(BZ)^2}$, und $(DR)^2 = ((BZ)^2 - (NO)^2) \cdot \frac{(ZP)^2}{(BZ)^2}$. Daher $(CD)^2 = ((NO)^2 - (DO)^2) \cdot \frac{(ZB)^2}{(BZ)^2}$. Man sieht hieraus, daß die krumme Linie MENI eine Ellipse ist, welche der Ellipse AHBP ähnlich ist. Es sey

BZ =

$BZ = a$, ZP oder $ZK = b$, $ZO = x$ und die Verhältnis des Umkreises zum Durchmesser $= n$; so hat man $AHBP = nab$, $MENI = nab. \frac{(NO)^2}{(BZ)^2} = \frac{na(b^2 - x^2)}{b}$; daher $dN = -\frac{nadx(b^2 - x^2)}{b}$ und $N = \frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - b^2x + \frac{x^3}{3}\right)$, indem man das vollständige Integral so macht, daß es für $x = b$ verschwindet. Man setze $x = ZO = f$ einer bekannten Linie, so erhalten wir die gesuchte Größe

$$N = \frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - b^2f + \frac{f^3}{3}\right);$$

$f = o$ gesetzt gibt für N dasienige was wir M genennt haben, und man hat also

$$M = \frac{2nab^2}{3}$$

2) Das elementarische Moment des festen Körpers MKNIME in Ansehung des Punkts Z ist $-\frac{naxdx(b^2 - x^2)}{b}$, dessen vollständiges Integral $\frac{na}{b}\left(\frac{b^4}{4} - \frac{b^2x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)$ ist. Man setze zuerst $x = o$ und dividire durch M oder $\frac{2nab^2}{3}$, so erhält man den Abstand des Schwerpunkts des festen Körpers AKBP AH vom Punkt Z, $= \frac{3}{8}b$. Nunmehr setze man $x = f$ und dividire durch N oder $\frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - b^2f + \frac{f^3}{3}\right)$, so erhält man den Abstand des Schwerpunkts des untergetauchten Theils vom Punkt

$$Z = \frac{3(b^4 - 2b^2f^2 + f^4)}{4(2b^3 - 3b^2f + f^3)}, \text{ also}$$

$$h = \frac{3}{8}b - \frac{3(b^4 - 2b^2f^2 + f^4)}{4(2b^3 - 3b^2f + f^3)}$$

3) Man

3) Man stelle sich vor, es sey der durch die Umdrehung der Fläche EIN um EI entstehende Ausschnitt aus unendlich vielen Dreiecken prs in senkrechter Richtung auf die Axe zusammengesetzt. Setzt man OI = l, ON = m, Op = u, so ist klar, daß $pr = \frac{m}{l} \cdot \sqrt{(l^2 - u^2)}$, und daß das elementarische Moment des halben Ausschnitts

$$= \frac{m^2}{l^2}(l^2 - u^2) \cdot \frac{m \cdot \sqrt{(l^2 - u^2)}}{3l} \cdot du \times z$$

$$= \frac{m^3 z}{3l^3} \cdot du \cdot (l^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}$$

und das Integral hiervon ist

$$\frac{m^3 z}{3l^3} \cdot \frac{u(l^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3}{4} l^2 \int du \sqrt{(l^2 - u^2)}$$

Setzt man u = l und erwägt, daß alsdann $\int du \sqrt{(l^2 - u^2)}$ die Fläche eines Quadranten bedeutet, dessen Halbmesser l ist, und verdoppelt das Integral, so findet man, daß die durch $c^3 e$ ausgedruckte Größe $= \frac{n m^3 l}{8}$. Für m setze man nun seinen Werth $\frac{a}{b}\sqrt{(b^2 - f^2)}$, für l seinen Werth $\sqrt{(b^2 - f^2)}$, so erhält man $c^3 e = \frac{n a^3 (b^2 - f^2)^2}{8 b^3}$.

4) Auf eben die Art findet man, daß die durch $i^3 k'$ ausgedruckte Größe $= \frac{n a (b^2 - f^2)^2}{8b}$.

5) Um $\int (\psi^2 + \mu^2)\, dM$ oder die Summe der Produkten aus den Theilgen der halben Ellipsoide in die Quadrate ihrer Entfernungen von der nach der Breite liegenden Axe GT zu bestimmen, betrachte ich, wie ich schon gethan habe, MENI als einen unbestimmten Schnitt des halben Sphäroids. Auf der zur Axe MN gehörigen Ordinate CD nehme ich nach

Will-

Willkühr zween einander unendlich nahe Punkte f, u. Setzt man nun ZO = x, OM oder ON = m, OD = q, Df = s und erinnert sich, daß ZG = $\frac{3}{8}$ b, so sieht man leicht, daß das Produkt des Elements fu in das Quadrat seiner Entfernung von der Axe GT durch ds $(q^2 + (\frac{3}{8} b - x)^2)$ ausgedruckt wird, wo nur s allein veränderlich ist. Integrirt man und setzt hierauf s = DC = $\frac{b}{a}\sqrt{(m^2 - q^2)}$, so erhält man $(q^2 + (\frac{3}{8} b - x)^2) \cdot \frac{b}{a}\sqrt{(m^2 - q^2)}$ für die Summe der Produkten aus allen Punkten von DC in die Quadrate ihrer Entfernungen von der Axe GT. Diese Summe mit dq multiplicirt und so integrirt, daß dabei nur q als veränderlich angesehen wird, gibt

$$\frac{b}{a}\left(\left(\frac{m^2}{4} + \left(\frac{3}{8} b - x\right)^2\right) \int dq \sqrt{(m^2 - q^2)} - \frac{q (m^2 - q^2)^{\frac{1}{2}}}{4}\right)$$

für die Summe der Produkten aus allen Punkten der elliptischen Fläche CDOE in die Quadrate ihrer Entfernungen von der Axe GT. Setzt man $q = m = \frac{a}{b}\sqrt{(b^2 - x^2)}$, und erwägt, daß alsdann $\int dq \sqrt{(m^2 - q^2)} = \frac{n . m^2}{4} = \frac{n a^2 (b^2 - x^2)}{4 b^2}$ und nimmt das vierfache Integral, so erhält man

$$\frac{n b}{a} \cdot \left(\frac{a^4 (b^2 - x^2)^2}{4 b^4} + \frac{a^2 (b^2 - x^2)}{b^2} \cdot \left(\frac{3}{8} b - x\right)^2\right)$$

für die Summe der Produkten aus allen Punkten der ganzen Ellipse MENI in die Quadrate ihrer Entfernungen von der Axe GT. Wenn man endlich mit dx multiplicirt, sodann so integrirt, daß man nur x dabei als veränderlich ansieht, und hierauf x = b setzt, so erhält man

$\int (\downarrow^2$

$$\int(\psi^2+\mu^2)\,dM=\frac{n.(64a^3b^2+19ab^4)}{480}$$

6) Auf eben die Art ergibt sich die Summe der Produkte aus den Theilgen der halben Ellipsoide in die Quadrate ihrer Entfernungen von der in die Länge genommenen Axe GV oder $\int(\lambda^2+\mu^2)\,dM=\frac{83nab^4}{480}$.

Aus der bisherigen umständlichen Ausführung folgt, wenn man zu einiger Abkürzung $2b^3-3b^2f+f^3=\alpha^3$, $a^2-b^2=\beta^2$, $b^2-f^2=\gamma^2$ setzt,

$$Z=\frac{16b^2\alpha^2\delta}{3(b^3\alpha^3+2\beta^2\gamma^4)};\quad Y=\frac{16\delta^2}{3b};$$

$$L=\frac{(64a^2b^5+19b^7).p}{60\pi(b^3\alpha^3+2\beta^2\gamma^4)};\quad L=\frac{83pb^4}{60\pi\alpha^3};$$

Es lassen sich aus diesen Formeln verschiedene wichtige Folgen ziehen, z. B. diejenigen Abmessungen des Sphäroids, welche am geschicktesten sind, ihm sanfte Schwingungen zu verschaffen, durch die vortheilhafteste Verbindung ihrer Weite mit ihrer Dauer; eine an sich artige Untersuchung, die aber auch bei den Schiffen in der Anordnung ihrer Beladung ihre sehr nützliche Anwendungen findet. Ihre Ausführung wäre aber für unsere ietzige Absicht zu weitläuftig.

Fünfzehntes Kapitel.

Von der Gestalt der Erde, in so weit solche von den Gesetzen der Hydrostatik abhängen kann.

174.

Die Erde scheint ihrem größten Theil nach eine feste Masse auszumachen. Wenn man aber einmal die ungeheure Meeresflächen erwägt, ihre Tiefen, ihre allgemeine und gegenseitige Kommunikation, und die Menge von Flüssen, welche die Oberfläche der Erde durchschneiden; und dann fürs andere im Innern der Erde Körper aus dem Meer oder Ueberbleibsel von Meeresprodukten aller Art antrift; so wird man sehr geneigt zu vermuthen, daß die Erde ursprünglich eine flüßige Masse war, die sich durch die Länge der Zeit verhärtet hat, und, um in ihren ietzigen Zustand zu gelangen, dieienige Gestalt hat annehmen müssen, welche die Gesetze des Gleichgewichts flüßiger Massen erfoderten. Wenn man also die Erde aus diesem Gesichtspunkt betrachtet, so läßt sich ihre Gestalt aus den Lehren der Hydrostatik, die wir bisher vorgetragen haben, bestimmen.

Wir werden Schweren (pésanteurs) Kräfte nennen, welche im Grund von eben der Beschaffenheit sind, wie die Schwerkraft (gravité in der Galileischen Lehre, die aber übrigens in der Stärke oder in der Richtung beständig oder veränderlich seyn können.

175. Huygens und Newton sind die Ersten, welche die Auflösung der Aufgabe, wovon hier die Rede ist, unternommen haben; ihre Auflösungen verdie-

verdienen bekannt zu seyn, wiewohl sie von dieser Theorie gegenwärtig, da sie beträchtliche Fortschritte gemacht hat, nur einen äußerst geringen Theil ausmacht. Huygens baut seine Auflösung auf folgenden Satz: **Wenn eine flüßige schwere Masse in allen ihren Punkten im Gleichgewicht ist, so muß ihre Oberfläche die Richtungen von den Schweren der daselbst liegenden Theilgen senkrecht schneiden.** Newton gründet sich auf folgende Voraussetzung: **Wenn eine flüßige schwere Masse im Gleichgewicht ist, so halten iede zwo gegen einen und eben den festen Punkt als Mittelpunkt laufende Säulen einander gegenseitig und ohne Rücksicht auf den übrigen Theil der flüßigen Masse im Gleichgewicht.** Wir wollen nun zeigen, wie ieder dieser Sätze auf die Untersuchung von der Gestalt der Erde angewendet wird.

176. I. Aufg. **Die Erde als flüßig angenommen, habe die Gestalt eines durch Umwälzung entstandenen Körpers, und ieder Punkt sey der Wirkung einer gegebenen Schwere und der Schwungkraft unterworfen; man soll ihre Gestalt finden.**

Auflösung nach Huygens Grundsatz.

Es sey (fig. 63.) C der Mittelpunkt der Erde, DAEB einer ihrer Meridiane oder der Durchschnitt dieses Planeten mit einer Fläche, welche durch ihre Umdrehungsaxe DE geht. Die Schwere habe an der Stelle M irgend eine Richtung MO; man drucke diese Kraft durch MF aus und zerlege sie in zwo andere MH, MK, welche auf die beiden Meridianaxen DE, AB senkrecht sind. Die Schwungkraft des Punkts M, welcher sich um DE im Kreise herumbewegt, ist

bekanntlich der Ordinate MP proportional; ich drücke diese Kraft, welche grade in entgegengesetzter Richtung der Kraft MH wirkt, durch HI aus. Man sieht, daß alsdann der Punkt M von den zwo Kräften MI, MK getrieben wird; hieraus entsteht die zusammengesetzte Kraft MV, welche auf das Element Mm des Meridians senkrecht seyn muß. Man setze CP $= x$, $PM = y$, die Kraft $MF = \phi$, den Winkel OMP, für den Halbmesser 1, $= z$, und f sey die für eine gegebene Entfernung k gegebene Schwungkraft; so hat man Kraft $MH = \phi . \cos z$; Kraft $MK = \phi . \sin z$; Kraft $HI = \frac{fy}{k}$; Kraft $MI = \phi . \cos z - \frac{fy}{k}$. Wenn man nun die Ordinate mp zieht, so geben die ähnlichen rechtwinklichten Dreiecke Mrm, VKM, $Mr. (-dx) : rm (dy) = KV \left(\phi . \cos z - \frac{fy}{k}\right) : MK (\phi . \sin z)$;

hieraus ergibt sich für die Gleichung des Meridians

$$\left(\phi . \cos z - \frac{fy}{k}\right) dy = -\phi \sin z . dx$$

Auflösung nach Newtons Grundsatz.

Es sey (fig. 64.) DAER der Meridian; DE die Umdrehungsaxe; C der Mittelpunkt der Erde, gegen den die Polarsäule DC und irgend eine andere MC streben, welche beide einander im Gleichgewicht erhalten müssen. Man nehme auf CM einen beliebigen Punkt R, dessen Schwere nach RO gerichtet ist und die ich durch Rr ausdrücke; man zerlege diese Kraft in zwo andere Rh, Ri, deren eine nach MC gerichtet ist, und die andere auf MC senkrecht. Man drücke durch Rz die Schwungkraft des Punkts R aus, welche nach der Richtung QR wirkt, senkrecht auf die

Umdre-

Umdrehungsaxe DE, und zerlege solche in zwo andere Rs, Ru, deren eine wie CM gerichtet, die andere auf CM senkrecht ist; so ist klar, daß die Kräfte Ri, Ru nichts zum Gewicht des Kanals RC nach der Richtung MC beitragen, und daß man nur auf die Kräfte Rh, Rs Rücksicht zu nehmen hat. Man setze die Abscisse CP = x; die Ordinate PM = y; den Winkel CRO = p; CR = r; RQ = u; Kraft Rr = φ; die Schwungkraft für die Entfernung k, = f; so erhält man Kraft Rh = φ. Cos p, Kraft Rz = $\frac{fu}{k}$, Kraft Rs = $\frac{fu^2}{kr}$. Es ist also der Druck des Kanals RC auf den Punkt C $fdr\left(\varphi.\,\mathrm{Cos}\,p - \frac{fu^2}{kr}\right)$ oder $fdr\left(\varphi.\,\mathrm{Cos}\,p - \frac{fy^2r}{k(x^2+y^2)}\right)$, wo man das Integral so nehmen muß, daß x und y dabei als beständige Größen angesehen werden; um hiernächst das Gewicht des ganzen Kanals MC zu erhalten, muß man r = CM = $\sqrt{(x^2+y^2)}$ setzen; dies gibt einen Ausdruck, welchen man dem bekannten Gewicht der Säule DC gleich setzt.

177. Zus. Um eine ganz einfache Anwendung von dieser Aufgabe zu machen, setze man, es sey die Schwere φ unveränderlich und gegen den Mittelpunkt der Erde C gerichtet (fig. 63. und 64.); so erhält man (fig. 63.)

$\sin z = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$; $\mathrm{Cos}\,z = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$;

und die nach Huygens Grundsatz gefundene Gleichung des Meridians verwandelt sich in

$$\frac{\varphi y\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{fy\,dy}{k} = -\frac{\varphi x\,dx}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

oder $\frac{\phi\,(x\,dx + y\,dy)}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{f y\,dy}{k} = o$

und das Integral hiervon ist

$$\phi\sqrt{(x^2+y^2)} - \frac{fy^2}{2k} = A$$

Die beständige Größe A muß so beschaffen seyn, daß man, wenn $y = o$ gesetzt wird, $x = CD$ einer beständigen Größe erhält.

Fig. 64. hat man $p = o$ und die Größe $\int dr \left(\phi . \mathrm{Cos}\, p - \frac{fy^2 r}{k(x^2+y^2)}\right)$ verwandelt sich sofort in $\phi r - \frac{fy^2 r^2}{2k(x^2+y^2)}$. Setzt man $r = CM = \sqrt{(x^2+y^2)}$ so erhält man $\phi . \sqrt{(x^2+y^2)} - \frac{fy^2}{2k}$ für das ganze Gewicht der Säule CM, welches dem bekannten Gewicht der Säule DC gleich seyn muß; hieraus ergibt sich wie vorhin für die Gleichung des Meridians

$$\phi\sqrt{(x^2+y^2)} - \frac{fy^2}{2k} = A.$$

178. I. Anmerk. Huygens und Newtons Grundsätze, welche uns unter der Voraussetzung des vorhergehenden Zusatzes die nämliche Gleichung für den Meridian gegeben haben, geben auf gleiche Art die nämlichen Gleichungen unter mehrern andern Voraussetzungen von Schweren. Es gibt aber Fälle, wo die Resultate verschieden sind. Huygens Grundsatz bringt das Gleichgewicht auf die Oberfläche der flüßigen Masse, Newton aber beingt es innerhalb auf einen als Mittelpunkt angenommenen Punkt; aber diese beiden Bedingungen sind einzel genommen, ja in gewissen Fällen nicht einmal mit einander verbunden zureichend, das Gleichgewicht in allen Stellen der Masse zu erhalten, s. die Mém. de l'Acad. pour l'année 1734. und

den

den Traité de la figure de la Terre de Mr. Clairaut page 31.

179. II. Anmerk. Das Gleichgewicht findet in allen Punkten der Masse statt, wenn man findet, daß ieder darin angenommene Punkt (und nicht blos ein fester und bestimmter Punkt, wie Newton gethan hat) im Gleichgewicht ist, oder daß er von allen möglichen Seiten gleichstark gedruckt wird.

Aus diesem allgemeinen Satz, welchen Herr Maclaurin zuerst deutlich entwickelt hat, folgt:

1) daß in ieder flüßigen Masse OAN (fig. 65.), welche irgend welchen Kräften unterworfen und im Gleichgewicht ist, der winklichte Kanal OMN der auf beiden Seiten von der Fläche begrenzt wird, für sich abgesondert im Gleichgewicht ist. Denn da die ganze Masse im Gleichgewicht ist, so wird das Theilgen M von allen Seiten gleichstark gedruckt, und diese Gleichheit des Drucks muß die nämliche bleiben, wenn man sich vorstellt, der Kanal OMN bleibe allein flüßig und der übrige Theil der Masse verhärte.

2) Daß der triangulare Kanal OMR, wovon der eine Winkel O an der Oberfläche der flüßigen Masse liegt, im Gleichgewicht ist. Denn wenn man MR bis zur Oberfläche der flüßigen Masse verlängert, so sind die beiden winklichten Kanäle OMN, ORN, ieder für sich im Gleichgewicht. Daher (†) P. OM = P. NM, und P. OR = P. NR. Nun ist P. NM = P. NR

(†) Ich bezeichne zur Abkürzung den Druck einer Säule durch den vorgesetzten Buchstaben P.

P. NR + P. RM = P. OR + P. RM; also P. OM = P. OR + P. RM, das ist, der Punkt M leidet von der Säule OM und von den beiden Säulen OR, RM, welche auf diesen Punkt eben so wirken, als wenn sie in einer graden Linie lägen, gleichen Druck. Es kann also in dem Kanal OMR weder nach der Richtung OMR, noch nach der Richtung ORM Bewegung statt finden, und der Kanal ist demnach im Gleichgewicht.

3) Daß der triangulare Kanal MRQ, im Innern der Masse genommen, im Gleichgewicht ist. Denn wenn man MR, MQ, QR bis zur Oberfläche der flüßigen Masse verlängert, so müssen die drei Kanäle OMN, OQZ, NRZ, wie man No. I. gesehen hat, im Gleichgewicht seyn. Folglich P. OM = P. NM oder P. OQ + P. QM = P. NR + P. RM; und P. OQ = P. RQ + P. ZR, oder P. OQ = P. RQ + P. NR. Diesen Werth von P. OQ in die vorhergehende Gleichung gesetzt, gibt P. QM + P. RQ = P. RM. Es ist also die Summe der Druckungen von den Säulen QM, RQ auf den Punkt M dem Druck der Säule RM auf eben diesen Punkt gleich, und daher der Kanal QMR im Gleichgewicht.

4) Daß der Kanal OMRQN (fig. 66.) von welcher Gestalt er auch seyn mag, er sey gradlinigt oder krummlinigt, nur daß er auf beiden Seiten von der Oberfläche der flüßigen Masse begrenzt wird, im Gleichgewicht ist. Denn, wenn man die Diagonalen OR, OQ zieht, so müssen alle Kanäle OMR, ORQ, OQN im Gleichgewicht seyn. Folglich P. OM = P. RM + P. OR; P. OR = P. QR + P. OQ; P. OQ = P.

= P. NQ. Demnach P. OM = P. RM + P. QR + P. NQ; das ist, der Druck der Säule OM auf den Punkt M ist der Summe der Druckungen von den Wassersäulen RM, QR, NQ auf eben diesen Punkt gleich, und hieraus entsteht das Gleichgewicht des Kanals OMRQN. Dieser Schluß findet allemal statt, selbst in dem Fall, wo alle Seiten des Polygons oder der krummen Linie OMRQN nicht in einer Ebene lägen.

5) Daß der Kanal MRQTV (fig. 67.) von irgend welcher Gestalt, innerhalb der flüßigen Masse so genommen, daß er in sich selbst zurückgeht, im Gleichgewicht ist. Denn wenn man die Diagonalen MQ, MT zieht, so sieht man, daß, da alle trianguläre Kanäle MRQ, MQT, MTV im Gleichgewicht sind, der Druck der Säule RM auf den Punkt M der Summe der Druckungen von den Säulen RQ, QT, TV, VM auf eben diesen Punkt gleich ist; hieraus entsteht das Gleichgewicht in dem Kanal MRQTV, wie auch die Anzahl und Lage seiner Seiten beschaffen seyn mag.

180. III. Anmerk. Man sieht, daß Newtons Satz, oder das Gleichgewicht zwoer Säulen gegen einen Mittelpunkt nur ein besonderer Fall von No. 1. im vor. §. ist, und daß der Huygensche Satz oder die senkrechte Richtung der Schwere auf die Oberfläche der flüßigen Masse statt findet, wenn No. 4. vor. §. wirklich eintritt, das ist, wenn ein Kanal von willkührlicher Gestalt, welcher an beiden Seiten von der Oberfläche begrenzt wird, im Gleichgewicht ist; denn man kann sich vorstellen, dieser Kanal liege unmittelbar auf der Oberfläche der flüßigen Masse wie

z. B. OKN (fig. 66.) und alsdann erfodert der Stand des Gleichgewichts nothwendig, daß die Schwere in iedem Punkt dieses Kanals senkrecht sey, ohne welches ein Strohm nach der Richtung OKNA oder der entgegengesetzten NKOA erfolgen würde.

Die Geometer, welche über diese Materie geschrieben haben, und insbesondere Hr. Clairaut, haben von diesen Eigenschaften der Kanäle sehr vielen Gebrauch gemacht, um das Gleichgewicht der Erde kennen zu lernen und ihre Gestalt unter verschiedenen Voraussetzungen von Schweren zu bestimmen. Man kann aber eben den Zweck auf eine bequemere Weise erreichen, wenn man den Grundsatz von der Gleichheit des Drucks auf iedes Theilgen unmittelbar anwendet. Wir wollen diese Methode auf eine allgemeine Aufgabe anwenden.

181. II. Aufg. **Wenn sich die flüßige Masse ADBE (fig. 68.) um die Axe DE dreht und ieder ihrer Punkte der Wirkung der Schwungkraft und einer Schwere unterworfen ist, welche gegen den festen Mittelpunkt C gerichtet und einer gegebenen Funktion der Entfernung von diesem Punkt proportional ist: ihre Gestalt unmittelbar durch den Grundsatz von der Gleichheit des Drucks zu finden.**

Es sey N irgend ein Punkt des Planets, und man setze, es sey der Ort für alle Punkte, wo der Druck der nämliche ist wie in N, die Lage oder krumme Linie KTOH. Aus dem Mittelpunkt C ziehe man die grade Linie CNM und aus den Punkten N, M die auf die Umdrehungsaxe DE senkrechten graden Linien NQ, MP. Man setze $CQ = s$, $QN = z$, $CN = u$, die Zentralkraft des Punkts $N = \Phi$, eine Funktion von s und z; die Zentrifugalkraft $= f$ für die gegebene

Entfer-

Entfernung k; der Druck in N = p, eine Funktion von s und z, so daß $dp = Pds + Qdz$, wo P und Q solche Funktionen von s und z sind, daß $Pds + Qdz$ ein vollständiges Differential sey, sonsten wäre p eine eingebildete Größe, und es könnte kein Gleichgewicht statt finden. Man betrachte den in N befindlichen Theil der flüßigen Masse als ein kleines Rektangel Nnrq, dessen Höhe Nn = ds und die Grundlinie Nq = dz ist, so ist klar, daß Pds, das Differential von p, wobei nur s als veränderlich angenommen wird, das Element des Drucks auf ieden Punkt von nr ausdruckt; und daß Qdz, das Differential von p, wobei nur z als veränderlich angenommen wird, das Element des Drucks auf ieden Punkt von qr ausdruckt. Es ist daher der Elementardruck gegen nr = Pds. dz und der Elementardruck gegen qr = Qdz. ds. Ich zerlege die Zentralkraft ϕ in zwo andere, deren eine nach Nn die andere nach Nq gerichtet ist; die erste ist $-\frac{\phi s}{u}$; die andere $-\frac{\phi z}{u}$, zu dieser muß man noch die Zentrifugalkraft des Punkts N, welche $\frac{fz}{k}$ ist, addiren. Alsdann ist die absolute Kraft, welche das Element Nnrq nach der Richtung Nn treibt $-\frac{\phi s.\, dsdz}{u}$, und die absolute Kraft, welche es nach der Richtung Nq treibt, ist $\left(\frac{fz}{k} - \frac{\phi z}{u}\right)$. ds. dz. Damit nun ein Gleichgewicht entstehe, so müssen diese beiden Kräfte ihren korrespondirenden und entgegengesetzten Druckungen gleich seyn. Also $-\frac{\phi s}{u}$. ds dz = Pdsdz, oder $-\frac{\phi s}{u} = P$; $\left(\frac{fz}{k} - \frac{\phi z}{u}\right)$. dsdz = Qdzds, oder $\frac{fz}{k} - \frac{\phi z}{u} = Q$. Folglich $dp = -\frac{\phi sds}{u} +$

(fz

$\left(\frac{fz}{k} - \frac{\phi z}{u}\right) dz = -\frac{\phi(sds + zdz)}{u} + \frac{fzdz}{k} =$
$-\phi du + \frac{fzdz}{k}$, und $p = A - \int \phi du + \frac{fz^2}{2k}$,
eine Größe, welche für alle Punkte von einer und eben der krummen Linie unveränderlich seyn muß. Diese Bedingung führt uns auf die Natur der äußern krummen Linie ADBE und der innern KTOH.

Alles übrige unverändert beibehalten sey CP $= x$, PM $= y$, CM $= r$ die Zentralkraft in M $= F$, so wird der allgemeine Werth von p für den Punkt M, $p = A - \int F dr + \frac{fy^2}{2k}$. Nun ist klar, daß in der obern und letzten Lage ADBE der Druck $=$ Null seyn muß. Es ist daher die Gleichung dieser krummen Linie $A - \int F dr + \frac{fy^2}{2k} = o$. Diese Gleichung muß allen Punkten der krummen Linie ADBE zugehören; und um die beständige Größe A zu bestimmen, muß man einen festen Punkt haben, durch den die krumme Linie durchgehen muß. Es sey A dieser Punkt; man setze CA $=$ b und für eben diesen Punkt $y = b$, $\int F dr = B$ einer bekannten Größe; so erhält man $A - B + \frac{fb^2}{2k} = o$, oder $A = B - \frac{fb^2}{k2}$. Die Gleichung für die krumme Linie ADBE zwischen r und y ist also

$$B - \frac{fb^2}{2k} - \int F dr + \frac{fy^2}{2k} = o$$

Um die Gleichung für die krumme Linie KTOH zu finden, nehme man wieder die Gleichung

$$p = A - \int \phi du + \frac{fz^2}{2k^2}$$

oder $p = B - \frac{fb^2}{2k} - \int \phi du + \frac{fz^2}{2k}$

Wir

Wir wollen K als einen bestimmten Punkt annehmen; man setze CK = c und für eben diesen Punkt z = c, $\int \phi du = C$ einer bekannten Größe; daraus gibt sich $p = B - \frac{fb^2}{2k} - C + \frac{fc^2}{2k}$. Die Gleichung für die krumme Linie KTOH zwischen u und z ist also

$$B - \frac{fb^2}{2k} - C + \frac{fc^2}{2k} = B - \frac{fb^2}{2k} - \int \phi du + \frac{fz^2}{2k}$$

oder $$C - \frac{fc^2}{2k} - \int \phi du + \frac{fz^2}{2k} = o$$

Wir wollen von diesen Formeln eine oder ein Paar Anwendungen machen.

182. I. Zus. Man setze, es sey die Zentralkraft in allen Punkten des Planeten unveränderlich und der natürlichen Schwere g gleich; so hat man F = g, $\int F dr = gr$, B = gb, und für die krumme Linie ADBE erhält man die Gleichung

$$gb - \frac{fb^2}{2k} - gr + \frac{fy^2}{2k} = o.$$

Eben so die Gleichung für die krumme Linie KTOH

$$gc - \frac{fc^2}{2k} - gu + \frac{fz^2}{2k} = o.$$

Um die Verhältnis des Halbmessers CA des Aequators zur halben Axe CD zu bestimmen, muß man bemerken, daß man für CA, r = y = b erhält; und für CD, y = o, welches $CD = r = b - \frac{fb^2}{2kg}$ gibt.

Daher $CA : CD = b : b - \frac{fb^2}{2kg} = 1 : 1 - \frac{fb}{2kg}$,

oder (wenn man die willkührliche und gegebene Größe k = b setzt)

CA:

$$CA : CD = 1 : 1 - \frac{f}{2g}$$

Wenn wir nun die Verhältnis, welche in dieser Proportion herrscht, in Zahlen ausdrucken wollen, so müssen wir uns (wie in mehrern mechanischen Schriften bewiesen ist) erinnern, daß wenn t die Zeit bedeutet, welche ein Körper, von der Schwere g getrieben, nöthig hat um von der Höhe b herabzufallen; T die Zeit, welche ein in Bewegung gesetzter Körper braucht, um den ganzen Umkreis C zu durchlaufen, dessen Halbmesser $= b$ ist; f seine Zentrifugalkraft, alsdann diese Gleichungen sich ergeben $g = \frac{2b}{t^2}$; $f = \frac{C^2}{bT^2} = \frac{4b\pi^2}{T^2}$ wo π die Verhältnis des Umkreises zum Durchmesser bedeutet; $\frac{f}{g} = \frac{2\pi^2 t^2}{T^2}$

Wir müssen uns ferner erinnern, daß die schweren Körper in der ersten Sekunde ihres Falls ohngefähr 15 Fus durchlaufen, und daß ieder Grad eines größten Erdumkreises ohngefähr 57000 Toisen hält; endlich müssen wir erwägen, daß hier $T = 24$ Stunden die Umdrehungszeit der Erde um ihre Axe ist. Berechnet man nach diesen Voraussetzungen den Bruch $\frac{2\pi^2 t^2}{T^2}$, so findet man solchen ohne merklichen Fehler $= \frac{1}{289{,}49}$; folglich

$$CA : CD = 1 : 1 - \frac{1}{578{,}98} = 578{,}98 : 579{,}98\ (*)$$

sehr nahe $= 579 : 578$

Diese

(*) Sollte heißen 578,98 : 577,98.

Diese Verhältnis weicht von derienigen, welche sich auf Beobachtungen gründet, wie man bald sehen wird, sehr weit ab, und es ist also die Voraussetzung, woraus man solche hergeleitet hat, der Natur nicht angemessen.

183. II. Zus. Es sey die Zentralkraft der Entfernung vom Mittelpunkt proportional, und man setze, in der Entfernung b sey sie der gemeinen Schwere g gleich, so erhält man $F = \frac{gr}{b}$, $\int F dr = \frac{gr^2}{2b}$; $B = \frac{gb}{2}$, und für die krumme Linie ADBE die Gleichung

$$\frac{gb}{2} - \frac{fb^2}{2k} - \frac{gr^2}{2b} + \frac{fy^2}{2k} = 0$$

und eben so für die krumme Linie KTOH

$$\frac{gc}{2} - \frac{fc^2}{2k} - \frac{gu^2}{2b} + \frac{fz^2}{2k} = 0$$

Sucht man unter dieser Voraussetzung die Verhältnis der Erdaxen in Zahlen, so fände man beinahe CA : CD = 425 : 424 welches gleichfalls von den Resultaten der Beobachtungen abweicht.

Ueber diese ganze Materie verdient eine treffliche Abhandlung von Herrn Euler: Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides (Acad. de Berlin 1755) nachgelesen zu werden.

184. III. Aufg. **Vermittelst angestellter Beobachtungen die Verhältnis der Erdaxen zu bestimmen, so daß dieser Planet als ein elliptisches Sphäroid angesehen wird, das wenig von einer Kugel verschieden ist.**

Es sey ADBE (fig. 69.) ein Meridian der Erde; DE ihre Axe, AB der Durchmesser des Aequators; MN, mn zween Bögen von einer gleichen Anzahl

Grade,

Grade, deren Längen man gemessen hat, und die klein genug sind, um als kleine grade Linien oder als kleine Kreisbögen angesehen zu werden; MO, NO, mo, no die Halbmesser der abgewickelten Linie, welche zu den Punkten M, N, m, n gehören; MP, mp Ordinaten, welche auf den Durchmesser des Aequators senkrecht sind. Man setze $CD = a$; $CA = b$; $b^2 - a^2 = c^2$; $CP = x$; $Cp = u$; $MO = R$, $mo = r$, der Sinus totus $= 1$; der bekannte Winkel MSB der Breite des Punkts $m = q$: die Länge des Bogens $MN = M$, die des Bogens $mn = m$; so erhält man zuerst wegen der ähnlichen Dreiecke oder Ausschnitte MON, mon,

$$R : r = M : m \text{ oder } Rm = rM$$

die Eigenschaft der Ellipse gibt

$$PM = \frac{a}{b}\sqrt{(b^2 - x^2)};\quad SP = \frac{a^2 x}{b^2};$$

$$pm = \frac{a}{b}\sqrt{(b^2 - u^2)};\quad sp = \frac{a^2 u}{b^2};$$

$$R = \frac{(b^4 - c^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab^4};\quad r = \frac{(b^4 - c^2u^2)^{\frac{3}{2}}}{ab^4}.$$

Man hat überdas $SP : PM = \text{Cof } p : \text{sin } p$; und dies gibt

$$x^2 = \frac{b^4(\text{Cof } p)^2}{b^2 - c^2(\text{sin } p)^2};\quad \text{ebenso } u^2 = \frac{b^4 \cdot (\text{Cof } q)^2}{b^2 - c^2(\text{sin } q)^2}.$$

Substituirt man in der Gleichung $Rm = rM$ für R und r ihre Werthe für x^2 und u^2 ihre Werthe, bedient sich zur Simplificirung der Zahlenrechnungen der Auflösung in Reihen, und bemerkt, daß man wegen der geringen Abweichung der Ellipsoide von einer Kugel die Glieder weglassen kann, welche das Quadrat und höhere Potenzen von c^2 enthielten, so findet man nach gehöriger Rechnung

$$c^2 = \frac{2b^2(m - M)}{3m(\text{Cof } p)^2 - 3M(\text{Cof } q)^2},$$

$$a^2 =$$

$$a^2 = b^2 - \frac{2\,b^2\,(m - M)}{3\,m\,(\mathrm{Cos}\,p)^2 - 3\,M\,(\mathrm{Cos}\,q)^2}$$

und $b : a = 1 : \sqrt{\left(1 - \frac{2\,(m - M)}{3\,m\,(\mathrm{Cos}\,p)^2 - 3\,M\,(\mathrm{Cos}\,q)^2}\right)}$

Nun ist nach Herrn Bouger (Figure de la Terre page 274) der erste Grad der Breite 56753 Toisen, und nach Herrn von Maupertuis der Grad der Breite am Polarzirkel = 57437,9 Toisen. Setzt man also m = 56753 Toisen; M = 57437,9 Toisen; q = 0; p = $66\frac{1}{2}$ Grad, und daher Cos q = 1; Cos p = 0, 39875 und substituirt diese Werthe in der vorhergehenden Proportion, so verwandelt sich solche sehr nahe in b : a = 179 : 178. Dieses ist die Verhältnis der Erdaxen, welche sich aus Vergleichung derer um Peru und den Pol angestellten Beobachtungen ergeben. Man erhält fast ebendasselbe, wenn man die in Frankreich angestellten Beobachtungen mit jenen von Peru und dem Pol vergleicht.

Es ist klar, daß sich aus der Anzahl Grade der Bögen m und M und ihren absoluten Längen auch die absoluten Längen der Halbmesser R, r ergeben. Hat man also die Verhältnis von b zu c gefunden, so hat man auch die absoluten Längen von b, c und a, und folglich alle Abmessungen vom Sphäroid des Erdkörpers.

Die Bestimmung dieses Werks erlaubt mir keine ausführlichere Untersuchungen über die Frage von der Gestalt der Erde. Ich erinnere nur noch, daß seit mehr als hundert Jahren, die man sich schon mit dieser Frage beschäftigt, die Geometer und Astronomen immer noch die größten Schwierigkeiten finden, nicht nur die Beobachtungen aus der Theorie zu erklären, sondern auch die Resultate von Messungen der Grade des Meridians, welche man in verschiedenen Erdstrichen vorgenommen hat, unter einander zu vereinigen. Der größte Theil dieser Messungen, unter einander

verglichen, verstatten, der Erde die Gestalt eines zusammengedruckten elliptischen Sphäroids beizulegen, dessen Axen sehr nahe die nur gefundene Verhältnis haben. Einige schließen diese Hypothese aus, und sogar Unähnlichkeit in den Meridianen. Man kann hierüber mehrere besondere Werke nachschlagen, deren Erwähnung zu weitläuftig seyn würde; s. die Abhandlungen der Akademien zu Paris, Berlin, Petersburg und vorzüglich den Artikel Figure de la Terre in der Encyclopädie.

Ende der Hydrostatik.

Zwote

Zwote Abtheilung

Hydraulik

Zwote Abtheilung.

welche die

Hydraulik

enthält.

185.

Unter dem Namen der **Hydraulik** versteht man gewöhnlich nur die Lehre von der Bewegung der Wasser; ich nehme aber dieses Wort hier in einer weitern Bedeutung und verstehe darunter denienigen Theil der Mechanik, welcher überhaupt die Gesetze der Bewegung flüßiger Massen bestimmt, es mögen solche elastisch oder unelastisch seyn.

Da die Bewegung der Wasser den wichtigsten Gegenstand dieser Art für die gesellschaftlichen Bedürfnisse ausmacht, so wird hier hauptsächlich von derselben gehandelt werden. Was ich aber davon sagen werde, paßt zugleich auf alle unelastische flüßige Massen, und ich werde öfters das Wort **Wasser** als eine allgemeine Benennung gebrauchen, um damit diese Arten flüßiger Massen anzudeuten. Die Bewegung elastischer flüßiger Massen soll besonders behandelt werden. Mit diesen allgemeinen Theorien werde ich entweder zugleich oder hinten nach Untersuchungen verbinden, die zur Hydraulik gehören und die durch ihre Wichtigkeit oder ihren praktischen Nutzen vielleicht die Aufmerksamkeit solcher Leser rege machen werden, welche sich nicht auf die blose Untersuchung spekulativer Wahrheiten allein einschränken, sondern sich zugleich um die Anwendung solcher Wahrheiten bekümmern.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Lehren von der Bewegung flüßiger Massen.

186.

Der Grundsatz von der Gleichheit des Drucks; worauf wir im ersten Theil dieses Werks die Gesetze des Gleichgewichts flüßiger Massen gebaut haben, kann auch gebraucht werden, die Gesetze der Bewegung flüßiger Massen mittelst analytischer Formeln zu entwickeln. Man wird unten im fünften Kap. eine Probe hiervon finden. Da aber dergleichen Formeln, in ihrer Allgemeinheit ausgedruckt, sehr verwickelt und, selbst bei den einfachsten Fällen, beinahe ganz unbrauchbar sind, so werde ich gleich anfangs untersuchen, ob sich nicht ohne merkliche Fehler für die Ausübung die Bewegung der flüßigen Massen auf die Grundsätze der Mechanik und der Geometrie bauen lasse, wenn man sich in Ansehung gewisser zum Grund liegender Hypotheſen nicht zu sehr an eine allzu ängstlich gesuchte Schärfe bindet. Diese Ordnung scheint mir für ein Werk, das vorzüglich für die Ausübung bestimmt ist, die natürlichste: Gegenstände, die nur zum Spiel des Verstandes dienen, finden hier keinen Platz oder werden nur im Vorübergehen berührt.

187. Wenn eine flüßige Masse aus einem Gefäß durch eine im Boden oder in den Wänden angebrachte Oeffnung auslauft, so hat man beobachtet, daß ihre Oberfläche beständig horizontal bleibt, wenigstens nicht merklich davon abweicht, wenn man den Umstand bei Seit setzt, welcher macht, daß oberhalb der Oeff-

nung, wann die Oberfläche der flüßigen Masse sehr nahe an der Oefnung liegt, eine Art von Trichter entsteht. Man hat hieraus geschlossen, 1) wenn man die flüßige Masse in Gedanken in unendlich viele horizontale Schichten theilt, so behalten alle diese Schichten während ihrem Sinken ihre parallele Lage ohne merkliche Abweichung. 2) Jede einzele Stelle eines Querschnitts sinkt lothrecht herab, nur diejenigen Theilgen ausgenommen, welche nahe an den Wänden liegen und eine schiefe Lage annehmen, deren Anzahl aber in Vergleichung mit den übrigen Stellen des Querschnitts unendlich klein ist. Die meisten Schriften, welche von der Bewegung flüßiger Massen handeln: z. B. die Hydrodynamik des Dan. Bernoulli, die des Joh. Bernoulli, die Lehren, welche Maclaurin in Ansehung dieses Gegenstands in seinem Buch von den Fluxionen vorgetragen hat, der Traité des Fluides des Hrn. d'Alembert ꝛc. gründen sich auf diese beiden Hypothesen, die in den gewöhnlichsten Fällen auf ziemlich einfache und befriedigende Rechnungen führen. Ich werde sie daher gleichfalls gebrauchen; vorher aber muß ich noch einige erhebliche Bemerkungen machen (*).

188.

(*) Es ist wahr, die beyden erwähnten Hypothesen sind in allen bisherigen hydrodynamischen Schriften so allgemein zum Grund gelegt worden, als ob sich gar nichts dawider sagen ließe, oder als ob sie zur Entwicklung der Bewegungsgesetze flüßiger Massen sogar nothwendig wären, welches auch Herr d'Alembert ausdrücklich behauptet, und worin ihm auch die Herrn Euler, Kästner, Karsten und überhaupt unsere teutschen Hydrodynamiker wie die französischen gefolgt sind. Mir scheinen sie gleichwohl nicht nur entbehrlich, sondern ich halte sie sogar für sehr unnatürlich, und glaube, daß man sich in allen Schriften gleich bei dem ersten Eintritt in die Hydro-

188. Es sey ABCD (fig. 1.) ein mit Wasser angefülltes Gefäs, woraus das Wasser durch eine im Boden BC angebrachte Oefnung PQ ablauft. Aus der äußersten Bewegbarkeit der flüßigen Theilgen folgt,

dynamik grad durch diese Voraussetzungen den Weg zur natürlichen Anwendung der allgemeinen Bewegungsgesetze auf die Bewegung flüßiger Massen abgeschnitten hat. Das Unnatürliche dieser Voraussetzungen ist augenscheinlich. Man gedenke sich z. B. einen Teich von 20000 Quadratruthen zu 12 Fus tief mit einer Ablaßkändel, deren Weite z. B. nur 4 Quadratzoll betrage: wird nun der Schlägel gezogen, so ist kein Zweifel, daß die grade über dem Schlägel stehende Wassersäule und die benachbarten Wassertheilgen während dem Ablaufen des Wassers in Bewegung gerathen und sinken müssen, aber die z. B. 1000 Fus weit vom Schlägel entfernten Wassertheilgen unterhalb der Oberfläche bleiben zuverläßig ohne alle Bewegung, solange sie nicht der Wasserspiegel selbst ergreift; man braucht bei weitem nicht 1000 Fus weit zu gehen, um diese Wahrheit bestättigt zu finden, und zu sehen, daß die grade über der Oeffnung liegenden Wassertheilgen bei weitem schneller sinken als die weit davon zur Seite liegenden. Es sind diese hypothetische Voraussetzungen so wenig zur Begründung einer anwendbaren Theorie unentbehrlich, daß vielmehr grade durch sie alle Wege zur Untersuchung gleichsam umnebelt und unsicher gemacht werden; und wenn man auch am Ende an das verlangte Ziel gelangt, so weiß man doch nicht, ob man den richtigen Weg gegangen ist, und weiß in vielen Fällen nicht einmal, ob man das wahre Ziel wirklich erreicht hat. Eben dadurch ist man auf eine Theorie gerathen, die für jedes andere Gefäs andere Berechnungen und andere Resultaten gibt z. B. andere für Pyramidalgefäße als für prismatische oder irreguläre, wenn sie gleich alle beständig voll erhalten werden und gleiche Höhe und Oefnung haben. Dieses kommt mir ohngefähr so vor, als wenn man eine Theorie

aufstellte,

folgt, daß sie vermög der Schwere und anderer Kräfte, die von außen auf sie wirken können, einander die Waage halten und gegenseitig drucken müssen, so daß sie einander gegen die Oefnung hin zu lenken streben, weil

---

aufstellte, vermög der ein schwerer Körper, den man in einem regulären Zimmer fallen läßt, anders fallen müßte, als wenn man ihn in einem irregulären fallen ließe. Ich bin daher in meinem Versuch einer neuen Theorie hydrodynamischer und pyrometrischer Grundlehren den bisherigen Lehrern der Hydrodynamik hierin nicht gefolgt, sondern habe die ganz natürliche Voraussetzung angenommen, daß die Wassertheilgen wie alle schweren Körper den Eindrücken der Schwere folgen, und daher in Gestalt eines Sphäroids, das durch Umwälzung der kubischen Hyperbel erzeugt wird, in iedem Gefäß niedersinken. Diese Voraussetzung ist gewiß in soweit in aller Strenge gegründet, als bei dem Wasser keine andere Eigenschaften, die auf die Bewegung Einfluß haben, betrachtet werden, als Schwere und höchste Flüßigkeit, alle andere aber bei Seite gesetzt werden, wie ohnehin auch von allen Hydrodynamikern bei ihren Theorien geschieht. Ich sage, insoweit diese Bedingung statt findet, ist iene Voraussetzung in aller Strenge richtig. Ich weiß aber sehr wohl, daß die erwähnte Bedingung keineswegs bei irgend einer flüßigen Masse statt hat; die flüßigen Theilgen haben alle untereinander einen solchen Zusammenhang, daß die Bewegung eines Theilgens unzählige andere angrenzende mit in Bewegung setzt; es ist auch gewiß, daß die einzelen Theilgen, welche unmittelbar in Bewegung gerathen, durch ihr Anstoßen an die benachbarten, letztere selbst erschüttern und in Bewegung setzen, die sich um soviel weiter umher ausbreiten wird, als dabei zu erwarten ist, daß die kleinen beweglichen Wassertheilgen zugleich in eine Art von Umwälzung um ihre Aren gebracht werden. Es ist also gar nicht zu erwarten, daß die einzelen Wasserschichten von der Oberfläche bis zur Oefnung wirklich in einem

weil an dieser Stelle der Boden oder die Wände des Gefäßes dem Ausfluß des Wassers auf keine Art hinderlich fallen. Die Erfahrung lehrt, daß sie ohne merkliche Abweichung mit lothrechten und gleichen Geschwin-

---

hyperbolischen Kanal herabsinken werden, sondern es werden sich die Wassertheilgen einen ganz andern Kanal machen, dem sie während ihrem Abfluß folgen, der sich aber nur auf eine gewisse Strecke um die Oefnung herum (die z. B. 1000 mal so groß als die Oefnung seyn könnte) ausbreitet, und auf solche Art auch nur bis auf eine gewisse Strecke auf der Oberfläche um sich her greift; man muß inzwischen doch da, wo die erwähnten Folgen der physischen Beschaffenheit der Wassertheilgen beiseit gesetzt werden, und wie in allen Hydrodynamiken geschieht, nichts als die Schwere und höchste Flüßigkeit vorausgesetzt wird, die Berechnungen so anstellen, als wenn alle Nebenhindernisse wegfielen, also nur diejenigen Folgen zu erwarten wären, welche den Eindrücken der Schwere gemäs bei der Bewegung durch einen hyperbolischen Kanal statt fänden. So ist man versichert, daß man überall den allgemeinen Bewegungsgesetzen gemäs kalkulirt, folglich sich vor ungereimten Folgen nicht fürchten darf. Abweichungen der theoretischen Resultate von den wirklichen Erfolgen sind dann freilich auch bei dieser Theorie zu erwarten, weil sie jenen Nebenhindernissen keine Rechnung thut, aber nichts Ungereimtes, und eben diese Abweichungen können bei keiner Theorie anders, als durch die Erfahrung bestimmt werden. Ich habe zwar die Anwendung hiervon im erwähnten Versuch nur auf prismatische Gefäße gemacht, aber nur darum, weil ich überhaupt alle unnütze Betrachtungen dort bei Seite gesetzt, und mich nur an Gegenstände gehalten habe, von denen Nutzen in der Ausübung zu erwarten ist, den ich aber aus der Betrachtung irregulärer Gefäße nicht einsehe. In der That ist die a. a. O. von mir gebrauchte Methode so allgemein, daß sie sich nicht nur bei allen möglichen Gefäßen auf gleiche Art anwenden

läßt,

Geschwindigkeiten niedersinken, bis sie in eine gewisse Entfernung von der Oefnung oder vielmehr von der Horizontalfläche gekommen sind, welche an den obern Rand dieser Oefnung hinstreicht; eine Entfernung, die schwer

läßt, sondern daß sie sogar da, wo sie unanwendbar scheint, einen Prüfstein abgibt, woran sich erkennen läßt, daß das Wasser nicht mehr der Höhe des Gefäßes und der Weite der Oefnung gemäs ablaufen könne, sondern daß diese Bewegung im Gefäs selbsten unterbrochen werden und in Unordnung gerathen müsse. Es erfolgt nämlich diese Bewegung nur solange der Fallhöhe gemäs, als sich innerhalb dem Gefäs oder innerhalb dem Wasser im Gefäß von der Oefnung bis zur Oberfläche das erwähnte hyperbolische Sphäroid oder überhaupt ein hyperbolischer Kanal, dessen Querschnitte jede Gestalt haben können, wirklich verzeichnen läßt. Hätte das Gefäs irgendwo einen Querschnitt, der kleiner wäre als der Querschnitt des hyperbolischen Kanals an eben der Stelle, so könnte im leeren Raume offenbar durch diese Stelle nicht so viel Wasser durchfließen, als unterhalb durch die Oefnung des Gefäßes der Höhe gemäs abfließen könnte, und die zusammenhängende Masse würde also hier unterbrochen, und der Ausfluß bleibt nicht der Höhe des Gefäßes und Weite der Oefnung gemäs; dahingegen nach Anderer Theorien immer so gerechnet wird, als ob der Ausfluß der ganzen Höhe gemäs erfolgte und grade in diesem Betracht keine Rücksicht auf die Gestalt des Gefäßes genommen wird.

Nach meiner Theorie hängt die Bewegung blos von der Richtung des hyperbolischen Kanals ab; solang es also für dessen Querschnitte eine lothrechte Axe gibt, ist die Gestalt des Gefäßes ganz gleichgültig, weil die Wirkung der Schwere alsdann gar nicht abgeändert werden kann. In dieser Hinsicht ist es bei einem senkrechten prismatischen Gefäs gleichgültig, in welcher Stelle des Bodens die Oefnung angebracht wird. Ueberhaupt aber ist die beschleunigende Kraft, die unserer Schwere = g

gesetzt,

schwer mit Genauigkeit zu bestimmen ist, die ich aber mehrmalen auf 3 bis 4 Zoll geschätzt habe (*). Unterhalb dieser Grenze lenken sich die Theilgen, welche nicht in lothrechter Linie über der Oefnung liegen, von der

---

gesetzt, $= \frac{1}{\lambda} \cdot g$, wenn die lothrechte Tiefe der Oefnung unter der Oberfläche des Wassers $= 1$ und die kürzeste Are, die sich im Gefäs für den hyperbolischen Kanal von der Oefnung bis zur Oberfläche nehmen läßt, λ heißt, so daß iede Wasserschichte des Kanals den Weg λ mit der erwähnten beschleunigenden Kraft zu durchlaufen hat, folglich im schiefen Gefäs, oder wenn die Are eine schiefe Lage hat, vom Anfang der Bewegung bis zur Gleichförmigkeit mehr Zeit verfließen muß, als wenn die Are senkrecht ist: die größte Geschwindigkeit selbsten aber in allen Gefäßen bei gleicher Höhe die nämliche seyn muß. Ich glaube hierdurch zugleich einen Zweifel gehoben zu haben, den der einsichtsvolle Herr Beurtheiler meines oben erwähnten Versuchs in der allgem. Litteraturzeitung von 1788. no. 276. gegen die Allgemeinheit meiner Theorie geäußert hat.

(*). Dieses ist eine unstreitig richtige Erfahrung, die ich auch nicht meiner Theorie zu gefallen abläugnen kann; sie begünstigt freilich meine Theorie nicht, oder vielmehr meine Theorie leitet nicht auf diese Erscheinung, aber noch weniger sind hierzu die Hypothesen (§. 187.) geschickt. Die Natur weicht hierin überhaupt von allen Theorien ab: allein meine Vorstellungsart wird dadurch nicht verdrängt, weil nach solcher die Erscheinungen nur so dargestellt werden sollen, wie sie erfolgen müßten, wenn sonst nichts als vollkommene Flüßigkeit und Schwere in Betracht käme, also die flüßige Theilgen alles Zusammenhangs völlig beraubt wären, und die Wirkung der Theilgen in einander, die von ihrer physischen Beschaffenheit abhängt, ganz wegfiele. Man weiß aber, daß diese Voraussetzungen nicht so ganz statt finden, und hat also verschiedene Erscheinungen zu erwarten, auf die keine Theorie leitet.

der lothrechten Richtung ab, und drängen sich von allen Seiten her in mehr oder minder schiefen Richtungen gegen die Oefnung hin. Man setzt voraus, daß die Querschnitte AD, EF, GH ꝛc. sie mögen eben oder krumm seyn, mit der Richtung der nämlichen Theilgen rechte Winkel machen, das ist, daß die nämlichen einzelen Theilgen, welche sich in AD befinden, nach und nach in EF, GH ꝛc. herabsinken. Wenn das Gefäs beständig auf einerlei Höhe über der Oefnung durch neues Wasser, welches an die Stelle des abfließenden tritt, voll erhalten wird, und der Abfluß einen regulären und unveränderlich bleibenden Gang angenommen hat, so erhellet, daß die Querschnitte AD, EF, GH ꝛc. immer die nämlichen bleiben müssen. Denn an eben den Stellen haben die Theilgen eben die Geschwindigkeit sowohl in Absicht auf Richtung als auf Stärke. Wenn aber die Höhe der flüßigen Masse im Behältnis größer oder kleiner wird, so müssen die erwähnten Querschnitte einige Veränderung leiden, weil nun die Geschwindigkeit an den nämlichen Stellen nicht mehr die nämliche ist. Aber ungeachtet des allgemeinen Strebens aller Theilgen gegen die Oefnung hin, bewirkt doch die Zartheit ihrer Theilgen und die Leichtigkeit, mit der sie über einander hingleiten, eine solche Gleichheit sowohl in Ansehung der Kräfte als in Ansehung ihrer Lage, daß die Oberfläche der flüßigen Masse beständig eine waagrechte Lage behält, wenigstens bis auf eine sehr geringe Entfernung von der Oefnung, wie man in der Folge sehen wird, wenn ich die Versuche ausführlich erzählen werde, die ich über das Abfließen flüßiger Massen angestellt habe.

189. Eben so verhält es sich, wenn die flüßige Masse durch eine Seitenöfnung ablauft (fig. 2.). Alle Theilgen sinken anfangs lothrecht herab, hierauf lenken

sie

sie sich gegen die Oefnung hin, und die Oberfläche bleibt beständig waagrecht. Nur muß man hier bemerken, daß, wenn die Seitenöfnung eine Höhe hat, die in Vergleichung mit der Höhe des Wassers im Behältnis von einiger Beträchtlichkeit ist, alsdann nicht alle Theilgen einerlei Geschwindigkeit haben, und daß sie sich nach Verhältnis einer größern Tiefe in den untern Stellen der Oefnung schneller bewegen als in den obern; da hingegen bei dem Ausfluß durch horizontale Oefnungen unter den Geschwindigkeiten der Theilgen keine Ungleichheit aus der ungleichen Tiefe der verschiedenen Stellen der Oefnung erwachsen kann.

190. Die zum Ausfluß des Wassers bestimmte Oefnung sey waagrecht oder seitwärts angebracht: da die Theilgen, welche nicht lothrecht über der Oefnung liegen, sich dennoch unter mehr oder minder schiefen Richtungen gegen solche hindrängen, so ist klar, daß sie diese Bewegung zu unterhalten bemüht sind, und daß also der Wasserstrahl, indem er durch die Oefnung PQ durchschießt, sich auf eine gewisse Strecke Pp enger zusammenziehen und auf solche Art gleichsam eine abgestülpte Pyramide PQqp bilden muß, deren kleinere Grundfläche in diejenige Stelle fällt, wo die Zusammenziehung des Strahls verschwindet und solcher eine prismatische Gestalt anzunehmen beginnt. Man muß auf diese Zusammenziehung des Strahls durchaus Rücksicht nehmen, um die Wassermengen genau zu bestimmen, welche aus Gefäßen durch gegebene Oefnungen auslaufen. Bei Ausflüssen, die durch Oefnungen in dünnen Wänden erfolgen, ist sie überaus beträchtlich. Denn man sieht es, wie sich der Strahl bei seinem Durchgang durch die Oefnung beträchtlich zusammenzieht, und man findet, wie sich weiter unten aus der Erfahrung zeigen wird, daß die Fläche der Oefnung PQ sich zur Fläche des Querschnitts pq sehr

nahe

nahe verhalte wie 8 zu 5 (*). Die Entfernung des Querschnitts pq von PQ ist beinahe dem Halbmesser der Oefnung PQ gleich. Wenn man das Wasser aus einem

(*) Unstreitig hängt dieses Verhältnis von der Verhältnis der Oefnung zur Größe des Bodens ab; iemehr sich diese Verhältnis der Verhältnis der Gleichheit nähert, destomehr muß sich auch die Verhältnis des Querschnitts des Strahls zur Größe der Oefnung der Verhältnis der Gleichheit nähern, und die Zusammenziehung fällt ganz weg, wann die Oefnung die ganze Bodenfläche wegnimmt. Ist die Bodenfläche eines prismatischen Gefäßes W, die Oefnung w, so thut man der Natur der Sache ziemliches Genüge, wenn man den Querschnitt des zusammengezogenen Strahls

$$= \frac{w}{\sqrt{\left(2-\frac{w}{W}\right)}}$$

setzt. So findet man diese Formel in meinem oben angeführten Versuch ꝛc. aus der Theorie hergeleitet. Herrn Bossüts Erfahrungen zufolge könnte man 2, 56 statt 2 also den Querschnitt des zusammengezogenen Strahls

$$= \frac{w}{\sqrt{\left(2{,}56-\frac{w}{W}\right)}}$$

setzen. Diese Formel hat vor der Bossütschen allgemeinen Bestimmung den sichtbaren Vorzug, daß sie die Verhältnis der Zusammenziehung allmälig desto kleiner angibt, ie mehr sich die Oefnung der Größe des ganzen Bodens nähert, und endlich für ein Gefäs ohne Boden völlig verschwindet, wie es der Natur gemäs ist, für Gefäße aber, bei denen die Oefnung gegen der Bodenfläche klein ist, die Verhältnis des zusammengezogenen Strahls zur Oefnung sehr nahe wie 5 zu 8 gefunden wird. Man kann also obige Formel wenigstens als einen aus Versuchen hergeleiteten Satz gelten lassen.

einem Behältnis durch eingesteckte undurchsichtige Röhren, die lang genug sind, daß das Wasser überall den Wänden folgt und ganz voll aus der Mündung lauft, abfließen läßt, so fällt die Zusammenziehung des Strahls nicht in die Augen, und doch erfolgt sie wirklich bei dem Eintritt in diese Röhren. Ihre Wirkung ist nur nicht so beträchtlich als im vorigen Fall: denn die ausfließende Wassermenge wird alsdann beinahe nur in der Verhältnis von 8 zu $6\frac{1}{2}$ vermindert, da sie im vorigen Fall in der Verhältnis von 8 zu 5 vermindert wurde (*). Alles dieses soll noch durch Erfahrungen in sein volles Licht gesetzt werden. Hier, wo nur von der Theorie des Ausfließens die Rede ist, setze ich voraus, daß man die Oefnung in der Verhältnis vermindert habe, welche die Zusammenziehung erfodert, und ich nehme die so abgeänderte Oefnung als diejenige an, durch welche der Abfluß erfolgt. Wenn also das Wasser durch eine Oefnung in einer dünnen Wand ablauft, die = A ist, so ist die zum Gebrauch bei den Berechnungen abgeänderte Oefnung = $\frac{5}{8}$ A; und wann das Wasser ganz voll durch eine eingesteckte Röhre, deren Mündung A ist, abfließt; so ist die in Rechnung kommende Oefnung = $\frac{13}{16}$ A. Was die Höhe des Wassers im Gefäs betrift, so muß solche im ersten Fall von der Oberfläche des Wassers bis zu der Stelle gerechnet werden, wo die Zusammenziehung des Strahls verschwin-

(*) Nach meiner Theorie a. a. O. S. 45. würde sie im letzten Fall in der Verhältnis von

$$\sqrt{\left(2-\sqrt{\left(\frac{W^2.1+w^2.(v-1)}{W^2.(1+v)-w^2.1}\right)}\right)}$$

zu 1 vermindert, wo l die Länge der Röhre und v die Höhe des Wassers im Gefäs bedeutet, s. dort die Verbesserungen S. XV.

verschwindet, im andern Fall aber von der Oberfläche des Wassers bis zur äußern Mündung der eingesteckten Röhre. Nach Vorausschickung dieser Bemerkungen, wollen wir nunmehr zween allgemeine Sätze vortragen, auf die sich die gemeine Theorie der Hydraulik gründet.

191. I. Lehrsatz. **Das Volumen der flüssigen Theilgen, welche durch die Oefnung eines Gefäßes abfließt, ist so groß als das Produkt aus dieser Oefnung in die Linie, welche die Geschwindigkeit der herausströhmenden Theilgen ausdruckt.**

Denn es ist klar, daß in jedem Augenblick desto mehrere flüßige Theilgen ablaufen, ie weiter die Oefnung, und ie größer die Geschwindigkeit ist, mit der iedes Theilgen durch diese Oefnung geht (*)

192. Anmerkung. Man muß bemerken, daß ich gesagt habe das **Volumen**, nicht aber die **Masse**. So würde z. B. bei gleicher Geschwindigkeit und gleicher Oefnung in einerlei Zeit ein eben solches Volumen von Wasser wie von Queckſilber auslaufen; aber die Wassermasse würde sich zur Queckſilbermasse verhalten wie 1 zu 14, indem sich die Massen wie die Gewichte verhalten, und die Gewichte des Wassers und Queckſilbers bei gleichem Volumen beinahe in der Verhältnis 1 : 14 stehen.

193. II. Lehrsatz. **Wenn man eine flüßige Masse ABCD (fig. 1. und 2.), die durch die Oefnung**

(*) Hiermit hat Herr Bossut nur bewiesen, daß sich das Volumen der abfließenden Theilgen verhalte, wie das im Lehrsatz erwähnte Produkt, nicht aber daß es diesem Produkt selbsten gleich ist. Jeder wird aber, was zu diesem Beweis noch fehlt, leicht hinzusetzen.

Oefnung pq abfließt, in unendlich viele Schichten ADda, EFfe, GHhg, die alle gleiches Volumen haben, durch horizontale Flächen theilt, oder überhaupt durch Flächen, auf welche die Richtungen der sinkenden Theilgen senkrecht sind, so verhalten sich die Geschwindigkeiten dieser Theilgen umgekehrt wie die Oberflächen oder Grundflächen dieser Schichten.

Es ist nämlich klar, daß man die Querschnitte ADda, EFfe, GHhg als Prismen ansehen kann, deren Grundflächen die Schichten AD, EF, GH, und deren Höhen die Perpendikel Rr, Ll, Mm sind. Da nun alle diese Schichten einerlei Volumen haben, so erhält man z. B. EF × Ll = GH × Mm, also Ll : Mm = GH : EF. So wie nun eine Schichte von ihrer Höhe herabsinkt, wird sie durch die nachfolgende wieder ersetzt, und so alle zunächst auf einander folgende Schichten. Es drucken also die Höhen Ll, Mm, die Räume aus, welche in gleichen Zeiten von den Schichten EFfe, GHhg durchloffen werden, oder, welches das Nämliche ist, die Geschwindigkeiten dieser beiden Schichten. Folglich druckt die Proportion Ll : Mm = GH : EF das Nämliche aus, was in dem Lehrsatz vorgetragen worden ist (*).

194.

(*) Man findet den hier vorgetragenen Lehrsatz in allen Schriften über die Hydrodynamik; auch die Herrn Bernoulli, Kästner, Karsten konnten ihn nicht entbehren, und so wenig er auch beim ersten Anblick einige Einwendung zuzulassen scheint, so wenig halte ich ihn der Natur der Sache angemessen; mit meiner Theorie kann er wenigstens nicht bestehen, und man findet ihn darum auch nicht in meinem angezeigten Versuch einer neuen Theorie ꝛc. Er gründet sich nämlich blos auf die beiden Hypothesen, (§. 187.) die aber nach meiner dort kurz berührten Vorstellungsart der Sache unangemessen sind; und diese

194. Zusatz. Eben die Proportion findet für jede Schichte statt, die man innerhalb dem Gefäs nimmt und für diejenige Schichte, welche durch die Oefnung des Gefäßes wirklich durchschießt. Wenn also

---

diese ist unter den vielen Urtheilen, die ich in öffentlichen Blättern über mein Buch gelesen habe, nirgends angetastet worden, vielmehr sind verschiedene Herrn Recensenten z. B. in der allgem. deutschen Biblioth. von 1788. meiner Theorie völlig beigetreten. Ich habe daher auch ietzt noch nicht die geringste Veranlassung wieder zu einer Theorie zurückzukehren, die mir schon bei meinem ersten Fleis in der Hydrodynamik so unnatürlich geschienen hat, und die man auch noch in gegenwärtiger Schrift des Herrn Bossüt antrifft. Nach dieser gemeinen Theorie hängt die Geschwindigkeit der einzelen Wassertheilgen im Gefäs lediglich von den verschiedenen Querschnitten oder der Gestalt des Gefäßes ab: die Geschwindigkeit wird größer, wo dies Gefäs enger wird, kleiner wo es weiter wird, ohne Rücksicht auf Höhe des Wassers; nach meiner Theorie hängt die Geschwindigkeit der Wassertheilgen nach den allgemeinen Bewegungsgesetzen lediglich von der Höhe des über diesen Wassertheilgen vorhandenen Wassers ab; ie näher sie an der Oefnung liegen, desto größer ist ihre Geschwindigkeit, und desto kleiner ie näher sie an der Oberfläche liegen. (Nur daß die Bewegung wegen der physischen Beschaffenheit der Wassertheilgen unter eine größere Masse verbreitet wird, die sich nicht bestimmen läßt.) Man setze z. B. das Gefäs sey in der Mitte zusammengedruckt wie eine Sanduhr, und der Durchgang an dieser Stelle halb so weit als die untere Oefnung im Boden, so hindert dieser Umstand (auch im leeren Raum) den ordentlichen Abfluß nach der gemeinen Theorie gar nicht, es folgt nichts anders daraus, als daß nach gegenwärtigem Lehrsatz das Wasser nur doppelt so schnell durch diesen Durchgang durchschießen müsse, als durch die tiefer liegende Oefnung im Boden. Läßt sich auch wohl der Verstand zwingen,

also die Oefnung in Vergleichung mit dem Querschnitt des Gefäßes, der die Ober- oder Grundfläche einer Schichte innerhalb dem Gefäs ausmacht, unendlich klein ist, so sieht man, daß die Geschwindigkeit durch die

---

eine solche Theorie nur einigermaßen erträglich zu finden? Nach meiner Theorie wird hier der Zusammenhang der flüßigen Masse unterbrochen (insofern keine fremde Kraft zu Hülfe kommt) und das Wasser muß mit einer Geschwindigkeit durch die Bodenöfnung abschießen, die nicht der Höhe des ganzen Gefäßes zugehört, weil die Geschwindigkeit der Theilgen überall nur von der Höhe des Wasserstands bewirkt wird, folglich zur ohnunterbrochenen Ausfüllung des Gefäßes allemal erfordert wird, daß das Gefäs an keiner Stelle enger sey, als an eben der Stelle der Querschnitt des hyperbolischen Kanals ist, welcher sich von der Oefnung bis zur Oberfläche verzeichnen läßt. Man urtheile nun, ob meine Theorie der Natur der Sache angemessener sey? und ob nicht der hier stehende zweite Lehrsatz, so offenbar er auch bisher geschienen und so wenig Widerspruch er gefunden hat, nicht auf offenbare ungereimte Folgen leitet? Selbst die Formeln für die allmälige Beschleunigung des auslaufenden Wassers, die man in den Schriften der Herrn Kästner und Karsten findet, gründen sich auf diese von mir verworfenen Sätze: daß sie aber auch, genau geprüft, Folgen ihrer unnatürlichen Voraussetzungen ergeben, glaube ich in einer vor einiger Zeit an die Kurfürstl. Akademie der Wissenschaften zu Erfurth eingeschickten Abhandlung theoriae motus fluidorum Specim. Imo. bewiesen zu haben. So mag z. B. die Höhe des Wasserstands in einem Behältnis über der Ausflußöfnung so groß seyn, als sie immer will, so soll die Geschwindigkeit des Abflusses allemal mit o anfangen, wenn auch gleich die Oberfläche des Behälters noch so groß seyn sollte; wäre aber die Oberfläche unendlich groß, so sollte die Geschwindigkeit des Abflusses gleich im ersten Augenblick der Eröfnung allemal der ganzen

Höhe

die Oefnung in Vergleichung mit der Geschwindigkeit der innern Schichte unendlich groß ist; oder, welches das Nämliche sagt und wirklich eintritt, die Geschwindigkeit durch die Oefnung ist **endlich** und die Geschwindigkeit der innern Schichte läßt sich als **unendlich klein** ansehen.

In

Höhe des Wasserstands zugehören, ohne durch einig Stufen durchzugehen? Also die Eigenschaft des Unendlichen in der Oberfläche sollte hier Wunder thun? Nach meiner Theorie könnte im ersten Augenblick der Eröfnung unmöglich was anders als die Höhe des Wassers, iene der Höhe des anfänglichen Wasserstands zugehörige Geschwindigkeit bewirken, warum sollte also nicht auch bei einer endlichen Weite des Behälters im ersten Augenblick das Wasser sogleich ohne allmälige Beschleunigung in der Oefnung, die seiner anfänglichen Höhe zugehörige Geschwindigkeit antretten? Dieser ungereimte Erfolg rührt von den unnatürlichen Voraussetzungen (§. 187.) her. Man muß bei Prüfung anderer Theorien sehr behutsam zu Werke gehen, und gleichsam bei iedem Schritt einhalten, bevor man die erste Formel erhält: denn hat man diese einmal als richtig anerkannt, so läßt sich die ganze darauf gegründete Theorie von keiner Seite mehr angreifen, und es ist lächerlich, hinten nach eine Theorie zu verwerfen, gegen deren erste Gründe man so wenig als gegen die Art, wie aus diesen Gründen weiter geschlossen worden ist, einiges einzuwenden weiß, wie z. B. Herr Bernard in seiner von mir übersetzten neuen Theorie der Hydraulik gethan hat. Manche Mathematiker glaubten zwar, Unrichtigkeiten in der Bernoullischen Methode zu bemerken, allein sie tadelten ihn grade da, wo er es am wenigsten verdiente, oder wo er den Tadel den Folgen seiner Theorie unbeschadet leiden konnte; bauten übrigens mit ihm auf einerlei Gründe und gelangten daher mit ihm, nur durch einen andern Weg, im Grund auf einerlei Theorie.

In der Anwendung, die wir hiervon machen werden, betrachten wir die Gefäße, welche die flüßigen Massen enthalten, als fest, ohne daß ihre Gestalt einiger Veränderung unterworfen wäre. Die Theorie von der Bewegung flüßiger Massen in beugsamen Gefäßen ist für die Analysis mit zu vielen Schwierigkeiten verwebt, als daß sich hoffen ließe, einige Resultate daraus zu ziehen, die für die Ausübung von Nutzen seyn könnten. Die Erfahrung ist die beste Führerin, die wir bei Aufgaben dieser Art zu Rath ziehen können.

Zweites Kapitel.

Vom Ausfluß des Wassers aus einem Gefäs durch eine kleine Oefnung.

195.

Lehrs. **Die Geschwindigkeit des durch eine unendlich kleine Oefnung pq (fig. 3.) eines Gefäßes ABCD auslaufenden Wassers ist derjenigen gleich, welche ein schwerer Körper durch den Fall von der lothrechten Höhe Rq der Oberfläche bis zur Oefnung herab erlangen würde.**

Man stelle sich vor, es sey die flüßige Masse durch Flächen, die mit der Richtung der sinkenden Theilgen rechte Winkel machen, in unendlich viele gleiche Schichten getheilt: wenn nun die Oefnung in Vergleichung mit den verschiedenen Querschnitten der flüßigen Masse innerhalb dem Gefäs als unendlich klein angenommen wird, so bleibt die Geschwindigkeit durch die Oefnung endlich und die Geschwindigkeiten der obern Schichten werden unendlich klein (194) (*). Wenn aber alle flüßige Theilgen der freien Wirkung ihrer Schwere unterworfen wären, so würden sie mit einerlei Geschwindigkeit niedersinken. Da also die obern Schichten in der Oefnung die Geschwindigkeit verlieh-

(*) Eine richtige Folge der schon erwähnten unrichtigen Voraussetzung. Nach meiner Vorstellungsart nähert sich nur dieser Satz der Wahrheit destomehr, ie näher die Querschnitte der sinkenden Masse in dem hyperbolischen Kanal an der Oberfläche genommen werden.

verliehren, die sie vermög der Schwere natürlicher Weise haben würden, so wird das in iedem Augenblick ausfließende Wasserprisma, welches ich M nennen will, mit eben der Gewalt gedruckt oder fortgetrieben, wie ein Spunden, der bei pq eingesteckt würde, um den Abfluß des Wassers zu verhindern, das ist (27.) mit einer Kraft, die sich durch $pq \bowtie Rq$ ausdrucken läßt, wenn die specifische Schwere oder die Dichtigkeit der flüßigen Masse $= 1$ gesetzt wird.

Man seze nun, daß während dem Augenblick, da der Druck $pq \bowtie Rq$ das Prisma oder die Masse M durchtreibt, die Schwere allein, welche ich durch die kleine lothrechte Linie Sq ausdrucke, ein Prisma oder eine Masse m durchgetrieben hätte: so erhellet, daß die Massen M und m in einerlei Zeit von den bewegenden Kräften $pq \bowtie Rq$ und $pq \bowtie Sq$ durch die Oefnung getrieben werden. Nennt man also V und u die Geschwindigkeiten dieser Massen, so erhält man $MV : mu = pq \bowtie Rq : pq \bowtie Sq = Rq : Sq$. Es verhalten sich aber die Massen M und m wie ihre körperlichen Räume, und diese Räume (191.) wie die Produkte aus der Oefnung in die Geschwindigkeiten; dieses gibt $M : m = pq. V : pq. u = V : u$, und $MV : mu = U^2 : u^2$; folglich $V^2 : u^2 = Rq : Sq$.

Nun sey U die Geschwindigkeit, welche ein schwerer Körper durch den Fall von der Höhe Rq erlangte; so hat man nach der Theorie von dem Fall schwerer Körper $U^2 : u^2 = Rq : S$, folglich $V^2 = U^2$ und $V = U$, welches die Behauptung des Lehrsatzes ist (*).

Wir

(*) Für mich ist der ganze Beweis des Lehrsatzes, gesetzt auch, daß die gegen die Oefnung wirkende Masse als ruhig stehend angesehen werden könnte, dennoch nicht überzeugend. Denn irre ich nicht, so enthält der Beweis schon die Voraussetzung, daß die Wirkung

Wir bemerken im Vorbeigehen, daß man zur Abkürzung des Vortrags sich oft des Ausdrucks bedient: die Geschwindigkeit durch die Oefnung gehöre der Höhe Rq der flüßigen Masse im Gefäs zu, oder umgekehrt Rq sey die der Geschwindigkeit in q zugehörige Höhe. Wir werden diese Ausdrücke beibehalten.

196. I. Zusatz. Der nämliche Satz findet auch für eine unendlich kleine Seitenöfnung statt; denn der Druck der flüßigen Masse ist (bei gleicher Höhe) nach allen Seiten gleich groß und muß also bei zwo sehr kleinen Oefnungen, wovon die eine waagrecht die andere seitwärts angebracht ist, einerlei Geschwindigkeit bewirken, dafern diese beiden Oefnungen in gleicher Entfernung unter der Oberfläche des Wassers liegen.

197. II. Zusatz. Die flüßige Masse hat beim Durchgang durch die Oefnung eine Geschwindigkeit, vermög der sie wieder auf eine Höhe steigen könnte, welche der lothrechten Tiefe der Oefnung unter der waagrechten Fläche, welche die Oberfläche des Wassers berührte, gleich ist, so wie ein vermög seiner Schwere von einer gewissen Höhe fallender Körper eine Geschwindigkeit erlangt, vermög der er wieder bis zu solcher Höhe steigen könnte.

198. III. Zusatz. Eben so ersieht man aus der Theorie vom Fall schwerer Körper, daß wenn die Geschwindigkeit des Wassers beim Ausgang aus der Oefnung

---

kung einer ruhig stehenden blos druckenden Wassersäule einer durch den Fall entstandenen Wirkung gleich geachtet werden könne, oder Höhe des Drucks und Höhe des Falls gleichgültig seyen. Nach meiner Theorie ist aber der Ausfluß die Wirkung eines wirklichen Falls.

Oefnung mit gleichförmiger Bewegung fortgesetzt würde, das Wasser in eben der Zeit, worin ein schwerer Körper von der Höhe Rq fallen würde, einen Raum = 2Rq durchlaufen müßte.

199. Anmerkung. Wir brauchen nicht zu erinnern, daß die Geschwindigkeit der flüßigen Masse beim Ausfluß durch die Oefnung unter einerlei Höhe Rq allemal die nämliche bleibe, von was für einer Art auch die flüßige Masse seyn mag, weil ihr Werth allemal die zur Höhe Rq gehörige Geschwindigkeit ist. Herr Belidor irrt also, wenn er (Architecture Hydraulique tome I. pag. 187.) sagt, die Geschwindigkeiten zwoer verschiedenen Flüßigkeiten, wie bei Queckſilber und Wasser, verhalten sich unter einander, wie die Quadratwurzeln aus den Produkten der Höhen in die specifischen Schweren: diese Geschwindigkeiten verhalten sich schlechtweg wie die Quadratwurzeln aus den Höhen, so daß bei gleichen Höhen auch die Geschwindigkeiten gleich sind. Wenn Herr Belidor in dem Beispiel, das er gibt (No. 490.), bemerkt hätte, daß die Säule, welche das Queckſilber aus dem einen Gefäs treibt, auch 14mal so schwer ist als die Säule, welche das Wasser aus dem andern Gefäs treibt; daß aber auch die fortgetriebene Masse im ersten Fall 14mal so groß ist als im andern, so würde er ohne Schwierigkeit eingesehen haben, daß die Geschwindigkeit in beiden Fällen gleich groß seyn muß. Ueberhaupt ist klar, daß wenn die bewegenden Kräfte den Massen, die sie in Bewegung setzen, proportional sind, die Geschwindigkeiten gleich groß seyn müssen.

Ich setze allemal voraus, daß die beiden Gefäße in einerlei Gegend, wenigstens nicht in merklich verschiedener Breite aufgestellt seyen. Befände sich aber z. B. das eine unter dem Pol und das andere unter dem Aequator, so würden sich die Geschwindigkeiten

unter

unter einander verhalten wie die Quadratwurzeln aus den Produkten der Höhen in die Schweren unter dem Pol und unter dem Aequator. Diese Schweren lassen sich unter einander durch die Zahlen 289 und 288 ausdrucken. Ich mache diese Anmerkung nur im Vorbeigehen; es wird in der Folge kein Gebrauch davon gemacht werden.

200. Erinnerung. Die Schlüsse, deren wir uns (195.) bedient haben, die Geschwindigkeit in der Oefnung zu bestimmen, beruhen auf dem Satz, daß die flüßige Masse beim Ausgang aus der Oefnung durch das ganze Gewicht der darüber stehenden Säule gedruckt wird, und setzen also voraus, daß die Oefnung unendlich klein sey (*). Gleichwohl behaupten die meisten Schriftsteller, welche in ihren Anleitungen fast alle dem Hrn. Varignon in diesem Punkt nachgeschrieben haben, die flüßige Masse werde bei ihrem Durchgang durch eine waagrechte Oefnung durch das Gewicht der darüber stehenden Säule gedruckt, ohne dabei die Größe der Oefnung gehörig einzuschränken. Es ist klar, daß der Satz nicht allgemein richtig ist; denn wenn man z. B. ein zilindrisches lothrecht stehendes Gefäs hat, das mit Wasser angefüllt ist, und man stellt sich vor, es werde der Boden plötzlich weggenommen, so kann der Querschnitt am Boden von den obern Schichten gar keinen Druck leiden, und alle Schichten müssen nach den allgemeinen Gesetzen vom Fall schwerer Körper mit gleicher Geschwindigkeit niedersinken (**). Der unterste Querschnitt hat nur dann

(*) Damit nämlich die Masse im Gefäs ohne merklichen Fehler als ruhig angesehen werden könne.

(**) Ich kann unmöglich Hrn. Bossüt hierin beitreten; eben der Druck, den die unterste Schichte in dem noch

dann den ganzen Druck der obern Säule auszuhalten, wann die obern Schichten ihre Geschwindigkeit verlie-

---

noch ruhig stehenden vom Gefäs verschlossenen Wasserzilinder leidet, muß noch statt haben, wann der Boden plötzlich weggenommen wird, und die ganze zilindrische Masse wie ieder schwere Körper herabfällt; denn ebendarum, weil alle Schichten mit gleicher Geschwindigkeit niedersinken, also gar keine Veränderung in der Lage der Theilgen gegen einander vorgeht, kann auch die Wirkung der Theilgen unter einander gar keine Veränderung leiden; die Sache muß sich grade so verhalten, als wenn das mit Wasser angefüllte zilindrische Gefäs verschlossen bliebe und dem freien Fall von einer Höhe herab überlassen würde. Die unterste Schichte würde in diesem Fall augenscheinlich eben den Druck leiden, wie in dem ruhig stehenden Gefäs, der vorige Fall ist aber mit diesem einerlei. So urtheilt auch H. H. Kästner Hydrodynamik S. 427. *No. XI.* Es würde auch aus des Herrn Verfassers Theorie folgen, daß der Wasserzilinder nicht als eine ganze Masse wie andere schwere Körper herabfallen könnte, wann der Boden weggenommen würde; denn aus der eben erwähnten Ursache müßte sich iede untere Schichte wegen des größern Drucks, den sie leidet, von der obern trennen, die unterste Schichte könnte nicht, dafern die Geschwindigkeit eine unmittelbare Folge des Drucks wäre, ihre Geschwindigkeit mit o anfangen, sondern mit der zur Höhe des Drucks gehörigen Geschwindigkeit und so iede höher liegende Schichte; nur die oberste fienge sie mit o an, wie ieder schwere Körper. Indem also der Herr Verfasser behauptet, in dem erwähnten Fall sinken alle Schichten mit gleicher Geschwindigkeit herab, so hebt er ebendadurch den Satz wieder auf, daß der bloße Druck die Geschwindigkeit der untersten Schichte bewirke, den er doch zuvor für bewiesen hielt. Eine neue Probe von Ungereimtheiten, zu welchen ihn seine Theorie verleitet. Nach meiner Theorie ist auch die Erklärung dieses Falls leicht. Nach ihr

erhält

verliehren (*), also die Oefnung in Vergleichung mit denselben unendlich klein ist (194.).

Es

erhält iedes Theilgen nur durch den wirklichen Fall Geschwindigkeit, und zwar nur diejenige Geschwindigkeit, die seiner wirklichen Fallhöhe zugehört. Bei nur fangen also Wassertheilgen ihre Geschwindigkeit von o an, die Oefnung mag klein oder gros, oder, wie im gegenwärtigen Fall, der ganzen Bodenfläche gleich seyn; wenn aber alle Schichten ihre Bewegung mit gleicher Geschwindigkeit nach einerlei Richtung antretten, und nun beständig auf gleiche Art beschleunigt werden, so können sie auch ihre Lage gegen einander während ihres Falls nicht verändern, und müssen also als eine zusammenhängende Masse niederfallen.

(*) Aus der vorigen Anmerkung erhellet, in wieweit dieser Satz gelten kann; er hat nämlich seine Richtigkeit, wenn nicht die absolute, sondern die relative Geschwindigkeit der Schichten in Ansehung der unterstен verstanden wird; diese ist bei dem Herrn Verfasser sowohl vor als nach der Wegnahme des Bodens = o, und daher der Druck auf die unterste Schichte in dem einen Fall, wie in dem andern beschaffen, ohne daß er durch die Größe der Oefnung abgeändert werden kann, wofern die Höhe des Wasserdrucks die nämliche bleibt. Es sollte also auch ohne Unterschied der Oefnung bei gleicher Wasserhöhe die Geschwindigkeit des auslaufenden Wassers in dem einen Gefäs grade so anfangen und eben so beschleunigt werden, wie in dem andern, nur daß diese Beschleunigung in dem Gefäs, worin die Oefnung einen grössern Theil von der Weite des Gefäßes betrüge, länger fortdauerte, folglich der Ausfluß im Beharrungsstand eine größere Geschwindigkeit hätte. Daß es sich wirklich so verhalte, habe ich in meinem Versuch einer neuen Theorie ꝛc. deutlich und ausführlich gewiesen. Wenn der Satz seine Richtigkeit hätte, daß, wofern der ganze Druck der obern Säule auf die unterste Schichte wirkte, das Wasser mit der zur

ganzen

Es ist gleichwohl eine sehr nöthige Bemerkung, daß wenn eine horizontale, obgleich merkliche Oefnung in Vergleichung mit der Weite des Behälters klein ist, so daß z. B. die Verhältnis von iener zu dieser die 1 zu 20 nicht überschreitet; daß, sage ich, die Geschwindigkeit der flüßigen Masse durch die Oefnung ohne merkliche Abweichung die nämliche ist, als wenn diese Oefnung unendlich klein wäre. Alsdann rührt aber diese Geschwindigkeit nicht ganz von dem Druck der darüber stehenden Säule her. Jedes Theilgen folgt zugleich seiner Schwere und der Wirkung der an einander liegenden Theilgen, eine Wirkung, die unaufhörlich durch ihren gegenseitigen Zusammenhang begünstigt oder behindert wird. Nun begreift man, was sich unmöglich strenge beweisen läßt, daß alle diese Kräfte sich so mit einander verbinden können, daß die Geschwindigkeit des Wassers beim Ausfluß eben so herauskömmt, als wenn sie durch das Gewicht der über der Oefnung stehenden Wassersäule hervorgebracht würde (*). Durch die Erfahrung ist wenigstens solches

auſſer

---

ganzen Höhe des Drucks gehörigen Geschwindigkeit durch die Oefnung schießen müßte, so sieht man, daß wirklich bei allen Gefäßen, die Oefnung mögte seyn wie man wollte, das Wasser gleich beim ersten Anfang der Bewegung mit der zur ganzen Wasserhöhe gehörigen Geschwindigkeit herausschießen müßte, weil die unterste Schichte in der That allemal den ganzen Druck der über ihr stehenden Säule auszuhalten hat. Dieses ist aber allen Theorien entgegen.

(*) Diese Erscheinung wäre meines Erachtens nicht leichter zu begreifen, als sie zu beweisen wäre, wenn nicht des Herrn Verfassers Meinung nur diese ist, daß sich die Möglichkeit nicht läugnen lasse, womit aber nichts gesagt wäre. Wenn der Herr Verfasser die Geschwindigkeit des Ausflusses von dem Druck der darüber stehenden Wassersäule bei unendlich kleinen

ausser allem Zweifel gesetzt. Nur bemerkt man, wenn die Oefnung etwas beträchtlich ist, daß das Wasser seine volle und bleibende Geschwindigkeit erst nach Verfluß einer gewissen Zeit erlangt (*), denn es zeigt sich alsdann, daß die in den drei oder vier ersten Sekunden des Ausflusses abfließende Wassermenge etwas geringer ist, als die, welche in den drei oder vier folgenden Sekunden abfließt. Je größer die Oefnung ist, desto merklicher ist diese Ungleichheit.

201. I. Aufgabe. Das Gefäs ABCD, aus welchem das Wasser durch die kleine Oefnung pq, die horizontal oder seitwärts angebracht seyn mag, ablauft, werde durch beständigen Zufluß auf einerlei Höhe über der Oefnung Rq voll erhalten; man sucht eine Gleichung zwischen der ausgeloffenen Wassermenge, der Größe der Oefnung, der Zeit des Abflusses und der Höhe Rq.

Die Fläche der Oefnung pq heise K, die Zeit des Abflusses t, die beständige Wasserhöhe Rq im Gefäs über der Oefnung h, die in der Zeit t abgeloffene Wassermenge Q, die gegebene Zeit, die ein schwerer Körper braucht, um von der gegebenen Höhe a herabzufallen, θ. Wenn man nun die Proportion

kleinen Oefnungen herleiten könnte, so dürfte man nur nach den vorigen Anmerkungen bedenken, daß bei ieder andern Oefnung die unterste Schichte den nämlichen Druck der ganzen Säule auszuhalten hätte, um den Schluß auf alle Oefnungen zu machen. Allein es würde daraus nur folgen, daß das Wasser gleich beim Anfang der Bewegung schon die der Wasserhöhe zugehörige Geschwindigkeit haben müßte.

(*) Diese allmälige Beschleunigung ist meiner Theorie sehr wohl angemessen.

portion ansetzt $\sqrt{a} : \sqrt{h} = \theta :$ vierten Glied, so gibt dieses vierte Glied $\frac{\theta\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$ die Zeit, welche ein schwerer Körper nöthig hätte, von der Höhe h herabzufallen. Nun muß während eben dieser Zeit eine Wassersäule (198) abfließen, welche die Fläche K zur Grundfläche und 2h zur Höhe hätte, weil die Höhe h unveränderlich ist, folglich die Geschwindigkeit durch die Oefnung immer die nämliche bleibt. Es ist also die Säule oder die Wassermenge, welche in der Zeit $\frac{\theta\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$ ausfließt, $= 2Kh$. Es ist aber klar, daß die in den Zeiten $\frac{\theta\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$ und t auslaufenden Wassermengen sich unter einander wie diese Zeiten verhalten; dieses gibt die Proportion $\frac{\theta\sqrt{h}}{\sqrt{a}} : t = 2Kh : Q$, also $\theta Q = 2tK\sqrt{a} \cdot \sqrt{h}$, welches die verlangte Formel ist.

202. I. Zusatz. Von den sechs in dieser Formel enthaltenen Größen sind allemal zwo, nämlich θ und a gegeben, und wir dürfen der Erfahrung gemäs $a = 15$, 1 Fus setzen, wenn $\theta = 1$ Sek. ist (*). Aber die übrigen vier Größen K, t, h, Q sind unveränderlich; und es erhellet, daß sich allemal aus dreien die vierte finden läßt. Hieraus ergeben sich die Auflösungen nachstehender Aufgaben.

I. **Wenn K, t, h gegeben sind, Q zu finden!**

Hier hat man $Q = \frac{2tK\sqrt{ah}}{\theta}$.

Es betrage z. B. die Höhe h des Wassers im Gefäß 12 Fus; die Oefnung, die wir kreisförmig annehs-

(*) Diesemnach erhält man $Q = 7,77 . tK\sqrt{h}$.

annehmen wollen, habe 1 Zoll im Durchmesser, und der Ausfluß daure eine Minute. Diese Werthe in die vorstehende Formel gesetzt, und $\theta = 1$ Sek. $a = 15,1$ Fus genommen, ergibt sich ziemlich genau $Q = 15216$ Kubikzoll. Verlangt man das Gewicht dieser Wassermenge, so darf man nur die Proportion ansetzen: 1728 Kubikzoll zu 15216 Kubikzoll, wie 70 ℔ als das Gewicht von einem Kubikfus Wasser oder von 1728 Kubikzoll zu dem gesuchten Gewicht, welches sich $= 616$ ℔ ergibt.

II. Wenn h, t, Q gegeben sind, K zu finden!

Hier ergibt sich $K = \frac{\theta Q}{2t\sqrt{ah}}$.

Es sey z. B. $t = 1$ Minute, $Q = 8$ Kubikfus oder 13824 Kubikzoll, $h = 9$ Fus, so findet man, daß K sehr nahe $= 0,824$ Quadratzoll herauskommt.

Soll die Oefnung eine Kreisfläche seyn, deren Halbmesser r heißt, so erhält man $r = \sqrt{\frac{7}{22}} \cdot K$, wenn $\frac{7}{22}$ die Verhältnis des Durchmessers zum Umfang ausdruckt (*); dieses gibt im gegenwärtigen Fall $r =$ beiläufig $6\frac{1}{10}$ Linie.

III. Wenn h, K, Q, gegeben sind, t zu finden!

Die Auflösung enthält die Formel $t = \frac{\theta Q}{2K\sqrt{ah}}$.

Es

(*) Denn unter dieser Voraussetzung ist $\frac{22}{7} \cdot r^2 = K$ also $r = \sqrt{\frac{7}{22}} \cdot K$. welches mit dem sonst gewöhnlichern Ausdruck $\sqrt{\frac{100}{314}} \cdot K$ gleichgültig ist.

Es sey z. B. h = 9 Fus, K = 1 Quadratzoll, Q = 40000 Kubikzoll, so findet man t = 143,05 Sek. = 2 Min. und beinahe 23 Sek.

IV. **Wenn Q, K, t gegeben sind, h zu finden!**

Dieses ergibt sich durch die Formel $h = \frac{Q^2 \theta^2}{4 a t^2 K^2}$

Es sey z. B. Q = 40000 Kubikzoll, K = 1 Quadratzoll, t = 4 Minuten = 240 Sek.; so erhält man h = 3 Fus 2 Zoll und beinahe $3\frac{3}{4}$ Linien.

203. II. Zus. **Die Wassermengen Q und Q', welche bei den unveränderlichen Wasserhöhen h und h' in gleichen Zeiten durch die Oefnungen K und K' ablaufen, verhalten sich unter einander wie die Produkten aus den Oefnungen in die Quadratwurzeln der Höhen.**

Denn man hat die beiden Gleichungen $Q = \frac{2tK\sqrt{ah}}{\theta}$, $Q' = \frac{2tK'\sqrt{ah'}}{\theta}$, also $Q : Q' = K\sqrt{h} : K'\sqrt{h'}$; weiß man also aus der Erfahrung alles, was sich auf den einen Ausfluß bezieht, so läßt sich daraus alles, was sich auf den andern bezieht, bestimmen.

Z. B. die Erfahrung hat mich gelehrt, daß eine in einer dünnen Wand angebrachte kreisförmige Oefnung von 1 Zoll im Durchmesser bei 4 Fus Wasserhöhe 5436 Kubikzoll Wasser gibt; wenn ich nun wissen will, was eine Oefnung von 2 Zoll im Durchmesser bei 9 Fus Wasserhöhe geben wird, so muß ich die Proportion ansetzen $1 \times \sqrt{4} : 4 \times \sqrt{9} = 5436$ Kubikzoll : $x = 32616$ Kubikzoll Wasser.

Man muß bemerken, daß die Zusammenziehung bei zwo verschiedenen Oefnungen auf gleiche Weise auf den auslaufenden Strahl wirkt, wenn nämlich beide entweder in einer dünnen Wand angebracht oder beide

die

die Mündungen eingesteckter Röhren sind (*); so daß man alsdann in der Proportion $Q : Q' = K\sqrt{h} : K'\sqrt{h'}$ die Wirkung der Zusammenziehung ganz bei Seite setzen kann. Wenn aber der eine Ausfluß durch eine in einer dünnen Wand (**) angebrachte Oefnung und der andere durch eine eingesteckte Röhre erfolgt, so muß man, um die verschiedene Wirkung der Zusammenziehung in vorstehender Proportion mit in Rechnung zu bringen, bei jenem die Oefnung in der Verhältnis 8 zu 5 oder 16 zu 10 und bei diesem in der Verhältnis 8 zu $6\frac{1}{2}$ oder 16 zu 13 vermindern (***).

204.

(*) Man wird noch hinzusetzen müssen: und wenn auch die größere der beiden Oefnungen immer noch beträchtlich kleiner, als die Weite des Gefäßes ist, denn bei Oefnungen, die sich der Weite des Gefäßes zu sehr nähern, z. B. schon über $\frac{1}{4}$ von letzterer betragen, ist die Zusammenziehung schon merklich geringer.

(**) Ich muß erinnern, daß hier **Wand** iede zur Einschließung der flüßigen Masse gebrauchte Materie bedeutet, daher hierunter nicht blos die Seitenwände, sondern auch der Boden zu verstehen sind.

(***) Außer dem was ich in der vorletzten Anmerkung schon erinnert habe, muß ich noch bemerken, daß diese Vergleichung nur in Fällen statt findet, wo die Länge der eingesteckten Röhre von ihrem Durchmesser nicht viel verschieden ist. Jemehr iene diesen übertrifft, destomehr muß, nicht wegen der stärkern Zusammenziehung, sondern wegen der von den Stößen gegen die Wand herrührenden immer größer werdenden Verzögerung der Geschwindigkeit, die Oefnung der Röhre vermindert werden; es ist nämlich in Rücksicht auf die ausfließende Wassermenge gleichgültig, ob man eine kleinere Geschwindigkeit, oder eine kleinere Oefnung in Rechnung bringt. Hiervon wird in der Folge noch besonders gehandelt.

204. II. Aufgabe. Vorausgesetzt, daß das Gefäs ABCD (fig. 4.) ohne Zufluß zu erhalten, sich durch die kleine Oefnung pq ausleere: die Zeit zu finden, binnen der die Oberfläche des Wassers von der Höhe Rk bis zum Querschnitt KH herabsinkt.

Man setze, es sey nach Verfluß einer gewissen Zeit die Oberfläche bis in die unbestimmte Lage Mm gekommen. Man gedenke sich dieser Ebene eine andere Nn unendlich nahe und gleichlaufend, so ist klar, 1) daß in eben dem Augenblick, da Mm bis in Nn herabsinkt, durch die Oefnung pq eine Wassermenge durchgehen muß, die der Schichte MmnN gleich ist, die man als ein Prisma ansehen kann, das Mm zur Grundfläche und Ll zur Höhe hat, also $= Mm \times Ll$ ist; 2) daß während dem nämlichen Augenblick der Fläche Mm lothrechte Höhe über der Oefnung als unveränderlich angesehen werden kann; weil sie nur um die unendlich kleine Größe Ll abnimmt, die in Ansehung derselben als nichts angesehen werden kann. Nennt man also K die Größe der Oefnung pq, θ die Zeit, die ein schwerer Körper braucht, von der Höhe a herabzufallen, so folgt, (202 No. III.) daß der Augenblick oder das Zeitelement, worin die Höhe Ll durchloffen wird, $= \frac{\theta \times Mm \times Ll}{2K\sqrt{a}\sqrt{Lq}}$ gesetzt werden müsse. Nun ist weiter nichts mehr übrig, als die Summe aller dieser Zeitelementen zu finden, welche zu der gegebenen Höhe Rk gehören. Ueber der graden Linie IS, die der Rq gleich und parallel ist, verzeichne man als über der Axe mit einem gegebenen Parameter p eine Parabel SFT; man verlängere die Querschnitte des Gefäßes AD, Mm, Nn, KH, um die zugehörigen Ordinaten IT, Vu, Gg, EF der Parabel zu erhalten; man verzeichne noch eine andere krumme Linie XZY so, daß iede ihrer Ordinaten Va so groß sey, als der Quotient, welcher

heraus-

herauskommt, wenn man den Querschnitt Mm durch die Ordinate Vu der Parabel dividirt, so ist die erforderliche Zeit, um den Raum Rk zu durchlaufen, so groß als das Produkt aus der beständigen Größe $\frac{\theta\sqrt{p}}{2K\sqrt{a}}$ in die Fläche IEZX. Denn da man vermög der Verzeichnung $Va = \frac{Mm}{Vu}$ hat, und wegen der Eigenschaften der Parabel $\sqrt{VS}$ oder $\sqrt{Lq} = \frac{Vu}{\sqrt{p}}$, so verwandelt sich das Zeitelement $\frac{\theta \times Mm \times Ll}{2K\sqrt{a}.\sqrt{Lq}}$ (indem man $Va \times Vu$ statt Mm, $\frac{Vu}{\sqrt{p}}$ statt $\sqrt{Lq}$, und VG statt Ll setzt) in $\frac{\theta\sqrt{p}}{2K\sqrt{a}} \times Va \times VG$, d. i. in das Produkt aus der beständigen Größe $\frac{\theta\sqrt{p}}{2K\sqrt{a}}$ in das Element VabG der Fläche IEZX. Bezeichnet man die zu Rk gehörige Zeit durch T. Rk, so erhält man $T.Rk = \frac{\theta\sqrt{p}}{2K\sqrt{a}} \times IEZX$.

205. I. Zus. Weil a, θ, p, K beständige Größen sind, so ist klar, daß die zum Durchlaufen der Höhen RL, Lk, erfoderliche Zeiten sich unter einander wie die zugehörigen Flächen IVaX, VEZa verhalten. Wenn also diese Flächen gleich oder in einer gegebenen Verhältnis sind, so sind auch die Zeiten gleich oder in der gegebenen Verhältnis.

Man setze z. B. es sey das Gefäs ABCD ein durch Umwälzung einer Art von paraboliſcher Linie DHq um die Axe Rq entstandener Körper, der die Eigenschaft hat, daß sich die Quadraten der Ordinaten RD, Lm, kH wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen Abscissen qR, qL, qk verhalten, so müssen

sich die kreisförmigen Querschnitte AD, Mm, KH des Gefäßes, die sich selbsten wie die Quadrate ihrer Halbmesser RD, Lm, kH verhalten, unter einander wie die Quadratwurzeln der Abscissen qR, qL, qk oder wie die Ordinaten IT, Vu, EF der Parabel SFT verhalten. Folglich sind alle Quotienten $\frac{AD}{IT}$, $\frac{Mm}{Vu}$, $\frac{KH}{EF}$ einander gleich; dieses gibt für XZY eine grade lothrechte Linie: es müssen also in gleichen Zeiten gleiche Theile der Höhe Rk durchloffen werden.

206. II. Zus. Wenn man die Höhe Rk weiß, so kennt man auch den Raum AKHD, weil die Gestalt des Gefäßes gegeben ist, und da man eben gesehen hat, wie sich die Zeit bestimmen läßt, welche die flüßige Masse braucht, um von AD bis KH zu sinken, so erhellet, daß man auch die Menge Wassers anzugeben im Stand ist, die in eben der Zeit ausfließt.

207. Anmerk. Bei Auflösung der vorhergehenden Aufgabe habe ich mich der geometrischen Verzeichnungen bedient, um sie den Elementarbegriffen näher zu bringen und sie für die größte Anzahl meiner Leser faßlich genug vorzutragen. Weit kürzer aber ergibt sich die Auflösung, wenn man sich der Integralrechnung dabei bedient. Setzt man nämlich die anfängliche gegebene Höhe des Wassers Rq = h, RL = x, den Querschnitt Mm = X der eine durch die Gestalt des Gefäßes gegebene Funktion von x ist, und ist nun Lq die der Geschwindigkeit des Wassers, wenn dessen Oberfläche in Mm gekommen ist, zugehörige Höhe, so ist klar (201.), daß das Wasserelement, welches in dem Augenblick dt ablauft, durch $\frac{2Kdt.\sqrt{[a(h-x)]}}{\theta}$ ausgedruckt wird. Nun ist eben das Element = dem Quer-

Querschnitt $MmnN = X\,dx$. Man erhält also $dt = \theta \times \frac{X.\,dx}{2K\sqrt{a}.\sqrt{(h-x)}}$, eine Gleichung, die man entweder genau oder durch die Quadraturen krummer Linien integriren muß, nachdem man zuvor für X seinen Werth substituirt hat, der in iedem einzelnen Fall durch x und beständige Größen gegeben ist.

Es sey z. B. RqD eine gemeine Parabel, durch deren Umwälzung um die Axe Rq das Gefäs ABCD entsteht. Der Parameter dieser Parabel heiße p, die Verhältnis des Umkreises zum Durchmesser π, so ergibt sich die Schichte MmnN oder $X.\,dx = \pi.\,p.\,dx\,(h-x)$ und man hat $dt = \frac{\theta\pi p}{2K\sqrt{a}}.\,dx.\sqrt{(h-x)}$ und das Integral $t = C - \frac{\theta\pi p}{2K\sqrt{a}} \cdot \frac{2\,(h-x)^{\frac{3}{2}}}{3}$. Die Konstante C muß so beschaffen seyn, daß man für $x=o$ auch $t=o$ erhalte; dieses gibt $C = \frac{\theta\pi p\,h.\sqrt{h}}{3K\sqrt{a}}$, also $t = \frac{\theta\pi p\,[h\sqrt{h} - (h-x).\sqrt{(h-x)}]}{3K\sqrt{a}}$

208. Erinner. Wenn man wirkliche Beobachtungen anstellt, so findet man, wenn die Oberfläche der Oefnung nahe kommt, daß sich oberhalb dieser Oefnung eine Art von Trichter bildet, den die Luft ausfüllt; dieser Umstand ist dem Abfluß des Wassers zum Theil hinderlich und verändert die Natur des Ausflusses. Die vorstehende Formel kann daher zur Bestimmung des Ausflusses nur bis zu dem Augenblick gebraucht werden, da der Trichter zu entstehen beginnt, welches gewöhnlich geschieht, wann die Oberfläche noch 3 oder 4 Zoll von der Oefnung entfernt ist. (*)

209.

(*) Herr Bossüt hat seinem Werk dadurch einen vorzüglichen Werth gegeben, daß er darinnen nicht

209. III. Aufg. **Wenn das Gefäß ABCD (fig. 5.) eine prismatische oder zilindrische Gestalt hat, die Zeit zu finden, binnen der das Wasser von AD bis in KH niedersinkt.**

Man

---

blos theoretisch kalkulirt, sondern überall Beobachtungen zu Rathe zieht, die er in großer Menge selbsten angestellt hat. Gleichwohl kann ich der hier mitgetheilten Beobachtung keinen Beifall geben. Ich weiß es aus eigenen Beobachtungen, daß dieser Trichter zuweilen erst in einer Entfernung von $\frac{1}{2}$ Zoll über der Oefnung, und zuweilen schon über einen Fus hoch über derselben zu entstehen anfängt, nachdem nämlich die Oefnung klein oder groß ist; man wird ienes finden, wenn die Oefnung nicht über $\frac{1}{2}$ Quadratlinie, und dieses, wenn sie nicht unter 1 Quadratfus beträgt, dafern in beiden Fällen die Oefnung merklich kleiner als die Weite des Gefäßes ist. Es hängt diese Bestimmung nicht blos von der Verhältnis der Oefnung gegen die Weite des Gefäßes ab, sondern auch von der absoluten Größe der Oefnung, wie offenbar alltägliche Erfahrungen beweisen. Herr Belidor hat schon die Bemerkung gemacht, daß über einer Oefnung von 1 Zoll im Durchmesser der Trichter, in einem weiten Gefäs, schon in einer Höhe von 5 bis 6 Zoll anfange, und bei Herrn Hofrath Kästner, Hydrodynamik Seite 136. findet man eine theoretische Berechnung, vermög der der Trichter alsdann anfangen müßte, wann die Wasserhöhe anfängt kleiner als $\frac{1}{2}$ vom Durchmesser der Oefnung zu werden, allein wirklichen Beobachtungen zufolge fängt seine Entstehung viel früher an, und allemal noch eher als die Höhe dem ganzen Durchmesser gleich wird. Man kann inzwischen diesen Trichter durch Auflegung eines Bretts auf den Wasserspiegel verhindern und dadurch den ordentlichen Abfluß des Wassers befördern, weil wegen des Drucks der Atmosphäre alsdann unter dem Brett keine Leere, also auch keine Delle entstehen kann.

Man sieht, daß sich diese Aufgabe mittelst des 207ten §. sehr leicht auflösen läßt. Ich theile aber hier eine Elementarauflösung mit, die sich auf den 204ten §. gründet. (*)

Man stelle sich vor, es werde ein Körper ohne Schwere nach der Vertikallinie qR durch eine beschleunigende unveränderliche Kraft aufwärts getrieben, die ihm eben die Geschwindigkeiten nach und nach mittheile, die ein frei fallender schwerer Körper durch die Eindrücke der Schwere erhalte; so daß der aufsteigende Körper den Raum qR nach eben dem Gesetz und in eben der Zeit durchlauft, worin der fallende Körper den Raum Rq durchlaufen würde; so ist klar, daß sich die verschiedenen Geschwindigkeiten des aufsteigenden Körpers, die sich wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen durchloffenen Räumen verhalten, eben so wie die des herabfallenden durch die Ordinaten der Parabel SFT ausgedruckt werden können. Wir wollen setzen, der aufsteigende Körper durchlaufe, nachdem er in l angekommen ist, den kleinen Raum lL oder GV in einer unendlich kleinen Zeit mit der durch die zugehörige Ordinate Vu der Parabel ausgedruckten Geschwindigkeit. Um dieses Zeitelement zu bestimmen, überlege ich, daß nach der Theorie vom Fall schwerer Körper, die gesammte zum Durchlaufen des Raums qR angewendete Zeit $\frac{\theta\sqrt{qR}}{\sqrt{a}}$ ist, und daß, wofern die am Ende erlangte Geschwindigkeit des Körpers gleichförmig fortgesetzt würde, dieser Körper während der Zeit $\frac{\theta\sqrt{qR}}{\sqrt{a}}$ einen Raum $= 2qR$ durchlaufen müßte. Nun verhalten sich bei gleichförmigen Bewe-

(*) Die Auflösung durch die Integralrechnung findet man auch in meinem Versuch a. a. O. §. 95.

Bewegungen die Quotienten der Räume durch die Geschwindigkeiten wie die Zeiten; man erhält also (wenn man die Zeit durch den vor den durchloffenen Raum geschriebenen Buchstaben T bezeichnet) die Proportion

$$\frac{2qR}{IT} : \frac{GV}{Vu} = \frac{\theta\sqrt{qR}}{\sqrt{a}} : T.GV$$

dieses gibt $$T.GV = \frac{\theta \times GV \times IT}{2Vu \times \sqrt{ax}\sqrt{qR}}$$

oder auch, wenn man statt $\sqrt{qR}$ seinen Werth $\frac{IT}{\sqrt{p}}$ setzt,

$$T.GV = \frac{\theta\sqrt{p}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{GV}{2Vu}.$$

Vergleicht man diese kleine Zeit mit der kleinen Zeit $\frac{\theta\sqrt{p}}{2K\sqrt{a}} . Va. VG$, welche die Oberfläche des Wassers braucht, eben den Raum Ll oder VG (204) zu durchlaufen, und überlegt, daß $Va = \frac{Mm}{Vu}$ vermög der Verzeichnung; so sieht man, daß erstere mit letzterer in der unveränderlichen Verhältnis steht, worin die Fläche der Oefnung K mit der Fläche des Querschnitts Mm steht, welche letztere überall gleiche Größe hat, weil das Gefäs prismatisch angenommen wird. Da die nämliche Verhältnis zwischen den übrigen Zeitelementen, welche der steigende Körper und die Oberfläche des Wassers brauchen, gleiche Räume zu durchlaufen, statt hat, so folgt, daß die gesammte Zeit, welche der steigende Körper nöthig hat die Höhe qR zu durchlaufen, sich zur gesammten Zeit, binnen der sich das Gefäs gänzlich leeren würde, verhält wie die Fläche K zur Fläche des Bodens BC die ich A nennen will. Es ist also die gesammte Zeit, welche das Gefäs zu seiner gänzlichen Ausleerung nöthig hat

$= \theta$

$$= \frac{\theta\sqrt{Rq}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{A}{K} (*).$$

Betrachtet man KBCH als das gegebene Gefäs, so läßt sich auf eben die Art beweisen, daß die Zeit, welche dieses Gefäs zu seiner gänzlichen Ausleerung braucht, $= \frac{\theta\sqrt{kq}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{A}{K}$ ist. Nun ist offenbar die Zeit, welche der Wasserspiegel braucht von AD in KH zu sinken, so groß als der Unterschied der beiden erwähnten Zeiten. Man hat also $T.Rk =$

θA

(*) Oder in Rücksicht auf die Zusammenziehung des Strahls nach meiner ersten Anmerkung zu §. 190. $= \frac{\theta\sqrt{2{,}56.Rq}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{A}{K}$ oder, wenn man $\theta = 1$ Sek. und den Fall in einer Sek. wie gewöhnlich $= g$, die Höhe des Wassers Rq aber v setzt,

$$= \frac{A}{K} \cdot \sqrt{\frac{2{,}56.v}{g}}.$$

welches sich auch aus meiner Schrift §. 98. ergibt, wenn man A gegen K als unbeträchtlich ansieht und 2, 56 statt 2 setzt. Ich bemerke nur noch, daß bei Gefäßen, die man ganz auslaufen läßt, die Wassertheilgen der Erfahrung gemäs den Eindrücken der Schwere freier folgen, als bei Gefäßen, die beständig auf gleiche Höhe voll erhalten werden. Der allmälig abnehmende Widerstand der Luft, der bei kleinen Höhen allemal unbeträchtlich bleibt, kann die Ursache davon nicht seyn. Ich suche den Grund in der allmälig abnehmenden Wirkung der Zusammenziehung und in dem Umstand, daß bei Gefäßen, die sich ausleeren, die Wassertheilgen ein beständiges Bestreben haben, sich in die vortheilhafteste Bewegung gegen die Oefnung zu setzen, anstatt daß bei beständig vollen Gefäßen immer neue Theilgen hinzutretten, welche gleichsam die Ordnung der vorigen unaufhörlich stöhren.

$$\frac{\vartheta A(\sqrt{Rq}-\sqrt{kq})}{K\sqrt{a}}$$

210. 1. Zusatz. Unsere Gleichung $T.Rk = \frac{\vartheta A(\sqrt{Rq}-\sqrt{kq})}{K\sqrt{a}}$ gibt ein Verfahren an die Hand, eine Wasseruhr von zilindrischer Gestalt zu verfertigen.

Soll man z. B. die Höhe AB in 12 Theile vertheilen, die von der Oberfläche in gleichen Zeiten durchloffen werden (*), so theile man AB in 144 Theile, als das Quadrat von 12; von diesen 144 gleichen Theilen, schneide man 121 ab, als das Quadrat von 11; der Rest 23 gibt den gesuchten ersten Theil AM; von 121 schneide man wieder 100 ab, als das Quadrat von 10, der Rest 21 gibt den gesuchten zweeten Theil; von 100 ziehe man wieder 81, das Quadrat von 9, ab, der Rest 19 gibt den dritten Theil u. s. f. Man sieht hieraus, daß die auf einander folgenden verlangten Theile der Höhe durch die nach einander folgende Zahlen 23, 21, 19, 17, 15 u. s. f.

Was nun die genaue Bestimmung der Zeit betrift, worin ieder Theil der Höhe AB durchloffen wird, so läßt sich solche durch unsere Formel angeben. Soll diese Zeit z. B. eine Stunde betragen, so setzt man $t = 1$ Stunde, und man muß den Boden A und die Höhe des Gefäßes mit der Fläche der Oefnung so proportioniren, daß man

$$1 \text{ St.} = \frac{\vartheta A(\sqrt{h}-\sqrt{\frac{121}{144}h})}{K\sqrt{a}}$$

oder

(*) In meinen mechanischen und hydrodyn. Untersuchungen habe ich eine Berechnung über die Gestalt einer Wasseruhr mitgetheilt, worin der Spiegel in gleichen Zeiten um gleiche Tiefen sinkt. Allein gegenwärtiges Verfahren ist für die Ausübung leichter.

oder 1 St. $= \frac{\vartheta A\sqrt{h}}{12K\sqrt{a}}$ erhält. Man sieht aus dieser Gleichung, daß sich aus zwoen von den drei gegebenen Größen A, h, K allemal die dritte finden läßt.

Beim Gebrauch dieser Wasseruhren hat man wegen der Bemerkung §. 208. dahin zu sehen, daß man den Wasserspiegel dem Boden nicht zu nahe kommen lasse, oder daß man nur die ersten eilf Abtheilungen gebrauche.

211. II. Zusatz. Wenn man ein bis in AD angefülltes prismatisches Gefäs hat, das sich ganz ausleeren soll, und nun solches, nachdem es sich geleert hat, wieder von neuem bis an AD anfüllt und während dem Abfluß durch die Oefnung pq beständig bis zu dieser Höhe voll erhält: so fließt in diesem letztern Fall in eben so viel Zeit, als das Gefäß vorhin zu seiner gänzlichen Ausleerung nöthig hatte, doppelt so viel Wasser aus, als in dem Raum ABCD enthalten ist, wenn man den Trichter beiseit setzt. Denn im ersten Fall ist die zur völligen Ausleerung des Gefäßes erfoderliche Zeit $= \frac{\vartheta A\sqrt{h}}{K\sqrt{a}}$ (209.). Die Wassermenge aber, welche im andern Fall während der Zeit $\frac{\vartheta A\sqrt{h}}{K\sqrt{h}}$ auslauft, ist nach (201) $= \frac{\vartheta A\sqrt{h}}{K\sqrt{a}} \cdot \frac{2K\sqrt{ah}}{\vartheta} = 2Ah$ also doppelt so groß als das Prisma ABCD des $= Ah$ ist (*).

212.

(*) Die Erfahrung stimmt nicht ganz damit überein; das beständig volle Gefäs gibt nämlich nicht ganz das doppelte von dem sich völlig ausleerenden. Mariotte erzählt einen Versuch, wobei das beständig volle Gefäs in 4 Minuten nur 40 Pinten gab, da es

212. III. Zusatz. Wenn man die Ausflußzeiten zweier sich ausleerenden prismatischen Gefäße mit einander vergleichen will, so hat man, wenn man für das andere Gefäs die Werthe ähnlicher Größen wie Rq, kq, Rk, A, K, durch die nämlichen nur mit einem Strichlein bemerkten Buchstaben ausdruckt, die beiden Gleichungen

$$T.Rk = \frac{\theta A(\sqrt{Rq} - \sqrt{kq})}{K\sqrt{a}}$$

$$T.R'k' = \frac{\theta A'(\sqrt{R'q'} - \sqrt{k'q'})}{K'\sqrt{a}}$$

also

$$T.Rk : T.R'k' = \frac{A(\sqrt{Rq} - \sqrt{kq})}{K} : \frac{A'(\sqrt{R'q'} - \sqrt{k'q'})}{K'}$$

Es verhalten sich also die Zeiten, welche die Wasserspiegel brauchen, Rk, R'k' zu durchlaufen, wie die Produkten aus den Grundflächen der Prismen in die Unterschiede der Quadratwurzeln aus den anfänglichen und nachherigen Höhen des Wassers in den Gefäßen, dividirt durch die Größe der Oefnungen.

Man hat hier in Ansehung der Effekte der Zusammenziehung des Strahls eben das zu merken, was §. 203. erinnert worden ist.

213. IV. Zusatz. Wenn ein prismatisches Gefäs verschiedene Arten flüßiger Massen enthielte, so ließe sich der Ausfluß auf eben die Art bestimmen. Denn es enthalte z. B. das Gefäs ABCD (fig. 6.) drei

---

es doch 24 Pinten hielt und sich in 4 Minuten völlig ausleerte, folglich in jenem Fall nach der Theorie 48 Pinten hätte geben sollen, s. H. H. Kästners Hydrodyn. S. 134. Dieses stimmt mit meiner Anm. zu §. 209. überein.

drei verschiedene Flüßigkeiten BFLC, FEGL, EADG von der Art, daß sich die leichtern über die schwerern setzen und sich nicht mit letztern vermischen. Indem sich nun dieses Gefäs durch die Oefnung pq ausleert, gelange die Oberfläche der untersten Flüßigkeit in einer gewissen Zeit t in die Lage OP. Die specifischen Schweren dieser drei Flüßigkeiten seyen p, p', p''; so sieht man, daß der Druck, welcher den Ausfluß durch die Oefnung pq bewirkt, eben so erfolgt, als wenn man statt der beiden obern Flüßigkeiten andere von eben der Art wie in BFLC anbrächte, deren Höhen aber $\frac{p'.FE}{p}$, $\frac{p''.EA}{p}$ wären. Es kommt also nur auf die Ausflußzeit einer einzigen Flüßigkeit, wie in BFLC enthalten ist, an, deren Höhe im ersten Augenblick der Zeit $t = BF + \frac{p'.FE}{p} + \frac{p''.EA}{p}$ ist. Wir wollen diese Höhe H nennen, und h die nachherige Höhe, welche am Ende der Zeit t, welche der Spiegel gebraucht hat, um von der Höhe H — h herabzusinken, noch übrig ist; so hat man, wenn man die übrigen Benennungen wie §. 209. beibehält,

$$t = \frac{\theta A(\sqrt{H} - \sqrt{h})}{K\sqrt{a}}$$

und um die Zeit zu erhalten, welche unsere eingebildete Flüßigkeit braucht, die Höhe FB zu durchlaufen, oder, welches auf eines hinauslauft, um die Zeit zu bestimmen, welche die unterste Flüßigkeit BFLC zum gänzlichen Ablaufe nöthig hat, muß man in vorstehendem Ausdruck $H - h = BF$ setzen oder

$$h = H - BF = \frac{p'.FE}{p} + \frac{p''.EA}{p}.$$

Wenn die unterste Flüßigkeit abgeloffen ist, so ist offenbar die Grundfläche FL, und die Oefnung pq in dieser Fläche. Man findet also alsdann, wenn man

man statt der obern Flüßigkeit EADG eine andere annimmt, die mit der FEGL von einerlei Art ist, daß sich die Zeit, worin die Flüßigkeit FEGL gänzlich ablauft, durch die Gleichung $t = \frac{\theta A (\sqrt{H} - \sqrt{h})}{K\sqrt{a}}$ ergibt, indem man hierin $H = FE + \frac{p''.EA}{p'}$; $h = \frac{p''.EA}{p'}$ setzt; und so verfährt man weiter, es mögen so viele verschiedene Flüßigkeiten vorhanden seyn als man will.

Drittes

Drittes Kapitel.

Vom Ausfluß des Wassers durch eine kleine Oefnung von gegebener Gestalt, wenn nicht alle Stellen dieser Oefnung von dem Wasserspiegel als gleichweit entfernt angesehen werden können.

214.

In der Ausübung fließen die Wasser öfters durch Seitenöfnungen ab, die zwar in Ansehung der Weite oder horizontalen Querschnitte der Behältnisse klein sind, doch aber nicht so angesehen werden können, als wenn alle ihre Stellen gleich weit von der Oberfläche entfernt wären. Von der Art sind z. B. die Abschußöfnungen bei den Mühlen. Man bedient sich alsdann zur Bestimmung des Ausflusses gewöhnlich nachstehender Methode. Man stelle sich anfangs vor, die Oefnung sey mit einer Platte verschlossen, und nun werde diese Platte mit unendlich vielen Löchern durchbohrt, welche das Wasser durchlassen. Sähe man nun iedes dieser Löcher als eine eigene und von allen andern abgesonderte Oefnung an, so gehörte die Geschwindigkeit an dieser Stelle der an dieser Stelle vorhandenen Höhe der flüßigen Masse zu; wenn man also, schließt man weiter, die Anzahl der Löcher bis ins Unendliche vermehrt, oder, welches auf eben das hinauslauft, wenn man sich vorstellt, es werde die ganze Platte weggenommen, so muß an ieder Stelle der gegebenen Oefnung die Geschwindigkeit der vorhandenen Höhe der flüßigen Masse zugehören, und

bei Bestimmung der abgeloffenen Wassermenge muß man auf die Verschiedenheit dieser Geschwindigkeiten Rücksicht nehmen. Man kann aber gar nicht läugnen, daß diese Schlüsse nichts weniger als überzeugend sind. So lange die Summe der Löcher, welche man sich in der zur Verschließung der Oefnung angebrachten Platte gedenken muß, in Vergleichung mit der Weite des Behälters sehr klein ist, so werden die einzelen Wassermengen, welche durch iedes Loch abfließen, durch die absoluten Gewichte der darüber stehenden Wassersäulen, durchgetrieben, und der Abfluß erfolgt wie §. 201. Aber von dem Augenblick an, da die Anzahl der Löcher unendlich groß wird, und da alle abschießende Wassersäulen dicht an einander zu liegen kommen, läßt sich nicht deutlich einsehen, daß solche eben so abfließen sollen, wie sie durch die kleinen von einander völlig abgesonderten Oefnungen auslaufen würden (*). Da indessen diese Hypothese Resultaten gibt,

(*) Gibt man nämlich zu, daß die hier gebrauchte Art zu schließen richtig seye, so müßte man solche auch auf den Boden eines Gefäßes anwenden können; wenn also ein vertikales prismatisches Gefäs seines ganzen Bodens plötzlich beraubt würde, so müßte auch alsdann das Wasser an ieder Stelle des Bodens so ablaufen, wie es durch eine an solcher Stelle befindliche kleine Oefnung ablaufen würde, also mit der zur Höhe gehörigen Geschwindigkeit. Dieses folgte wenigstens aus Hrn. Bossuts Theorie. Und doch ist solches nach meinem Versuch ꝛc. S. 17. u. f. und nach der Lehre aller Hydrodynamiker offenbar falsch. Hr. Bossut gebraucht daher, um Schlüssen, die seiner Theorie entgegen wären, zu begegnen, die gute Vorsicht, die vorhinige Schlußart für nichts weniger als überzeugend auszugeben, ohne doch diese Behauptung nur mit dem geringsten Grund zu rechtfertigen, weil sie sich wirklich nicht rechtfertigen läßt. Was von allen einzelen

gibt, die mit der Erfahrung ziemlich übereinstimmen, so lege ich solche bei nachfolgenden Aufgaben um so lieber zum Grund, als sie auf sehr einfache Rechnungen führt, und diese Simplicität bei vorkommenden Fragen so sehr, als es ohne Verletzung der nöthigen Genauigkeit geschehen kann, gesucht werden muß.

215. I. Aufgabe. Das Verfahren im Allgemeinen anzugeben, wonach sich der Ausfluß aus Seitenöfnungen, die sich nicht an ieder

---

einzelen unendlich kleinen Wassersäulen gilt, muß auch von der ganzen Wassersäule, welche aus allen ienen unendlich kleinen zusammengesetzt ist, gelten; dagegen läßt sich wohl gar nichts einwenden, in sofern von der bloßen Wirkung der Schwere auf die Wassertheile die Rede ist, und wenn sich falsche Schlüsse daraus herleiten lassen, so muß die Unrichtigkeit einer Theorie daran Schuld seyn. Nach meiner Theorie erfolgt der Anfang des Ausflusses eben so, als ob die grade über der Oefnung stehende Wassersäule wie ieder schwere Körper durch die Oefnung herabfiele. Dieses Gesetz ist bei mir allgemein, und leidet seine Anwendung in allen Fällen, die Oefnung mag groß oder klein seyn; und ist sie der ganzen Bodenfläche gleich, so folgt eben daraus die in meinem Versuch ꝛc. S. 17. vorgetragene durchaus als richtig anerkannte Lehre. Der hier von dem Hrn. Verf. mit dem Namen einer Hypothese belegte Satz ist also den Wirkungen der Schwere nach meiner Theorie durchaus und für alle Oefnungen angemessen; und daß er sich nach Hrn. Bossüts Theorie nicht auf waagrechte Oefnungen von ieder Größe anwenden läßt, sondern in solcher Anwendung auf offenbar falsche Folgen leitet, da doch in der ganzen Schlußart nicht der geringste Fehler liegt, beweißt aufs Neue, daß des Hrn. Bossüts Theorie nicht auf die allgemeine Bewegungsgesetze gegründet oder solchen entgegen ist.

ieder Stelle als gleichweit von dem Wasserspiegel entfernt ansetzen lassen, bestimmen läßt.

Wenn man nach dem, was wir eben vorgetragen haben, annimmt, daß bei Ausflüssen dieser Art die Geschwindigkeit in iedem Punkt der Oefnung derienigen gleich sey, welche ein schwerer Körper durch den Fall von der Höhe erlangt, welche die flüßige Masse an dieser Stelle hat; so stelle man sich vor, die gegebene Oefnung sey durch horizontale Flächen in unendlich viele Rektangeln oder Trapezien getheilt; und wenn man nun iedes solches unendlich kleine Trapez als eine besondere Oefnung betrachtet, die in allen Stellen als gleichweit von dem Wasserspiegel entfernt angenommen werden kann, so läßt sich nach (201) die Wassermenge angeben, die in einer gegebenen Zeit auslaufen muß. Und nun ist nichts weiter mehr nöthig, als die Summe aller dieser Elementen der flüßigen Masse zu finden, um die gesammte Wassermenge zu erhalten, die in eben der Zeit ablauft. Wir wollen nun von dieser allgemeinen Vorschrift einige Anwendungen machen.

216. II. Aufgabe. **Die Wassermenge Q zu bestimmen, welche in einer gegebenen Zeit durch eine rektanguläre lothrechte Oefnung LNOM (fig. 7.) aus einem Gefäs ABCD abschießt, das beständig auf einerlei Höhe RV voll erhalten wird.**

Man ziehe mit denen einander gegen über liegenden horizontalen Seiten LM, NO der Oefnung die einander unendlich nahen Linien XZ, xz gleichlaufend, so ist das unendlich kleine Rektangel XZzx ein Element von der Fläche der Oefnung, und es ist klar, daß alle Stellen dieses Rektangels als gleichweit von dem Wasserspiegel entfernt angesehen werden können. Wir setzen voraus, daß ieder derselben eine Geschwin-

digkeit

digkeit zukommt, die der Höhe RI zugehört. Setzt man also die Zeit des Abflusses = t, und die Zeit, die ein schwerer Körper braucht von der Höhe a herabzufallen, = a, so ergibt sich die in der Zeit t durch das Rektangel XZzx auslaufende Wassermenge nach (201) durch den Ausdruck $\frac{2XZ.Ii.t.\sqrt{a}.\sqrt{RI}}{\theta}$ oder durch $\frac{2XZ.t\sqrt{a}}{\theta}$. Ii.$\sqrt{}$RI. Nun kommt es drauf an, die Summe aller dieser Wasserelementen zu finden, um die gesammte Wassermenge zu erhalten, welche durch die bestimmte Oefnung LNOM ablauft. Zu dem Ende verzeichne ich über der Axe RV mit irgend einem Parameter p die Parabel RT, und verlängere die graden Linien KM, IZ, iz, VO bis in Y, S, sT. Das kleine paraboliſche Trapez ISsi, (welches man als ein Rektangel ansehen kann, das IS zur Grundlinie und Ii zur Höhe hat) ergibt sich durch den Ausdruck Ii.IS oder auch (weil IS=$\sqrt{}$RI.$\sqrt{}$p) Ii.$\sqrt{}$RI.$\sqrt{}$p. Setzt man also dieses Trapez = e, das Wasserelement, welches durch das Rektangel XZzx ablauft, = q, so erhält man e:q = Ii.$\sqrt{}$RI.$\sqrt{}$p: $\frac{2XZ.t\sqrt{a}}{\theta}$. Ii.$\sqrt{}$RI, und dieses gibt q = e. $\frac{2XZ.t\sqrt{a}}{\theta\sqrt{p}}$, Hieraus sieht man, daß, sobald man die Summe aller e findet, d. i. die paraboliſche Fläche KVTY, man die Summe aller q, d. i. die gesammte durch die Oefnung LNOM abfließende Wassermenge Q erhält, wenn man die paraboliſche Fläche KVTY durch den unveränderlichen und gegebenen Bruch $\frac{2XZ.t.\sqrt{a}}{\theta\sqrt{p}}$ multiplicirt.

Hat man das ganze Rektangel RVTH ausgezeichnet, und die graden Linien SG, sg mit VR parallel gezogen, so bemerke ich, daß das äußere

parabolische Dreieck RHT aus Elementen SG, sg zusammengesetzt ist, die sich vermög der Eigenschaften der Parabel, wie die Quadrate der zugehörigen Theile RG, Rg der graden Linie RH verhalten; es nehmen also diese Elementen zu, wie die Querschnitte einer Pyramide, die ihre Spitze in R, und RH zur Höhe hätte; hieraus folgt, daß die Summe aller GS, oder die Fläche RHT so groß ist als der dritte Theil des Produkts aus der Höhe RH in die grade Linie HT, welche unter allen GS die letzte ist. Es ist also der Raum $RHT = \frac{RH \cdot HT}{3} = \frac{VR \cdot VT}{3}$; folglich der innere parabolische Raum $RVT = \frac{2}{3} RV \cdot VT$ (*). Eben so ist der parabolische Raum $RKY = \frac{2}{3} RK \cdot KY$, folglich der gesuchte Raum $KVTY = \frac{2}{3} (RV \cdot VT - RK \cdot KY)$. Wir haben also

$$Q = \frac{2}{3} (RV \cdot VT - RK \cdot KY) \cdot \frac{2XZ \cdot t\sqrt{a}}{\theta\sqrt{p}}$$

Oder auch (indem man für VT seinen Werth $\sqrt{VR} \cdot \sqrt{p}$, und für KY den Werth $\sqrt{RK} \cdot \sqrt{p}$, und $VR = H$, $RK = h$, $XZ = f$ setzt)

$$Q = \frac{4f \cdot t \cdot \sqrt{a} \cdot (H\sqrt{H} - h\sqrt{h})}{3\theta}$$

Ein Ausdruck, worinn alles bekannt ist.

Man sieht, daß unter den sieben Größen, welche in dieser Gleichung vorkommen, θ und a allemal die nämlichen bleiben, die übrigen fünf aber Q, H, h, f, t, sich verändern können, und daß, wenn vier davon gegeben sind, allemal die unbekannte daraus gefunden werden

(*) Diese Quadratur der Parabel mittelst der gemeinen Geometrie ist nicht neu; ich habe sie schon in denen 1777. herausgegebenen Erläuterungen über die Kästnersche Analysis S. 418. so vorgetragen.

werden kann; hieraus lassen sich eben dergleichen einzele Aufgaben ziehen, wie §. 202.

217. Zusatz. Es sey x die mittlere Wasserhöhe über der Oefnung, das heißt, eine Höhe, die so beschaffen ist, daß, wenn alle einzele Wassersäulen mit einerlei und zwar derjenigen Geschwindigkeit abschössen, die ein schwerer Körper durch den Fall von der Höhe x erlangen würde, alsdann in der Zeit t die nämliche Wassermenge auslaufen müßte, die bei der in der Aufgabe vorausgesetzten Verschiedenheit der einzelen Geschwindigkeiten ablauft: so hat man (201.)

$$Q = \frac{2tf(H-h)\sqrt{ax}}{\theta}$$

Setzt man die beiden Werthe von Q einander gleich, und sucht daraus x, so findet man

$$x = \frac{4(H\sqrt{H} - h\sqrt{h})^2}{9(H-h)^2}$$

Diese mittlere Höhe ist von der Vertikallinie verschieden, die von dem Mittelpunkt der Schwere der Oefnung LNOM bis zum Wasserspiegel reicht und die sich durch $\frac{H+h}{2}$ ausdrucken ließe. Aber je höher über dem obern Rand der Oefnung LM liegt (alles übrig gleich angenommen), desto geringer ist der erwähnte Unterschied. Je größer nämlich KR wird, indemalles andere ungeändert bleibt, desto mehr nähert sich der Bogen YST einer graden Linie, und der parabolische Abschnitt KVTSY einem gradlinigten Trapez. Wenn aber der parabolische Abschnitt wirklich zu einem gradlinigten Trapez würde, so gehörte die mittlere Ordinate oder die mittlere Geschwindigkeit des Wasers zur Mitte von KV. Es müßte also die mittlere Höhe zu eben der Stelle gehören.

218. Anmerk. Wenn man bei Auflösung der vorigen Aufgabe die Integralrechnung gebrauchte, so hätte man (RI = z gesetzt)

$$q \text{ oder } dQ = \frac{2tf\,dz\sqrt{z}.\sqrt{a}}{\theta}$$

und das Integral

$$Q = \frac{4tfz^{\frac{3}{2}}.\sqrt{a}}{3\theta} + C$$

die Konstante C muß von der Art seyn, daß $z = h$, $Q = o$ gibt; daraus folgt $C = -\frac{4tfh^{\frac{3}{2}}.\sqrt{a}}{3\theta}$; also allgemein

$$Q = \frac{4tf(z^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}).\sqrt{a}}{3\theta}$$

und wenn man $z = H$ setzt, so erhält man

$$Q = \frac{4tf(H.\sqrt{H} - h\sqrt{h}).\sqrt{a}}{3\theta}$$

für die Wassermenge, welche in der Zeit t durch die ganze Oefnung LNOM durchfließt.

219. III. Aufgabe. Die Wassermenge zu bestimmen, welche in einer gegebenen Zeit durch die lothrechte dreieckigte Oefnung NKO (fig. 8.) eines Gefäßes ABCD auslauft, das beständig voll erhalten wird, vorausgesetzt, daß der untere Rand der Oefnung NO horizontal liege.

Man ziehe durch die Spitze K des Dreiecks KNO die lothrechte Linie RKV, wodurch dieses Dreieck in zwei rechtwinklichte Dreiecke KVO, KVN getheilt wird; hierauf ziehe man die beiden unendlich nahe neben einander laufenden Horizontallinien XZ, xz, wodurch sich die unendlich kleine Oefnung XZxz für das Dreieck KVO ergibt.

Es

Es sey die ganze Höhe RKV des Wassers im Behälter = H, die Höhe RK = h, RX = z, VO = m, das in der Zeit t durch die Oefnung XZzx auslaufende Wasserelement = dQ, die für den bestimmten Fall a erfoderliche Zeit = θ, so erhält man $XZ = \frac{m.(z-h)}{H-h}$, und $dQ = \frac{2tm\,(z-h).\,dz.\sqrt{z}.\sqrt{a}}{(H-h).\,\theta}$; das Integral hiervon ist

$$Q = \frac{4tmz^{\frac{5}{2}}\sqrt{a}}{5\,(H-h).\,\theta} - \frac{4tmhz^{\frac{3}{2}}\sqrt{a}}{3(H-h).\,\theta} + C$$

Die Konstante C muß von der Art seyn, daß z = h, Q = o gibt, also $C = \frac{8tm.h^{\frac{5}{2}}.\sqrt{a}}{15(H-h).\,\theta}$ und allgemein

$$Q = \frac{\left(4tm2h^{\frac{5}{2}} + 3z^{\frac{5}{2}} - 5h.z^{\frac{3}{2}}\right).\sqrt{a}}{15\,(H-h).\,\theta}$$

Setzt man z = H, so ergibt sich

$$Q = \frac{\left(4tm.2h^{\frac{5}{2}} + 3H^{\frac{5}{2}} - 5h.H^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{a}}{15\,(H-h).\,\theta}$$

für die Wassermenge, welche in der Zeit t durch den Theil der Oefnung KVO durchlauft (*).

Es ist klar, daß wenn man VN = n setzt, und nun in der vorstehenden Formel n statt m schreibt, solche die Wassermenge Q' ausdruckt, welche durch das Oefnungsstück KVN abfließt. Setzt man also NO oder m + n = c, so erhält man

Q + Q'

(*) In der zugehörigen Zeichnung müßte man sich die gezogenen Horizontallinien eigentlich in dem Dreieck KVO gedenken.

$$Q + Q' = \frac{4tc\left(2h^{\frac{5}{2}} + 3H^{\frac{5}{2}} - 5hH^{\frac{3}{2}}\right).\sqrt{a}}{15\,(H-h).\theta}$$

für den Ausdruck der Wassermenge, welche in der Zeit t durch die ganze Oefnung KNO auslauft.

220. Zusatz. Es sey x die mittlere Wasserhöhe über der Oefnung, so hat man (201.)

$$Q = \frac{tc\,(H-h).\sqrt{x}.\sqrt{a}}{\theta}$$

Setzt man die beiden Werthe von Q einander gleich, so ergibt sich daraus

$$x = \frac{\left(16.\,2h^{\frac{5}{2}} + 3H^{\frac{5}{2}} - 5hH^{\frac{3}{2}}\right)^2}{225\,(H-h)^4}$$

Dieser Ausdruck ist von dem, welcher die Entfernung des Schwerpunkts des Dreiecks bis zum Wasserspiegel ausdruckt und die $= h + \frac{2}{3}(H-h)$ oder $= \frac{2H+h}{3}$ ist, verschieden. Der Unterschied ist aber unbedeutend, wenn die Oberfläche ein wenig über der Oefnung liegt, und man kann alsdann zur Abkürzung der Rechnung

$$x = \frac{2H+h}{3}$$

annehmen.

221. Zus. Wenn des Dreiecks Spitze unten und seine Grundlinie oben läge (fig. 9.) so fände man (indem man $RK = H$, $RV = h$, $NO = c$ setzt und übrigens wie vorhin verfährt), daß die in der Zeit t durch die Oefnung KNO auslaufende Wassermenge durch den Werth

$$\frac{4tc\left(2H^{\frac{5}{2}} + 3h^{\frac{5}{2}} - 5Hh^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{a}}{15\,(H-h).\theta}$$

ausgedruckt wird.

Und

Und wenn x die mittlere Wasserhöhe bedeutet, so hätte man

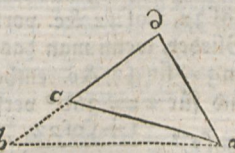
$$x = \frac{16(2H^{\frac{5}{2}} + 3h^{\frac{5}{2}} - 5Hh^{\frac{3}{2}})^2}{225(H-h)^4} \quad (*)$$

222. IV. Aufgabe. Die Wassermenge zu bestimmen, die in einer gegebenen Zeit durch die lothrechte kreisförmige Oefnung KMVN (fig. 10) eines beständig voll bleibenden Gefäßes ablauft.

Es seyen RV, RK die unveränderlichen Wasserhöhen im Behälter, von der tiefsten und höchsten Stelle der Oefnung gerechnet. Man ziehe auf den Durchmesser die Ordinaten PM, pm einander unendlich nahe und den Halbmesser OM.

Die gegebene Zeit sey = t, die Zeit für den gegebenen Fall a = θ, die abgeflossene Wassermenge = Q, der Halbmesser OK = r, der Winkel KOM = z, die Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser = π

(*) Diese beiden hier vorgetragene Auflösungen dienen nur bei dreieckten Oefnungen, deren unterer oder oberer Rand horizontal liegt. Man kann sie aber auf Dreiecke von ieder gegebenen Lage anwenden, wenn man durch die unterste Spitze des gegebenen Dreiecks eine Horizontallinie ab zieht, und die eine Seite dc bis in b verlängert, so daß sich statt des gegebenen Dreiecks adc das adb ergibt, man berechnet alsdann den Durchfluß durch die beiden Dreiecke adb, acb nach der Formel für Q + Q′ (219) und beider Unterschied gibt den Durchfluß durch adc. S. meine mechan. und hydrodyn. Untersuchungen S. 151–153.



$= \pi$ für den Halbmesser 1; n die Verhältnis der Höhe RO des Wassers über dem Mittelpunkt der Oeffnung zum Halbmesser OK, so daß $RO = nr$; So hat man $PM = r.\sin z$; $OP = r.\cos z$; $RP = nr - r.\cos z$; $Pp = d(KP) = r.\,dz\sin z$; das kleine Trapez $PMmp = r^2\,dz(\sin z)^2$; also (201)

$$dQ = \frac{t\sqrt{a}}{\vartheta}.\,2r^2\,dz(\sin z)^2.\sqrt{(nr - r.\cos z)}$$

Um diese Gleichung integriren zu können, muß man bemerken, daß $dz(\sin z^2)\sqrt{(n - \cos z)} = dz\,[1 - (\cos z)^2]\sqrt{(n - \cos z)} = dz\,[1 - (\cos z)^2]$.

$$\left[n^{\frac{1}{2}} - \frac{n^{-\frac{1}{2}}\cos z}{2}\right] - \frac{n^{-\frac{3}{2}}.(\cos z)^2}{8} - \frac{n^{-\frac{5}{2}}.(\cos z)^3}{16} - \frac{5n^{-\frac{7}{2}}(\cos z)^4}{128} - \frac{7n^{-\frac{9}{2}}(\cos z)^5}{256} - \frac{63n^{-\frac{11}{2}}.(\cos z)^6}{3072} - \text{&c.}$$

Da nun das verlangte Integral für $z = 0$ verschwinden, und seinen vollständigen Werth erhalten muß, wann $z = 360°$ ist, so läßt sich die Rechnung beträchtlich abkürzen. Denn man kann in der Differentialgleichung alle die Glieder, worin $\cos z$, $\cos 2z$, $\cos 3z$, $\cos 4z$ &c. vorkämen, weglassen, weil diese Glieder, wenn man das Integral macht, $\sin z$, $\sin 2z$, $\sin 3z$, $\sin 4z$, &c. enthalten würden, welche für $z = 0$ und für $z = 360°$ verschwinden. Da nun allgemein $(\cos z)^2 = \frac{1 + \cos 2z}{2}$; $(\cos z)^3 = \frac{\cos z + \cos z.\cos 2z}{2} = \frac{3\cos z}{4} + \frac{\cos 3z}{4}$; $\cos z^4 = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2z}{2} + \frac{(\cos 2z)^2}{4} = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2z}{2} + \frac{\cos 4z}{8}$ &c. so hat man

$\cos z$

$\cos z = 0$, $(\cos z)^2 = \frac{1}{2}$; $(\cos z)^3 = 0$; $(\cos z)^4 = \frac{3}{8}$; $(\cos z)^5 = 0$; $(\cos z)^6 = \frac{5}{16}$ &c. und die zu integrirende Gleichung ist also

$$dQ = \frac{tr^2\sqrt{anr}}{\theta} \cdot dz \left(1 - \frac{1}{32n^2} - \frac{5}{1024n^4} - \&c.\right)$$

und hieraus ergibt sich, wenn man nach der Integration $z = 360° = \frac{2\pi}{1}$ setzt,

$$Q = \frac{2\pi tr^2\sqrt{(anr)}}{\theta}\left(1 - \frac{1}{32n^2} - \frac{5}{1024n^4} - \&c.\right) (*)$$

für die Wassermenge, welche in der Zeit t durch die ganze Oefnung KMVN durchschießt. Diese Reihe nähert sich so schnell, daß allemal, so wenig auch OR die OK übertrifft, ihre drei ersten Glieder in der Ausübung überflüßige Genauigkeit geben.

223.

(*) Man findet eine Formel für Q auch in Herrn H. Kästners Hydrod. S. 156 — 158 verglichen mit meinen mech. und hydrod. Unterſ. S. 157. u. f. f. Aber die hier gefundene des Herrn Bossuts hat wegen ihrer in allen Fällen statt findenden starken Näherung sowohl als der leichtern Anwendung vor der Kästnerschen bei weitem den Vorzug, wie auch aus der eigenen Erinnerung des Herrn Hofrath a. a. O. §. 214. erhellet. Am leichtesten ergibt sich aber eine für die Ausübung brauchbare Formel, wenn man (§. 216.) die Formel für den Ausfluß durch ein Quadrat einrichtet, da dann $f = H - h$ also $Q = \frac{4(H-h).t\sqrt{a}}{3\theta} \times (H\sqrt{H} - h\sqrt{h})$ herauskommt, und nun für den Ausfluß durch den Kreis $Q = 0{,}785 \cdot \frac{4(H-h).t\sqrt{a}}{3\theta} \cdot (H\sqrt{H} - h\sqrt{h})$ setzt, s. die angef. mech. und hydrod. Unterſ. S. 165 — 167.

223. Zusatz. Es sey x die mittlere Wasserhöhe über der Oefnung, so hat man (201) $Q = \frac{2t \pi r^2 \sqrt{ax}}{\theta}$. Setzt man nun beide Werthe von Q einander gleich und sucht daraus x, so erhält man $x = nr\left(1 - \frac{1}{16n^2} - \frac{9}{1024n^4} - \&c.\right)$, woraus man sieht, daß die mittlere Höhe x kleiner als RO ist. Wenn n zum wenigsten = 1 ist, so können diese beide Linien in der Ausübung für gleichgültig angesehen werden.

224. I. Anmerkung. Wenn der Wasserspiegel den obersten Punkt K des Durchmessers KV berührt, so hat man n = 1 und die Formel (222.) kann noch für Q gebraucht werden. Sucht man aber für diesen Fall grade zu den Werth von Q, so findet man, daß sich alsdann eine endliche algebraische Gleichung ergibt (*). Man hat nämlich in diesem Fall

$$dQ = \frac{2t r^2 \sqrt{a}\, r.\, dz.\, (\sin z)^2 \sqrt{(1 - \cos z)}}{\theta}$$

Setzt man $1 - \cos z = y$, so erhält man $dz\,(\sin z)^2 . \sqrt{(1 - \cos z)} = y\,dy\sqrt{(2 - y)}$, und das Integral $y \int dy \sqrt{(2-y)} - \int dy \int dy \sqrt{(2-y)} =$

$$-\frac{2y(2-y)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4(2-y)^{\frac{5}{2}}}{15} + C = -\frac{2(\sin z)^2\sqrt{(1+\cos z)}}{3} - \frac{4(1+\cos z)^{\frac{5}{2}}}{15} + C$$

Wenn man nun die Konstante so bestimmt, daß das Integral für z = o verschwindet, und seinen vollstän-

(*) Man findet eben diese Bemerkung in den angef. mech. und hydrod. Unterf. S. 157 u. f.

vollständigen Werth erhalte, wenn $z = 180°$ wird, so erhält man $\frac{32tr^2\sqrt{2ar}}{15.\theta}$ für die Wassermenge, welche aus der halben Oefnung KMV abfließt, folglich $\frac{64tr^2\sqrt{2ar}}{15\theta}$ für die Wassermenge, welche durch die ganze Oefnung KMVN fließt.

Die mittlere Wasserhöhe ergibt sich durch den Bruch $\frac{1024.2r}{225\pi^2}$ der beinahe $\frac{25}{27}r$ beträgt Man sieht also, daß diese Höhe allemal kleiner ist, als die Tiefe des Schwerpunkts der Oefnung unter dem Wasserspiegel.

225. II. Anmerk. Es wäre noch übrig, eine Formel für die auslaufende Wassermenge zu geben, wann die Oberfläche des Wassers unter dem Punkt K hinstreicht. Aber ich übergehe solche, weil in den Aufgaben dieser Art, wo der Wasserspiegel nicht an der Wand, worin sich die Oefnung befindet, widerliegt, sich solcher gegen die Mitte hin merklich senkt; dieses ändert die natürliche Verhältnis der Geschwindigkeiten ab, und macht, daß die Theorie in solchen Fällen die Ausflüsse nur auf eine sehr unvollkommene Weise bestimmen kann (*).

226.

(*) Ueber den Ausfluß durch Kreisabschnitte und durch reguläre Vielecke findet man in den mehr erwähnten mech. und hydrod. Unters. Unterricht. In der Ausübung hat man übrigens zu bedenken, daß allemal der Zusammenziehung des Strahls Rechnung gethan werden muß, und daß noch überdas der ausschießende Strahl an seiner Geschwindigkeit destomehr verliert, ie größer die Verschiedenheit der Geschwindigkeiten in den einzelen Stellen der Oefnung ist. Heißt die berechnete mittlere Geschwindigkeitshöhe x und die Tiefe

226. Allgemeine Erinnerung. Diese Beispiele sind, wie mich dünkt, hinreichend, die Methode einsehen zu lernen, nach der sich die Ausflüsse aus Gefäßen durch eine einzige Seitenöfnung bestimmen lassen, wenn die Gefäße beständig voll erhalten werden. Lauft das Wasser durch mehrere Oefnungen zugleich ab, und sind diese Oefnungen klein, so erfolgt der Ausfluß durch iede derselben ebenso, als wenn sie allein vorhanden wäre. Es enthält also in diesem Betracht die Aufgabe keine neue Schwierigkeit. Nur muß man bemerken, daß eine kleine Oefnung, die in der Nähe einer großen angebracht wird, nach Verhältnis doch nicht völlig soviel als letztere gibt. Ich werde dieses mit Zuziehung der Erfahrung noch umständlich erklären.

227. V. Aufgabe. **Im Allgemeinen die Methode anzugeben, wonach sich die Zeit t bestimmen läßt, welche das Wasser braucht, um von einer gewissen Höhe im Gefäs herabzusinken,**

Tiefe der untersten Stelle der Oefnung unter dem Wasserspiegel H, die Verhältnis der Oefnung zum Querschnitt des durchschießenden Strahls $= 1 : \beta$, so kommt man dem wirklichen Erfolg allemal näher, wenn man (die theoretisch berechnete Wassermenge $= Q$ gesetzt) die ausfließende Wassermenge $= \beta . Q . \sqrt{\frac{x}{H}}$ setzt. Bei Gefäßen mit horizontalen Oefnungen wäre $x = H$, wie auch bei Seitenöfnungen deren lothrechte Höhe gegen ihrer Tiefe unter dem Wasserspiegel unbeträchtlich wäre, also die auslaufende Wassermenge $= \beta . Q$. Hingegen z. B. bei horizontalen parallelepipedischen Kanälen wäre, nahe vor dem Ausfluß $\beta = 0$ und $x = \frac{4}{9} H$ oder $\frac{x}{H} = \frac{4}{9}$, also die auslaufende Wassermenge $= Q . \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} Q$.

sinken, wenn sich die Oefnung auf der Seite befindet und solche nicht in allen Stellen als gleichweit von dem Wasserspiegel entfernt angesehen werden kann; vorausgesetzt, daß sich das Gefäs, ohne Zufluß zu erhalten, ausleere.

Wenn man anfänglich voraussetzt, das Wasser sey um eine unbestimmte Tiefe gesunken, so suche ich nach der Methode (201) die Wassermenge, welche in dem Zeitelement dt durch die ganze Oefnung ablaufen würde, wenn der Wasserspiegel beständig in dieser nämlichen Lage bliebe. Die erwähnte Wassermenge läßt sich allemal auf den Ausdruck bringen F. dt, wo F eine gegebene Funktion von der Oefnung und der wirklichen Höhe des Wasserspiegels über einem gegebenen Punkt der Oefnung bedeutet. Hiernächst nehme ich an, die Oberfläche des Wassers sinke während dem Zeitelement von einer unendlich kleinen Höhe, so daß eine Wassermenge ausfließt, welche dem Produkt aus der Oberfläche des Wassers in die erwähnte kleine Höhe gleich ist, also $= X.\,dx$, wo X die durch die Gestalt des Gefäßes bestimmte Größe des Wasserspiegels und dx das Element bedeutet, um welches der Spiegel niedersinkt. Man erhält also die Gleichung

$$F.\,dt = X.\,dx \text{ oder } dt = \frac{X\,dx}{F}$$

Und nun ist weiter nichts mehr nöthig als für F und X in iedem besondern Fall ihre Werthe zu substituiren und dann zu integriren.

Wir wollen den Gebrauch dieser Formel durch ein Beispiel erläutern.

228. VI. Aufgabe. Die Zeit zu finden, worin der Wasserspiegel um eine gegebene Tiefe in einem lothrechten prismatischen Gefäß niedersinkt, wenn eine lothrechtwinklichte Oefnung an der einen seiner Wände angebracht ist.

Nennt man die Bodenfläche des Gefäßes A, den horizontalen Rand der Oefnung f, ihren lothrechten Rand b, die veränderliche Höhe des Wassers über dem untern horizontalen Rand der Oefnung x, und die Fallzeit für die Höhe a heiße θ, so hat man (216)

$$-Adx = \frac{4fdt.\sqrt{a}.\left(x^{\frac{3}{2}}-(x-b)^{\frac{3}{2}}\right)}{3\theta}$$

Ich schreibe $-dx$, weil x abnimmt indem t wächst. Hieraus ergibt sich

$$dt = \frac{-3\theta Adx}{4f\sqrt{a}\left(x^{\frac{3}{2}}-(x-b)^{\frac{3}{2}}\right)}$$

und es kommt nun drauf an $\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}-(x-b)^{\frac{3}{2}}}$ zu integriren. Zu dem Ende multiplicire ich oben und unten mit $x^{\frac{3}{2}}+(x-b)^{\frac{3}{2}}$; dieses gibt

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{3bx^2-3b^2x+b^3}+\frac{(x-b)^{\frac{3}{2}}dx}{3bx^2-3b^2x+b^3}$$

Der erste Theil wird rational, wenn man $x=y^2$ setzt, und der zweete gleichfalls, wenn man $x-b=z^2$ setzt; es lassen sich also beide Theile durch die Integrationsmethode, welche bei rationalen Brüchen statt findet, integriren. Unsere Leser werden die Rechnung vollends ausführen.

Man sieht, daß in diesem ganz einfachen Fall der Ausdruck für die Zeit schon ein wenig verwickelt wird. Zuweilen kommt man auf zween Integrationsausdrücke, wovon sich keines algebraisch angeben läßt. Aber allemal läßt sich die Aufgabe durch Quadraturen oder durch Reihen auflösen.

Viertes Kapitel.

Vom Ausfluß des Wassers durch iede horizontale Oefnung, vorausgesetzt, daß alle Schichten unter einander in paralleler Lage bleiben, und daß alle Punkte eines Querschnitts mit gleicher Geschwindigkeit niedersinken.

229.

Wir haben schon (187) diese beiden Hypothesen angezeigt, und hier fügen wir noch hinzu, daß die erstere eine nothwendige Folge von der Erfahrung ist, welche lehrt, daß der Wasserspiegel beständig horizontal bleibt. Denn da der oberste Querschnitt seine parallele Lage behält, so scheint es schon die dichte Lage der Wassertheilgen an einander und die zusammenhängende Kraft aller Theilgen zu erfodern, daß alle unter einander liegende Schichten sich selbst parallel niedersinken müssen. Uebrigens scheinen eben die Ursachen, welche die parallele Lage der obersten Schichte erhalten, auch auf die innern Schichten wirken zu müssen, und bei solchen, wenigstens beinahe, den nämlichen Erfolg zu haben. Was die andere Hypothese betrift, so kann solche in Fällen, wo das Gefäs nicht prismatisch und lothrecht ist, nicht in aller Schärfe statt finden. Denn die zunächst an den Wänden liegenden Theilgen, müssen nothwendig deren Richtung folgen. Wenn nun diese Bewegungen nicht lothrecht sind, so müssen sie in der lothrechten Bewegung der anliegenden Theilgen eine Stöhrung verursachen. Da aber diejenigen Theilgen eines Querschnitts,

welche die Wände berühren, in Vergleichung mit den übrigen Theilgen dieses Querschnitts eine unendlich kleine Anzahl ausmachen, so kann man mit allem Recht oder ohne merklichen Irrthum zu befürchten, annehmen, daß die zuvor erwähnte Stöhrung für gar nichts zu achten ist und alle Punkte eines Querschnitts einerlei lothrechte Geschwindigkeit haben. Dieses sind ohngefähr die Gründe, auf welche man beide obige Hypotheſen gebaut hat. Bei dem obern Theil des Gefäßes kann man sie gewiß gelten lassen (*). Aber in Ansehung des nahe bei der Oefnung liegenden Theils verhält es sich etwas anders, denn in diesem letzten Theil lenken sich die flüßigen Theilgen von allen Seiten her in schiefen Richtungen gegen die Oefnung hin, und man kann nicht annehmen, daß die nämlichen einzelen Theilgen, welche aus einerlei Schichte herabgesunken sind, wieder zusammen eine neue Schichte bilden werden. Es ist also unmöglich, daß der nach der erwähnten Hypotheſe bestimmte Ausfluß mit der Erfahrung so ganz genau übereinstimmen kann. Man weiß aber dagegen, daß die Abweichungen der Theorie in allen Fällen, wenigstens beinahe nach einerlei Gesetz erfolgen. Wenn man sich also Mühe gibt, diese Abweichungen durch die Erfahrung fest zu setzen, und daraus kleine Korrek-

(*) Ich lasse den Schluß von der waagrechten Oberfläche auf die waagrechte Bewegung der Theile unter der Oberfläche auf keinen Fall gelten. Man kann z. B. mit einem an einem Stab unter das Wasser gehaltenen Körper allerlei Bewegungen vornehmen, ohne der Oberfläche die waagrechte Lage zu benehmen, obgleich die Bewegung der innern Wassertheile sehr gestöhrt wird. Vielmehr zweifle ich gar nicht, daß in einem sehr großen Behältnis die sinkenden Wassertheile beständig einen eigenen von der Oberfläche bis zur Oefnung in einer unbestimmbaren Gestalt zusammenlaufenden Kanal bilden.

Korrektionstafeln herzuleiten, so steht der Anwendung dieser Theorie in der Ausübung nichts im Weg, wofern man nur in iedem vorkommenden Fall die nöthige Korrektion vornimmt. Mit dieser Einschränkung nehme ich die nämliche Theorie an, da es mir, alles wohl erwogen, beinahe unmöglich scheint, andere Mittel ausfindig zu machen, welche geschickter wären, die Bewegung flüßiger Massen, wenigstens auf eine sinnliche Weise, durch Formeln darzustellen, die sich in der Ausübung gebrauchen ließen (*).

230. I. Aufgabe. **Eine allgemeine Gleichung zwischen der Höhe der flüßigen Masse, die in einem Gefäß der Wirkung der Schwere unter-**

(*) Ich habe in Ansehung meiner Theorie oben ähnliche Gedanken geäußert. Ich betrachte nämlich die Bewegung so, wie sie den bloßen Wirkungen der Schwere gemäs erfolgen müßte, also so, als ob die flüßigen Theilgen in einem hyperbolischen Kanal herabsänken, ohne mich darum zu bekümmern, ob die flüßigen Theilgen wirklich in ihrer Bewegung diesen Kanal bilden. So viel ist inzwischen gewiß, daß die Bewegung nur dann ordentlich erfolgen kann, wann ieder Querschnitt des Gefäßes wenigstens die Weite des hyperbolischen Kanals an solcher Stelle hat. Wo das Gefäs weiter ist, greift die Bewegung der Erfahrung gemäs um sich, ohne daß sich bestimmen ließe wie weit? In Behältnissen von mehrern tausend Quadratruthen, worin die Oefnung z. B. nicht über einen Quadratfus beträgt, erstreckt sie sich, die Oberfläche ausgenommen, gewiß nicht ringsum bis an die Wände. Inzwischen suche ich meine Formeln so, wie sie der bloßen Wirkung der Schwere gemäs sind, und bemerke dabei, wie Hr. Bossüt, daß die Abweichungen der theoretischen Resultate von den wirklichen Erfolgen durch die Erfahrung bestimmt, und hierdurch diese Resultaten verbessert werden müssen.

unterworfen ist, und der Geschwindigkeit beim Ausgang durch die Oefnung zu finden, es mag diese Oefnung so groß man will seyn.

Man stelle sich vor die gegebene flüßige Masse ABCD (fig. 11.) sey in unendlich viele horizontale und gleichgroße Schichten ADda, TVut &c. getheilt, die, sich selbst parallel, niedersinken und deren iede in allen ihren Punkten einerlei Geschwindigkeit hat. Alle diese Schichten wirken nach der ganzen Höhe Rq gegenseitig auf einander, es mag solches nun dadurch geschehen, daß sie einander forttreiben oder, daß sie einander nachziehen; so daß manche in ihrer Bewegung von Augenblick zu Augenblick verzögert, und andere dagegen beschleunigt werden. Es verhält sich in diesem Betracht mit der Bewegung flüßiger Massen, wie mit der Bewegung mehrerer fester Körper, die zusammen ein einziges System ausmachen, wovon sich keiner bewegen kann, ohne zugleich auf die andern zu wirken und deren Gegenwirkung zu leiden. Diese gegenseitige Wirkungen vereinigen sich dergestalt unter einander, daß, wenn einige Körper an ihrer Bewegung verliehren, die andern eben hierdurch gewinnen, und daß die Summe aller dieser Aenderungen zusammengenommen nothwendig = o wird (*).

Es sey

die Schwere . . . . . = g
die gegebene Höhe Rq . . . = h
die Fläche der Oefnung pq . . = K

die

(*) Ich wende eben dieses auf meine Theorie an, und folgere daraus, daß die Bewegung der Wassertheilgen durch die Oefnung auf eben die Art erfolgt, als wenn nur denen im hyperbolischen Kanal befindlichen Wassertheilgen allein Bewegung mitgetheilt würde.

die mit der Linie AD angedeutete Fläche, die eine Funktion von Rq und durch die Gestalt des Gefäßes gegeben ist . = M
die unbestimmte Höhe RH . . = x
die durch TV angedeutete Fläche, die eine gegebene Funktion von x ist . . = y
die Geschwindigkeit der durch die Oefnung schießenden Schichte . . . = u
die Geschwindigkeit der Schichte TVut = v
die Zeit . . . . . = t

Nun nehme man an, es verwandle sich die Geschwindigkeit v während dem Augenblick dt in $v+dv$, wo dv sowohl beiaht als verneint seyn kann. Wenn die Querschnitte nicht gegenseitig auf einander wirken, so ist klar, daß die Geschwindigkeit v am Ende des Augenblicks $dt = v+gdt$ würde. Da sie sich nun in $v+dv$ verwandelt und $v+gdt = v+gdt+dv-dv$, so erhellet, daß die flüßige Masse im Gleichgewicht bleiben würde, wenn iede Schichte nur mit der Geschwindigkeit $gdt - dv$ getrieben würde. Diese Arten von Geschwindigkeiten, die sich gegenseitig einander aufheben und von Schichte zu Schichte sich abändern, sind zum Theil beiaht, zum Theil verneint; und man erhält also, für die ganze Höhe Rq, $\int dx\,(gdt - dv) = o$, oder wenn man für dt seinen Werth $\frac{dx}{v}$ sezt, $\int \frac{gdx^2}{v} - \int dx\,dv = o$. Sezt man für v seinen Werth $\frac{Ku}{y}$, für dv seinen Werth $\frac{K(ydu - udy)}{y^2}$, so erhält man

$$\int \frac{gydx^2}{Ku} - \int \frac{Kdx\,(ydu - udy)}{y^2} = o$$

Da nun das Integral in Beziehung auf die Höhe Rq genommen, also u und du für den Augenblick als unveränderlich angesehen werden müssen, und überdas

$y\,dx$ eine beständige Größe ist, so läßt sich unsere Gleichung so ausdrucken

$$\frac{g\,y\,dx}{Ku}\int dx - K\,du\int\frac{dx}{y} + Kuy\,dx\int\frac{dy}{y^3} = o$$

Es wird aber $\int dx = h$; $\int\frac{dx}{y}$ kann (wenn man die noch fehlenden gleichartigen Theile ergänzt) die Fläche, welche ich N nennen will, von einer über der Axe Rq krummen Linie vorstellen, deren Ordinaten sich umgekehrt wie die verschiedenen Querschnitte des Behältnisses verhalten, die zu den verschiedenen Stellen von Rq gehören; $\int\frac{dy}{y^3}$ stellt die Fläche einer krummen Linie vor, die verschwindet, wann $y = AD = M$, und ihren vollständigen Werth erhält, wann $y = K$ wird, die also $= \frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2K^2}$. Ferner $y\,dx = AD\,da = M.\,Rr$; man erhält also die Gleichung

$2gh.M^2.Rr - 2K^2.M.N.u.du + u^2.Rr(K^2 - M^2) = o$

oder (wenn man die der Geschwindigkeit u zugehörige Höhe s nennt, welches $u^2 = 2gs$ gibt)

$h.M^2.Rr - K^2.M.N.ds + s.Rr.(K^2 - M^2) = o$ (A

die verlangte Gleichung, die uns von großem Nutzen seyn wird.

231. Zusatz. Wenn die Oefnung in Vergleichung mit den Querschnitten des Gefäßes als unendlich klein angesehen werden kann, so sieht man gleich, daß diese Gleichung, wenn man die Glieder, welche K enthalten, wegläßt, sich in

$$hM^2.Rr - M^2.s.Rr = o \text{ oder } s = h$$

verwandelt, hieraus folgt, daß in iedem Augenblick die Geschwindigkeit durch die Oefnung der Höhe des Wassers über der Oefnung zugehört, wie wir (§. 195.) gefunden haben.

232.

232. II. Aufgabe. Bei einem Gefäs, das beständig voll erhalten wird, die Größen zu bestimmen, welche sich auf den Ausfluß beziehen.

Man setze, es werde unser Gefäs ABCD beständig auf die Höhe Rq voll erhalten, und stelle sich vor, so wie in einem Augenblick die Oberfläche AD in ad herabsinke, also die kleine Wassermenge = AD.Rr ablaufe, werde die Schichte ADda durch eine andere, die so zu reden an ihrer Stelle erschaffen werde und die eben die Geschwindigkeit wie iene habe, wieder ersetzt. Das Produkt K.z aus der Oefnung K in die Linie z stelle die in der Zeit t auslaufende Wassermenge vor; so ist klar, daß man $K.dz = M.Rr$ erhalte, es verwandelt sich also die Gleichung (A) hier in

$$h.M^2\,dz - K.M^2\,N\,ds + (K^2 - M^2)\,s\,dz = o$$

wo nur z und s veränderliche Größen sind.

Diese Gleichung ist leicht zu integriren; denn wenn man zur Abkürzung der Rechnung $\frac{h}{K.N} = b$, $\frac{M^2 - K^2}{K.M^2.N} = f$ setzt, so erhält man $ds + fs\,dz = b\,dz$, oder $dz = \frac{ds}{b - fs}$, und das Integral $z = -\frac{1}{f} L.(b - fs) + C$, das ist (wenn man die Konstante C so bestimmt, daß $s = o$ auch $z = o$ gibt) $z = \frac{1}{f} . L\left(\frac{b}{b - fs}\right)$. Diese Gleichung gibt (wenn man c die Zahl nennt, deren hyperbolischer Logarithme 1 ist und nun wieder die Zahlen selbst nimmt) $s = \frac{b}{f}\left(1 - c^{-\frac{f}{z}}\right)$. Man hat also in bestimmten Zahlen die Verhältnis zwischen der Höhe s, welche der Geschwindigkeit durch die Oefnung zugehört, und dem Raum, welchen die flüßige Masse bei ihrem Ausgang durchloffen hat. Man

weis also auch die Menge des abgeloffenen Wassers für die Höhe s (*).

Wenn man eben so die Vergleichung zwischen der Zeit t und der Höhe s verlangt, so muß man bemerken, daß $dt = \frac{dz}{u} = \frac{ds}{(b-fs)\sqrt{2gs}}$. Man setze $s = y^2$, $\frac{b}{f} = m^2$; so erhält man $dt = \frac{2}{f\sqrt{2g}} \cdot \frac{dy}{m^2-y^2} = \frac{1}{fm\sqrt{2g}}\left(\frac{dy}{m+y} + \frac{dy}{m-y}\right)$ und hiervon das Integral

$$t = A + \frac{1}{fm\sqrt{2g}} \cdot L\frac{m+y}{m-y} = A + \frac{\sqrt{t}}{f.\sqrt{b}.\sqrt{2g}} \cdot L\left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{fs}}{\sqrt{b}-\sqrt{fs}}\right),$$

wo die Konstante $A = o$ ist, weil t und s zugleich $= o$ werden; also

$$t = \frac{\sqrt{f}}{f\sqrt{b}\sqrt{2g}} \cdot L\left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{fs}}{\sqrt{b}-\sqrt{fs}}\right)$$

Man kann diese Zeit mit der θ vergleichen, welche ein schwerer Körper braucht, von der Höhe a herabzufallen; denn man hat $\theta = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}$

Die Vergleichung zwischen t und z ergibt sich, wenn man in der Gleichung $dt = \frac{dz}{u}$ statt u seinen Werth $\sqrt{2gs}$ und hiernächst statt s seinen Werth durch z, wie

---

(*) Substituirt man die Werthe von b und f, so hat man

$$s = \frac{h : KN.\left(1-c^{-\frac{f}{z}}\right)}{(M^2-K^2) : K.M^2.N} = \frac{M^2}{M^2-K^2} \cdot h.\left(1-c^{-\frac{f}{z}}\right),$$

wofür man, wenn schon ein Wasserzilinder von beträchtlicher Länge z abgeloffen ist, $s = \frac{M^2}{M^2-K^2} \cdot h$ setzen kann.

z, wie er vorhin gefunden worden ist, ausdruckt: auf diese Art erhält man

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{\frac{2bg}{f}} \cdot \sqrt{\left(1 - c^{-fz}\right)}}$$

Es sey $c^{-fz} = y$; also $dz = -\frac{dy}{fy}$, so hat man

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2bgf}} \cdot \frac{dy}{y\sqrt{(1-y)}}$$

oder (indem man $1 - y = x^2$ setzt), $dt = \frac{2}{\sqrt{(2bgf)}} \cdot \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{(2bgf)}} \cdot \left(\frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x}\right)$ u. das Integral

$$t = \frac{1}{\sqrt{(2bgf)}} \cdot [\log(1+x) - \log(1-x)]$$

oder auch, indem man x wegschaft,

$$t = \frac{1}{\sqrt{(2bgf)}} \cdot \left[L\left(1 + \sqrt{(1-c^{-fz})}\right) - L\left(1 - \sqrt{(1-c^{-fz})}\right)\right]$$

Hier braucht man keine Konstante beizufügen, weil $z = 0$ auch $t = 0$ gibt, wie sich gehört. Vermittelst dieser Gleichung ergibt sich die in einer gegebenen Zeit ausfließende Wassermenge, denn diese ist $= K.z$, die sich nun durch die Zeit und beständige Größen ausdrucken läßt.

233. Anmerk. Die Art, wie wir uns die beständige Vollerhaltung des Gefäßes ABCD im vorig. §. gedacht haben, findet in der Ausübung selten statt. Gewöhnlich wird die neue Schichte ADda, die in iedem Augenblick hinzutritt, um die in eben dem Augenblick durch die Oefnung abgeflossene wieder zu ersetzen, durch einen Seitenbeifluß ersetzt, und sie erhält

erhält ihre Geschwindigkeit von derienigen, welche ihr im Sinken vorausgeht und sie vermög des Zusammenhangs der Wassertheilgen mit sich nimmt. In solchem Fall muß man die Methode des vorig. §. etwas abändern, um sie auch auf diesen anwenden zu können.

Es sey V die Geschwindigkeit der Schichte AD da, v die Geschwindigkeit der unbestimmten Schichte TVut; g die Schwere, t die Zeit; rH = x. Wenn die Schichte ADda der freien Wirkung der Schwere überlassen wäre, so würde sie in der Zeit dt die Geschwindigkeit g dt erlangen. Man kann diese Geschwindigkeit g dt so ansehen, als ob sie aus der Geschwindigkeit V und einer andern g dt — V, welche vernichtet werden soll, zusammengesetzt wäre.

Wenn also eben diese Geschwindigkeit g dt — V in der Schichte ADda allein vorhanden wäre, und wenn die übrigen Schichten, welche längst der Höhe rq herabliegen, durchaus die Geschwindigkeit g dt — dv hätten, so müßte das ganze System in Ruhe bleiben. Man hat also

$$Rr.(g\,dt - V) + \int dx\,(g\,dt - dv) = o$$

und wenn man g dt in Vergleichung mit V wegläßt, und wie oben AD = M, pq = K, Rq oder rq = h setzt,

$$-2Rr.K.M.V.u + 2gh.M^2.Rr - 2K^2.M.N.udu + Rr.u^2.(K^2 - M^2) = o;$$

Oder auch (wenn man k. z die Wassermenge nennt, welche in der Zeit t abfließt, und s die der Geschwindigkeit u zugehörige Höhe bedeutet, und bedenkt, daß $V = \frac{Ku}{M}$, $Rr = \frac{Kdz}{M}$, $uu = 2gs$)

$$hM^2dz - (K^2 + M^2)sdz - K.M^2.N.ds = o$$

eine Gleichung, welche eben die Form hat, wie die im vorigen §. und mit der sich also die nämlichen Berechnungen vornehmen lassen.

Wenn

Wenn die Oefnung K als unendlich klein angesehen werden kann, so hat man hier, wie bei der ersten Voraussetzung, $s = h$) (*)

234. III. Aufgabe. **Für ein Gefäs, das ohne Zufluß zu haben, auslauft, eine Vergleichung zwischen den Größen zu finden, die sich auf den Ausfluß beziehen.**

Man setze, es sey im ersten Augenblick der Wasserspiegel in SX, und am Ende der Zeit t habe er die unbestimmte Lage AD, wobei Rq veränderlich ist. Wenn man nun $Rq = z$ also $Rr = -dz$ setzt und im übrigen die Benennungen wie in (230) beibehält, so ist klar, daß sich die Gleichung A hier anwenden läßt und sich in diese verwandelt

$$M^2 z dz + K^2 . M . N . ds + s dz (K^2 - M^2) = o.$$

Diese Gleichung läßt sich auf die Form $ds + sP dz = Q dz$, wo P und Q Funktionen von z und beständigen Größen sind. Um sie zu integriren, multiplicire ich alle ihre Glieder durch eine Funktion ϕ von z, die so beschaffen ist, daß sich das erste Glied vollständig integriren läßt; das andere muß sich wenigstens durch Quadraturen integriren lassen, wie auch diese Funktion beschaffen seyn mag. Wir erhalten also sogleich $\phi ds + \phi s P dz = \phi Q dz$. Nun nehmen wir an, man habe $\phi s = \int \phi Q dz$, folglich $\phi ds + s d\phi$

(*) §. 231. Dieses ist eben der Satz, dem ich schlechterdings nicht beitreten kann, daß nämlich, solang die Oberfläche endlich ist, die Geschwindigkeit allemal von o anfangen, hingen bei einer unendlichen Oberfläche die Geschwindigkeit sogleich der ganzen Höhe h zugehören soll, da doch im ersten Augenblick in beiden Fällen gleiche Ursache zur Bewegung vorhanden ist, oder eigentlich gleiche Ursache zum Anfang der Bewegung.

$sd\phi = \phi Q dz$. Vergleicht man die beiden Differentialgleichungen, Glied vor Glied, mit einander, so erhält man $sd\phi = \phi sPdz$ oder $\frac{d\phi}{\phi} = Pdz$, und $L\phi = \int Pdz$. Nennt man also c die Zahl, deren hyperbolischer Logarithme 1 ist, und nimmt nun wieder die Zahlen selbst, so hat man $\phi = c^{-\int Pdz}$. Diesen Werth von ϕ in die Gleichung $\phi s = \int \phi Q dz$ gesetzt, gibt

$$s = c^{-\int Pdz} \cdot \int Q c^{\int Pdz} \cdot dz$$

Man hat also die Vergleichung zwischen s und z. Die Vergleichungen aller Größen, welche zu der Aufgabe gehören, findet man ohne Schwierigkeit wie in den vorhergehenden Fällen, und die Frage führt im Allgemeinen allemal auf die Quadraturen krummer Linien. Wir schränken uns hier nur auf die Untersuchung eines besondern Falls ein.

235. IV. Aufgabe. **Den Ausfluß zu bestimmen, wenn das Gefäs, das ohne Zufluß zu haben auslauft, ein lothrechter Zilinder ist.**

Nach unsern Benennungen bezeichnet M den unveränderlichen horizontalen Querschnitt des Zilinders, und $N = \frac{Z}{M}$. Es verwandelt sich also die allgemeine Gleichung des vorhergehenden §. in

$$M^2 zdz + K^2 zds - (M^2 - K^2).sdz = o.$$

Es sey zur Abkürzung der Rechnung $\frac{M^2}{K^2} = m$, $\frac{M^2 - K^2}{K^2} = n$, so haben wir $zds - nsdz + mzdz = o$. Ich multiplicire alles mit ϕ der Funktion von z, und indem

indem ich $\varphi z s + \int m \varphi z dz = A$ setze, gibt diese letztere Gleichung

$$\varphi z ds + s(\varphi dz + z d\varphi) + \varphi m z dz = o,$$

Diese Gleichung, Glied vor Glied, mit der Gleichung $\varphi z ds - \varphi n s dz + \varphi m z dz = o$ verglichen gibt $\varphi dz + z d\varphi = -\varphi n dz$, oder $\frac{d\varphi}{\varphi} = -(n+1)\frac{dz}{z}$, also $\varphi = Bz^{-(n+1)}$. Die Gleichung $\varphi z s + \int \varphi m z dz = A$ verwandelt sich also in

$$(1-n).\, s.\, z^{-n} + m z^{1-n} = m H^{1-n};$$

wo H die anfängliche gegebene Höhe des Wassers bedeutet, und die Konstante $\frac{A}{B}$ so bestimmt wird $z = H$, $s = o$ gibt, oder daß im ersten Augenblick die Geschwindigkeit des Wassers $= o$ wird (*).

Wenn

(*) Wenn man nämlich statt φ seinen Werth $Bz^{-(n+1)}$ wo B eine beständige Größe bedeutet, gebraucht, so hat man

$$B.z^{-(n+1)}\, z.s + \int B.z^{-(n+1)}\, mzdz = A$$

oder

$$B.s.z^{-n} + mB.\int z^{-n} dz = A$$

also $sz^{-n} + \frac{mz^{1-n}}{1-n} = \frac{A}{B}$ und

$$(1-n).s.z^{-n} + m.z^{1-n} = (1-n).\frac{A}{B}$$ (b

wo $(1-n).\frac{A}{B}$ eine Konstante ist; nun muß $z = H$, $s = o$ geben; man hat also

$$(1-n).o.H^{-n} + mH^{1-n} = (1-n).\frac{A}{B}$$ d. i.

$(1-n)$

Wenn im ersten Augenblick das Wasser im Zilinder, von irgend einer äußern Ursache, eine Geschwindigkeit hätte, die einer gegebenen Höhe b zugehörte, so müßte man die Konstante A so bestimmen, daß $z = H$, $s = b.\frac{K^2}{M^2}$ gäbe. Man erhält also allemal leicht s durch z und beständige Größen.

Man findet auch ohne Schwierigkeit die Verhältnis zwischen Zeit und Geschwindigkeit, und die zwischen der Zeit und der Höhe z.

236. I. Anmerk. Für $n = 1$ oder $M^2 = 2K^2$ gibt die Formel des vorigen §. für s einen unbestimmten Werth. Man muß alsdann zur Differentialgleichung

$$M^2 z\,dz + Kz\,ds - (M^2 - K^2)\,s\,dz = 0$$

zurückgehen, aus der in diesem Fall

$$2z\,dz + z\,ds - s\,dz = 0 \quad \text{oder auch}$$

$$\frac{5z\,d - s\,dz}{z^2} = -\frac{2\,dz}{z} \quad \text{wird.}$$

Dieses

$$(1-n).\frac{A}{B} = mH^{1-n}$$

dieses nun in (b) gesetzt, gibt die Gleichung im Text, oder

$$\frac{\left(1-\frac{M^2-K^2}{K^2}\right).s}{z^{\frac{M^2-K^2}{K^2}}} + \frac{M^2}{K^2}.z^{1-\frac{M^2-K^2}{K^2}} =$$

$$\frac{M^2}{K^2}.H^{1-\frac{M^2-K^2}{K^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{2-\frac{M^2}{K^2}}{z^{\frac{M^2}{K^2}-1}}.s + \frac{M^2}{K^2}.z^{2-\frac{M^2}{K^2}} = \frac{M^2}{K^2}.H^{2-\frac{M^2}{K^2}}$$

Dieses integrirt gibt $\frac{s}{z} = L'A - Lz^2$. Wenn man also die Konstante A so bestimmt, daß $z = H$, $s = o$ gibt, so erhält man $s = z.L\left(\frac{H^2}{Z^2}\right)$

237. II. Anmerk. Wir haben über diese Aufgabe noch eine Bemerkung zu machen, die sich unter gehöriger Veränderung auf alle Arten von Gefäßen anwenden läßt. Wir wollen setzen, der im ersten Augenblick ruhig stehende Wasserspiegel sinke im Zilinder um die äußerst kleine Tiefe q, so hat man $z = H - q$, und (indem man die zwote und höhere Potenzen von q wegläßt) $z^{-n} = (H-q)^{-n} = H^{-n} + nH^{-n-1}$;

$z^{1-n} = (H-q)^{1-n} = H^{1-n} - (1-n)H^{-n}q$.

Diese Werthe in der allgemeinen Gleichung

$(1-n)sz^{-n} + mz^{1-n} = mH^{1-n}$ substituirt, gibt

$Hs + nsq - mHq = o$ oder auch $s = \frac{mHq}{H+nq}$,

oder wenn man das zweite Glied des Nenners wegläßt,

$$s = mq = q.\ \frac{M^2}{K^2}$$

Hieraus folgt, daß die der Geschwindigkeit des Wasserspiegels im Zilinder zugehörige Höhe durch q ausgedruckt wird. Es sinkt also die Oberfläche in den ersten Augenblicken der Bewegung so wie Körper, die vermög der Schwere frei herabfallen, oder grade so als ob der Zilinder gar keinen Boden hätte und das Wasser wie eine einzige Masse herabfiele (*).

Hier-

(*) Nach meiner Theorie sinkt der Wasserspiegel durch die Tiefe q, welche $= \frac{K}{M}.H$ ist, zwar in beschleu-

Hieraus hat man Veranlassung zu einem Einwurf gegen das parallele Sinken der einzelen Schichten genommen. Es ist unmöglich, sagt man, daß das Wasser durch die Oefnung pq, welche kleiner als der Boden BC ist, in irgend einem Fall eben so niedersinken könne, als wenn ihm der Boden gar keine Hinderniß entgegen setzte. Man kann hierauf antworten, daß der Einwurf unwiderlegbar seyn würde, wenn auf die ganze Höhe Oq des Zilinders die Geschwindigkeiten aller einzelen Schichten unter einander gleich wären.

---

nigter Bewegung wie ieder schwere Körper fällt, aber nicht mit der natürlichen Schwere g, sondern der veränderten $\frac{K}{M} \cdot g$, so daß, wenn der Spiegel den Raum $\frac{K}{M} \cdot H$ durchloffen hat, die Geschwindigkeit in der Oefnung der Höhe H zugehört und hiernächst wieder bis zu o abnimmt. Nach der hier erwähnten Theorie aber müßte in den ersten Augenblicken, wann der Spiegel durch eine sehr kleine Tiefe q gesunken ist (also nach Durchlaufung des Raums $\frac{K}{M} \cdot H$, wofern K gegen M sehr klein ist) die Geschwindigkeit des Wassers in der Oefnung einer Höhe zugehören, die unendlichmal so groß als der vom Spiegel durchloffene Raum q ist, oder der Spiegel müßte diesen Raum q mit beschleunigter Bewegung, von der natürlichen Schwere getrieben, durchlaufen, also die Geschwindigkeit des durch die Oefnung schießenden Strahls von einer Schwere beschleunigt werden, die $\frac{M^2}{K^2}$ mal so groß als die natürliche Schwere wäre. Also sollte eine Schwere in die Wassertheilgen wirken, die größer als die wirklich vorhandene Schwere ist, welche in sie wirken kann? Beweißt diese theoretische Schlußfolge nicht offenbar, daß in der Theorie selbsten eine unstatthafte Vorausseßung zum Grund liegen müsse?

Man

wären. Wenn man aber voraussetzt, daß sich in einer kleinen Entfernung vom Boden die Theilgen in schiefen Richtungen Mp, Nq gegen die Oefnung lenken; und nun die Stücke der flüßigen Masse MpB, NqC als stille stehend ansieht, so müssen sich die Theilgen, welche zu dem Raum pMNq gehören, schneller als die in dem obern Theil des Zilinders SMNX bewegen; und so ist es also möglich, daß in den ersten Augenblicken der Wasserspiegel beinahe wie ein schwerer frei fallender Körper sinken könne (*).

Die

Man sieht auch, daß der erwähnte falsche Satz der Wahrheit desto näher komme, ie näher der Werth von K dem von M kommt, und daß er der Wahrheit völlig gemäs wird, wenn K = M wird; beweißt dieses nicht, daß die zum Grund gelegte Voraussetzung von der Art seyn müsse, daß sie der Wahrheit desto näher kommt, ie näher der Werth von K dem von M kommt, und daß sie in vollkommener Schärfe statt findet, wann K = M wird? Und ist nicht die Voraussetzung des parallelen Sinkens aller ganzen Schichten vom Wasserspiegel bis zum Boden grade von dieser Art? Man sieht also, daß diese Voraussetzung wesentlich falsch ist, und daß die sich darauf gründenden Formeln, welche die allmälige Beschleunigung des Ausflusses bestimmen sollen oder sich doch auf solche beziehen, gewiß unrichtig sind, der Wahrheit aber desto näher kommen, iemehr sich $\frac{K}{M}$ der 1 nähert, und der Wahrheit nur in dem Fall wirklich gemäs sind, wann $\frac{K}{M} = 1$ ist.

(*) Es ist auffallend, wenn man sieht, wie sich selbst Männer von der Größe eines Bossüt immer mehr verwickeln und sich von der Wahrheit destomehr entfernen, iemehr sie sich in die Vertheidigung ihrer Hypothesen einlassen. Fürs Erste hat Herr Bossüt hier ganz und gar nichts zur nähern Erläu-

Die Erfahrung allein muß zwischen diesen beiden Meinungen entscheiden; diese lehrt aber, daß kein Theil der flüßigen Masse völlig ruhig bleibt, und daß alle Theilgen ein gemeinschaftliches kennbares Bestreben nach der Oefnung haben, daß aber die nahe am Ausgang gelegenen eine schnellere Bewegung haben als die übrigen. In diesem untern Theil scheint also die Hypothese von dem parallelen Sinken der Schichten nicht statt zu finden; in dem ganzen obern Theil aber ist

terung seines Satzes gesagt. Niemand kann es in Zweifel ziehen, daß die Wassertheilgen unten sich schneller bewegen müssen als oben im Gefäs, und wenn solches auch erst in der Oefnung selbsten erfolgen sollte, daß also die Bewegung der untern Theilgen schneller als die Bewegung frei fallender Körper beschleunigt werden muß, daferne die oberste Schichte im Zilinder ebenso wie ein frei fallender Körper beschleunigt wird; aber wie in aller Welt kann diese so ganz bekannte Wahrheit nur einigermaßen den Satz begreiflich machen, daß wirklich die oberste Schichte in den ersten Augenblicken wie ein schwerer frei fallender Körper beschleunigt werde? Fürs Andere verfällt Herr Bossüt bei dieser Erläuterung in einen offenbaren Widerspruch. Er sagt: „der seiner Hypothese gemachte Einwurf lasse sich „gar nicht beantworten, wofern die Geschwindig„keiten aller Querschnitte von der Oberfläche bis auf „den Boden des Zilinders als gleichgroß vorausge„setzt würden, man dürfe daher diese Voraussetzung „nahe am Boden nicht gelten lassen.“ Sobald man aber diese Voraussetzung nicht mehr gelten läßt, ist auch m keine unveränderliche Größe mehr, und dann findet man auch nicht $s = mq$, und Herrn Bossüts Erläuterung, die gar nichts erläutert, enthält also überdas noch den ungereimten Satz: „um zu „begreifen, wie $s = mq$ (für ein sehr kleines q) „werden könne, müsse man einen andern Satz zu „Hülfe nehmen, bei dessen Voraussetzung nicht „mehr $s = mq$ gefunden werde.“

ist sie augenscheinlich richtig (*). Wenn übrigens auch diese Hypothese den Ausfluß für eine Zeit, die als unendlich klein anzusehen ist, falsch bestimmte, so folgt doch daraus nicht, daß sie auch ungeschickt sey, die Ausflüsse für endliche Zeiten richtig genug zu bestimmen, wenigstens in soweit, daß die Verhältnisse verschiedener Ausflüsse, welche sich aus solchen Bestimmungen ergeben, der Wahrheit sehr nahe kommen. Denn wenn die Abweichungen, welche diese Hypothese leidet, überall gleichen Gang halten, so können sich auch die natürlichen und physischen Ausflüsse unter einander ebenso verhalten, wie die Ausflüsse, welche durch die gedachte Methode bestimmt werden.

238. V. Aufgabe. **Die Bewegung einer bestimmten flüßigen, schweren oder nicht schweren, Masse anzugeben, die sich in einem Gefäs entweder vermög ihrer Schwere allein, oder vermög eines anfänglich erhaltenen Stoßes, oder aus beiden Ursachen zugleich bewegt.**

Die allgemeine Gleichung (§. 230.) dient uns zur Auflösung dieser Aufgabe. Unter Beibehaltung der nämlichen Figur und eben der Benennungen wollen wir uns zuerst gedenken, es sey der Boden BC weggenommen oder man habe K = BC, um der flüßigen Masse zu gestatten, längst dem Gefäs nach dem Gesetz der Stetigkeit abzufließen. Nun setze man, das gegebene Stück der flüßigen Masse nehme im ersten Augenblick den Raum SZKX ein, und am Ende der Zeit t sey

(*) Was hier gesagt wird, ist nur eine Erfahrung von kleinen Gefäßen, nicht aber von großen Behältern, die z. B. einige hundert Quadratruthen halten, aus welchen das Wasser durch eine Oefnung von etlichen Zollen im Durchmesser abläuft.

sey es in die unbestimmte Lage ABCD gekommen; so ist klar, daß wenn man den vom Wasserspiegel lothrecht durchloffenen Raum OR z nennt, die Größen M, K, N, h gegebene Funktionen von z und beständigen Größen sind, weil die Gestalt des Gefäßes gegeben ist und die beiden Räume SZKX, ABCD einander gleich sind. Die Gleichung, welche die Bewegung der flüßigen Masse ausdruckt, erhält also allemal diese Form

$$Zdz + AZ'ds + BsZ''dz = o$$

wo Z, Z', Z'' Funktionen von z, und A, B beständige Größen sind; und diese Gleichung muß man nach der Methode (234) integriren. Das Integral muß von der Art seyn, daß dabei die anfängliche Geschwindigkeit eines bestimmten Querschnitts gegeben seyn muß.

Wenn die flüßige Masse ohne Schwere ist, so verschwindet das erste Glied dieser Gleichung, welches sich auf diese Kraft bezieht, und die Gleichung wird sehr einfach.

Aus der Verhältnis zwischen s und z findet man leicht r durch s oder durch z.

Man sieht, daß diese Aufgabe dienen kann, die Bewegung des Wassers in langen Röhrenleitungen zu bestimmen, insofern man alle Reibung dabei außer Acht läßt.

239. VI. Aufgabe. **Den Druck zu bestimmen, den eine flüßige Masse, indem sie aus einem Gefäs, oder aus einer Röhre abfließt, gegen die Wände ausübt.**

Auch von dieser Aufgabe leiten wir die Auflösung aus 230. Wir nehmen daher die Hypothese, die Verzeichnung und die Benennungen wie dorten an. Da die Geschwindigkeit, mit der ieder Querschnitt nach Bewegung streben müßte, um in Ruhe zu bleiben,

= gdt

$= g\,dt - dv$ also die zugehörige Kraft eben dieses Querschnitts $= g - \frac{dv}{dt}$ ist, so erhellet, daß vermög dieser Kräfte $g - \frac{dv}{dt}$ die Schichten auf eben die Art einander drucken, wie sich in einer schweren und ruhig in einem Gefäs stehenden flüßigen Masse die Querschnitte vermög der Schwere einander drucken. Es wird also bei der Tiefe RH (x) der Druck einer ieden Stelle der Schichte TVut durch $\int dx \left(g - \frac{dv}{dt}\right)$ ausgedruckt. Diese Kraft, die sich nach allen Seiten ausbreitet, wirkt senkrecht gegen die Wände Tt, Vu. Nun ist $\int dx \left(g - \frac{dv}{dt}\right) = g.\,RH - \int \frac{dx\,dv}{dt}$.

Setzt man für dv seinen Werth $\frac{K(ydu - udy)}{y^2}$, so erhält man

$$\int \frac{dx\,dv}{dt} = \frac{K\,dv}{dt} \int \frac{dx}{y} - \frac{Kuydx}{dt} \int \frac{dy}{y^3}.$$

Die angezeigten Integrationen müssen so bewerkstelligt werden, daß die durch $\int \frac{dx}{y}$ bezeichnete Fläche, die ich Q nennen will, zu RH gehört, und daß $\int \frac{dy}{y^3}$ für $y = AD$ verschwindet und für $y = TV = H$ seinen vollständigen Werth erhält. Wenn man also für $y\,dx$ seinen Werth M. Rr setzt, so findet man, daß der Druck $\int dx \left(g - \frac{dv}{dt}\right)$ der zur Höhe RH gehört, $=$

$$g.\,RH - \frac{K.Q.\,du}{dt} + \frac{Ku.\,Rr.\,(H^2 - M^2)}{2dt.\,H^2.M}$$

worin man in iedem Fall für u und dt ihre Werthe setzt.

Wenn für irgend eine Stelle der Werth des Drucks verneint wäre, so würde solches anzeigen, daß an dieser Stelle die Querschnitte gar nicht auf einander wirkten, daß also die flüßige Masse daselbst gar keinen Zusammenhang hätte oder sich von einander absonderte (*).

240. VII. Aufgabe. **Nach eben den Grundsätzen die Kraft zu bestimmen, welche man anwenden muß, um ein Gefäs fest zu halten, aus welchem das Wasser durch die Oefnung pq auslauft.**

Die gesuchte Kraft ist so groß als die Summe der Produkten aus ieder Schichte in dieienige Kraft, vermög der eben diese Schichte ruhig bleiben würde, aus eben der Ursache, weshalb die Kraft, welche zur ruhigen Erhaltung einer in einem Gefäs stille stehenden flüßigen Masse erfodert wird, so groß ist also die Summe

(*) Diese Erklärung ist der Sache nicht angemessen; die Querschnitte brauchen sich da, wo der Druck auf die Wand negativ wird, noch nicht von einander zu trennen. Wenn man in einem luftleeren Raum ein Gefäs mit einer kurzen lothrechten Röhre auslaufen läßt, so findet man den Druck auf die Röhrenwand verneint, und es dürfte also nach Herrn Bossüt der Strahl unterhalb dem Boden des Gefäßes in der Röhre nirgends zusammenhängen, wovon man doch das Gegentheil sieht. Der physische Erfolg ist in der That der algebraischen Formel ganz gemäs; wo nämlich solche einen verneinten Werth gibt, zeigt sie an, daß die Schichten nicht nur kein Bestreben haben, sich gegen die Wände auszubreiten, sondern sich im Gegentheil noch von solcher entfernen und sich enger zusammenziehen. Nur nach und nach kann endlich eine Trennung erfolgen.

Summe der Produkten aus ieder Schichte in die Schwere. Ihr Werth ist also

$$\int ydx\left(g-\frac{dv}{dt}\right)=\int gydx-\int\frac{ydxdv}{dt}$$

Der erste Theil ist das Gewicht der flüßigen Masse selbst, und der andere ergibt sich ohne Schwierigkeit aus dem Vorhergehenden.

241. **Allgemeine Erinnerung.** Aus der allgemeinen Theorie, die wir hier vorgetragen haben, ersieht man, daß man aus der Hypothese von dem parallelen Sinken der Schichten auf eine ziemlich einfache Art alles bestimmt, was sich auf den Ausfluß flüßiger Massen aus Gefäßen mit horizontalen Oefnungen bezieht. Die nämliche Theorie läßt sich auch bei Untersuchung flüßiger Massen durch lange abwärts liegende Röhren anwenden, was solche auch längs ihrer Richtung für Wendungen haben mögen, wofern nur diese Wendungen nicht zu plötzlich aus einer Richtung in die andere erfolgen. Für die Leichtigkeit der Rechnung ist es ganz gleichgültig, ob man alsdann die Lage der Schichten als horizontal oder als senkrecht gegen die Wände ansehen will. Welche von beiden Voraussetzungen den Vorzug verdiene, läßt sich entscheiden, wenn man die Resultate aus beiden mit der Erfahrung vergleicht. Ich brauche nicht hinzuzusetzen, daß bei der zwoten nur die nahe hinter einander liegenden Schichten mit einander parallel laufen.

Bei Gefäßen, aus welchen das Wasser durch große Seitenöfnungen ablauft, können die Ausflüße nicht nach der Methode des parallelen Sinkens bestimmt werden. Denn wenn die im Gefäs enthaltene Wassertheilgen in die Gegend der Oefnung gelangt sind, so lenken sie sich von der lothrechten Linie ab und streben in mehr oder weniger gekrümmten Wegen gegen die

Oefnung zu. Ueberdas haben sie bei ihrem Ausfluß nicht einerlei Geschwindigkeit; diejenigen, welche weiter von dem Wasserspiegel entfernt sind, bewegen sich nothwendig schneller als die andern. In solchem Fall gibt es daher keine einfachere und bequemere Methode, den Ausfluß zu bestimmen, als die im vorigen Kapitel: aber dann wird erfordert, daß die Oefnung in Vergleichung mit den Querschnitten des Gefäßes, wie wir schon bemerkt haben, klein sey.

Fünftes Kapitel.

Methoden, welche genauer als die vorhergehenden sind, um die Bewegung der flüßigen Masse zu bestimmen, wenn solche aus einem Gefäs abfließt.

242.

Da die Hypothese von dem parallelen Sinken der Wassertheilgen mit verschiedenen Schwierigkeiten verwebt ist, die wir mit den Erläuterungen, wodurch man solche zu heben oder doch zu schwächen sucht, angeführt haben, so haben die Mathematikverständigen andere noch genauere analytische Methoden gesucht, um die Bewegung flüßiger Massen zu entwickeln. Herr d'Alembert hat schon längstens gezeigt, daß man auf diese Untersuchung den Grundsatz von der Gleichheit des Drucks unmittelbar anwenden könne (Résistance des Fluides, 1752; Opuscules math. tome Ier & V.). Die Untersuchungen, welche nachher Hr. Euler über eben diese Materie angestellt hat, sind so voll von den tiefsten und ausgebreitetsten Kenntnissen, daß es bei dem Zustand, worin sich iezt die Analysis befindet, beinahe nicht möglich ist, weiter zu gehen, ohne die Aufgabe aus einem etwas geänderten Gesichtspunkt zu betrachten (Acad. de Berlin 1755; Acad. de Petersbourg, 1768, 1769, 1770, 1771). Nur Schade, daß alle dergleichen Formeln nur, wenn ich so sagen darf, blos spekulativische Wahrheiten liefern; und wenn man physische Anwendungen davon machen will, so muß man durch allerlei Voraussetzungen dergestalt simplificiren oder umschaffen, daß,

daß es vielleicht eben so gut gewesen wäre, wenn man gleich anfangs die Rechnung auf minder scharfe Sätze gebaut hätte. Dieses hat Hrn. d'Alembert bewogen (Op. Math. tome VI. 1773; & VIII, 1782) eine neue einfachere Methode vorzulegen, die einer großen Genauigkeit fähig ist, und deren ersten Gründe durch die Erfahrung leicht bestättigt werden können. Er begnügt sich mit der Voraussetzung, daß bei dem Ausfluß aus einem Gefäs der Wasserspiegel beständig horizontal bleibe, welches der Erfahrung gemäs ist; hierauf bedient er sich der Vorstellung, die er schon in dem ersten Band seiner im Jahr 1761. erschienenen Opusc. Math. gebraucht hatte, daß die flüßige Masse in unendlich viele enge Röhrgen vertheilt sey, die von dem Wasserspiegel herabgehen und sich auf der untern Fläche oder in der Oefnung unter einer mehr oder weniger schiefen Richtung endigen, nachdem sie mehr oder weniger von dem Mittelpunkt der Oefnung entfernt sind, so daß die Richtung des zu dem Mittelpunkt gehörigen Wasserröhrgens augenscheinlich eine lothrechte grade Linie ist.

In den Denkschriften der Akademie zu Berlin für das Jahr 1781. hat Hr. de la Grange, der schon (Acad. de Turin 1762.) einen auf die Methode des Größten und Kleinsten gebauten Grundsatz der Dynamik mit dem besten Erfolg auf die Bewegung flüßiger Massen angewendet hatte, einen neuen seiner Geistesgröße ganz würdigen Versuch gemacht, die allgemeine Theorie von der Bewegung flüßiger Massen zu vervollkommenen, mit vorzüglicher Rücksicht auf die Mittel, solche auf einzele Fragen anwendbar zu machen.

In den beiden folgenden Aufgaben findet man das Wesentliche oder einen allgemeinen Begriff von den Bemühungen dieser großen Meßkünstler in einer so wichtigen Materie. Ich mache mit derjenigen den

Anfang.

Anfang, welche auf das Vorhergehende die meiste Beziehung hat.

243. I. Aufgabe. **Den Ausfluß durch die Oefnung eines Gefäßes unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß der Wasserspiegel beständig horizontal bleibe und die Wassertheilgen sich von der Oberfläche bis zur Oefnung in eingebildeten Röhrgen herabbewegen.**

Da die Oberfläche der flüßigen Masse AD (fig. 12.) immer horizontal bleibt, so ist klar, daß wenn man einmal die Geschwindigkeit weiß, mit der irgend ein Punkt derselben in jedem Augenblick niedersinkt, man auch das Wasserelement zu bestimmen vermag, welches während diesem Augenblick durch die Oefnung ablauft, weil solches dem Produkt aus der Oberfläche in den kleinen Raum gleich ist, welchen einer der Punkte aus eben dieser Oberfläche durchlauft. Wir wollen also das Element der Bewegung des Punkts R zu bestimmen suchen, welcher lothrecht über dem Mittelpunkt H der Oefnung pq liegt. Daraus läßt sich hienächst durch Integrirung die Wassermenge finden, welche in einer bestimmten Zeit durch die Oefnung ablauft.

Wir wollen die lothrechte Linie RH als die Axe einer unendlich engen Röhre RSMNH betrachten, worin sich alle um die Axe liegenden Theilgen eben so bewegen, als wenn dieses Röhrgen ein abgesondertes Gefäs ausmachte. Wir wollen, um die größte Allgemeinheit zu haben, die Gestalt der Röhre so ansehen, als wenn sie sich von Augenblick zu Augenblick änderte, so daß eben die Gestalt, welche im Anfang eines Augenblicks RSMNH ware, am Ende desselben rsmnhr wird. Man stelle sich vor, es sey die gesammte in diesem Kanal enthaltene flüßige Masse in unendlich viele horizontale Schichten von gleichem

Inhalt

Inhalt vertheilt. Da alle Punkten in der Axe RH lothrecht herabsinken, so ist klar, daß alle die erwähnten Schichten gleichfalls als lothrecht sinkend angenommen werden können, und zwar mit Geschwindigkeiten, die sich umgekehrt wie ihre Flächen verhalten.

Die Methode 230. kann also hier gebraucht werden, die Geschwindigkeit irgend einer solcher Schichten und folglich auch die Geschwindigkeit der Oberfläche RS oder der Stelle R zu bestimmen.

Es sey

die Schwere	= g
die ganze Höhe der flüßigen Masse RH .	= h
die veränderliche Höhe RP	= x
der erste Querschnitt RS der anfänglichen Röhre	= R
der letzte HN	= H
der letzte Querschnitt Hn der veränderten Röhre rsmnH	= m
die Geschwindigkeit dieses Querschnitts Hn	= u
der unbestimmte Querschnitt Pm . .	= y
die Geschwindigkeit dieses Querschnitts .	= v
das Zeitelement	= dt
das Element der Höhe, von der der Punkt R herabsinkt	= dz

Wendet man hier die Schlüsse des schon erwähnten 230. §. an, so erhält man für die ganze Höhe RH, $\int dx.(gdt - dv) = o$, oder auch $gdt\int dx - \int dx\, dv = o$. Nun ist $\int dx = h$, $v = \frac{um}{y}$, und $dv = d\left(\frac{um}{y}\right)$; wenn man also voraussetzt, daß wegen der Veränderlichkeit der Röhre aus m, $m + \delta m$ wird; daß für ein unveränderliches x, y sich in $y + dy$ verändert, und daß, indem aus x, $x + dx$ wird, y sich in $y + dy + \delta y$ verwandelt; so erhält man $d\left(\frac{um}{y}\right) = (u + du$

$\frac{(u+du)\cdot(m+\partial m)}{y+dy+\partial y} - \frac{um}{y} = \frac{mdu+u\partial m}{y} - \frac{mu(dy+\partial y)}{y^2}$; diesen Werth von dv substituire man in der Gleichung $gdt\int dx - \int dxdv = o$, oder $hgdt - \int dxdv = o$; auch setze man für dt seinen Werth, der $= \frac{Rdz}{mu}$ seyn muß, weil die obere Schichte R mit einer Geschwindigkeit $= \frac{mu}{R}$ niedersinkt; endlich überlege man, daß alle angezeigte Integrale so genommen werden müssen, daß nur die von x und y abhängende Größen veränderlich sind, die übrigen aber, in dieser Rechnung, als beständige Größen anzusehen sind. Hierdurch erhalten wir (wenn wir überdas bemerken, daß der Ausdruck ydx, für welchen Querschnitt man will, als unveränderlich angenommen wird) $\frac{ghRdz}{mu} - (mdu+u\partial m)\int\frac{dx}{y} + muydx\int\frac{dy}{y^3} + mu\int\frac{dx.\partial y}{y^2} = o$. Das Integral $\int\frac{dx}{y}$ für die ganze Höhe h nenne man N, und bewerkstellige die Integration $\int\frac{dy}{y^3}$ so, daß das Integral für $y = R$ verschwinde und für $y = H$ seinen vollständigen Werth erhalte; für ydx setze man seinen Werth Rdz, und 2gs statt u^2, wo s die zur Geschwindigkeit u gehörige Höhe ist; so erhält man

$hRdz - m^2Nds - 2mNs\partial m + m^2sRdz.\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{H^2}\right) + 2m^2s.\int\frac{dx.\partial y}{y^2} = o.$

Um das Glied, welches ∂m enthält, wegzubringen, welches die Rechnung einfacher macht, sey Δy eine Veränderung von y, so daß man $m.\Delta y = m.\partial y - y$.

$-y.\delta m$ erhalte, oder $\delta y = \frac{y\delta m}{m} + \Delta y$: so verändert sich die vorhergehende Gleichung in diese:

$$hRdz - m^2 Nds + m^2 sRdz \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{H^2}\right) + 2m^2 s. \int \frac{dx.\Delta y}{y^2} = o. \quad (A.$$

In dieser Gleichung bedeutet $\int \frac{dx.\Delta y}{y^2}$ die Fläche einer krummen Linie, deren Abscisse x und die Ordinate $\frac{\Delta y}{y^2}$ ist, die sich auf die ganze Axe RH beziehet, und nur eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung ausmacht. Die Natur der krummen Linie SMN, welche die anfängliche eingebildete Röhre begrenzt, und die Veränderung Δy der Ordinate y müssen durch eine hinreichende Anzahl von Erfahrungen festgesetzt werden. Alsdann ist man im Stand, von der Gleichung A eben dergleichen Anwendungen zu machen, wie wir von der ähnlichen Gleichung (§. 230.) gemacht haben.

244. I. Zusatz. Um das eben Vorgetragene durch eine Anwendung näher zu erläutern, wollen wir setzen, das Gefäs laufe aus, ohne Zufluß zu erhalten, und die Grundfläche H der anfänglichen eingebildeten Röhre sey in Vergleichung mit der Oberfläche R sehr klein; es sey überdas der Querschnitt m, der in der Gleichung A als eine beständige Größe angesehen wird, $= H$; wenn man nun q die veränderliche Höhe Rh nennt, welches $dz = -dq$ gibt, und alle Glieder, welche H^2 enthalten, wegläßt, nur das letzte ausgenommen, welches, wie sich gleich zeigen wird, beibehalten werden kann; so erhält man statt der Gleichung (A) schlechtweg

$$-q + s + \frac{2H^2 s}{Rdq} \int \frac{dx.\Delta y}{y^2} = o.$$

Hätte

Hätte man nunmehr $s = q$, das ist: gehörte die Geschwindigkeit beim Ausfluß in der Oefnung H der ganzen Höhe der flüßigen Masse im Gefäs, so wäre das letzte Glied unserer Gleichung $= o$. Sind aber s und q etwas von einander verschieden, (die Erfahrung scheint es wirklich zu beweisen, daß s etwas kleiner als q ist), so dient das erwähnte letzte Glied, welches nicht mehr $= o$ ist, zur Erläuterung dieses Unterschieds. Man kann aber diesem Glied verschiedene Werthe beilegen, die von der Art sind, daß sich das Integral $\int \frac{dx.\Delta y}{y^2 dq}$ mit dem Integral $\int \frac{dy}{y^2}$ vergleichen läßt, das im gegenwärtigen Fall $= -\frac{1}{2H^2}$ ist. Denn es sey z. B. $y = a + p$, und $dy = dp$, $\Delta y = \frac{p^r dq}{(a+q)^r}$; $dx = \frac{A dp}{p^n (a+p)^k}$; so ist klar, daß die beiden Differentialien $\frac{dy}{y^3}$ und $\frac{dx.\Delta y}{y^2, dq}$ das ist $\frac{dp}{(a+p)^3}$ und $\frac{A.p^{n-r}.dp}{(a+p)^{k+r+2}}$ unter einander verglichen werden können, wenn man die Exponenten n, k, r gehörig nimmt; es kann sogar kommen, daß das letzte viel größer als das erste ist. Für unendliche andere Voraussetzungen in Ansehung der Werthe von $y\Delta y$, dx lassen sich ähnliche Resultaten finden.

245. II. Zusatz. Nach der Hypothese des parallelen Sinkens aller Schichten nach der ganzen Weite des Gefäßes ist der Druck in ieder Stelle der Wände (239) $\int dx \left(g - \frac{dv}{dt}\right)$; hier hat man für den Druck an ieder Stelle der eingebildeten Röhre RS MNH den ähnlichen Werth $\int dx \left(g - \frac{dv}{dt}\right)$; da aber das dv nicht in beiden Fällen einerlei ist, so sind

auch die Drückungen nicht die nämlichen. Die Größe $\int \frac{dx \cdot \Delta y}{y^2}$, welche ietzt auf die Geschwindigkeit wirkt, ändert auch den Druck, und diese Aenderung pflanzt sich durch alle an einander liegende Theile bis zu den Wänden des Gefäßes fort. Hieraus könnte man, wenn man mittelst der Erfahrung die Geschwindigkeit untersuchte, mit der die flüßigen Theile durch eine in den Wänden angebrachte kleine Oefnung herausschiessen, über den Werth der Größe $\int \frac{dx \cdot \Delta y}{y^2}$ neues Licht verbreiten.

246. Anmerk. Wenn das Gefäs ABCD eine endliche Weite hat, so kann die Ordinate y der eingebildeten Röhre RSMNH von der zugehörigen Ordinate des Gefäßes gar sehr verschieden seyn; und das Glied, welches in der Gleichung (A) $\int \frac{dx \cdot \Delta y}{y^2}$ enthält, kann den andern sehr nahe kommen. Wenn aber das Gefäs unendlich enge ist, so ist die Geschwindigkeit aller Stellen eines Querschnitts einerlei; die Ordinate der eingebildeten Röhre ist sehr nahe die Ordinate des Gefäßes selbst; die δy und Δy sind in Vergleichung mit dy unendlich klein. Daher kommt's, daß im gegenwärtigen Fall die Größe $\frac{dx \cdot \Delta y}{y^2}$ in Vergleichung mit $\frac{dy}{y^3}$ unendlich kleiner ist, als wenn die Weite des Gefäßes als endlich angenommen wird.

Diese ganze Theorie beruht, wie man sieht, auf Gründen, welche durch mannigfaltige und auf verschiedene Weise wiederholte Erfahrungen bestimmt werden müssen: Erfahrungen, die gar nicht schwer zu gedenken und wirklich zu machen sind.

247. II. Aufg. **Durch den Grundsatz von der Gleichheit des Drucks die Bewegung der flüßigen Masse in einem Gefäs zu bestimmen.**

Die allgemeine Auflösung dieser Aufgabe hängt von mehrern Betrachtungen ab, die wir hier nach der Reihe vortragen wollen.

I. Die Kräfte, welche einer flüßigen Masse beim Gleichgewicht beiwohnen können, mögen beschaffen seyn wie sie wollen, so haben wir (179. No. 4.) gesehen, daß wenn man sich in dieser flüßigen Masse einen in sich selbst zurückgehenden Kanal gedenkt, die in diesem Kanal enthaltene Flüßigkeit auch außer der Verbindung mit der übrigen Masse in Ruhe bleiben würde; das ist: daß, wenn man sich vorstellt, der übrige Theil der flüßigen Masse verhärte ohne seine Stelle oder seinen körperlichen Raum im mindesten zu verändern, alsdann im Kanal das Gleichgewicht wie zuvor bleiben müsse. Es kann wirklich kein Satz klärer in die Augen fallen. Denn die in dem Kanal enthaltene flüßige Masse bleibt in eben dem Zustand der Zusammendrukkung und iedes ihrer Theilgen wird immerfort nach allen Seiten auf gleiche Weise gedruckt, es tritt also gar keine Ursache hinzu, welche das Gleichgewicht aufheben könnte.

II. Diesem Gesetz gemäs wollen wir in einer im Gleichgewicht befindlichen flüßigen Masse (fig. 13.) vier Punkte M, N, K, H betrachten, die nach Willkühr genommen werden können, doch aber in einer einzigen Ebene liegen und unter einander einen rechtwinklichten Kanal MNKH bilden. Dieser Kanal muß im Gleichgewicht seyn. Man wähle nach Willkühr einen festen Punkt E, und ziehe für den Punkt M die rechtwinklichten Koordinaten EP = x, PM = y, die eine der MH gleichlaufend, und die andere der MN, und nun setze man, es wirken alle Kräfte,

denen die flüßigen Theilgen unterworfen sind, in der Ebene EPM, und es lasse sich also iede derselben in zwo andere zerlegen, deren eine der EP und die andere der PM gleichlaufend ist. P und P′ sollen die Kräfte heisen, welche die Punkte M und N mit EP parallel treiben; Q und Q′ diejenigen, welche die Punkte M und H mit PM parallel treiben; und diese verschiedenen Kräfte seyen Funktionen von x, y und einem gewissen verflossenen Zeitraum t. Ferner setze man $MH = \delta x$, $MN = \delta y$. Diese Differentialien beziehen sich auf die Veränderung, welche daher rührt, daß man von der Betrachtung des Punkts M auf die Betrachtung eines andern unendlich nahe gelegenen Punkts H oder N fortgeht, da ich hingegen die Differentialausdrücke dx und dy beibehalte, um damit diejenige Veränderung anzuzeigen, welche erfolgt, wenn das nämliche Theilgen aus seiner ersten Stelle in die nächstfolgende gelangt. Beide ergeben sich durch einerlei Regeln; und man muß bemerken, daß bei den Differentialien einer Funktion, die sich auf einerlei Koordinaten x und y bezieht, δx und dx allemal einerlei Koefficienten haben, und daß auch zu δy und dy einerlei Koefficient gehört.

Nun ist klar, daß vermög der Kraft Q der Druck der Säule MN auf den Punkt N $= Q\delta y$ ist, und daß vermög der Kraft P′ der Druck der Säule NK auf den Punkt K $= P'.\delta x$. Der erste Druck pflanzt sich, wie der andere, auf den Punkt K fort, und wenn man beide zusammen nimmt, so erhält man $Q\delta y + P'\delta x$ für den gesammten Druck, welchen der nämliche Punkt K von der flüßigen Masse MNK leidet. Eben so ist vermög der Kraft P der Druck der Säule MH auf den Punkt H $= P\delta x$, und vermög der Kraft Q′ der Druck der Säule HK auf den Punkt K $= Q'\delta y$. Diese beiden Druckungen zusammengenommen, gibt $P\delta x + Q'\delta y$ für den gesammten Druck, welchen der

Punkt

Punkt K von der flüßigen Masse MHK leidet. Um also ein Gleichgewicht zu erhalten, muß der Punkt K von dem flüßigen Theil MNK und dem MHK auf gleiche Art gedruckt werden. Man hat also

$$Q.\delta y + P'\delta x = P.\delta x + Q'\delta y$$

und folglich

$$(P' - P).\delta x = (Q' - Q).\delta y$$

Es ist aber klar, daß P' — P das Differential von P ist, und daß man, solches zu nehmen, nur y als veränderlich ansehen darf, indem von der Stelle M bis zu der unendlich nahen N, x und t ohne Veränderung bleiben; eben so ist Q' — Q das Differential von Q, welches man so nehmen muß, daß sich nur x verändert. Indem man also $P' - P = A\delta y$, $Q' - Q = A'\delta x$ setzt, so erhält man $A.\delta y.\delta x = A'.\delta x.\delta y$ oder $A = A'$. Es erfodert also der Stand des Gleichgewichts, daß **das Differential von P, so genommen, daß sich dabei nur y ändert, und durch δy dividirt, eben so herauskomme, wie das Differential von Q so genommen, daß sich dabei nur x ändert, und durch δx dividirt.**

Man druckt diesen Satz gewöhnlich auf eine bequeme und abgekürzte Art so aus $\left(\frac{\delta P}{\delta y}\right) = \left(\frac{\delta Q}{\delta x}\right)$ oder welches auf eben das hinauslauft $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ (†)

III. Es ist eben so leicht, die Bedingungen des Gleichgewichts zu bestimmen, wenn die auf die flüßige Masse wirkenden Kräfte nicht in einer Ebene liegen. Denn

(†) Ich bediene mich der Parenthesen, nach Hrn. Eulers Weise, um eine Größe dieser Art von dem Quotienten zu unterscheiden, den die Division eines Differentials durch ein anderes gibt.

Denn was auch diese Kräfte für Richtungen haben mögen, so können sie allemal auf drei gebracht werden, wovon zwo in der Ebene EPM liegen, und die dritte auf eben diese Ebene senkrecht ist. Man setze also, der Punkt M sey der Wirkung der dreien Kräfte P, Q, R ausgesetzt, die von eben der Beschaffenheit, wie die Kräfte P, Q der vorigen Nummer sind, und wovon immer eine mit einer der dreien rechtwinklichten Koordinaten x, y, z parallel lauft. Nun gedenke man sich acht flüßige Punkte M, N, K, H, Q, O, S, R, die ein rechtwinklichtes Parallelepipedum bilden, das sich so ansehen läßt, als wenn es aus sechs rechtwinklichten Kanälen zusammengesetzt wäre. In iedem dieser Kanäle muß die flüßige Masse im Gleichgewicht seyn. Es gibt also das Gleichgewicht in dem Kanal MNKH, $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$; das Gleichgewicht in dem Kanal MOQH, $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$; und das Gleichgewicht in dem Kanal MNSO gibt $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$. Die drei andern Kanäle würden die nämlichen Gleichungen geben. Man hat also allgemein die Bedingungen des Gleichgewichts einer flüßigen Masse, die was für Kräften man will unterworfen ist.

IV. Alles dieses angenommen, bewege sich die flüßige Masse ABCD (fig. 14.), die der Wirkung der Schwere unterworfen ist, in dem Gefäs nach einem Gesetz, welches man will, iedoch so daß ieder Punkt M nur zwo Bewegungen habe: die eine lothrecht oder der EP gleichlaufend, die andere horizontal oder der PM gleichlaufend. Man wird ohne Schwierigkeit vermittelst der vorigen Nummer die nämliche Theorie auf die Hypothese anwenden, wo die flüßigen Theilgen außer der lothrechten Bewegung noch zwo horizontale

gegen

gegen einander senkrechte Bewegungen hätte; und dieses ist der verwickeltste Fall der Aufgabe, weil man iede Bewegung allemal auf die drei bringen kann, die wir eben erwähnt haben. Hier betrachte ich, um die Rechnung abzukürzen, nur zwo.

Man nehme wie No. II. vier flüßige Punkte M, N, K, H, die ein rechtwinklichtes Parallelogramm bilden; am Ende eines Augenblicks seyen solche in m, n, k, h, und auf die Axe EP seyen die senkrechten Linien mp, nf, hg, kq gezogen.

Man setze

die Schwere . . . . . = g
EP . . . . . = x
PM . . . . . = y
PO . . . . . = z
die Zeit . . . . . = t
die Geschwindigkeit des Punkts M nach einer der EP parallelen Richtung . . = u
die Geschwindigkeit des nämlichen Punkts nach einer der PM parallelen Richtung . = v

Die Geschwindigkeiten u und v verändern sich, nachdem sich die Koordinaten x und y und die Zeit t abändern; sie sind also allgemein Funktionen von x, y und t. Um die Natur dieser Funktionen zu bestimmen, muß man bemerken, daß man für das im Gefäs abfliessende Wasser $\frac{u}{v} = \frac{dx}{dz}$ hat, wenn y = z ist. Nun ist $\frac{dx}{dz}$ eine Funktion von x und z, die durch die Gestalt des Gefäßes und ohne Beziehung auf die Zeit gegeben ist. Es müssen also die Größen v und u von der Art seyn, daß, wenn man y = z setzt, die Funktion der Zeit, welche sie in sich fassen, verschwindet. Es gibt mehrere analytische Mittel, dieser Bedingung Genüge zu thun. Denn es sey z. B.

$$u = M\theta + M'\theta' + M''\theta'' + \&c.$$
$$v = N\theta + N'\theta' + N''\theta'' + \&c.$$

(wo θ, θ', θ'' Funktionen der Zeit sind, M und N Funktionen, von welcher Art man will, von y und z; M', N', M'', N'' andere Funktionen von x und z, die so beschaffen sind, daß sie für $y = z$ verschwinden); so ist klar, daß man $\frac{u}{v} = \frac{dx}{dz} = \frac{M}{N}$ erhält, eine Funktion von x und z, wenn $y = z$. Ohne aber alle die Arten von Funktionen, die sich in dieser Untersuchung analytisch gebrauchen ließen, einzeln ausführlich zu untersuchen, halte ich mich an die Voraussetzung $u = M\theta$, $v = N\theta$, welche sehr allgemein und hinreichend ist, die Bewegung des Wassers in einem Gefäs, wie sie hier betrachtet wird, zu erklären. Wäre die flüßige Masse über eine hinlänglich große Strecke verbreitet, um als unbegrenzt angesehen werden zu können, so wären die Geschwindigkeiten u und v nicht der zuvor erklärten Bedingung gemäs; alsdann müßte man aber andere gleichgeltende Bedingungen zum Grund legen, z. B. daß die Bewegung der flüßigen Masse durch irgend eine Ursache in einen unveränderlichen und solchen Zustand gelangt, daß für einerlei Koordinaten x und y die Größen M und N einerlei Werthe erhalten; ohne dieses bliebe die Aufgabe unbestimmt.

V. Es sey $du = d(\theta M) = \theta A\,dx + \theta B\,dy + M.T.\,dt$; $dv = d(\theta N) = \theta A'\,dx + \theta B'\,dy + NT.\,dt$; wo A, B, A', B' Funktionen von x und y, T eine Funktion der Zeit, dx und dy die lothrecht und horizontal von dem Punkt M in der Zeit dt durchloffenen Räume sind.

Indem man für dx seinen Werth $u\,dt$ oder $\theta M\,dt$ und für dy seinen Werth $v\,dt$ oder $\theta N\,dt$ sezt, so erhält man die lothrechte Kraft $\frac{du}{dt} = \theta^2 A.M$

$+\theta^2$

$+\theta^2 B.N+M.T$, und die horizontale Kraft $\frac{dv}{dt}=$ $\theta^2 A'.M+\theta^2 E'.N+N.T$. Aber 1) wenn die Theilgen nicht auf einander wirkten, so würde aus der lothrechten Geschwindigkeit u am Ende des Augenblicks dt, $u+g\,dt$. Wenn man also nach dem dynamischen Grundsatz des Hrn. d'Alembert die Geschwindigkeit $u+g\,dt$ als aus zwoen Geschwindigkeiten $u+du$ und $g\,dt-du$ zusammengesetzt betrachtet; und wenn man überlegt, daß von diesen beiden Geschwindigkeiten nur die erste allein bestehen bleibt, so ist klar, daß die zwote $g\,dt-du$ von der Art seyn muß, daß sie die erste um nichts ändert, und daß sie ganz wegfällt. 2) Eben so sieht man, in Ansehung der horizontalen Geschwindigkeit v, daß vermög der Geschwindigkeit $-dv$ der Punkt M im Gleichgewicht seyn müßte. Wenn also der Punkt M in iedem Augenblick der Wirkung der beiden Kräfte $g-\frac{du}{dt}, -\frac{dv}{dt}$ ausgesetzt wäre, so würde er in Ruhe bleiben; dieses gibt (No. II.) die Fundamentalgleichung

$$\left(\frac{d\left[g-(\theta^2 A.M+\theta^2 B.N+M.T)\right]}{dy}\right)=$$

$$\left(\frac{d\left[-\theta^2.A'.M-\theta^2 B'.N-N.T\right]}{dx}\right).$$

VI. Da man voraussetzt, daß sich die flüßige Masse nicht zusammendrucken lasse, so nimmt das Rektangel MNKH, indem es in die Lage mnkh kommt, immer einerlei Raum ein. Man muß also einen Ausdruck für die Fläche mnkh suchen, und solchen den Ausdruck für das Rektangel MNKH gleich setzen. Man muß zu dem Ende bemerken, daß in dem Augenblick dt der Punkt M parallel mit EP einen kleinen Raum udr, und parallel mit ED einen

kleinen Raum $v\,dt$ durchlauft; ferner, da die Differentialien dy, δy einerlei Koefficienten haben, so sieht man, daß in dem Punkt N, zu dem die Ordinate $y + \delta y$ gehört, die Geschwindigkeit u sich in $u + \theta B\,\delta y$, und die Geschwindigkeit v sich in $v + \theta B'\delta y$ verwandelt; es durchlauft also der Punkt N parallel mit EP einen kleinen Raum $= (u + \theta . B\delta y) . dt$, und parallel mit ED einen kleinen Raum $= (v + \theta . B'\delta y) . dt$. Ebenso findet man, weil die Differentialien dx und δx gleichen Koefficienten haben, daß der Punkt H parallel mit EP einen kleinen Raum $= (u + \theta . A\delta x) . dt$, und parallel mit ED einen kleinen Raum $= (v + \theta A'\delta x) . dt$ durchlauft; und endlich der Punkt K parallel mit EP einen kleinen Raum $(u + \theta . A\delta x + \theta . B\delta y) . dt$, und parallel mit ED einen kleinen Raum $= (v + \theta . A'\delta x + \theta . B'\delta y) . dt$. Indem man also Ep und pm, Ef und fn, Eg und gh, Eq und qk als die Koordinaten der Punkte m, n, h, k ansieht, so erhält man für die Abscissen $Ep = x + u\,dt$; $Ef = x + (u + \theta . B . \delta y) . dt$; $Eg = x + \delta x + (u + \theta A\delta x) . dt$; $Eq = x + \delta x + (u + \theta . A . \delta x + \theta B . \delta y) . dt$; und für die Ordinaten $pm = y + v\,dt$; $fn = y + \delta y + (v + \theta B'\delta y) . dt$; $gh = y + (v + \theta A'\delta x)\,dt$; $qk = y + \delta y + (v + \theta A'\delta x + \theta B'\delta y)\,dt$. Weil sich nun aus diesen Ausdrücken ergibt, daß die Differenz der beiden Linien Ep und Ef, die der beiden Linien Eg und Eq, der beiden Linien pm und gh, der beiden fn und qk unendlich kleine Größen der zwoten Ordnung sind, so folgt, daß die Linien mn, hk als Parallelen von ED, und die Linien mh, nk als Parallelen von EP angesehen werden können. Man kann also das Viereck mnkh als ein Rektangel ansehen, dessen Fläche $= mh . mn = (Eg - Ep)\,(fn - pm)$, ohne merklich zu irren; und da solches dem Rektangel MNK gleich seyn muß, so erhält man die Gleichung $\delta x . \delta y = (\delta x + \theta A\delta x\,dt) \times (\delta y + \theta . B'\delta y\,dt)$; hieraus findet

man

man, indem man was sich gegenseitig aufhebt, ausstreicht und die unendlich kleinen Größen der vierten Ordnung wegläßt

$$\theta A \partial x \partial y dt + \theta . B' \partial x . \partial y dt = 0 ; \text{ oder } A = -B' ;$$

oder, welches das Nämliche sagt, $\left(\frac{dM}{dx}\right) = -\left(\frac{dN}{dy}\right)$;

Die erste bedungene Gleichung zwischen M und N, woraus man sieht, daß $Ndx - Mdy$ ein vollständiges Differential seyn muß.

VII. Da die Fundamentalgleichung No. V. identisch seyn soll (No. II.), so muß der Theil $\left(\frac{d(M.T)}{dy}\right)$ auf der einen Seite dem korrespondirenden Theil $\left(\frac{d(N.T)}{dx}\right)$ auf der andern Seite gleich seyn. Man hat also, weil T in diesen Ausdrücken unveränderlich ist,

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$$

die zwote bedungene Gleichung zwischen M und N, woraus man sieht, daß $Mdx + Ndy$ ein vollständiges Differential seyn müsse.

VIII. Es ist leicht sich a posteriori zu überzeugen, daß die beiden Gleichungen $\left(\frac{dM}{dx}\right) = -\left(\frac{dN}{dy}\right)$, $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$ den Bedingungen des Gleichgewichts gemäs sind, oder der vorgegebenen Fundamentalgleichung völliges Genüge thun. Denn da man

$$\left(\frac{d(M.T)}{dy}\right) = \left(\frac{d(N.T)}{dx}\right)$$

hat,

hat, so gibt der übrige Theil jener Gleichung (indem hier θ eine beständige Größe ist)

$$A\left(\frac{dM}{dy}\right)+M\left(\frac{dA}{dy}\right)+B\left(\frac{dN}{dy}\right)+N.\left(\frac{dB}{dy}\right)=$$
$$A'\left(\frac{dM}{dy}\right)+M\left(\frac{dA'}{dx}\right)+B'\left(\frac{dN}{dx}\right)+N\left(\frac{dB'}{dx}\right)$$

Weil nun $A=\left(\frac{dM}{dx}\right)$, $B=\left(\frac{dM}{dy}\right)$, $A'=\left(\frac{dN}{dx}\right)$, $B'=\left(\frac{dN}{dy}\right)$, so erhält man

$$A\left(\frac{dM}{dy}\right)=\left(\frac{dM}{dx}\right).\left(\frac{dM}{dy}\right);$$

$$B\left(\frac{dN}{dy}\right)=\left(\frac{dM}{dy}\right).\left(\frac{dN}{dy}\right)=-\left(\frac{dM}{dy}\right).\left(\frac{dM}{dx}\right);$$

$$A'\left(\frac{dM}{dx}\right)=\left(\frac{dN}{dx}\right).\left(\frac{dM}{dx}\right);$$

$$B'\left(\frac{dN}{dx}\right)=\left(\frac{dN}{dy}\right).\left(\frac{dN}{dx}\right)=-\left(\frac{dM}{dx}\right).\left(\frac{dN}{dx}\right);$$

$$M\left(\frac{dA}{dy}\right)=M\left(\frac{d\left(\frac{dM}{dx}\right)}{dy}\right);$$

$$M\left(\frac{dA'}{dx}\right)=M\left(\frac{d\left(\frac{dN}{dx}\right)}{dx}\right)$$
$$=M\left(\frac{d\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dx}\right)$$

Ein Ausdruck, der nach der Natur der Differentialrechnung eben so viel sagt, als

M (d

$$M\left(\frac{d\left(\frac{dM}{dx}\right)}{dy}\right);$$

$$N\left(\frac{dB}{dy}\right) = N\left(\frac{\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dy}\right);$$

$$N\left(\frac{dB'}{dx}\right) = N\left(\frac{d\left(\frac{dN}{dy}\right)}{dx}\right) = N\left(\frac{d\left(\frac{dN}{dx}\right)}{dy}\right)$$

$$= N\left(\frac{d\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dy}\right)$$

Subſtituirt man alle dieſe Werthe in der vorigen Gleichung, ſo findet man, daß alle Glieder einander aufheben, und daß ſolche alſo identiſch iſt.

IX. Anmerk. Es gibt einen Fall, wo die Gleichung $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, die ſich aus der Hypotheſe $\left(\frac{d(M.T)}{dy}\right) = \left(\frac{d(N.T)}{dx}\right)$ ergibt, nicht nothwendig ſtatt hat.

Dieſer tritt ein, wenn die Funktion T der Zeit ein Vielfaches von θ^2 iſt. Man ſetze nämlich $T = b.\theta^2$, wo b einen unveränderlichen Koefficienten bedeutet, ſo verwandelt ſich die Fundamentalformel No. V. (indem man überal mit θ^2 dividirt)

$$\left(\frac{d(g:\theta^2 - A.M - B.N - M.b)}{dy}\right)$$

$$= \left(\frac{d(-A'.M - B'.N - Nb)}{dx}\right)$$

das ist

$$-M\left(\frac{dA}{dy}\right) - A.\left(\frac{dM}{dy}\right) - N\left(\frac{dB}{dy}\right) - B\left(\frac{dN}{dy}\right)$$
$$- b\left(\frac{dM}{dy}\right) = - M\left(\frac{dA'}{dx}\right) - A'\left(\frac{dM}{dx}\right)$$
$$- N\left(\frac{dB'}{dx}\right) - B'\left(\frac{dN}{dx}\right) - b\left(\frac{dN}{dx}\right)$$

oder auch, (wenn man für A, B, A', B', ihre Werthe $\left(\frac{dM}{dx}\right), \left(\frac{dM}{dy}\right), \left(\frac{dN}{dx}\right), \left(\frac{dN}{dy}\right)$ setzt, und die Glieder, welche vermög der Gleichung $\left(\frac{dM}{dx}\right) = -\left(\frac{dN}{dy}\right)$ die allemal statt hat No. VII. einander aufheben, ausstreicht)

$$M\left(\frac{dA}{dy}\right) + N\left(\frac{dB}{dy}\right) + B\left(\frac{dM}{dy}\right) =$$
$$M\left(\frac{dA'}{dx}\right) + N\left(\frac{dB'}{dx}\right) + B\left(\frac{dN}{dx}\right)$$

eine Gleichung, der man ebenso wie der Gleichung $\left(\frac{dM}{dx}\right) = -\left(\frac{dN}{dy}\right)$ Genüge thun muß, um die Bewegung der flüßigen Masse in dem erwähnten Fall zu bestimmen.

Der Werth der Funktion θ der Zeit ist hier unmittelbar gegeben; denn da man allgemein $d\theta = T\,dt$ (No. V.) hat, und nun $T = b\theta^2$ annimmt, so erhält man $d\theta = b\theta^2\,dt$, woraus sich $\theta = \frac{1}{a - bt}$ ergibt. Wenn man nun voraussetzt, daß die flüßige Masse blos von der Schwere getrieben wird, und daß die Geschwindigkeiten u und $v = o$ werden, wenn $t = o$ wird, so sieht man, daß wegen den Gleichungen $u = M\theta$, $v = N\theta$, die Funktion θ der Zeit gleichfalls $= o$ seyn müsse,

müsse, wenn $t = o$ ist. Es kann also alsdann die Gleichung $\theta = \frac{1}{a - bt}$ nicht statt haben, weil θ nicht $= o$ ist, wenn $t = o$. Wenn aber im ersten Augenblick die flüssige Masse irgend einen Stos erhalten hat; wenn sie z. B. durch die Bewegung eines Kolbens in Bewegung gesetzt worden ist, so findet die Gleichung $\theta = \frac{1}{a - bt}$ statt, und die anfängliche Geschwindigkeiten sind $\frac{M}{a}, \frac{N}{a}$.

IX. Allgemeine Erinnerung. Bei der allgemeinen Betrachtung der Funktionen M, N, θ muß man bemerken, 1) daß die Werthe dieser Funktionen mit der Gleichung, welche die Gestalt des Gefäßes ausdruckt, muß bestehen können. 2) Daß aus den verlohren gehenden Kräften $g - \frac{du}{dt}, - \frac{dv}{dt}$ solche entstehen müssen, die auf den Wasserspiegel und auf die Grundfläche senkrecht sind, weil, wenn diese Kräfte allein vorhanden wären, die flüßige Masse im Gleichgewicht bleiben würde, und bei einer im Gleichgewicht befindlichen Masse die Kräfte, welche auf ihre Oberfläche wirken, nothwendig auf diese Oberfläche senkrecht sind; 3) daß die Kräfte, welche aus den erwähnten entstehen, in Ansehung der Oberfläche der flüßigen Masse von oben herab, und in Ansehung der Grundfläche von unten hinauf wirken; widrigenfalls würden sich die flüßigen Theilgen von einander trennen, und würden keine zusammenhängende Masse mehr bilden, wie man bei der Auflösung der Aufgabe voraussetzt; 4) daß die Theorie, wovon hier die Rede ist, vorzüglich bei Gefäßen statt hat, die sich von oben nach unten zu verengen, oder die sich zum wenigsten nicht viel von der prismatischen Gestalt entfernen, nach welcher Rich-

Richtung es auch seyn mag; denn in einem Gefäs, das sich von oben herab beträchtlich erweitert, muß es sich öfters eräugnen, daß die flüßige Masse die Wände verläßt, und in solchem Fall fallen die flüßige Theilgen wie freie Körper herab.

Ich lasse es bei der Anzeige dieser allgemeinen Anmerkungen. Wenn ich die Anwendungen und Folgen davon entwickeln wollte, so bräuchte ich weit mehr Raum, als ich hier Gegenständen widmen kann, die ein bloßes Spiel des Verstandes sind. Leser, denen es um eine genauere Kenntnis aller dieser Theorien zu thun ist, können die am Anfang dieses Kapitels erwähnten Werke darüber zu Rath ziehen.

Sechstes Kapitel.

Vom Ausfluß flüßiger Massen, aus Gefäßen welche zusammengesetzt oder durch Schiedwände in mehrere Abtheilungen vertheilt sind.

248.

Da es mein Hauptzweck ist, den nöthigen Bedacht auf die Erleichterung der Ausübung zu nehmen, und diese nothwendig alle mögliche Simplicität in den Rechnungen erfodert, wenn auch gleich die größte Genauigkeit darunter leiden sollte, so sehe ich mich hier, wie anderswo, genöthigt, fast durchgängig auf die Hypothese zurückzugehen, nach der die Ausflüsse durch kleine Oefnungen erfolgen; eine Hypothese, die zugleich eine andere nach sich zieht oder verstattet, daß nämlich die Geschwindigkeit dem freien Fall von der wirklichen Höhe der flüßigen Masse über der Oefnung zugehöre. Man wird finden, daß dieser Voraussetzungen ungeachtet in den nachfolgenden Aufgaben mehrere Fälle vorkommen, wo die analytischen Berechnungen sehr verwickelt ausfallen.

249. I. Aufg. **Wenn das Wasser (durch den Beitritt eines Bachs oder einer Quelle oder auf irgend eine Art) in einem Gefäs, das aus zweien andern ABCD, GHKI zusammengesetzt ist, während dem Ausfluß durch eine im Boden angebrachte kleine Oefnung pq beständig auf einerlei Höhe AD voll erhalten wird: die in einer gegebenen Zeit ausfließende Wassermenge zu finden.**

Weil die Oefnung pq in Vergleichung mit der Weite beider Gefäßen ABCD, GHKI oder deren horizontalen Querschnitten als unendlich klein angesehen wird, so ist klar, daß der Ausfluß ebenso erfolgt, als wenn man statt des zusammengesetzten Gefäßes nur das einfache AEFD hätte; man sieht also, daß diese Aufgabe mit unter (201) begriffen ist.

250. II. Aufg. **Man setze, es seyen die beiden an einander gesetzten Gefäße ABCD, GHKI lothrecht und prismatisch; der Wasserspiegel sey anfänglich in AD, und das zusammengesetzte Gefäs leere sich, ohne Zufluß zu erhalten, aus: die Zeit anzugeben, worin sich der Wasserspiegel um eine gegebene Tiefe senkt.**

Da die Geschwindigkeit in pq in iedem Augenblick der Höhe der flüßigen Masse über der Oefnung zugehört, und der Ausfluß, so lange der Spiegel im obern Gefäs bleibt, offenbar ebenso erfolgt, als wenn statt des zusammengesetzten Gefäßes blos das einfache prismatische lothrechte Gefäs AEFD vorhanden wäre; so folgt (209), daß wenn man die Zeit, welche der Wasserspiegel nöthig hat, einen gewissen Raum zu durchlaufen, durch den vor den Raum geschriebenen Buchstaben T bezeichnet, und iede Fläche eines horizontalen Querschnitts, des Gefäßes ABCD, A; die Fläche der Oefnung pq, K; und die zum Fall von der Höhe a gehörige Zeit θ nennt; ich sage, es folgt, daß alsdann

$$T.AL = \frac{\theta A(\sqrt{AE} - \sqrt{LE})}{K.\sqrt{a}}$$

und

$$T.AB = \frac{\theta A(\sqrt{AE} - \sqrt{BE})}{K\sqrt{a}}$$

Wann der Wasserspiegel in das untere Gefäs, z. B. bis NP gekommen ist, so erfolgt der Ausfluß in

in einem einfachen Gefäs; und wenn man ieden horizontalen Querschnitt dieses Gefäßes GHKI, B nennt, so erhält man

$$T.GN = \frac{\theta B(\sqrt{GH} - \sqrt{NH})}{K\sqrt{a}}$$

Addirt man diese Zeit zu derienigen, welche zum Durchlaufen des Raums AB erfodert wird, so ergibt sich

$$T.AQ = \frac{\theta A(\sqrt{AE} - \sqrt{BE}) + \theta B(\sqrt{BE} - \sqrt{BQ})}{K\sqrt{a}}$$

Die Aufgabe würde, was die ersten Gründe der Frage anlangt (204), nicht schwerer aufzulösen seyn, wenn die beiden aneinander liegenden Gefäße iede andere Gestalt hätten.

251. I. Anmerk. Solang die flüßige Masse eine gewisse Höhe über BC in dem obern Gefäs behält, gehört nach der Erfahrung die Geschwindigkeit, wenigstens ohne merkliche Abweichung, der ganzen Höhe der flüßigen Masse über pq zu, wenn auch gleich die Oefnung pq merklich anwächst, und sogar dem Boden HK gleich wird, wofern nur die Röhre GHKI gegen der Weite des obern Gefäßes ABCD sehr enge, und überdas die Höhe GH sehr klein ist (*). Die Zeit, welche

(*) Dieses ist so wenig ein Erfolg der Schwere, daß die erwähnte Erscheinung ohne den Zutritt einer fremden Kraft gar nicht zu erwarten ist, wie z. B. im luftleeren Raum; außer diesem rührt sie von der Mitwirkung des atmosphärischen Drucks her, wie ich in dem mehr gedachten Versuch einer neuen Theorie ꝛc. augenscheinlich gewiesen habe. Im leeren Raum könnte die Röhre nicht ganz voll auslaufen; wenn man nämlich fragte, was das auslaufende Wasser in iedem Augenblick, bei ganz voller Röhre, für eine Geschwindigkeit haben müßte, so wäre solche vom Anfang der Bewegung gerechnet

welche der Wasserspiegel braucht, im obern Gefäs von AB bis CD zu sinken, läßt sich also auch alsdann noch wie im vorigen §. bestimmen. Wenn aber die flüßige Masse in die Röhre GHKI gekommen ist, und die Oefnung pq = HK, so fällt die Wassermasse GHKI als eine einzige zusammenhängende Masse wie jeder schwere Körper herab (*). Wenn man die zum völligen Ablaufen derselben erforderliche Zeit, oder, welches ebendas ist, die Zeit bestimmen will, welche die Wasserfläche GI braucht, den Raum GH zu durchlaufen, so hat man zu bemerken, daß im ersten Augen-

---

(wenn t die verflossene Zeit und g den Fall schwerer Körper für eine Sekunde bedeutet) = 2gt, also desto größer, je länger der Ausfluß fortdauerte, und müßte also über alle Grenzen fortwachsen, wenn die Röhre GHKI beständig voll erhalten werden sollte, s. a. a. O. II. Kap. 2. Abschn. Sollte man wohl glauben, daß ein Mathematikverständiger, wie Hr. Bernard diesen Satz als ungereimt angegriffen hat, „weil daraus folge, man könne dem „Abfluß des Wassers bei der geringsten Wasserhöhe „die größte Geschwindigkeit verschaffen.“ Offenbar sagt der Satz nur soviel: wofern die Röhre (ohne Zuthun einer äußern Kraft) beständig voll auslaufen soll, so muß die Geschwindigkeit beim Ausfluß unaufhörlich wachsen, folglich auch der Zufluß in die obere Mündung GI unaufhörlich zunehmen oder die Wasserhöhe AB ohne Ende wachsen; und wo also die letzte Bedingung nicht erfüllt wird, ist im leeren Raum die ganze Ausfüllung der Röhre nicht möglich.

(*) Eine ähnliche Erklärung gibt Hr. H. Kästner Hydrod. §. 170. Nach meiner Theorie aber (s. a. a. O. II. Kap. 8. Abschn. am Ende) sinkt, beim Zutritt der Atmosphäre während des Auslaufens die ganze Wassersäule in der Röhre mit gleicher Geschwindigkeit, wie ohnehin erforderlich ist, weil alle Querschnitte in der Röhre gleich groß sind, so daß diese Geschwin-

Augenblick dieser Bewegung die Oberfläche GI eine Anfangsgeschwindigkeit hat, die sich (193) zur Geschwindigkeit in HK verhält wie B zu A, wenigstens beinahe (*). Es sey XG die dieser anfänglichen Geschwindigkeit zugehörige Höhe, so ergibt sich aus den bekannten Formeln für die veränderlichen Bewegungen $u\,du = \phi\,ds$, $dt = \frac{ds}{u}$, daß die erwähnte Zeit so groß ist, als der Ueberschuß der Zeit, die ein schwerer Körper braucht,

---

Geschwindigkeit in iedem Augenblick einer Höhe zugehört, welche aus der Länge der lothrechten Röhre und der Höhe des Wassers über BC zusammengesetzt ist. Sobald also das Wasser über BC völlig erschöpft ist, gehört die Geschwindigkeit der Wassersäule der Höhe GH der Röhre zu, welches noch Herrn Bossuts Theorie gemäs ist. So wie nun, wenn das Gefäs beständig z. B. bis LM voll erhalten würde, die Wasserschichte GI mit der ganzen zur Höhe EL gehörigen Geschwindigkeit gleichförmig, also ohne Beschleunigung herabfällt, so muß auch die letzte Wassersäule, wobei die oberste Schichte GI eine der Höhe EB zugehörige Geschwindigkeit hat, mit dieser Geschwindigkeit gleichförmig herabfallen.

(*) Eine Vergleichung mit der vorigen Anmerkung zeigt, daß die anfängliche Geschwindigkeit der Wassersäule nicht die Geschwindigkeit der verschwindenden Schichte BC, sondern diejenige ist, welche zur Höhe BE gehört. Heißt die Geschwindigkeit der Schichte BC, z. B. c, so ist mit dem Uebergang der Schichte BC in die GI zugleich der Uebergang der Geschwindigkeit c in die $\frac{A}{B}$. c verbunden, es erhellet also auch hieraus, daß die Verhältnis der erwähnten Geschwindigkeiten nicht ist wie B zu A, sondern wie $\frac{A}{B}$. B zu A, d. i. wie A zu A.

braucht, durch XH zu fallen, über die Zeit, die zum Fall durch XG nöthig ist.

252. II. Anmerk. Es wäre leicht, die vorhergehende Aufgabe durch den Grundsatz von dem parallelen Sinken der Schichten aufzulösen, ohne sich an die Voraussetzung zu binden, daß die Oefnung pq als unendlich klein angesehen werden könne. Denn es sey LM der Wasserspiegel im obern Gefäs, z die unbestimmte Höhe HS dieses Wasserspiegels über der Oefnung und b die Höhe der Röhre GH. Wendet man hier die allgemeine Gleichung des 234. §. an, so wird die Größe $N = \frac{z-b}{A} + \frac{b}{B}$; M wird für das obere Gefäs A, wenigstens ohne merkliche Abweichung, und für das untere B, so daß, wenn wir diese Größe allemal durch M ausdrucken, die Differentialgleichung zwischen z und s in beiden Fällen diese Gestalt erhält

$$M^2 z\,dz + \frac{K^2(z-b)M\,ds}{A} + \frac{K^2 bM\,ds}{B} + s\,dz(K^2-M^2) = 0$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt sich durch die Methode des erwähnten §. Hieraus können wir zuerst für das obere Gefäs die Verhältnis zwischen z und s, und den Ausdruck für die Zeit herleiten, welche der Wasserspiegel braucht, von AD bis in BC herabzusinken. Nunmehr können wir zur Betrachtung des Ausflusses beim untern Gefäs fortgehen, indem wir bemerken, daß in dem Augenblick, wo der Wasserspiegel in dieses Gefäs fällt, solcher eine bekannte Geschwindigkeit hat, auf die man bei Integrirung der Differentialgleichung zwischen z und s Rücksicht nehmen muß; dieses hat auch auf die Gleichung zwischen z und t einen Einfluß. Aus T. AB und T. BQ findet man auch T. AQ.

253. III. Aufg. Man setze, es kommuniciren die Gefäße ABCD, FCEG, HEKL (fig. 16.) durch die kleinen Oefnungen C, E mit einander, und die flüßige Masse erhalte durch die letzte L ihren Ausgang in die freie Luft: man sucht die zu den Geschwindigkeiten in C, E, L gehörigen Höhen, und die Stärke des Ausflusses, wann die Bewegung gleichförmig geworden ist, also, indem das erste Gefäs grade soviel Zufluß erhält als durch die Oefnung L ablauft, die Höhen AB, CF, EH immer die nämlichen bleiben.

Da die Oefnungen in CEL in Vergleichung mit den Querschnitten der Gefäße als unendlich klein angesehen werden, so ist klar, daß die kleine Masse, welche in iedem Augenblick aus dem ersten Gefäs in das zweite übergeht, und die aus dem zweiten in das dritte, vermög dieser Bewegungen in der flüßigen Masse, welche den Stoß empfängt, nur eine unmerkliche Erschütterung bewirken können, und daß folglich das Gesetz der Stetigkeit von einer flüßigen Masse zur andern, wenigstens ohne eine merkbare Abweichung beobachtet wird. Wenn man nun die Oberflächen GF, KH der beiden flüßigen Massen FCEG, HELK bis in O und Q verlängert und bemerkt, daß die beiden Flüßigkeiten CFOB, CFGE, welche durch die Oefnung C mit einander kommuniciren, sich im Gleichgewicht erhalten (21), und ebenso die beiden EHQC, EHKL: so sieht man, daß bei der Voraussetzung der Aufgabe die Geschwindigkeit in C nur der Höhe DF, die Geschwindigkeit in E der Höhe GH, und die Geschwindigkeit in L der Höhe KL zugehört. Es sey

AB . . . . = h
DF . . . . = x
GH . . . . = y
KL . . . . = z

Jede der gleichgroßen Wassermengen, welche während der Ausflußzeit t durch iede der dreien Oefnungen C, E, L ablauft . . . . = Q
und überdas sey θ die Zeit des Falls eines schweren Körpers durch a; so erhält man

$$Q = \frac{2tC\sqrt{ax}}{\theta}$$

$$Q = \frac{2tE\sqrt{ay}}{\theta}$$

$$Q = \frac{2tL.\sqrt{az}}{\theta}$$

und $x + y + z = h$

Diese Gleichungen mit einander verglichen, gibt die folgenden Werthe

$$x = h.\frac{L^2E^2}{C^2L^2 + C^2E^2 + L^2E^2}$$

$$y = h.\frac{C^2L^2}{C^2L^2 + C^2E^2 + L^2E^2}$$

$$z = h.\frac{C^2E^2}{C^2L^2 + C^2E^2 + L^2E^2}$$

$$Q = \frac{2tL\sqrt{ah}}{\theta} \cdot \frac{CE}{\sqrt{(C^2L^2 + C^2E^2 + L^2E^2)}}$$

Diese Formeln enthalten alles, was sich auf den gegebenen Ausfluß bezieht, und es lassen sich eben dergleichen Fragen daraus herleiten wie §. 202. Die Aufgabe ließe sich ebenso auflösen, wenn eine größere Anzahl von Gefäßen vorhanden wäre.

254. Anmerk. Der Ausfluß durch die Oefnungen C, E, L wird nicht eher gleichförmig, oder, welches der Grund davon ist, die Höhen der flüßigen Masse, welche den Ausfluß bewirken, gelangen nicht eher in einen bleibenden Zustand, als nach Verlauf einer

einer gewissen Zeit. Es ist also noch das Gesetz zu untersuchen übrig, wonach das Wasser in den Gefäßen FE, HL im Anfang der Bewegung und bevor der Ausfluß regulär und unveränderlich geworden ist, steigt. Ich will nur mit der Betrachtung zweier Gefäße den Anfang machen, und solche zur möglichsten Erleichterung der Rechnung prismatisch annehmen.

255. IV. Aufg. **Die beiden prismatischen Gefäße ABCD, FCEG (fig. 17.) kommuniciren durch die kleine Oefnung C mit einander, und das zweite läßt das Wasser durch die kleine Oefnung E ablaufen, indeß das erste bis zur Höhe CD beständig voll erhalten wird: man sucht die Lage des Wasserspiegels im Gefäs FCEG nach Verlauf einer gewissen Zeit.**

Man setze, es sey am Ende der Zeit t der Wasserspiegel im Gefäs FCEG bis in NO gekommen, und in einem Augenblick nehme sie die unendlich nahe Lage no an. Die Zeit des Falls durch a sey θ, die gegebene Höhe CD = h, die Höhe DN = x, die Weite des Gefäßes oder horizontale Querschnitt des Gefäßes CG = A; so ist klar, daß in dem Augenblick dt, x die der Geschwindigkeit des Wassers in C zugehörige Höhe, und h — x die der Geschwindigkeit in E zugehörige Höhe ist. Ebenso ist klar (201), daß in dem nämlichen Augenblick durch die Oefnung C eine Wassermenge ablauft, welche durch $\frac{2C.dt.\sqrt{ax}}{\theta}$ ausgedruckt wird, und durch die Oefnung E eine Wassermenge $= \frac{2Edt.\sqrt{[a.(h-x)]}}{\theta}$. Nun ist der Unterschied dieser beiden Wassermengen augenscheinlich NOon. Man erhält also

$$\frac{2Cdt\sqrt{ax}}{\theta} - \frac{2Edt\sqrt{[a(h-x)]}}{\theta} = -Adx$$

und hieraus ergibt sich

$$dt = \frac{\ell A}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{dx}{E.\sqrt{(h-x)} - C\sqrt{x}}$$

Um diese Gleichung zu integriren, setze man zuerst $x = \frac{y^2}{h}$ und hiernächst $E\sqrt{(h^2-y^2)} - Cy = Ez$, so erhält man hierdurch eine Gleichung von dieser Form

$$dt = Mdz + \frac{Nzdz}{\sqrt{(P^2-z^2)}} + \frac{Q.dz}{z.\sqrt{(P^2-z^2)}}$$

wo M, N, P, Q leicht zu bestimmende beständige Größen sind. Nunmehr ist die Integration sehr leicht. Das letzte Glied $\frac{Q.dz}{z\sqrt{(P^2-z^2)}}$, das einzige, welches dabei einige Schwierigkeit verursachen könnte, läßt sich integriren, wenn man $z = \frac{P^2}{u}$ und dieses gibt $\frac{Qdz}{z\sqrt{(P^2-z^2)}}$

$$= \frac{-Qdu}{P\sqrt{(u^2-P^2)}} = -\frac{Q}{P}\left(\frac{du + \frac{udu}{\sqrt{(u^2-P^2)}}}{u+\sqrt{(u^2-P^2)}}\right)$$

und das Integral hievon $= -\frac{Q}{P} \cdot L.(u+\sqrt{(u^2-P^2)})$.

Man findet also allemal t durch x. Ich setze nicht alle diese etwas weitläuftige Rechnungen hierher, da sie weiter keine Schwierigkeiten haben.

Es ist zu bemerken, daß im Anfang der Bewegung das Wasser eine gewisse Höhe im Gefäs CG haben muß, damit das aus dem Gefäs ABCD in das CO dringende Wasser, in letzterem keine merkliche Erschütterung verursache. Dieser Forderung kann man ein Genüge thun, wenn man die Konstante, welche mit in das Integral der Zeit kommt, so bestimmt, daß für $t = o$ DN einen gegebenen und etwas kleinern Werth erhalte als h.

256.

256. Erinner. Nun habe man (fig. 18.) so viele prismatische Gefäße, als man verlangt, ABCD, FCGE, HELK, QLMR, welche mit einander kommuniciren, und aus deren letzterm das Wasser seinen Ausgang in die freie Luft hat. Das erste werde beständig voll erhalten, und nach Verlauf der Zeit t seyen in den übrigen Gefäßen die Wasserspiegel in NO, PS, QR. Es sey DC = h, DN = x, OP = y, SQ = z, RM = q, die Weite des Gefäßes CG = A, die des Gefäßes EK = B. die des Gefäßes LR = R; so ist offenbar, daß man diese verschiedene Gleichungen erhält

$$\frac{2C\,dt\sqrt{ax}}{\theta} - \frac{2E\,dt\sqrt{ay}}{\theta} = -A\,dx;$$

$$\frac{2E\,dt\sqrt{ay}}{\theta} - \frac{2L\,dt\sqrt{az}}{\theta} = -B\,(dy+dx)$$

$$\frac{2L\,dt\sqrt{az}}{\theta} - \frac{aM\,dt\sqrt{aq}}{\theta} = +R\,dq$$

Ueberdas hat man allemal $x+y+z+q=h$.

Alle diese Gleichungen mit einander verbunden, dienen den Werth von t durch x oder y oder z oder q zu bestimmen, folglich die Höhen anzugeben, zu denen das Wasser in iedem der Gefäße CG, EK, LR in einer gegebenen Zeit gelangt. Man sieht aber, daß solche Berechnungen sehr verwickelt werden.

257. V. Aufg. Wenn ein prismatisches Gefäs FCEG (fig. 19.) aus einem Wassergraben oder einer Quelle einen beständigen immer gleich großen Zufluß erhält, und einen Theil davon durch die kleine Oefnung E abfließen läßt: die Höhe zu bestimmen, zu der sich das Wasser in dem Gefäs FCEG in einer gegebenen Zeit erhebt.

Diese

Diese schöne Aufgabe, deren Auflösung Herr Montúcla zuerst gegeben hat, hängt mit der §. 255. von einerlei Gründen ab. Weil nämlich die Wassermenge, welche das Gefäs durch den beständigen Zufluß erhält, in gleichen Zeiten immer gleich groß oder überhaupt der Zeit proportional ist, so ist klar, daß die in dem Zeittheilgen dt ablaufende Wassermenge durch $\frac{2Cdt\sqrt{ab}}{\theta}$ ausgedruckt werden kann, wo C eine gegebene Oefnung und b die der Geschwindigkeit durch C allemal zugehörige Höhe bedeutet. Setzt man also CN = x und behält die übrigen Benennungen des angeführten §. bei, so erhält man die Gleichung

$$\frac{2Cdt\sqrt{ab}}{\theta} - \frac{2Edt\sqrt{ax}}{\theta} = Adx \text{ oder auch}$$

$$dt = \frac{\theta A}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{dx}{C\sqrt{b} - E\sqrt{x}}$$

Diese Gleichung läßt sich leicht integriren, indem man $x = \frac{y^2}{b}$ setzt, und so ergibt sich also die gesuchte Verhältniß zwischen x und t.

Die Wassermenge, welche durch die Oefnung E während der Zeit t ausfließt, ist $\int \frac{2Edt\sqrt{ax}}{\theta}$, oder E. A. $\int \frac{dx\sqrt{x}}{C.\sqrt{b} - E\sqrt{x}}$, wovon sich die Integration leicht bewerkstelligen läßt, wenn man wie zuvor $x = \frac{y^2}{b}$ setzt (*).

258.

(*) Hierhin gehört noch eine andere Aufgabe, die meines Erachtens brauchbarer als die gegenwärtige ist; wenigstens bin ich wirklich durch die Ausübung auf solche geleitet worden; sie ist der gegenwärtigen grade umgekehrt; ich halte mich aber hier nicht weiter dabei auf,

258. IV. Aufgabe. ISTL (fig. 20.) sey ein Gefäs, von welcher Gestalt man will, das beständig auf die Höhe TL angefüllt erhalten wird, und dessen Wasser durch die kleine horizontale Röhre TM in das prismatische Gefäs AMNC dringt; man soll die Zeit bestimmen, welche der Wasserspiegel im Gefäs AMNC braucht, um in die Lage EG zu kommen (*).

Es ist klar (195.), daß wenn man bei R den Hahn oder das vorgesetzte Brett aufzieht, um dem Wasser den Eingang in das Gefäs AMNC zu verstatten, so dringt solches mit einer zur Höhe TL oder MA gehörigen Geschwindigkeit hinein. Diese Geschwindigkeit würde auch unverändert fortdauern, wenn das Wasser frei abschießen könnte und nicht in dem Gefäs AMNC eingeschlossen bliebe. Wenn aber eine gewisse Wassermenge MKVN hineingedrungen ist, so verliehrt die kleine Masse, welche in iedem Augenblick durch M durchgeht, und welche die endliche Masse MKVN stoßen muß, durch diesen Stos einen Theil ihrer anfänglichen Geschwindigkeit, und es kann hieraus keine merkliche Bewegung in der flüßigen Masse MKVN entstehen. Die Oberfläche KV erhebt sich daher in solchem Fall nach eben dem Gesetz, als wenn die Geschwindigkeit in M in iedem Augenblick blos der Höhe LX, nämlich dem Ueberschuß der ganzen Höhe LT über die Höhe KM zugehörte; denn die Wassermassen ZXTS, KVNM, welche gleiche Höhe haben und durch die Oefnung M mit einander kommuniciren, sind

als

---

auf, weil ich ihre Auflösung in den Mémoires de la soc. phys. de Lausanne année 1790. in einer Abhandlung vom Bau auf Salzquellen vortrage.

(*) Unten (306) theile ich die Auflösung dieser Aufgabe für Gefäße mit, die nicht voll erhalten werden.

als Massen anzusehen, die einander im Gleichgewicht erhalten (21.).

Nach dieser Voraussetzung ergibt sich nun die Auflösung wie von der Aufgabe 209. Denn wenn man die Höhe AK als gegeben und als die des prismatischen Gefäßes AKVC ansieht, welches das Wasser durch die Oefnung M empfängt; wenn man hiernächst A die Weite des Gefäßes MC, M die Weite der Oefnung M, θ die Zeit des Falls von der Höhe a, und t die Zeit nennt, welche der Wasserspiegel braucht, von KV bis in EG zu kommen, so erhält man

$$t = \frac{\theta A (\sqrt{AK} - \sqrt{AE})}{M\sqrt{a}}$$

Es ist nämlich die Geschwindigkeit, mit der das Wasser in dem Gefäs AKVC steigt, genau eben so, wie an eben den Stellen die Geschwindigkeit einer flüßigen Masse AKVC seyn würde, welche der Wirkung einer der Schwere gleichen, aber von unten hinauf gerichteten Kraft unterworfen wäre, und sich durch eine in dem oberhalb befindlichen Boden AC angebrachte Oefnung = M ausleerte. Nun ist offenbar (209), daß in diesem letztern Fall die Zeit, welche der Wasserspiegel braucht von KV bis EG zu kommen, durch die vorhergehende Gleichung bestimmt wird. Es druckt also die nämliche Gleichung auch die unter den Voraussetzungen der Aufgabe verlangte Zeit aus.

259. Zusatz. Hieraus ergibt sich eine ähnliche Folge wie (211.). In der Zeit, welche das Gefäs AKVC zu seiner völligen Anfüllung braucht, würde aus einem auf die Höhe AK über der Oefnung M beständig voll erhaltenen Gefäs durch gedachte Oefnung eine Wassermasse auslaufen, die doppelt so groß als AKVC ist; oder welches noch das Nämliche sagt: die Zeit, welche das Gefäs AKVC unter den Voraus-

aussetzungen der Aufgabe zu seiner völligen Anfüllung nöthig hat, ist doppelt so groß als die Zeit, worin aus einem auf die Höhe AK über der Oefnung M beständig voll erhaltenen Gefäs durch solche Oefnung die Wassermasse AKVC auslaufen würde.

260. Anmerk. Die Höhe AK, welche wir als bekannt angesehen haben, kann nicht viel von AM verschieden seyn. Es wird leicht seyn, sie in iedem besondern Fall auf ein Beinahe zu bestimmen, wenn man dabei auf die Größe des Bodens MN Rücksicht nimmt. Wenn man die ganze Zeit bestimmen will, welche das Wasser braucht, von M bis E zu kommen, so kann man solches, ohne merklichen Irrthum zu befürchten, so anfangen: nachdem man MK in einer kleinen gegebenen Anzahl von Zollen bestimmt hat, sucht man 1) die Zeit (202), welche die Wassermenge KMNV braucht, durch die Oefnung M abzulaufen, unter der Voraussetzung, daß die Höhe der flüßigen Masse über der Oefnung allemal LT ist; 2) sucht man durch die vorhergehende Formel die Zeit, welche das Wasser braucht, von K in E zu kommen. Beide Zeiten zusammen addirt, gibt, wenigstens auf ein Beinahe, die gesuchte Zeit.

261. Erinnerung. Die vorhergehende Aufgabe findet in der Ausübung ihre Anwendung, wenn man ein ansehnliches Behältnis mit Wasser und daneben einen kleinen Behälter hat, die beide mittelst einer Oefnung kommuniciren, welche anfangs verschlossen ist, nun aber die Zeit gesucht wird, binnen welcher nach geschehener Oefnung der Behälter angefüllt werden wird. Sie kann auch dienen, den Ausfluß aus einem Schleußengraben in einen andern zu bestimmen, dafern der erstere gegen letzterem als unendlich groß angesehen werden kann; inzwischen stehen solche gewöhnlich

lich in einer endlichen Verhältnis gegen einander. Ich will daher annehmen, daß indem der obere, dessen Wassermenge gegeben ist, durch eine Röhre oder eine unterirdische Wasserleitung mit dem untern kommunicirt, letzterer durch die Ritze in den Schleusenthoren oder durch irgend einen Riß im Mauerwerk einen kleinen Theil seines Wassers verliehre; da sich dann in solchem Fall die Frage auf folgende Aufgabe bringen läßt.

262. VII. Aufg. Das Behältnis ISTL (fig. 21.) das anfänglich bis IL mit Wasser angefüllt ist, leert sich durch die kleine Röhre TM aus, welche mit einem andern Behälter AMNC kommunicirt, der im ersten Augenblick bis DE mit Wasser angefüllt ist, und bei N einen Ausfluß hat. Man nimmt an, nach Verlauf einer gewissen Zeit seyen in den beiden Behältern die Wasserspiegel bis in QP und KV gekommen; und sucht nun die Verhältnis der lothrechten Höhen QH, KX ingleichem den Ausdruck für die Ausflußzeit.

Es sey $KX = x$; $KV = X$ eine durch die Gestalt des Gefäßes AMNC gegebene Funktion von x; $QH = y$; $QP = Y$ eine durch die Gestalt des Gefäßes ISTL gegebene Funktion von y; die Fläche der Oefnung $M = M$; die der Oefnung $N = N$; das Zeitelement $= dt$; die Zeit des Falls von der Höhe $a = \theta$. Da nun die der Geschwindigkeit des Wassers in M zugehörige Höhe QF oder $y - x$ ist, so ist klar (201), daß in dem Augenblick dt das Gefäs ISTL eine Wassermenge $\frac{2Mdt\sqrt{[a.(y-x)]}}{\theta}$ verliehrt, deren anderer Werth $= -Ydy$ ist. Man hat also die erste Gleichung

$dt =$

$$dt = \frac{\theta Y\,dy}{2M\sqrt{[a.(y-x)]}}$$

Wenn man nun weiter von der Wassermenge $\frac{2Mdt\sqrt{[a(y-x)]}}{\theta}$, welche das Gefäs ISTL in iedem Augenblick an das Gefäs AMNC abgibt, den Verlust $\frac{2Ndt\sqrt{ax}}{\theta}$ abzieht, welchen dieses letztere Gefäs durch die Oefnung N leidet, so ist der Unterschied

$$\frac{2Mdt\sqrt{(a(y-x))}}{\theta} - \frac{2Ndt\sqrt{ax}}{\theta}$$

offenbar das Wachsthum der Wassermenge in dem Gefäs AMNC, und dieses Wachsthum wird zugleich durch Xdx ausgedruckt; man hat also die zwote Gleichung

$$dt = \frac{\theta X\,dx}{2\sqrt{a}.(M\sqrt{(y-x)} - N\sqrt{x})}$$

Beide Werthe von dt einander gleich gesetzt, gibt

$$\frac{Ydy}{M\sqrt{(y-x)}} + \frac{Xdx}{M\sqrt{(y-x)} - N\sqrt{x}} = 0,$$

die Fundamentalgleichung, die man integriren müßte, um die Verhältnis zwischen x und y daraus zu finden und hiernächst den Ausdruck für die Zeit zu erhalten. Allgemein läßt sich aber diese Integration nicht bewerkstelligen.

263. I. Zus. Wenn die beiden Gefäße prismatisch sind, oder doch als prismatisch angesehen werden können, welches bei den Schleusengräben gewöhnlich statt findet, so wird die Gleichung gleichartig und daher zur Absonderung geschickt, weil alsdann Y und X beständige Größen sind. Es sey $Y = A$ und $X = B$, so hat man

$$\frac{A\,dy}{M\sqrt{(y-x)}} + \frac{B\,dx}{M\sqrt{(y-x)} - N\sqrt{x}} = 0$$

Hieraus ergibt sich, wenn man zuerst $y = xz$ und dann $z - 1 = u^2$ setzt,

$$\frac{dx}{x} = \frac{2A\,(N\,du - M\,u^2\,du)}{MAu^3 - NAu^2 + (M.A + B.M)\,u - N.A}$$

eine rationale Gleichung, die sich also durch bekannte Methoden integriren läßt.

Man sieht hieraus, daß überhaupt, wenn die beiden Behälter prismatisch sind, x und y allemal in Funktionen der nämlichen veränderlichen Größe ausgedruckt werden können, und daß man also auch t in Funktionen der nämlichen veränderlichen Größe erhält.

264. II. Zusatz. Es gibt einen sehr einfachen Fall, der auch öfters in der Ausübung vorkommt. Man setze, während dem das Wasser aus dem obern Behältnis ISTL in das untere AMNC (beide prismatisch angenommen) abfließe, verliehre das untere kein Wasser oder wenigstens eine so geringe Menge, daß solches in gar keinen Betracht komme. In solchem Fall kann man $N = 0$ setzen; und wenn man das vollständige Integral so einrichtet, daß es verschwindet, wenn $y = HO = h$ einer gegebenen Höhe, und $x = XZ = b$ einer gleichfalls gegebenen Höhe; so findet man

$$Ay + Bx = Ak + Bb$$

Also

$$dt = \frac{-\theta\,Y\,dy}{2M\sqrt{a}\,.\sqrt{(y-x)}} = \frac{-\theta\,A\,dy\sqrt{B}}{2M\sqrt{a}\,.\sqrt{((B+A)\,y - Ah - Bb)}}$$

und nun das vollständige Integral, so genommen, daß $t = 0$, $y = h$ gibt,

$$t = \frac{\theta\,A\sqrt{B}}{M\,(B+A)\sqrt{a}}\,.\,\left(\sqrt{(Bh-Bb)} - \sqrt{[(B+A).y - Ah - Bb]}\right)$$

Um

Um den Augenblick zu bestimmen, wo das Wasser in beiden Behältnissen auf gleiche Höhe kommt, muß man $x = y = \frac{Ah + Bb}{A + B}$ setzen, und so ergibt sich

$$t = \theta . \frac{A . B}{M . (B + A)} . \frac{\sqrt{(h - b)}}{\sqrt{a}}$$

ein einfacher und für die Ausübung bequemer Ausdruck. Für $A = B$ verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$t = \theta . \frac{A}{2M} . \frac{\sqrt{(h - b)}}{\sqrt{a}}$$

Siebentes Kapitel.

Fortsetzung der vorigen Untersuchung für Gefäße mit kleinen Oefnungen, und welche durch horizontale Schiedwände abgetheilt sind.

265.

I. Aufg. Das Gefäs ABCD (fig. 22.), welches wir, um den einfachsten Fall zu haben, lothrecht und prismatisch annehmen und das in seinem Boden BC eine kleine Oefnung G hat, sey durch eine horizontale Schiedwand EF abgetheilt, worin die kleine Oefnung H angebracht ist; man setzt voraus, daß dieses Gefäs beständig bis AD mit Wasser angefüllt erhalten bleibe, indeß solches beständig durch die Oefnungen H und G ablaufe; man soll nun bestimmen, wie sich diese beiden Ausflüsse verhalten werden.

Es fällt gleich in die Augen, daß da die beiden Abtheilungen AEFD, EBCF nur durch die kleine Oefnung H mit einander kommuniciren, die flüßige Masse sich an der Stelle H von einander trennen und zwo abgesonderte Massen bilden müßte, wenn mehr Wasser durch die Oefnung G abfließen, als durch die Oefnung H nachfließen könnte. Allein da der Druck der Atmosphäre von oben herab auf die Fläche AD und von unten hinauf gegen die Oefnung G wirkt, so müssen diese beide einander entgegengesetzten Kräfte (die sich in Ansehung ihrer Größe durch das Gewicht zwoer Wassersäulen ausdrucken lassen, die einander, wenn eine der andern unmittelbar entgegen

gegen wirkte, im Gleichgewicht hielten) das abgetheilte Wasser nöthigen, eine zusammenhängende Masse auszumachen. Die gegenseitige anziehende Kraft der Wassertheilgen strebt eben dahin, aber die Erfahrung lehrt, daß diese Kraft sehr schwach ist, und überdas wirkt hier solche nur an einer sehr kleinen Stelle. Der Druck der Atmosphäre ist also die einzige wirksame Ursache, welche die Trennung des Wassers in dem Fall, wo solche im leeren Raum vermög der Beschaffenheit des Ausflusses erfolgen müßte, verhindert (*).

Man setze zuerst, die Oefnungen H, G, und die Höhen EA, BE, seyen so beschaffen, daß man die Gleichung $H\sqrt{EA} = G\sqrt{BE}$ erhalte, so sieht man (203), daß, da die Wassermengen, welche aus den Oefnungen H und G unter den Druckungen EA, BE auslaufen, und die den Produkten $H\sqrt{EA}$, $G\sqrt{BE}$ proportional sind, unter den Voraussetzungen der vorhergehenden Aufgabe, die obere Abtheilung grade so viel Wasser abgibt, als aus der untern abfließt, und daß sich folglich die Ausflüße völlig eben so ergeben, als wenn diese beide Abtheilungen gar nicht mit einander verbunden und bis an die Höhen EA, BE angefüllt erhalten würden. Die Wasser aus der einen haben für sich selbst auf die der andern in H keine Wirkung, wenn man keine Rücksicht auf die vom Stos herrührende Erschütterung nimmt, die ich hier und in der Folge allemal als sehr klein und unmerklich beiseit setze.

Wenn

(*) So weit stimmt Herrn Bossüts Vorstellung mit der, welche ich von dem Ausfluß durch Röhren, welche in Gefäße eingesteckt sind, in meiner Theorie gegeben habe, ganz überein; in den weitern Schlüssen aber weicht er von mir und ohne Zweifel von der Wahrheit selbsten ab.

Wenn die erwähnte Gleichung nicht statt findet, d. i. wenn $H\sqrt{EA} < G\sqrt{BE}$ oder $H\sqrt{EA} > G\sqrt{BE}$ ist, so müßte sich, dafern die äußere Luft nicht hinderlich wäre, das Wasser in H trennen, die Oberfläche des Wassers im untern Gefäs müßte um etwas sinken, z. B. in MN und der Ausfluß durch G müßte mit einer Geschwindigkeit erfolgen, die der Höhe BM zugehörte, so daß man $G\sqrt{BM} = H\sqrt{EA}$ erhielte. Im entgegengesetzten andern Fall würde der Ausfluß durch G mit der Geschwindigkeit erfolgen, welche zu einer Höhe BI gehörte, die größer als BE und so beschaffen wäre, daß man $G\sqrt{BI} = H\sqrt{IA}$ hätte. Aber wegen des Drucks der Atmosphäre müssen in beiden Fällen die Wasser von beiden Abtheilungen in H an einander hängen bleiben, und hiernach lassen sich die Ausflüsse in beiden Fällen bestimmen.

Es sey h die gegebene Höhe AB; x die der Geschwindigkeit in G zugehörige; Q iede von den Wassermengen, welche in der Zeit t durch die Oefnungen G, H, ablaufen, die einander gleich seyn müssen, weil die Wasser der beiden Abtheilungen in H beständig an einander bleiben; θ die Zeit des Falls durch a; so hat man (201.) die Gleichungen

$$Q = \frac{2tG\sqrt{ax}}{\theta} \text{ und}$$

$$Q = \frac{2tH\sqrt{ay}}{\theta}$$

folglich $G\sqrt{x} = H\sqrt{y}$ (*).

Nun setze ich hier und in dem übrigen Theil dieses Kapitels voraus, daß die Summe derer zu den Geschwindigkeiten in den Oefnungen gehörigen Höhen der ganzen Höhe AB des Gefäßes gleich sey, indem die

(*) Auch gegen diese Gleichung finde ich nichts zu sagen.

die Erfahrung die Bestättigung dieser Hypothese oder die dabei nöthigen Einschränkungen lehret (*). Wir erhal-

(*) Es ist dem wissenschaftlichen Vortrag offenbar ganz zuwider, eine willkührliche in nichts gegründete Hypothese nur mit dem Zusatz anzunehmen, daß die Erfahrung die dabei nöthige Einschränkungen lehren müsse. Die gegenwärtige Hypothese ist wirklich der Erfahrung gar nicht gemäs; und wenn sie es auch wäre, so ersähe man doch nach diesem Verfahren nicht, was nach der Theorie erfolgen sollte und wie also die Erfahrung von der Theorie abweicht. In iedem Betracht ist also Herrn Bossuts Vortrag hier unrichtig. Ich betrachte die Sache so:

I.) Wenn $H\surd AE$ nicht kleiner als $G\surd AB$ ist, so ist für sich klar, daß das Wasser durch G mit der zur Höhe AB gehörigen Geschwindigkeit abschießen kann, indem alsdann durch H vermög der Höhe AE beständig die erforderliche Wassermenge nachfolgen kann, es mag die Atmosphäre mitwirken oder nicht.

II.) Wenn aber $H\surd AE < G\surd AB$, so müßte im leeren Raum das Wasser der untern Abtheilung sich von dem der obern bei H trennen, in freier Luft aber hat man zu unterscheiden:

α.) ob $BE < k$
β.) oder $BE > k$

wo k die Höhe von 31 bis 32 Rhl. Fus bedeutet, der bekanntlich, wann von Wasser die Rede ist, der atmosphärische Druck das Gleichgewicht hält.

Im ersten Fall (lit. α) druckt auf die Oefnungsfläche H
von oben herab eine Wassersäule von der Höhe $= k + AE$
— unten hinauf $= k - EB$
es gleicht also die gesammte Wirkung auf H dem Druck einer Wassersäule von der Höhe $(k + AE) - (k - EB) = AE + EB = AB$; und das Wasser der untern Abtheilung verhält sich blos träg, so

erhalten also $x + y = h$, demnach $x = h \cdot \frac{H^2}{G^2 + H^2}$, $y = h \cdot \frac{G^2}{G^2 + H^3}$ und $Q = \frac{2tG \cdot H\sqrt{ah}}{\theta\sqrt{(G^2 + H^2)}}$

Man kann hieraus nach den verschiedenen Verhältnissen, welche man unter den Größen h, G, H, t, x, y, Q annimmt, leicht mehrere Folgen ziehen.

266.

daß sich der nämliche Druck bis in G fortpflanzt, oder auf G gleichfalls eine Wassersäule von der Höhe AB druckt. Wenn also die kleinere von den beiden Oefnungen $= \omega$ ist, so lauft so viel Wasser durch G ab, wie aus eben dem Gefäs ABCD ablaufen würde, wenn es die Schiedwand EF gar nicht hätte und die Bodenöfnung $= q$ wäre. Ist also $G > H$, so gehört die Geschwindigkeit des Ausflusses durch G zwar der Höhe AB aber einer Schwere zu, die kleiner als die natürliche, nämlich (die natürliche $= g$ gesetzt) nur $= \frac{H^2}{G^2} g$ ist; oder, unsere natürliche Schwere zum Grund gelegt, gehört sie für $G > H$ der Höhe $\frac{H^2}{G^2} \cdot h$ zu. Wäre z. B. $G = 2$, $H = 1$, so wäre die der Geschwindigkeit durch G zugehörige Höhe $= \frac{1}{4} h$, wofür Herr Bossut $\frac{H^2}{G^2 + H^2} \cdot h = \frac{1}{1+4} \cdot h = \frac{1}{5} h$ angibt. Für alle Fälle aber, wo nicht $G > H$ ist, gehört die Geschwindigkeit durch G der ganzen Höhe h unter der Wirkung der natürlichen Schwere zu.

Im zweiten Fall (lit. β.) sey $BE = k + \phi$, so druckt auf die Stelle H von oben herab eine Wassersäule $k + AE$, und von unten hinauf eine von der Höhe $k - (k + \phi) = -\phi$, wovon die Bedeutung offenbar diese ist, daß die Wirkung des Wassers in der untern Abtheilung mit Rücksicht auf den atmosphärischen Druck nicht von unten hinauf, sondern von oben herab gerichtet ist, und gegen G so stark

266. Erinner. Eben so ergibt sich die Auflösung der Aufgabe, wenn ein prismatisches Gefäs ABCD (fig. 23), das beständig bis AD voll erhalten wird, durch irgend eine Anzahl von Schiedwänden horizontal abgetheilt ist, wie EF, PQ; wenn im Boden BC und in diesen Schiedwänden kleine Oefnungen G, K, H angebracht sind. Und man sieht gleich

---

stark herabwärts drückt, wie eine Wassersäule von der Höhe φ. Man muß daher in diesem Fall unterscheiden:

a.) ob $H\sqrt{(k+AE)} \geq G\sqrt{\varphi}$ oder nicht

b.) $H\sqrt{(k+AE)} > G\sqrt{\varphi}$ ist.

Im Fall (lit. a.) kann unterhalb H offenbar keine Leere entstehen oder die Wassermasse der untern Abtheilung kann sich von der in der obern nicht trennen, weil durch H mehr Wasser nachschießen würde als durch G abflösse. Durch H kann in diesem Fall nicht mehr Wasser nachfolgen, als der Höhe $AE+k$ zugehört; wenn also $G\sqrt{(k+\varphi+AE)}$ d. i. $G\sqrt{AB}$ nicht größer als $H\sqrt{(k+AE)}$ ist, so muß die Geschwindigkeit durch G der ganzen Höhe AB oder $k+\varphi+AE$ zugehören; wenn aber $G.\sqrt{AB} \geq H\sqrt{(k+AE)}$ ist, so kann durch G nicht mehr Wasser abschießen, als der Höhe $k+AE$ und der Oefnung H zugehört, und in diesem Fall gehört also (die natürliche Schwere angenommen) die Geschwindigkeit in G der Höhe $\frac{H^2}{G^2}(k+AE)$ zu.

Im Fall lit. b. kann durch H niemalen mehr Wasser nachschießen, als aus der untern Abtheilung allein abfließen müßte, wenn solche voll bliebe; es kann in diesem Fall die untere Abtheilung nur für $H.\sqrt{(k+AE)} = G.\sqrt{\varphi}$ ganz angefüllt bleiben; aber für $H\sqrt{(k+AE)} < G\sqrt{\varphi}$ muß sich die untere Masse von der obern trennen und zwischen beiden eine Leere bleiben, da dann die Geschwindigkeit durch G der Höhe $\frac{H^2}{G^2}(k+AE)$ zugehörte, wie vorhin.

gleich, daß, wenn man $H\sqrt{EA} = K\sqrt{PE} = G\sqrt{BP}$ hat, die Ausflüsse durch H, K, G grade so erfolgen müssen,

Zur geschwindern Uebersicht dieser verschiedenen Fälle dient nachstehende Tabelle:

Bei beiden Abtheilungen ist

entweder $H\sqrt{AE} < G\sqrt{AB}$

Entweder ist $BE < k$

Es entsteht unter H keine Leere, u. wenn die kleinere Oefnung $= q$ ist, so gehört die Geschwindigkeit in G der Höhe $\frac{q^2}{G^2}$ AB zu.

oder BE nicht $< k$ nämlich $= k + \varphi$

Entw. ist $H\sqrt{(k + AE)} > G\sqrt{\varphi}$

Hier entsteht unter H keine Leere.

Entw. ist $G\sqrt{AB} > H.\sqrt{(k + AE)}$

Die Geschwindigkeit in G gehört der Höhe $\frac{H^2}{G^2}.(k + AE)$ zu.

oder nicht

Die Geschwindigkeit in G gehört der ganzen Höhe AB zu.

oder nicht

Es entsteht unter H eine Leere (die erst für $H\sqrt{(k + AE)} = G\sqrt{\varphi}$ verschwindet), und die Geschwindigkeit in G gehört der Höhe $\frac{H^2}{G^2}.(k + AE)$ zu.

oder nicht.

Es entsteht keine Leere unter H, und die Geschwindigkeit durch G gehört der ganzen Höhe AB zu.

Auf eine ähnliche Weise muß auch Herrn Bossüts Vortrag für mehrere Schiedwände abgeändert und verbessert werden. Das Fehlerhafte der folgenden §§. fällt hiernach von selbst in die Augen, und ich setze daher solche nun her, ohne dergleichen Anmerkungen zu wiederholen. Inzwischen muß hier, ehe man mich völlig beurtheilt, in der Vorrede die Anm. zu 601. nachgelesen werden.

müssen, als wenn die Abtheilungen gar nicht unter einander verbunden wären, sondern iede ein besonderes Gefäs ausmachte, die auf die Höhen EA, PE, BP beständig voll erhalten würden. Wir wollen aber allgemein annehmen, diese Bedingung finde nicht statt, so wird der atmosphärische Druck in allen Fällen die Trennung der Wassermassen zwischen iedem Paar Abtheilungen verhindern; und wenn man die ganze Höhe AB = h, die der Geschwindigkeit in G zugehörige Höhe = x, die der Geschwindigkeit in K zugehörige = y, die der Geschwindigkeit in H zugehörige = z, ieder dergleichen Wassermengen, welche in der Zeit t durch die Oefnungen G, H, K ablaufen, = Q, und die Zeit des Falls durch a = θ setzt; so erhält man die Gleichungen

$$Q = \frac{2tG\sqrt{ax}}{\theta}$$

$$Q = \frac{2tK\sqrt{ay}}{\theta}$$

$$Q = \frac{2tH\sqrt{az}}{\theta}$$

Ueberdas setzen wir nun $x + y + z = h$. Wir haben also hier so viele Gleichungen vom ersten Grad als unbekannte Größen x, y, z, Q, und kann demnach diese unbekannte Größen leicht finden. Ich überlasse es dem Leser diese Berechnungen selbsten auszuführen und Folgerungen daraus zu ziehen.

267. II. Aufgabe. **Das prismatische Gefäs ACKB (fig. 24.), das mit der Röhre KL kommunicirt und von allen Seiten, die Stelle D welche eine kleine Oefnung hat ausgenommen, verschlossen ist, sey durch mehrere horizontale Schiedwände EF, OP, VH, worin sich die kleinen Oefnungen G, M, N befinden, abgetheilt:**

theilt: man sucht die Zeit, welche der Wasserspiegel braucht, um eine gewisse Tiefe zu sinken, wenn sich das Gefäs, ohne Zufluß zu haben, durch die Oefnung D ausleert.

Die Wasser der verschiedenen Abtheilungen bleiben wegen des atmosphärischen Drucks in einer beständigen Verbindung, ohne sich von einander zu trennen.

Dieses vorausgesetzt, sey 1) TB die anfängliche Höhe des Wassers in dem Gefäs ACKB und nach Verfluß der Zeit t gelange die Oberfläche dieses Wassers in ab. Nach dem vorigen §. findet man, daß für die beiden Lagen AB, ab die den Geschwindigkeiten in D zugehörigen Höhen sich durch

$$TB. \frac{G^2 M^2 N^2}{G^2 M^2 N^2 + D^2 M^2 N^2 + D^2 G^2 N^2 + D^2 G^2 M^2}$$

und

$$Tb. \frac{G^2 M^2 N^2}{G^2 M^2 N^2 + D^2 M^2 N^2 + D^2 G^2 N^2 + D^2 G^2 M^2}$$

ergeben, wo die beiden Höhen TB, Tb einerlei Faktor haben, den ich zur Abkürzung der Rechnung n nennen will; es sey überdas die unbestimmte Höhe $Tb = h$, der horizontale Querschnitt des Gefäßes A.

Nun setze man, es sinke die Oberfläche ab in dem Zeittheilgen dt in a'b'. Da die der Geschwindigkeit in D zugehörige Höhe $= n.h$ ist, so sieht man (201.), daß dies in der Zeit dt auslaufende Wasserelement $= \frac{2dt D.\sqrt{a}.\sqrt{nh}}{\theta}$ ist, woraus sich, wenn man diese Größe $= A.aa'$ setzt, $dt = \frac{\theta.A.aa'}{2D.\sqrt{a}.\sqrt{(n.h)}}$. Wenn man sich nun vorstellt, es werden auf einen Augenblick alle Schiedwände weggenommen, und daß, indem das Wasser durch die Oefnung D unter der Höhe h frei herausströhmt, in dem Augenblick dt' das Wasserelement A.aa' ablaufe, so erhält man

dt' =

$$dt' = \frac{\theta . A . aa'}{2D . \sqrt{a} . \sqrt{h}}$$

also

$$dt : dt' = 1 : \sqrt{n}$$

und die nämliche Verhältnis findet zwischen den endlichen Zeiten t und t' statt. Um also die Zeit zu erhalten, welche der Wasserspiegel braucht von AB in EF zu kommen, wenn die Voraussetzungen der Aufgabe dabey statt haben; muß man die Zeit suchen, in welcher der Wasserspiegel um eben diese Tiefe sinken würde, wenn alle Schiedwände weggenommen wären, und nun diese Zeit durch $\sqrt{n}$ dividiren.

2) Wenn der Wasserspiegel in EF gekommen ist, so erfolgt die Bewegung grad eben so, als wenn die Schiedwand EF gar nicht da wäre, oder, welches das nämliche ist, als wenn die Oefnung G in Vergleichung mit den übrigen M, N, D unendlich wäre. Man setze also $G = \infty$, so findet man, daß, wenn der Wasserspiegel in EF ist, die der Geschwindigkeit in D zugehörige Höhe

$$= TF. \frac{M^2 N^2}{M^2 N^2 + D^2 N^2 + D^2 M^2}$$

wird; und wenn der Wasserspiegel in die unbestimmte Lage cf kommt, so muß die der Geschwindigkeit in D zugehörige Höhe

$$= Tf. \frac{M^2 N^2}{M^2 N^2 + D^2 N^2 + D^2 M^2}$$

werden. Die Zeit des Abflusses für die zwote Abtheilung ergibt sich also auf eben die Art, wie für die erste.

3) Eben so muß man, wenn die Oberfläche des Wassers sich in OP befindet, $M = \infty$ setzen, und so ergibt sich auf gleiche Art die Ausflußzeit für die dritte Abtheilung u. s. f. für so viele Schiedwände als man verlangt. Wenn man hierauf alle diese einzele Zeiten

zusammen

zusammen addirt, so erhält man die gesammte Zeit, welche der Wasserspiegel braucht, von einer gegebenen Höhe herabzusinken (*).

268. I. Zusatz. Aus den Ausdrücken für die Höhen, welche den verschiedenen Geschwindigkeiten der flüßigen Masse in D zugehören, erhellet, daß, so wie der Spiegel von B nach F sinkt, die Geschwindigkeit in D abnehmen müsse, bis der Spiegel in F angekommen ist; daß alsdann die Geschwindigkeit wächst, und hierauf, bis sie in P angekommen ist, abnimmt; alsdann wieder größer wird, hiernächst abnimmt, bis der Spiegel in H angelangt ist; alsdann wieder wächst und hierauf während dem Sinken des Spiegels immer geringer wird, und so fort wenn eine größere Anzahl von Schiedwänden und Oefnungen vorhanden wäre. Nämlich den Augenblick zuvor, ehe der Wasserspiegel in EF ankommt, ist diese Fläche, die noch als eine Schichte der obern Abtheiluug angesehen wird, um eine sehr wenig von TF verschiedene Höhe und die sich also für TF selbsten annehmen läßt, erhaben; es ist also alsdann die der Geschwindigkeit in D zugehörige Höhe =

$$TF. \frac{G^2 M^2 N^2}{G^2 M^1 N^2 + D^2 M^2 N^2 + D^2 G^2 N^2 + D^2 G^2 M^2}$$

Wann aber der Spiegel grade in EF anlangt, folglich die obere Abtheilung als gar nicht mehr vorhanden angesehen werden muß, so ist die der Geschwindigkeit in D zugehörige Höhe

$$TF. \frac{M^2 N^2}{M^2 N^2 + D^2 N^2 + D^2 M^2}$$

Nun

(*) Nach meiner Vorstellung muß ich diesen ganzen §. für theoretisch unrichtig erklären.

Nun ist der erstere von diesen Ausdrücken offenbar kleiner als der letztere. Es muß also die Geschwindigkeit in D, nachdem solche während dem Sinken in der Abtheilung AF ällmälig kleiner geworden, in dem Augenblick, da der Spiegel in die nächstfolgende Abtheilung EP tritt, größer werden. Eben so verhält es mit den Abtheilungen EP, OH.

269. II. Zusatz. Die Entfernungen der Schiedwände von einander können so angeordnet seyn, daß der durch D springende Strahl, so wie der Spiegel aus einer Abtheilung in die andere tritt, sich in gegebener Verhältnis ändern kann. Denn man setze z. B. es seyen alle Oefnungen G, M, N, D einander gleich; verlangt man nun, daß die Geschwindigkeiten in D gleich groß seyen, wenn der Wasserspiegel nach der Reihe in B, F, P, H sich befindet, so müssen wir die diesen Geschwindigkeiten zugehörige Höhen einander gleich setzen, und hierdurch erhalten wir

$$TB. \frac{1}{4} = TF. \frac{1}{3} = TP. \frac{1}{2}$$

also

$$TH = HP = PF = FB$$

Hieraus sieht man, daß wenn die Höhen TB, TF, TP, TH in einer abnehmenden arithmetischen Reihe stehen, deren arithmetische Verhältnis TH ist, die Geschwindigkeit in D beständig der Höhe TH zugehören müsse, wenn sich der Wasserspiegel in B, F, P, H befindet.

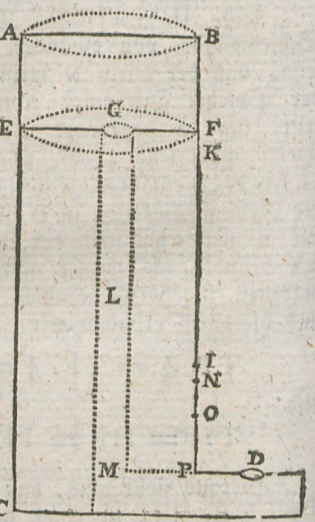
Diese Theorie stimmt mit einem Versuch des Herrn Mariotte überein; (s. die 83. fig. seines Traité du Mouvement des Eaux mit der dazu gehö-

gehörigen Abhandlung. Die Erklärung, welche der Verfasser von dieser Erfahrung gibt, ist falsch (*).

270.

(*) Ich finde in der teutschen Ausgabe von Mariotte's Hydraulik den hierher gehörigen Versuch S. 336. allein ich sehe nicht, wie er die Theorie des Herrn Bossüts zu bestättigen diene. Die ganze Stelle lautet so:

„Ich lies ein Wasserbehältnis von 6 Schuhen hoch, wie ABCD. machen, inwendig machte ich es 1 Schuh tief, von einer Platte, so durch EF vorgestellt wurde, welche ein Loch von 8 Linien im Diametro G hatte. Dahinein goß man Wasser, bis es durch das Ventil D zu laufen anfieng; und dieses Loch machte man, da man während der Zeit das Wasserbehältnis vollfüllte, zu. Damit man nun dieses desto eher verrichten mögte, muß man ein klein Loch unter F, wie bei K, machen, damit wenn das Wasser in das Wasserbehältnis durch die Oefnung G geht, die Luft leichter herausgehen könne. Nach diesem ist nöthig, wenn die Röhre bis in EF voll, wieder zuzumachen, damit man anfangen könne, das Wasserbehältnis bis in AB anzufüllen. Indem nun dieses Wasserbehältnis voll, ließ man die Oefnung D laufen, und das Springwerk stieg im Anfang



270. III. Zusatz. Die nämliche Theorie läßt sich leicht auf die Voraussetzung anwenden, daß das Behältnis verschiedene Flüßigkeiten enthalte. Denn es sey fig. 25. ein eben solches Gefäs wie fig. 24; aber um den Fall einfacher zu machen, wollen wir dabey nur zwo Schiedwände EF, OP mit den kleinen Oefnungen M, N, D annehmen. Die drei Abtheilungen AEFB, EOPF, OCKLP sollen nun drei Flüßigkeiten von verschiedener Art enthalten. Man setze,

„Anfang bis auf I, und nahm nach und nach ab, „bis das Wasser unter der Platte war; alsdann „stieg das Wasser bis gegen K.“

„ - - - - Der Effekt wird noch wundersamer „seyn, wenn das Loch D, 6 oder 7 Linien und das „Loch G 3 oder 4 ist; denn das Springwerk wird „sogleich nicht höher als bis auf N gehen und bis „in O abnehmen; und wenn das Wasser unter G, „so wird es wieder bis auf F steigen.“

Herr Bossüt hat nun offenbar die erste von diesen beiden Erscheinungen nicht aus Gründen erklärt, sondern vielmehr aus dieser Erscheinung seine Hypothese hergeleitet, die sich wirklich mit den natürlichen Wirkungen der Schwere und des atmosphärischen Drucks nicht reimen lassen. Es bleibt also immer noch die Frage übrig, warum hier ein sonderbarer Erfolg, oder eine solche Hypothese eintrette? Ich erkläre mir ihn aus der allmäligen Beschleunigung. Auf AB druckt nach meiner gegebenen Vorstellung eine Kraft, so stark als eine Wassersäule von der Höhe GM; hierdurch wird die Bewegung der Wassermasse in AF durch G beschleunigt, so daß die Geschwindigkeit durch G, welche ohne iene Kraft der Höhe AG zugehören müßte, wachsen muß; inzwischen nimmt beim Ablaufen des Wassers durch G die Höhe AE beständig ab, und hierdurch wird die Bewegung verzögert; iene Beschleunigung und diese Verzögerung, könnten in besondern Fällen einander grade aufheben, so daß die Geschwindigkeit

setze, in dem ersten Augenblick, wo sich der Spiegel der obersten Flüßigkeit in AB befindet, gehöre die Geschwindigkeit in M der Höhe BS statt BF zu, die Geschwindigkeit der flüßigen Masse EOPF in N der Höhe SV statt FP, die Geschwindigkeit der flüßigen Masse OCKLP in D der Höhe TV statt TP zu. Die Höhe BS heiße x; die Höhe SV, y; die Höhe VT, z; die Zeit des Falls durch a, 0, und jede der gleich großen Wassermassen, welche durch die drei Oefnungen M, N, D

---

durch G gleichförmig bliebe; hier aber ist letztere größer als erstere, und die Höhe des Strahls nimmt daher ab, bis die flüßige Masse in Umstände kommt, wo diese beiden Kräfte nicht mehr gegen einander wirken, bis nämlich der Spiegel in EF kommt, wo nun die Geschwindigkeit in D im Anfang ebenso der Höhe GM zugehört, wie sie vorhin in G der Höhe AE anfänglich zugehörte. Einen ganz andern Erfolg würde man erhalten, wenn man die obere Abtheilung AF beständig bis AB voll erhielt, oder G sehr klein wäre; der Erfolg würde meine Vorstellung bestättigen. Herr Mariotte erzählt auch nichts Sonderbares, das er unter beständiger Vollerhaltung gefunden habe, und Herr Bossüt scheint gar nicht einmal etwas dergleichen, was seine Hypothese bestättigen könnte, bemerkt zu haben, da er doch Versuche mit dergleichen Gefäßen angestellt hat und dergleichen Beobachtungen leicht hätte anstellen können, s. unten §. 546 u. ff. Die andere Erscheinung, welche Mariotte anführt, ist meiner Vorstellung vollkommen angemessen. In solchem Fall ist die Oefnung D etwa 4 mal soweit als die G, und es kann also der Strahl nur höchstens $\frac{1}{16}$ von der Höhe erreichen, welcher die Geschwindigkeit durch G zugehört; da also in der obern Abtheilung der Spiegel schon nahe bei EF war, hatte doch das Wasser durch G eine Geschwindigkeit, der eine Höhe = 16. PO zugehörte, welches meiner Theorie zur Bestättigung dient, und der Bossütschen offenbar zuwider ist.

M, N, D in einer Zeit t durchfließen, die ich als unendlich klein annehme, damit die Oberfläche AB wenigstens nicht merklich sinke, heise Q, so erhält man gleich aus (201.)

für den Ausfluß durch M, $Q = \frac{2tM\sqrt{ax}}{\theta}$

— — — — N, $Q = \frac{2tN.\sqrt{ay}}{\theta}$

— — — — D, $Q = \frac{2tD\sqrt{az}}{\theta}$

Diese Gleichungen geben

$$\frac{M^2x}{N^2} = y; \quad \frac{M^2x}{D^2} = z$$

Setzt man nun weiter die specifische Schwere der flüßigen Masse AEFB $= \pi$; die der flüßigen Masse EOPF $= \pi'$; die der flüßigen Masse OCKLP $= p$; BF $= b$; FP $= c$; PT $= f$, und bringt alle die Höhen BS und BF, SV und FP, VT und PT, die nur paarweis zu einerlei flüßigen Masse gehören, auf eben dergleichen Höhen wie BS und BF; so erhält man die Gleichung (34.)

$$x + \frac{\pi'y}{\pi} + \frac{pz}{\pi} = b + \frac{\pi'c}{\pi} + \frac{pf}{\pi}, \text{ oder auch}$$

$$\pi x + \pi' y + pz = \pi b + \pi' c + pf$$

Diese Gleichung mit der vorhergehenden verglichen gibt

$$x = \frac{N^2D^2(\pi b + \pi' c + pf)}{\pi^2 N^2 D^2 + \pi' M^2 D^2 + pM^2 N^2}$$

$$y = \frac{M^2D^2(\pi b + \pi' c + pf)}{\pi N^2 D^2 + \pi' M^2 D^2 + pM^2 N^2}$$

$$z = \frac{M^2N^2(\pi b + \pi' c + pf)}{\pi N^2 D^2 + \pi' M^2 D^2 + pM^2 N^2}$$

Nachdem für den ersten Augenblick die den Geschwindigkeiten in M, N, D zugehörige Höhen auf solche Art bestimmt worden sind, setze man, es sey nach Verfluß einer gewissen Zeit der Spiegel der obersten flüßigen Masse bis in ab gesunken, folglich der Spiegel der zwoten bis in ef und der Spiegel der dritten bis in op gekommen; so ist klar, daß man allemal bf = BF, fp = FP hat, und daß nur die Höhe der letzten flüßigen Masse Tp veränderlich ist. Wenn man also die Höhe Tp = k setzt, so findet man durch eben das Verfahren, daß für iede solche Lage der drei Flüßigkeiten

$$\left.\begin{array}{l}\text{die der Geschw. in}\\ \text{M zugehörige Höhe}\end{array}\right\} = \frac{N^2D^2(\pi b + \pi' c + pk)}{\pi N^2D^2 + \pi' M^2D^2 + pM^2N^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{die der Geschw. in}\\ \text{N zugehörige Höhe}\end{array}\right\} = \frac{M^2D^2(\pi b + \pi' c + pk)}{\pi N^2D^2 + \pi' M^2D^2 + pM^2N^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{die der Geschw. in}\\ \text{D zugehörige Höhe}\end{array}\right\} = \frac{M^2N^2(\pi b + \pi' c + pk)}{\pi N^2D^2 + \pi' M^2D^2 + pM^2N^2}$$

271. IV. Zusatz. Eine ganz einfache Anwendung von vorstehendem §. zu machen, wollen wir setzen, man habe nur zwo flüßige Massen, oder es sey die obere AEFB mit der Schiedwand EF weggenommen; OCKLP sey Wasser und EOPF Luft; so hat man sogleich $b = o$, $M = \infty$, $\frac{\pi'}{p} = \frac{1}{850}$; da nun ferner die Druckungen der äußern Luft auf N und auf D einander das Gleichgewicht halten, so muß man $c = o$ setzen. Es ist also die der Geschwindigkeit der Luft bei ihrem Durchgang durch N zugehörige Höhe $= k \cdot \frac{D^2 \cdot 850}{D^2 + 850 \cdot N^2}$, und die der Geschwindigkeit des Wassers beim Durchgang durch D zugehörige Höhe $= k \cdot \frac{}{N^2}$.

$\frac{N^2 . 850}{D^2 + 850 . N^2}$. Wenn die Oefnung D in Vergleichung mit der Oefnung N unendlich klein ist, so wird die erstere Höhe $= o$, und die letztere verwandelt sich in k, wie sich gehört. Wenn beide Oefnungen N, D einander gleich sind, so sind die Geschwindigkeiten der Luft in N und des Wassers in D einander gleich, und die ihnen zugehörigen Höhen werden beide durch eben die Größe $\frac{850}{851} . k$ ausgedruckt.

Man kann durch diese Methode eine deutliche und genaue Vorstellung von der Geschwindigkeit erhalten, mit der der Wein aus einem Faß durch eine gemachte Bodenöfnung auslauft, wenn das zum Eingang der Luft oben gemachte Loch sehr klein ist (*).

272.

(*) Hier hat sich Herr Boffüt gar sehr geirrt; die vorgetragene Methode, wenn sie auch an sich richtig wäre, ließe sich dennoch in dem hier ernähnten Fall gar nicht gebrauchen, und sie ist in diesem Zusatz ganz falsch auf die Luft angewendet worden. Sie würde nämlich, wenn sie auch für sich, wie sie es doch nicht ist, richtig wäre, lediglich von unelastischen flüßigen Massen gelten, keineswegs aber von elastischen. Der Irrthum erhellet gleich bei der Anwendung auf einen besondern Fall; es sey nämlich N gegen D unendlich klein, so ergäbe sich nach der ersten Formel die der Geschwindigkeit der Luft durch N zugehörige Höhe $= k . 850$, die also schlechterdings von der Größe k abhienge, daß es also für den Druck der Luft gar keine Grenzen geben dürfte, weil der Werth von k nicht eingeschränkt ist. In eben diesem Fall wäre vermög der letzten Formel, die der Geschwindigkeit des Wassers durch D zugehörige Höhe $= k . \frac{1}{\infty} = o$, wieder eine offenbare Unrichtigkeit; denn es sey D gegen der Weite OP unendlich klein, und etwa $k = 100$ Fus, so müßte

272. III. Aufg. Wenn die flüßige Masse in dem Gefäs ABCD (fig. 26.), das beständig bis

der Strahl durch D mit der zur Höhe von etwa 100 — 31 = 69 Fus in die Höhe steigen, wenn wirklich N = 0 wäre, und diese Geschwindigkeit würde in dem bestimmten Fall nur sehr langsam abnehmen; hätte N dabei nur einige Größe, so fiele die anfängliche Geschwindigkeit durch D noch merklich größer aus. Man sieht aber überhaupt leicht ein, daß es mit der elastischen Luft eine ganz andere Bewandnis hat, als mit einer unelastischen flüßigen Masse, die mit der Luft gleiche specifische Schwere hätte. Wären z. B. im letztern Fall 10 Kubikzoll durch N in den untern Raum durchgedrungen, so nähmen solche unterhalb OP wieder einen Raum von 10 Kubikzoll ein, und es befänden sich nun im untern Raum 10 Kubikzoll Wasser weniger als vorher, da diese Abtheilung ganz mit Wasser angefüllt war; im erstern Fall aber, wo nämlich elastische Luft durchdringt, dehnt sich die eindringende Luft aus, indem das Wasser bei D auslauft, wenn auch die Dichtigkeit der unterhalb OP über dem Wasserspiegel stehenden Luft kleiner als die der natürlichen Luft ist; iene durchgedrungenen 10 Kubikzoll natürlicher Luft nehmen also unterhalb OP mehr als 10 Kubikzoll ein, und in diesem Fall sind also, wenn 10 Kubikzoll natürlicher Luft durch N gedrungen sind, schon mehr als 10 Kubikzoll Wasser durch D abgeflossen. Sind also D und N gleich groß, so erhellet, daß die Geschwindigkeit des Wassers durch D nothwendig größer seyn müsse, als die Geschwindigkeit der Luft durch N, da hingegen Herr Bossüt in diesem Fall beide Geschwindigkeiten gleich groß findet. Dieses wird schon hinlänglich seyn, den Irrthum zu beweisen, in den Herr Bossüt dadurch verfallen ist, daß er die (wiewohl auch unrichtig angegebenen) Gesetze unelastischer flüßiger Massen auf die elastische Luft anwendet. Daß hierzu ganz andere Untersuchungen gehören, beweißt Hr. H. Karsten in seiner Pneumatik.

bis zur Höhe AB voll erhalten wird, durch die Oefnung M in das Seitengefäs CEGF ablauft, das ringsum, nur N und P ausgenommen, wo sich zum freien Ausgang zwo Oefnungen befinden, verschlossen ist; die den Geschwindigkeiten in M, N, P zugehörigen Höhen und die Ausflußmengen zu finden.

Man setze, es leide die flüßige Masse bei ihrem Ausgang aus dem Gefäs ABCD in das ECFG in ieder Stelle der Oefnung M eine Gegenwirkung, die sich durch MH ausdrucken lasse, von dem im Behältnis ECFG befindlichen Wasser und den Wänden dieses Behältnisses. Zieht man die Horizontallinien NV, HK, so ist klar, daß die den Geschwindigkeiten in M, N, P zugehörige Höhen durch die lothrechten Linien DH, HV, HC ausgedruckt werden. Nennt man also t die Zeit des Ausflusses, θ die Zeit des Falls durch a; h die Höhe DC; b ihren Theil DV; x die Höhe DH; Q die durch M abfließende Wassermenge; q die Wassermenge, welche durch N, und q′ die, welche durch P abfließt; so erhält man

$$Q = \frac{2tM\sqrt{ax}}{\theta}$$

$$q = \frac{2tN\sqrt{(a(b-x))}}{\theta}$$

$$q' = \frac{2tP.\sqrt{(a.(h-x))}}{\theta}$$

Ferner

$$q + q' = Q$$

Diese Gleichungen ergeben

$$M\sqrt{x} = N\sqrt{(b-x)} + P\sqrt{(h-x)}$$

die sich auf eine Gleichung vom zweeten Grad bringen

läßt, aus der sich x ergibt. Aus x ergibt sich alsdann HV, HC, Q, q, q' (*).

273. Zus. Die Höhen HV, HC, welche den Geschwindigkeiten in N und P zugehören, sind offenbar die Höhen von den Wassersäulen, welche senkrecht gegen die Wände des Gefäßes ECFG an eben den Stellen drucken würden, wenn man sich vorstellt, es würden die Oefnungen N und P plötzlich zugestopft. Der Druck also, den ein Theil X, der an einer gegebenen Stelle des Behältnisses ECFG genommen wird, während dem Abfluß durch die Oefnungen N und P leidet, ist $= X.HC$.

Man setze z. B. es sey die Oefnung P unendlich klein, oder $P = o$; so verwandelt sich die allgemeine Gleichung

$$M\sqrt{x} = N\sqrt{(b-x)} + P\sqrt{(h-x)}$$

in $$M\sqrt{x} = N\sqrt{(b-x)}$$

also $$x = \frac{N^2 . b}{M^2 + N^2}$$

und daher

$$CH = h - x = \frac{M^2 h + N^2 (h-b)}{M^2 + N^2}$$

Demnach der Druck

$$X = \frac{X.(M^2 h + N^2 (h-b))}{M^2 + N^2}$$

Auf eben die Art ließe sich der Druck gegen iede andere Stelle der Wände im Gefäs ECFG und selbst im Gefäs ABCD bestimmen. Man darf aber nicht vergeß-

(*) Man sieht von selbsten, daß ich diese Auflösung mit ihren Folgen gleichfalls für fehlerhaft erkennen muß.

vergessen, daß diese Bestimmung voraussetzt, es seyen die Oefnungen M, N, P sehr klein und die Wasser in beiden Gefäßen als ganz ruhig anzusehen. Man könnte sie daher nicht ohne Fehler gebrauchen, wenn die Wasser im einen oder andern Gefäs eine merkliche Geschwindigkeit hätten. Man hat (239) die Methode angezeigt, nach der sich ganz allgemein der Druck bestimmen läßt, welchen Wasser, das sich durch Röhren bewegt, gegen die Wände solcher Röhren ausübt.

Achtes Kapitel.

Vom Ausfluß des Wassers durch eine kleine Oefnung aus einem Gefäs, das sich selbst in Bewegung befindet.

274.

Die Aufgaben, deren Auflösung ich nunmehr vortragen will, können in der Ausübung vorkommen. Wenn z. B. ein mit Wasser angefüllter Eimer, mit einer ungleichförmigen Bewegung steigt oder sinkt, und man will die der Geschwindigkeit des Ausflusses durch eine im Boden oder den Wänden angebrachte Oefnung zugehörige Höhe bestimmen, um die Wassermenge angeben zu können, welche in einer gegebenen Zeit durch diese Oefnung lauft; wenn man ebenso die Lage bestimmen will, in die eine flüßige Masse in einem Gefäs kommen muß, das sich auf einer Ebene mit beschleunigter oder verzögerter Bewegung fortbewegt, und den Druck, der gegen irgend einen Punkt des Gefäßes entsteht u. d. g. so erfodern alle diese Fragen zu ihrer Auflösung neue Grundsätze, die nicht allein ihres Nutzens wegen, sondern auch um unsere Leser in dem Gebrauch der Dynamik und der Hydraulik zu üben, vorgetragen zu werden verdienen. Zur mehreren Deutlichkeit nehme ich einfache Fälle.

275. I. Aufgabe. **Das anfangs bis AD mit Wasser angefüllte Gefäs ABCD (fig. 27.) werde vermittelst der unveränderlichen und ohne Schwere angenommenen Schnure HNMP, die über die beiden herumlaufenden Rollen M und N**

gehr,

geht, durch das angehängte Gewicht P lothrecht in die Höhe gezogen; man sucht den Druck auf das unendlich kleine Stückgen pq des Bodens oder der Wände, oder die der Ausflußgeschwindigkeit durch solche Stelle zugehörige Höhe.

Es sey G der Schwerpunkt der ganzen Masse des Gefäßes mit dem in einem bestimmten Augenblick darin enthaltenen Wasser, und diese Masse heiße M. Man setze, wenn die beiden Körper oder die beiden Massen P und M der freien Wirkung der Schwere überlassen gewesen wären, so hätten sie in einem Augenblick die kleinen gleichgroßen Räume Pr, Gx durchlossen, aber wegen der gegenseitigen Wirkungen beider Körper auf einander, durchlaufe P den Raum Pk, und M den Gy. Die Größe der Bewegung, welche durch den erstern verloren wird, ist derjenigen gleich, welche durch letztern gewonnen wird; wenn man also die Schwere g nennt, und die einfache beschleunigende Kraft Pk oder Gy = f setzt, so erhält man die Gleichung

$$P.(g-f) = M.(g+f) \quad (*)$$

woraus sich, $f = \frac{g.(P-M)}{P+M}$

ergibt, folglich $xy = xG + Gy = g + \frac{g(P-M)}{P+M} = 2gP$

(*) Dieß gibt

$$(P-M).g = (P+M).f$$

also $f = \frac{P-M}{P+M}.g$

d. h. die Bewegung des Körpers P wird durch eine Art von Schwere f beschleunigt, die kleiner als unsere natürliche Schwere g nämlich nur $\frac{P-M}{P+M}.g$ ist.

Die

$= \frac{2gP}{P+M}$ im Ausdruck für die Kraft, welche iedes Theilgen der Masse M von unten hinauftreibt, so daß, wenn man dem System aller dieser Theilgen eine gleiche entgegengesetzte Bewegung beibrächte, ein Gleichgewicht entstehen müßte. Nun muß in diesem letzten Fall vermög der Kraft $\frac{2gP}{P+M}$, welche auf iedes flüßige Theilgen lothrecht von oben herab wirkt, gegen ieden Punkt im Boden oder den Wänden ein Druck entstehen, der sich zu dem Druck, welchen eben der Punkt leiden würde, wenn die flüßige Masse lediglich der Wirkung der Schwere überlassen wäre, verhält wie $\frac{2gP}{P+M}$ zu g oder wie 2P zu P + M. Bedeutet also h die Höhe Rq des Wassers in dem als ruhig angenommenen Gefäß, so ist die der Geschwindigkeit in pq unter den Voraussetzungen der Aufgabe zugehörige Höhe $= h. \frac{2P}{P+M}$, und eben diese Größe zeigt also den Druck des Wassers auf iede Stelle in pq.

276. I. Zusatz. Um also das Wasserelement dQ zu erhalten, das in dem Augenblick dt auslauft, darf man nur in (201) h. $\frac{2P}{P+M}$ statt h, dt für t, dQ für Q setzen, und die übrigen Benennungen beibehalten. Hierdurch erhält man

dQ=

Die beiden Massen P + M zusammengenommen, wirken, nämlich hier nur so stark unterwärts, als sonsten eine Masse P — M vermög der natürlichen Schwere drucken müßte, und die zum Sinken wirkende Kraft kann daher nur $\frac{P-M}{P+M}$ von der natürlichen Schwere betragen.

$$dQ = \frac{2dt.K}{\theta}\sqrt{\frac{2ahP}{P+M}}$$

277. II. Zus. Wenn man annimmt, das Gefäs leere sich durch die Oefnung pq aus, ohne neuen Zufluß zu erhalten, und nun die veränderliche Höhe $Rq = x$ und den horizontalen Querschnitt des Gefäßes auf der Oberfläche AD, welcher eine durch die Gestalt des Gefäßes gegebene Funktion von x ist, $= X$ setzt, so erhält man

$$dQ = -Xdx;\ M = A + \int Xdx$$

wo A eine beständige Größe ist. Demnach

$$-Xdx = \frac{2dt.K}{\theta}\sqrt{\frac{2aPx}{P+A+\int Xdx}} \text{ oder}$$

$$dt = \frac{-\theta Xdx\sqrt{(P+A+\int Xdx)}}{2K\sqrt{2aP}.\sqrt{x}}$$

woraus sich die Verhältnis zwischen x uud t ergibt.

278. III. Zus. Man setze, es sey das Gefäs ein durch Umwälzung entstandener Körper, dessen Axe Rq ist, und man wolle die Gestalt wissen, die er haben muß, wenn der Wasserspiegel in gleichen Zeiten gleich tief sinken soll; so muß man $dt = -ndx$ setzen, wo n ein gegebener Koefficient ist; hiernächst setzt man die Ordinate $RA = RD = y$, folglich $X = my^2$, wo m die Verhältnis des Umkreises zum Durchmesser bedeutet; man schafft die Wurzelzeichen weg, und setzt den Ausdruck $\int Xdx$ oder $\int my^2 dx$ in einem Glied ganz allein; alsdann differentiirt man, wodurch sich eine Gleichung von folgender Form ergibt

$$y^7 dx + By dx + Cx dy = 0\ (*)$$

die sich ohne Schwierigkeit integriren läßt.

279.

(*) Es sey nämlich in der Formel für dt, $P + A = \alpha$, $2K\sqrt{2aP} = \beta$, und $dt = -ndx$, $X = my^2$, so hat man

$-ndx$

279. Anm. Aus der Gleichung $f = \frac{g(P-M)}{P+M}$ sieht man, daß für $P = M$, $f = o$ und $\frac{2P}{P+M} = 1$ wird. Das Gefäs ist alsdann in Ruhe, wenigstens auf einen Augenblick und das in diesem Augenblick auslaufende Wasserelement

$$= \frac{2\,dt\,K.\sqrt{ah}}{\theta}$$

Für $P = o$ erhält man $\frac{2P}{P+M} = o$. Der Druck der

$$-n\,dx = \frac{-\theta m y^2 dx \sqrt{(\alpha + \int m y^2 dx)}}{\beta.\sqrt{x}} \text{ also}$$

$$-n\beta\sqrt{x} = -\theta m y^2 \sqrt{(\alpha + \int m y^2 dx)}$$

und nun quadrirt

$$n^2\beta^2 x = \theta^2 m^2 y^4 \alpha + \theta^2 m^2 y^4 \int m y^2 dx$$

also

$$\int m y^2 dx = \frac{n^2\beta^2 x}{\theta^2 m^2 y^4} - \frac{\theta^2 m^2 y^4 \alpha}{\theta^2 m^2 y^4} \text{ oder}$$

$$\int m y^2 dx = \frac{n^2\beta^2}{\theta^2 m^2}.x.y^{-4} - \alpha$$

folglich, wenn man differentiirt,

$$m y^2 dx = \frac{n^2\beta^2}{m^2\theta^2} y^{-4}.dx - \frac{n^2\beta^2}{m^2\theta^2}.xy^{-5} dy$$

und nun mit $\frac{y^5}{m}$ durchaus multiplicirt, gibt

$$y^7 dx = \frac{n^2\beta^2}{m^3\theta^2} y\,dx - \frac{n^2\beta^2}{m^3\theta^2} x\,dy$$

oder

$$y^7 dx - \frac{n^2\beta^2}{m^3\theta^2} y\,dx + \frac{n^2\beta^2}{m^3\theta^2} x\,dy = o$$

der flüßigen Masse auf pq verschwindet alsdann und es kann gar kein Wasser durch die Oefnung pq auslaufen. Dieses ist auch sonst schon klar, denn alle Theilgen der Masse M fallen alsdann vermög der natürlichen Schwere mit gleicher Geschwindigkeit herab. (*).

Wenn das Gefäs P unendlich ist, so achtet man M in Vergleichung mit P für nichts, und alsdann wird $\frac{2P}{P+M} = 2$, also $dQ = 2dt\, K\sqrt{\frac{2ah}{\theta}}$.

Wenn

(*) Ich denke hierüber und über dieses ganze Kapitel ganz anders als Herr Bossüt. Druck und Geschwindigkeit müssen hier sorgfältig unterschieden werden. Nach meiner Vorstellung, und mich dünkt nach einer richtigen, kann die Bewegung des Gefäßes mit dem Wasser den Druck des Wassers auf den Boden und die Wände nicht im geringsten ändern. Eben der Umstand, den Herr Bossüt hier anführt, daß nämlich alle Theilgen der ganzen Masse M mit einerlei Geschwindigkeit niedersinken, wenn $P = o$ ist, hat die nothwendige Folge, daß alle Theilgen vollkommen in eben der Verhältnis gegen einander bleiben, die sie haben, wenn sich das Gefäs in Ruhe befindet. Das nämliche ist klar, wenn auch das Gefäs nicht ganz frei fällt oder P nicht $= o$ ist; der verschiedene Erfolg beim bewegten und beim ruhigen Gefäs kann in Ansehung des Drucks nur darin bestehen, daß die Stellen, welche gedruckt werden, nach und nach andere Plätze einnehmen, nicht aber in der Stärke des Drucks selbsten, weil die Verbindung der Wassertheilgen unter einander und mit dem Gefäs immer die nämliche bleibt, es mag sich solches in Ruhe oder in Bewegung befinden. Es ist daher sogar gleichgültig für den Druck, ob $P > $ oder $< M$ ist, d. i. ob das Gefäs mit dem Wasser steigt oder sinkt. Der Druck auf den Boden und die Wände hängt also lediglich von der Wasserhöhe ab, es mögen die Werthe von P und

Wenn die beiden Gewichte P und M endliche Größen sind und $M > P$, so müßte M sinken und P steigen; und um die ausfließende Wassermenge zu bestimmen, bräuchte man nur f verneint zu setzen. Man findet in diesem Fall, wie im ersten, die der Geschwindigkeit in pq zugehörige Höhe $= h \frac{2P}{P+M}$.

280.

P und M wie man will beschaffen seyn. Gleichwohl hat es mit der Geschwindigkeit des durch die Bodenöfnung pq laufenden Wassers eine andere Beschaffenheit bei dem bewegten als bei dem ruhig stehenden Gefäs; doch muß ich auch hiervon anders als Herr Bossüt urtheilen. Wenn es mit der gewöhnlichen Theorie seine Richtigkeit hätte, vermög der die Geschwindigkeit des auslaufenden Wassers, zumal bei kleinen Oefnungen, bei weitem schneller als die Geschwindigkeit frei fallender Körper beschleunigt wird, so könnte offenbar der von Herrn Bossüt für den freien Fall der Masse M erwähnte Erfolg nicht eintretten, den er doch selbst als ganz bekannt ansieht. Man muß nämlich bedenken, daß es hierbei auf die relative Geschwindigkeiten des auslaufenden Wassers in Ansehung der Oefnung ankommt. Nach meiner Theorie geschieht die Beschleunigung des auslaufenden Wassers völlig so, wie bei einem Körper der von dem Wasserspiegel bis zur Oefnung frei herabfiele; wenn also in dem Augenblick, da das Gefäs frei zu sinken anfängt, zugleich das Bodenloch eröfnet würde, so würde die Bewegung der durch pq schießenden Wassersäule vollkommen so beschleunigt, wie der Boden des Gefäßes; dieser holt also die ausschießenden Wassertheile ein, oder diese können sich nicht vom Boden entfernen, es bleibt also die erste Wassersäule in dem Gefäs zurück und die absolute Bewegung derselben bleibt der des Bodens beständig gleich oder die relative bleibt $= o$. Nach der gemeinen Theorie aber wird die Bewegung der ersten Wassertheilgen weit stärker als die eines frei fallenden Körpers beschleunigt, so daß das auslaufende

280. II. Aufg. Das Gefäs ABCD (fig. 28.), welches Wasser enthält, werde längst der horizontalen Ebene F Q mittelst der um die Rolle N gelegten undehnbaren und nicht schweren Schnüre HNP, woran sich das Gewicht P befindet, fortgezogen; man sucht die Lage, welche der Wasserspiegel annehmen muß, wenn er

laufende Wasser weit eher die zur Höhe des Wasserstands gehörige Geschwindigkeit erlangt als die frei fallende Masse M; ihr zufolge könnte also das Gefäs oder sein Boden die herausschießenden Wassertheilgen nicht einholen, sondern solche erhielten gleich eine größere Geschwindigkeit und müßten also beständig herauslaufen oder der Spiegel sich dem Boden beständig nähern; indem also Herr Bossüt letzteres verwirft, gibt er zugleich nach, daß die gemeine Lehre von der allmäligen Beschleunigung des Wassers unstatthaft sey. Aus eben dem Grund muß auch das Auslaufen fortdauern, wenn es vor dem freien Fall der Masse M schon angefangen hat. Hat es noch nicht angefangen, sondern die Eröfnung des Bodenlochs geschieht in dem Augenblick, da M zu sinken anfängt, aber nicht ganz frei fällt, so wird das auslaufende Wasser stärker als M beschleunigt und es muß also ein Auslaufen erfolgen. Befindet sich die Oefnung seitwärts, so erfolgt das Auslaufen allemal auf einerlei Art, es mag das Gefäs sinken oder ruhig stehen, weil die relative Geschwindigkeit des Gefäßes in Ansehung der horizontalen Geschwindigkeit des Strahls = o ist. Ist M < P, oder steigt das Gefäs aufwärts, so bleibt die absolute Geschwindigkeit des auslaufenden Wassers allemal der Höhe des Wasserstands gemäs, aber die relative gegen den Boden des Gefäßes ist aus der Geschwindigkeit des Gefäßes und der absoluten des Wassers zusammengesetzt. Niemalen ist der Fall möglich, daß die Auslaufsgeschwindigkeit einer größern Höhe als h zugehöre, wie doch Herr Bossüt findet, wenn M < P ist.

er in einen gleichförmigen und bleibenden Zustand gekommen ist, und den Druck, welchen irgend eine Stelle des Bodens oder der Wände des Gefäßes leidet.

Es sey M die Summe der Massen des Gefäßes und des Wassers. Man setze, es habe der Körper P in einem Augenblick vermög der natürlichen Schwere den kleinen Raum Pr durchloffen, aber vermög des Körpers M, welchen er nachzieht, durchlaufe er nur den Raum Pk, indeß M einen Raum = Pk horizontal durchlauft. Nennt man die natürliche Schwere g, die beschleunigende Kraft Pk = f, so erhält man die Gleichung

$$P.(g-f) = Mf \text{ oder } f = \frac{P+M}{gP}.$$

Hieraus ersieht man, daß iedes Theilgen der flüßigen Masse nach der Richtung FQ durch eine Kraft $\frac{gP}{P+M}$ getrieben wird, und daß also das ganze System in Ruhe bleiben müßte, wenn man ihm eine gleiche und entgegengesetzte Kraft einprägte. Nun ist in diesem letzten Fall iedes flüßige Theilgen der Wirkung zwoer Kräfte unterworfen, wovon die eine lothrecht ist, nämlich die natürliche Schwere g, die andere horizontal, nämlich $\frac{gP}{P+M}$; und aus diesen beiden Kräften entsteht eine dritte $= g\frac{\sqrt{(P^2+(P+M)^2)}}{P+M}$.

Soll also die flüßige Masse ins Gleichgewicht kommen oder einen bleibenden und unveränderlichen Zustand annehmen, so muß die Richtung der erwähnten dritten Kraft den Wasserspiegel unter einem rechten Winkel schneiden; und da diese Kraft in der Größe und ihrer Richtung immer die nämliche bleibt, so sieht man offenbar, daß der Wasserspiegel eine schiefe Ebene

OM

OM seyn muß, so daß, wenn man OE horizontal zieht, $\frac{OE}{OM} = \frac{P+M}{\sqrt{(P^2+(P+M)^2)}}$ wird.

Es ist klar, daß die Linien OE, OM nach ihrer Größe gegeben sind. Die Lage des Punkts O ergibt sich aus Betrachtung der Gestalt des Gefäßes und der Menge des darin enthaltenen Wassers. Denn es sey z. B. ABCD ein rechtwinklichtes Gefäs, und wenn das Gefäs in Ruhe ist, also der Wasserspiegel eine horizontale Lage angenommen hat, habe solcher die Lage IL; so hat man

$$CI.CB = \frac{(OC+BM).CB}{2}$$

oder $2CI = 2OC - ME$, oder $OC = CI + \frac{ME}{2}$

eine Gleichung, worin alles auf der rechten Seite bekannt ist, weil $ME = \sqrt{(OM^2 - OE^2)}$ eine bekannte Größe ist.

Wenn man nun von irgend einem Punkt der Wände T die grade Linie TZ senkrecht auf den Spiegel OM zieht, so erhellet, daß der Druck auf die unendlich kleine Fläche Tt, unter den Voraussetzungen unserer Aufgabe, sich zu dem Druck, den sie in der Tiefe TZ auszuhalten hätte, wenn die flüßige Masse der bloßen Wirkung der Schwere in einem ruhig stehenden Gefäs überlassen wäre, verhält wie $\frac{g\sqrt{(P^2+(P+M)^2)}}{P+M}$ zu g, oder wie $\sqrt{(P^2+(P+M^2))}$ zu $P+M$; es ergibt sich also jener Druck =

$$\frac{Tt.TZ.\sqrt{(P^2+(P+M)^2)}}{P+M}$$

281. Zus. Wenn man den Druck auf Tt kennt, so ergibt sich auch die Geschwindigkeit, mit der

das Wasser in dem Augenblick, da man eine kleine Oefnung in den Tr anbringt, ablauft.

Wenn das Gefäs, so wie es horizontal fortgeht, Wasser verliert, ohne neues dagegen zu erhalten, so ändert sich die beschleunigende Kraft, welche in iedem Augenblick die Wassertheilgen belebt, beständig fort, sowohl in Ansehung ihrer Stärke als in der Richtung. Alsdann gehört die Bestimmung des Ausflusses unter die Aufgaben des V. Kap. wo von der Bewegung einer flüßigen Masse die Rede ist, die von welchen Kräften man will, getrieben werden.

282. Anmerk. Es ist zu bemerken, daß wenn das Gefäs kein Wasser verliert, die Oberfläche des Wassers in schiefer Lage bleibt und immer die nämliche Neigung behält, solang die Bewegung des Körpers P fortdauert und diese Bewegung gleichförmig beschleunigt wird. Wenn aber das Gefäs, nachdem es eine Zeitlang mit gleichförmig beschleunigter Bewegung fortgegangen ist, in Ruhe oder zu einer gleichförmigen Bewegung gelangt, so verliert der Wasserspiegel seine schiefe Lage und wird endlich waagrecht. Dieses erhellet offenbar aus unserer Auflösung; denn alsdann kann man $P = o$ setzen; die Kraft f ist $= o$, und der Wasserspiegel, auf den die Richtung der Kraft, welche auf iedes Theilgen dieser Oberfläche wirkt, senkrecht seyn muß, ist nothwendig horizontal, weil nichts anders mehr auf die flüßigen Theilgen wirkt, als die natürliche Schwere.

Die Aufgabe ließe sich ebenso leicht auflösen, wenn das Gefäs auf einer schiefen Ebene hinabrütschte. Aber wir wollen uns nicht länger bei dieser Untersuchung aufhalten.

Neuntes Kapitel.

Von der Schwungbewegung des Wassers in einem Heber.

283.

Ich habe in meiner Einleitung in die Mechanik (II. Th. II. B. III. Kap.) die Haupteigenschaften von der Bewegung der Pendeln bewiesen. Man hat daselbst gesehen, daß wenn ein Körper oder Pendel P, das mittelst des Fadens OP aufgehängt ist, kleine Kreisbögen Pp, Qq beschreibt, alle Schwingungen um den festen Punkt O isochronisch oder von gleicher Dauer sind, wenn gleich die durchloffenen Bögen Pp, Qq ungleich sind; man hat auch daselbst gesehen, daß sich die Zeiten kleiner Schwingungen ungleichlanger Pendeln wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen verhalten. Die Bewegung des Wassers, das in einem Heber schwankt, ist von eben der Art.

284. I. Aufg. **Die Schwungbewegung einer flüßigen Masse in einem Heber KLNM (fig. 30.) zu bestimmen, der durchaus gleiche Weite hat, und aus zween lothrechten Schenkeln und einem horizontalen zusammengesetzt ist.**

Man setze anfangs, es nehme die flüßige Masse im Stand der Ruhe den Raum ALND ein; in solchem Fall liegen die beiden Oberflächen AB, CD in einerlei Horizontalfläche (21). Nun setze man, die flüßige Masse werde durch irgend eine Ursache z. B. durch die Wirkung eines Kolbens genöthigt, in dem Schenkel MN bis in GH herabzusinken, und daher in dem Schenkel KL bis in EF zu steigen; wenn dieses geschehen ist, so nehme man den Kolben plötzlich weg, so daß die flüßige

Masse lediglich der freien Wirkung ihrer Schwere überlassen ist; so ist klar, daß das Wasser abwechselnd fallen und steigen und eben dergleichen Schwingungen machen müsse, wie ein Pendel, das hin und her geht.

Es sey P (fig. 29.) ein Pendel, dessen Länge OP die Hälfte von der Länge xyz der flüßigen Säule ist, und das bis in die tiefste Stelle I Bögen PI beschreibt, die den Räumen EA gleich sind. Die Kraft, vermög der die flüßige Masse ihre Schwingungen macht, ist der Ueberschuß des in dem einen Schenkel enthaltenen Wassergewichts über das Gewicht des im andern Schenkel enthaltenen Wassers. Wenn also das Wasser in dem Schenkel KL bis EF steigt, folglich in dem MN bis GH fällt, so ist diese Kraft das Gewicht von der Säule ESTF oder das doppelte Gewicht der Säule EABF. Sie verhält sich also zum Gewicht der gesammten Wassermasse wie 2 AE zu xyz oder wie AE zu OP. Hieraus folgt: 1) daß da die Länge xyz eine beständige Größe ist, die Kraft, welche die Schwingungen des Wassers verursacht, beständig dem Raum proportional ist, der durch sie durchloffen wird, und daß also die Schwingungen in gleichen Zeiten geschehen. 2) Diese Schwingungen erfolgen in der nämlichen Zeit; wie die vom Pendel P; denn die Kraft, vermög der das Pendel P den kleinen Bogen PI beschreibt, verhält sich zur Schwere des nämlichen Pendels, wie PI zu OP oder wie AE zu OP; das Wasser und das Pendel werden also von gleicher Kraft belebt und müssen daher ihre Schwingungen in gleichen Zeiten machen.

285. Zus. Weil die Schwingungen des Wassers nach eben den Gesetzen erfolgen, wie die des Pendels, so muß, wenn man die Länge der Wassersäule vergrößert oder vermindert, die Zeit, worin sie iede ihrer Schwingungen macht, größer oder kleiner werden

und

und zwar nach der Verhältnis der Quadratwurzeln aus dieser Länge.

286. II. Aufg. **Die Schwingungen des Wassers in einem Gefäs von ieder gegebenen Gestalt allgemein zu bestimmen.**

Es sey KLMN (fig. 31.) ein Heber von welcher Gestalt man will, der eine flüßige Masse enthält, die, nachdem sie durch irgend eine äußere Ursache gegen K aufwärts getrieben worden, in die unbestimmte Lage EFGH gekommen ist, wo sie blos der Wirkung der Schwere überlassen ist. Diese flüßige Masse wird Schwingungen machen, von deren Bestimmung nun die Rede ist. Zu dem Ende muß man die Richtung kennen, welche die Wassertheilgen bei ihren Bewegungen nehmen. Wenn man nun hier den Grundsatz von der parallelen Bewegung der Querschnitte anwendet, so kann man diese Querschnitte entweder als horizontal annehmen oder als senkrecht auf der krummen Linie KghM, die als die Axe des Hebers angesehen wird (*). Nach der ersten Hypothese beruht die Berechnung auf §. 230, weil man für einen Augenblick EFGH als ein Gefäs oder Röhre ansehen kann, dessen Oberfläche EF und Grundfläche GH ist. Ich trage hier die Auflösung nach der zwoten Hypothese vor, die von mehrern großen Geometern angenommen worden ist.

I. Man gedenke sich also, es sey die flüßige Masse EFGH in unendlich viele Schichten LOol getheilt, die alle gleich groß und auf die krumme Linie gfh in ieder Stelle senkrecht seyen. Die Schwere, welche auf iede Schichte lothrecht wirkt, zerlegt sich in zwo Kräfte,

(*) Oder als die centrische Linie, welche durch die Mittelpunkte aller Querschnitte durchgeht.

Kräfte, wovon die eine auf die krumme Linie senkrecht ist und beiseit gesetzt werden muß, die andere aber der Richtung der krummen Linie folgt, welche hier allein in Betrachtung kommt. Es sey nun

die Schwere . . . . . = g
die Oberfläche EF . . . . = P
die Fläche GH . . . . = Q
der Querschnitt LO . . . . = y
der Bogen gf der krummen Linie gfh = x
der Sinus totus . . . . = 1
der Winkel mfn, welchen die krumme Linie in f mit der lothrechten Linie macht = p
die Geschwindigkeit der Oberfläche EF = u
die dieser Geschwindigkeit zugehörige Höhe = r
die Geschwindigkeit des Querschnitts LO = v

so ist klar, daß, wenn der längst fn wirkende Theil der Schwere durch g. Cos p ausgedruckt wird, dafern die Schichten nicht auf einander wirkten, die Geschwindigkeit v am Ende des Augenblicks dt sich in $v + g. \mathrm{Cos}\, p. dt$ verwandeln würde; da sie aber wegen der erzwungenen Bewegung der Schichten $= v + dv$ wird, so sieht man, daß die verschiedenen Querschnitte, welche von der Geschwindigkeit $g. \mathrm{Cos}\, p. dt - dv$ belebt würden, sich im Gleichgewicht erhalten müßten. Man erhält also

$$\int dx. (g. \mathrm{Cos}\, p. dt - dv) = 0$$

und hieraus ergibt sich (wenn man für dt seinen Werth $\frac{dx}{v}$ und für v seinen Werth $\frac{Pu}{y}$ setzt)

$$\frac{gydx}{Pu}. \int \mathrm{Cos}\, p. dx - P\, du \int \frac{dx}{y} + Puy\, dx. \int \frac{dy}{y^3} = 0$$

Die angezeigten Integralien sollen sich auf die ganze krumme Linie gfh beziehen. Es sey daher für solchen Fall $\int \mathrm{Cos}\, p. dx = F$; $\int \frac{dx}{y} = N$, und man

übers-

überlege, daß $\int \frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2P^2} - \frac{1}{2Q^2}$, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$F.Q^2.y\,dx - P^2Q^2N\,dr + r\,y\,dx(Q^2 - P^2) = o$ (A.

eine Formel, welche die Bewegung der flüßigen Masse für ieden Augenblick bestimmt.

II. Nun wollen wir setzen, im ersten Augenblick der Bewegung nehme die flüßige Masse den Raum VZRN ein, und der von der Oberfläche EF in der Zeit t durchloffene Raum Kg heiße z; wenn nun die Natur der krummen Linie KghM gegeben ist, und die beiden Räume VZRN, EFGH, welche die flüßige Masse nach einander einnimmt, gleichgroß sind, so ist klar, daß die Größen F, N, P, Q, y dx in Funktionen von z und beständigen Größen ausgedruckt werden können. Es ist also die Geschwindigkeit u der Fläche EF oder die dieser Geschwindigkeit zugehörige Höhe r eine Funktion von z, und ebenso ist auch t eine Funktion von z, weil $dt = \frac{dz}{u}$ ist.

Wir wollen die Anwendung dieser allgemeinen Theorie in einigen Beispielen zeigen.

I. Exempel. Der Heber sey zilindrisch und die krumme Linie KghM der halbe Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser KM horizontal ist.

In diesem Fall hat man $P = Q = y$, und iede dieser Größen ist unveränderlich. Auf den Durchmesser KM sey die Ordinate fq gezogen, und man setze den Halbmesser $CK = 1$, den halben Kreis KghM $= m$; den gegebenen Bogen gfh, den die flüßige Masse in allen ihren Lagen bedeckt, $= n$; $fq = s$; den unbestimmten Bogen $Kgf = \xi$; so hat man $Cos\,p = ds$

$= \frac{ds}{d\xi} = \frac{d \sin \xi}{d\xi} = \text{Cof}\xi$; $\int dx . \text{Cof}\, p = \int dx . \text{Cof}\xi$ $= \int d\xi . \text{Cof}\xi = \sin\xi + A$, ein Integral, welches mit $\xi = z$ anfängt und $\xi = z + n$ aufhört. Demnach $F = \sin(z+n) - \sin z$. Ferner $N = \frac{n}{p}$; $y dx = P dz$. Es verwandelt sich daher die Gleichung (A) hier in

$$dz(\sin(z+n) - \sin z) - n dr = o$$

und hieraus ergibt sich (vorausgesetzt, daß die flüßige Masse von K aus zu sinken anfängt folglich $r = o$ wird, wenn $z = o$)

$$nr = \text{Cof}\, n - 1 + \text{Cof}\, z - \text{Cof}(z+n)$$

woraus sich r oder die der Geschwindigkeit der Oberfläche EF zugehörige Höhe ergibt.

Setzt man $z = m - n$, oder nimmt man an, es gelange die vordere Fläche GH in M, so findet man noch $r = o$. Es folgt hieraus, daß alsdann die flüßige Masse ihre ganze Geschwindigkeit verlohren haben und wieder rückwärts fallen muß. Auf diese Art müssen die gegenseitigen Schwingungen längst dem halben Kreis von K bis M und wieder zurück immer fortgehen.

Die Zeit, worin die Schwingungen geschehen, ergibt sich mittelst der Gleichung

$$dt = \frac{dz}{u} = \frac{dz}{\sqrt{2gr}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(\text{Cof}\, n - 1 + \text{Cof}\, z - \text{Cof}(z+n))}}$$

die so integrirt werden muß, daß t verschwindet, wenn $z = o$ wird, und t seinen vollen Werth erhält, wenn $z = m - n$ wird.

II. Exempel. Der Heber (fig. 32.) sey aus drei gradlinigten Röhren KLO, OLNR, RNM

RNM zusammengesetzt, die gleichen Durchmesser haben, und wovon die mittlere horizontal, die beiden andern aber schief gestellt sind.

Aus den Punkten f und m richte man die Vertikallinien fi, ms auf; der Kosinus des gegebenen Winkels Kfi heise f, der Kosinus des gegebenen Winkels Mms heise m, der unveränderliche senkrechte Querschnitt einer ieden Röhre P, die gegebene Länge gfmh des von der flüßigen Masse ausgefüllten Raums l, die gegebene Länge Kf der ersten schiefen Röhre b, die gegebene Länge der horizontalen Röhre c, der Raum Kg, welchen der Wasserspiegel in der Zeit t durchlauft, x.

Da von einer Röhre zur andern das Gesetz der Stetigkeit nicht beobachtet wird, so muß man bei ieder das Verfahren der allgemeinen Auflösung anbringen; und so findet man, daß für die Röhre EFOL die Größe $\int dx \cos p = f.(b-z)$ ist; für die Röhre G. HNR ist sie $mh.m = m(z+l-b-c)$ und für die horizontale Röhre ist sie $= o$. Zieht man den zweeten Ausdruck vom ersten ab, weil das Zeichen von m dem von f entgegengesetzt ist, so gibt der Rest $f(b-z) - (mz+l-b-c)$ den Werth von F für den ganzen Heber. Ferner wird hier die Größe $\int \frac{dx}{y}$ oder $N = \frac{l}{p}$. Folglich verwandelt sich die allgemeine Gleichung (A) (wenn man bemerkt, daß $y = P$, $dx = dz$ und $Q = P$ ist) in

$$dz(f(b-z) - m(z+l-b-c)) - ldr = o$$

und hieraus ergibt sich

$$r = \left(\frac{f+m}{2l}\right) \cdot \left(\frac{2(fb+mb+mc-ml).z}{f+m} - z^2\right)$$

Man

Man erhält daher, weil $dt = \frac{dz}{u} = \frac{dz}{\sqrt{2gr}}$,

$$t = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{(g(f+m))}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{2(fb+mb+mc-ml).z}{f+m} - z^2\right)}}$$

wo die allgemeine Integration von der Quadratur des Kreises abhängt. Zur Abkürzung drucke man den Koefficient von z durch 2A aus. Ferner bedeute B den vierten Theil des ganzen Umkreises für den Halbmesser A; und T die Zeit, welche erfodert wird, den Raum A zu durchlaufen; so erhält man

$$t = \frac{\sqrt{l}}{A\sqrt{(g(f+m))}} \cdot \int \frac{A\,dz}{\sqrt{(2Az - z^2)}}$$

und

$$T = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{(g(f+m))}} \cdot \frac{B}{A}$$

Nun ist $\frac{B}{A}$ eine beständige Größe, der Halbmesser A mag so groß seyn wie man will; es ist daher T eine beständige Größe und die ganzen Schwünge der flüßigen Masse geschehen also in gleichen Zeiten, die Weite des Raums, durch den sich die Schwünge erstrecken, mag so groß seyn als man will.

Es seyen L die Länge eines Pendels, das kleine Kreisbögen beschreibt, C die anfängliche Entfernung dieses Pendels von der Vertikallinie; D der vierte Theil des ganzen Umkreises für den Halbmesser L; z der vom Pendel in der Zeit t mit der Geschwindigkeit v kreisförmig durchloffene Raum; T' die Zeit, welche es braucht, bis in die Vertikallinie zu kommen; so erhält man $v\,dv = \frac{g(C-z)\,dz}{L}$ und daher $v^2 = \frac{g(2Cz - z^2)}{L}$. Demnach $t = \int \frac{dz}{v} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}} \cdot$

$\int dz$

$\int \frac{dz}{\sqrt{(2Cz - z^2)}}$ und $T' = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{D}{C}$. Setzt man diesen Werth von T' dem von T gleich, und erwägt daß $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$, so erhält man $L = \frac{1}{f+m}$ für die Länge des Pendels, das seine Schwingungen mit der flüßigen Masse in gleicher Zeit macht. Dieses Resultat stimmt mit dem überein, welches Hr. Joh. Bernoulli ohne Beweis mitgetheilt hat (s. dessen Werke T. III. p. 125.)

Wenn die Röhren EFOL, HGRN lothrecht stehen, so hat man $f = 1$, $m = 1$ und die Gleichung $L = \frac{1}{f+m}$ verwandelt sich in $L = \frac{1}{2}l$ d. i. die Länge des Pendels, das mit der flüßigen Masse in gleicher Zeit seine Schwingungen macht, ist halb so groß als die Länge der flüßigen Säule, welches mit (284.) übereinstimmt.

287. I. Erinnerung. Man sieht, daß sich die nämliche Theorie auf gleiche Art auf die Bewegung des Wassers in einer langen Röhre anwenden läßt, wenn man annimmt, daß sich die Schichten der flüßigen Masse, welche als senkrecht gegen die Axe der Röhre angesehen werden, in paralleler Lage fortbewegen. Wir haben (230.) die Auflösung dieser Aufgabe unter der Voraussetzung vorgetragen, daß die Schichten sich in horizontaler Lage parallel fortbewegen, und haben überdas den Druck bestimmt, welcher daraus gegen iede Stelle der Röhrenwände entstehen muß. Aber bei der gegenwärtigen Voraussetzung, wo wir die Querschnitte als senkrecht gegen die Axe der Röhren betrachten, müssen sich andere Resultaten ergeben. Die Geschwindigkeit der flüßigen Masse findet sich durch die allgemeine Gleichung des vorhergehenden §. Was die Stärke des Drucks

betrift,

betrift, so sieht man, daß, da die beschleunigende Kraft, vermög der alle Schichten im Gleichgewicht bleiben würden, hier g. Cos p — $\frac{dv}{dt}$ ist, der Druck auf die Stelle f (fig. 31.) = fdx. $\left(g. \text{Cos}\, p - \frac{dv}{dt}\right)$ ist.

288. II. Erinnerung. Newton in seinen Princip. mathem. (Lib. II. prop. 46.) vergleicht ganz richtig mit der schwingenden Bewegung des Wassers in einem Heber die schwankende Bewegung einer unbestimmten flüßigen Masse, welche durch die Wirkung des Windes oder auf irgend eine andere Art aus ihrem Gleichgewichtsstand gebracht worden ist.

Es sey ABCDEF (fig. 33.) wallendes Wasser, dessen Oberfläche in nach einander folgenden Wellen steigt und fällt. A, C, E seyen die Höhen dieser Wellen; B, D, F die dazwischen liegenden Vertiefungen. Da die abwechselnde Bewegung der Wellen so auf einander folgt, daß die höchsten Theile A, C, E hiernächst die tiefsten werden, und da die Kraft, vermög der die höchsten Theile sinken und die tiefsten steigen, beständig das Gewicht der aufgeschwollenen Wassermasse ist, so folgt, daß die Schwingungen der Wellen von eben der Art sind, wie die Schwingungen des Wassers in einem Heber von gleicher Weite. Wenn man also ein Pendel nimmt, dessen Länge die Hälfte der Zwischenweiten zwischen den höchsten Stellen A, C, E und den tiefsten B, D, F beträgt, so gelangen die höchsten Theile A, C, F in der Zeit in die tiefsten Stellen, worin solches Pendel eine Schwingung macht, und in der Zeit einer andern Schwingung werden sie wieder die höchsten. Das Pendel muß also zwo Schwingungen machen, bis das Wasser eine Wallung vollendet d. i. bis iede Welle den Raum durchlauft, welcher zwischen zwoen auf einander folgen-

folgenden höchsten oder tiefsten Stellen enthalten ist, und der eben die Breite einer Welle ausmacht. Und da ein Pendel, das viermal so lang als das vorige wäre, nur eine Schwingung machen würde, indeß jenes zwo macht, so folgt, daß die Wellen ihre Schwingungen in eben der Zeit machen, wie ein Pendel, das die Breite eben der Wellen zur Länge hätte. Da die Zeiten der Wallungen sich wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen (*) verhalten, so lassen sich solche aus der Betrachtung bestimmen, daß ein Pendel, das 3 Fus $8\frac{1}{2}$ Linien lang ist, in einer Sekunde, in der Breite von Paris, einen Schwung macht.

Man braucht nicht zu erinnern, daß diese Theorie vom Schwanken oder den Wallungen des Wassers, wie Newton selbsten bemerkt, nur ein Näherungsmittel ist; denn man setzt dabei voraus, daß sich die Wassertheile, wie in dem Heber 284, in graden Linien bewegen, da ihre Bewegung wirklich zum Theil kreisförmig ist.

Die Bewegung der Wellen kann nicht anders genau und befriedigend bestimmt werden, als durch die allgemeinen Gesetze der Bewegung flüßiger Massen, dergleichen wir im V. Kap. angezeigt haben. Hr. de la Place hat diesen Gegenstand für gradlinigte Wellen zuerst untersucht (Acad de Paris, année 1776. pag. 542.) und Hr. de la Grange hat diese Untersuchung allgemein angestellt (Acad. de Berlin année 1781. pag. 196.).

(*) Eigentlich: Breiten, weil eben dieses Wort zuvor gebraucht worden ist, nämlich AC, BD ꝛc.

Zehntes Kapitel.

Betrachtung über die Reibung des Wassers an dem Rand einer Oefnung oder an der Wand einer langen Röhre.

289.

Bei der Theorie, welche ich bisher von dem Ablaufen flüßiger Massen vorgetragen habe, ist die Verminderung der Wirkung, welche von der Reibung des Wassers an dem Rand der Oefnung oder an der Wand des Gefäßes herrührt, gar nicht in Betrachtung gezogen worden. Hier ist es nun meine Absicht, die Mittel anzuzeigen, wonach sich diese Verminderung wenigstens beinahe schätzen läßt. Ich nehme einfache Fälle vor, um nicht in weitläuftige Rechnungen zu verfallen, die zu meinem ietzigen Zweck unnütz wären.

290. I. Aufg. **Wenn ein Gefäs über einer kleinen kreisförmigen Oefnung** ABDE (fig. 34.) **beständig auf einerlei Höhe voll erhalten wird; die Wassermenge anzugeben, welche in gegebener Zeit auslauft, so daß dabei auf die Reibung am Rand der Oefnung Rücksicht genommen wird.**

Aus dem Mittelpunkt C seyen unendlich viele koncentrische Kreise abde, mnop ꝛc. beschrieben. Die an dem Rand der Oefnung ABDE sich reibenden Theilgen verlieren aus dieser Ursache einen Theil ihrer Geschwindigkeit, und da diese Theilgen mit den folgenden, welche den Kreis abde bilden, zusammenhängen, so wie auch diese wieder mit den nächstfolgenden, welche

welche den Umkreis m n o p ausmachen, einen Zusammenhang haben u. s. f. so ist klar, daß die Reibung an dem Rand A B D E sich von Theilgen zu Theilgen auf alle fortpflanzt, welche zu gleicher Zeit ausfließen, und daher die Wirkung oder die auslaufende Wassermenge vermindert werden müsse. Verzeichnet man also über A C als der Axe eine krumme Linie N g q K, deren Ordinaten A N, a g, m q, C K die Geschwindigkeiten vorstellen, die zu den Punkten A, a, m, C gehören, so muß der Flächeninhalt dieser krummlinigten Fläche der Summe der Geschwindigkeiten oder der ausgeloffenen Wassermenge proportional seyn. Setzt man also den Halbmesser C A = r, die Abscisse C m = x, die der Geschwindigkeit in m zugehörige Höhe = X, die Verhältnis des Umkreises zum Durchmesser = m, die Ausflußzeit = t, die Zeit des Falls durch a = θ, die ausgeloffene Wassermenge = Q, so erhält man (201.)

$$Q = \frac{4t\sqrt{a}}{\theta} \int m x dx \sqrt{X}$$

wo das Integral für x = o verschwinden und für x = r seinen vollen Werth erhalten muß.

Man ersieht hieraus, daß wenn das Gesetz bekannt ist, wonach die Theilgen mit einander zusammenhängen, sich auch die Funktion X und folglich auch Q bestimmen läßt, es sey nun algebraisch oder vermittelst der Quadraturen krummer Linien.

291. Zusatz. Man setze z. B. es sey N g q K eine grade Linie, welches sich von der Wahrheit nicht sehr entfernen kann, wenn die Oefnung als sehr klein angenommen wird. Die der Geschwindigkeit im Mittelpunkt zugehörige Höhe C K heise H, die der Geschwindigkeit am Rand zugehörige A N sey = h, und N R sey mit A C parallel gezogen; so geben die

ähnlichen Dreiecke NRK, Nfq, $fq = \frac{Nf \cdot RK}{NR} = \frac{(r-x)(\sqrt{H}-\sqrt{h})}{r}$, und mq oder $\sqrt{X} = \sqrt{h} + \frac{(r-x)(\sqrt{H}-\sqrt{h})}{r} = \frac{x\sqrt{h}+(r-x)\sqrt{H}}{r}$; also $\int x\,dx\sqrt{X} = \int\left(\frac{x^2\,dx\sqrt{h}+(r\,x\,dx - x^2\,dx)\sqrt{H}}{r}\right)$ $= \frac{x^3(\sqrt{h}-\sqrt{H})}{3r} + \frac{x^2\sqrt{H}}{2}$. Setzt man also $x = r$, so erhält man

$$Q = \frac{2\,t\,m\,r^2\sqrt{a}\,.\,(\sqrt{H}+2\sqrt{h})}{3^\theta}$$

Nun ist noch H und h zu bestimmen übrig, wozu man zwei Mittel hat.

I. Man weiß, daß bei Springwerken, die lothrecht in die Höhe steigen, der obere Theil des Strahls eine Art von Pyramide macht, deren Spitze durch die in der Mittellinie auf einander folgenden Theilgen gebildet wird. Wenn man für H die Höhe von der Spitze dieser Pyramide über der Oefnung annimmt und bestimmt H und Q durch eine unmittelbare Erfahrung, so findet man h, denn die vorhergehende Formel gibt

$$h = \frac{(3^\theta Q - 2\,t\,m\,r^2\sqrt{a}\,H)^2}{16\,m^2\,t^2\,r^4\,a}$$

II. Man setze, man habe eine zwote kreisförmige und horizontale Oefnung, indeß die Wasserhöhe im Behältnis immer die nämliche bleibe, und man bezeichne die denen H, r, Q ähnliche Größen mit den nämlichen Buchstaben, nur daß sie durch einen Strich (') unterschieden werden. Die Größen m, θ, a, t bleiben unverändert. Es erhellet, daß die Höhe h bei der zwoten Oefnung eben die nämliche seyn müsse, wie bei der ersten; denn unter einerlei Wasserhöhe im Behältnis

muß

muß auch die Reibung eines ieden flüßigen Theilgens am Rand der Oefnung die nämliche seyn, und nach Abzug der durch die Reibung entstandenen Verminderung muß also für iedes Theilgen die nämliche Geschwindigkeit übrig bleiben. Man erhält also wie für Q diese zwote Gleichung

$$Q' = \frac{2tm(r')^2(\sqrt{a}H' + 2\sqrt{a}h)}{3\theta}$$

Wenn man nun weiter überlegt, daß das Gesetz der Reibung in beiden Fällen einerlei seyn muß, und daß man folglich z. B. HA als den Halbmesser der zwoten Oefnung ansehen kann, indeß CA der Halbmesser der ersten ist, so erhält man

$$\sqrt{H} - \sqrt{h} : \sqrt{H'} - \sqrt{h} = r : r'$$
$$r(\sqrt{H'} - \sqrt{h}) = r'(\sqrt{H} - \sqrt{h})$$

Nun betrachte man H, H', h als die drei unbekannte Größen, und nehme alles übrige als gegeben an, so findet man

$$H = \left[\frac{\theta(Q(3r - r') \cdot (r')^2 - 2Q'r^3)}{2tm\sqrt{a} \cdot (r - r') \cdot r^2(r')^2}\right]^2$$

$$H' = \left[\frac{\theta(Q'r^2(r - 3r') + 2Qr^3)}{2tm\sqrt{a} \cdot (r - r') \cdot r^2(r')^2}\right]^2$$

$$h = \left[\frac{\theta \cdot (Q'r^3 - Q(r')^3)}{2tm\sqrt{a}(r - r') \cdot r^2(r')^2}\right]^2$$

292. II. Aufgabe. Die nämliche Aufgabe unter der Voraussetzung aufzulösen, daß die Oefnung, die allemal sehr klein und horizontal angenommen wird, anstatt kreißförmig zu seyn ein Rektangel ABCD ist (fig. 35.)

Man ziehe aus dem Mittelpunkt O die graden Linien OA, OB, OC, OD und lasse OK senkrecht

auf AB, die graden Linien OP, Op aber ziehe man einander unendlich nahe. Aus dem Punkt O beschreibe man mit dem Halbmesser OP den kleinen Bogen PV. Aus eben dem Punkt beschreibe man mit den beiden unendlich wenig verschiedenen Halbmessern Om, On die zween kleinen Bogen mq, nr. Nach diesen Voraussetzungen sey OK = b; KB = c; KP = x; OM = y; die der Geschwindigkeit in O zugehörige Höhe = H; die der Geschwindigkeit in K zugehörige = h; und τ, θ, a sollen die nämlichen Bedeutungen behalten wie oben; so geben die ähnlichen Dreiecke QKP, PVp

$$PV = \frac{bdx}{\sqrt{(b^2 + x^2)}}$$

und die ähnlichen Bögen PV, mq geben

$$mq = \frac{bydx}{b^2 + x^2}.$$

Es ist also der kleine Raum $mqrn = \frac{bydydx}{b^2 + x^2}$.

Wenn man nun für das Gesetz der Reibung die nämliche Hypothese wie im vorigen §. annimmt, so ergibt sich für die durch die kleine Oefnung mqrn auslaufende Wassermenge der Ausdruck

$$\frac{2t\sqrt{a}}{\theta} \cdot \frac{bydydx}{b^2 + x^2} \times \frac{(\sqrt{(b^2 + x^2)} - y) \cdot \sqrt{H} + y\sqrt{h}}{\sqrt{(b^2 + x^2)}}$$

Das Integral hiervon ist, wenn man y allein als veränderlich ansieht,

$$\frac{t\sqrt{a} \cdot bdx}{\theta (b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(3y^2\sqrt{(b^2 + x^2)}) \cdot \sqrt{H} - 2y^3(\sqrt{H} - \sqrt{h})}{3}$$

Setzt man $y = \sqrt{(b^2 + x^2)}$, so wird die durch die Oefnung POp auslaufende Wassermenge

$= t\sqrt{$

$$= \frac{t\sqrt{a} \cdot bdx\,(\sqrt{H} + 2\sqrt{h})}{3^{\theta}}$$

und das Integral hiervon

$$= \frac{t\sqrt{a} \cdot bx\,(\sqrt{H} + 2\sqrt{h})}{3^{\theta}}$$

Setzt man $x = c$; so ist die durch die dreieckte Oefnung OKB auslaufende Wassermenge

$$= \frac{t\sqrt{a} \cdot bc\,(\sqrt{H} + 2\sqrt{h})}{3^{\theta}}$$

Nennt man also Q die Wassermenge, welche durch die ganze Oefnung ABCD auslauft, so erhält man

$$Q = \frac{8t\sqrt{a} \cdot bc\,(\sqrt{H} + 2\sqrt{h})}{3^{\theta}}$$

Diese Gleichung verstattet die nämlichen Anmerkungen wie die im vorigen §.

293. I. Erinner. Die beiden vorstehenden Aufgaben sind hinreichend, das Verfahren kennen zu lernen, wonach sich die Wirkungen der Reibung bei dem Abfließen des Wassers durch alle Arten von waagrechten Oefnungen schätzen lassen. Zur völligen Berichtigung dieser Theorie müßte man sie mit einer Menge Erfahrungen vergleichen, wobei man die Höhen der Wasserbehältnisse, die Gestalt und die Abmessungen der Oefnungen auf mancherlei Art veränderte. Wenn man auf solche Art die Gesetze der Reibung für kleine horizontale Oefnungen bestimmt hat, so lassen sich die nämlichen Grundsätze auf Seitenöfnungen anwenden, die klein sind, aber doch nicht in allen Punkten als gleichweit von dem Wasserspiegel entfernt angesehen werden können. Denn wenn man, wie wir schon im III. Kap. gesehen haben, eine Seitenöfnung so ansieht, als ob sie durch horizontale Flächen in unendlich viele

kleine Oefnungen zertheilt wäre, so sucht man zuerst die Ausflüsse durch diese Oefnungselementen, und hiernächst ergibt sich durch Summirung der Ausfluß durch die ganzen Oefnungen.

294. II. Erinnerung. Eben diese Theorie läßt sich auch auf die Bewegung des Wassers in einer langen Röhre leicht anwenden. Denn es sey z. B. ABCD (fig. 36.) ein Gefäs, das beständig auf die Höhe AB voll erhalten wird, und in das eine horizontale Röhre ECmn eingestoßen ist, deren Durchmesser so klein ist, daß sich alle Punkte eines ieden Querschnitts so ansehen lassen, als wären sie von einer durch die Oberfläche des Wassers gehenden Horizontalfläche gleichweit entfernt. Der mittlere Streifen OK hat eine größere Geschwindigkeit als die übrigen, und ie weiter die Streifen von dem mittlern entfernt sind oder ie näher sie der Röhrenwand liegen, desto geringer ist wegen der Reibung die Geschwindigkeit. Nun ist klar, daß man das Ende mn der Röhre als eine bloße Oefnung am Gefäs ansehen kann, und daß sich also die durch diese Oefnung auslaufende Wassermenge nach 290. finden läßt, wenn man die den Geschwindigkeiten der Punkte k, m, zugehörige Höhen und das Gesetz kennt, wonach sich die Wirkung der Reibung vom Mittelpunkt aus gegen den Umfang bei verschiedenen Höhen AB des Behältnisses und verschiedenen Längen ok der Röhren richtet.

Legt man in Ansehung der Reibung die Hypothese 291. zum Grund, so erhalten wir hier wie dort zwei Mittel, die den flüßigen Punkten k, m zugehörigen Höhen H und h zu bestimmen: das Eine besteht darin, daß man die Höhe H aus der Weite des Strahlbogens ks und der durch mn in einer gegebenen Zeit ausgeloffenen Wassermenge bestimmt, woraus sich sodann h finden läßt; das Andere kömmt darauf an, daß man

H und

H und h für zwo Röhren von ungleichen Durchmessern, aber gleichen Längen bestimmt, und die übrigens gleiche Wasserhöhen oD über sich haben. Wir begnügen uns, nur das erste Mittel anzuzeigen; denn es hätte keinen Nutzen, sich selbst Untersuchungen, die keinen Schwierigkeiten unterworfen sind, zu erschweren.

Die krumme Linie ks entsteht wie die Bahn eines Körpers, welcher durch die Schwere allein getrieben die lothrechte Linie kr, aber vermög der Geschwindigkeit, die der flüßige Punkt k hat, in eben der Zeit den mit rs parallelen Weg kh durchlaufen würde. Wenn man also nach der Theorie der Bewegung die Ausdrücke für diese beide Zeiten sucht, und solche einander gleich setzt, so erhält man $(rs)^2 = kr \cdot 4H$, wo H die der Geschwindigkeit des Punkts k zugehörige Höhe bedeutet. Diese Gleichung die der Parabel zugehört, gibt $H = \frac{(rs)^2}{4kr}$. Aus rs und kr findet sich also H. Wenn man demnach auch Q bestimmt hat, so gibt sich h.

In dem zweeten Bande dieses Werks wird man eine sehr beträchtliche Anzahl von Erfahrungen über die Bewegung des Wassers in langen Röhren finden, die theils bei gradausgehenden, theils bei solchen, die mannigfaltige Wendungen machen, und bei horizontalen sowohl als schief liegenden gemacht worden sind (*).

(*) Wenn auch ein Lehrer der Hydrodynamik aufstände, auf dem Eulers Geist zehnfach ruhte, so würde ich dennoch überzeugt bleiben, daß er über die Reibung des Wassers nichts Lehrreiches theoretisch vorzutragen vermögte, und ich gestehe ohne Rückhalt, daß ich dieses ganze Xte Kap. für unnütz halte. Wasserfriktion ist für mich ein erdichteter Namen, den ich höchstens nur als einen abgekürzten Ausdruck gelten lasse, um etwas zu benennen, das mit der

Friktion fester Körper darin einerlei Erfolg hat, daß die Bewegung dadurch verzögert wird, das aber übrigens nichts weniger als wirkliche Friktion ist. Ich habe mich hierüber schon in mehrern Schriften geäußert, daher ich hier das, was ich schon anderswo gesagt habe, nicht wiederholen will. Der einsichtsvolle Herr Rec. in der allgem. teutschen Bibl. wendet gegen meine in dem Versuch einer neuen Theorie ꝛc. hierüber geäußerte Gedanken ein, daß meine dort angeführte Beobachtungen über den Lauf des Wassers in Röhren doch selbsten die Friktion des Wassers zu beweisen scheine. Allein ich sehe nicht, wie sich dieser Beweis aus den Erfahrungen von der verzögerten Geschwindigkeit herleiten lasse. Daß die Wirkung in Rücksicht auf den Erfolg Aehnlichkeit mit dem Erfolg der Friktion fester Körper habe, läßt sich wohl zugeben; man hat aber aus diesem Erfolg der verzögerten Geschwindigkeit sehr irrig geschlossen, daß wirklich Friktion die wahre Ursache davon sey. Der Hauptgrund dieser Verzögerung liegt wohl in dem Umstand, daß die Wassertheilgen in den Röhren nicht nach paralleken Schichten fortfließen, sondern daß die einzelen Theilgen unter sehr mannigfaltigen Richtungen sich über einander wälzen, also bald an den obern bald an den untern Theil der Röhrenwände, bald seitwärts in mehr oder minder schiefen Richtungen anstoßen. Es ist dieses eine ieder Erfahrung gemäße und unläugbare Erscheinung und ebenso unläugbar, daß hierdurch die Bewegung gar sehr und um so vielmehr verzögert werden müsse, 1) iemehr die Richtung der Röhren von der graden Linie abweicht; 2) ie länger die Röhren sind, und 3) ie enger sie sind. Dieses alles beweißt die Erfahrung; aber auch nur diese kann uns zur ohngefähren Bestimmung der Größe der erwähnten Verzögerung behülflich seyn; und mich dünkt daher, Herr Bossüt habe wenigstens in diesem Kap. sein Versprechen nicht gehalten: nur nützlichen Untersuchungen einen Platz zu gönnen, und alle blos spekulativische auszuschließen.

Eilftes Kapitel.

Von der Bewegung elastischer flüßiger Massen, und insbesondere von der Bewegung der Luft.

295.

So wie ich bei Untersuchung des Gleichgewichts elastischer flüßiger Massen insbesondere das Gleichgewicht der Luft betrachtet habe; so will ich nun die Bewegung der Luft untersuchen, da die nämliche Theorie bei allen elastischen flüßigen Massen statt findet.

Wenn man von der Bewegung der Luft redet, so kann man entweder die Absicht haben, die Fortwanderung einer gewissen Luftmasse aus einer Stelle in die andere zu betrachten, oder die Bewegung zu untersuchen, welche in einer außer dem Gleichgewicht gekommenen Luftmasse die verschiedenen Theilgen gegen einander erhalten. Die erstere Untersuchung macht den Gegenstand des gegenwärtigen Kapitels aus, die letztere soll im folgenden Kapitel vorgetragen werden. Ueberall werde ich die Wirkung der Reibung beiseit setzen.

296. ABCD (fig. 37.) sey ein von allen Seiten verschlossener Zilinder, der eine gleichartige und durchaus gleichdichte Luft enthält. Diese Luft befindet sich in einem Zustand der Zusammenpressung, und sobald man ihr einen Ausweg verschafft, oder ihr Gelegenheit gibt, sich auszudehnen und zu verbreiten, so breitet sie sich wirklich aus und ihre elastische Kraft nimmt ab. In jedem Zustand der Zusammenpressung ist die elastische

Kraft allemal derjenigen Kraft gleich, welche diese Zusammenpressung bewirkt hat.

Wenn also z. B. die Luft ABCD derjenigen gleich ist, welche wir einathmen, daß sie also entweder durch den Druck der Atmosphäre selbst oder durch eine demselben gleiche Kraft zusammengepreßt worden ist, so kann sie, im mittlern Zustand, durch ihre Federkraft entweder mit dem Gewicht einer 28 Zoll hohen Quecksilbersäule, so hoch sie nämlich das Barometer angibt; oder mit dem Gewicht einer 32 Fus hohen Wassersäule, indem das Wasser ohngefähr nur $\frac{1}{14}$ so schwer als das Quecksilber ist, oder mit dem Gewicht einer Luftsäule von einer Höhe von 850. 32 = 27200 Fus, indem die natürliche Luft etwa $\frac{1}{850}$ so schwer als das Wasser ist, das Gleichgewicht halten. Setzt man also allgemein die Federkraft der Luft = F; die Größe der Fläche, welche ihrer Wirkung ausgesetzt ist, = a^2; die Höhe der Quecksilber-, oder Wasser-, oder Luftsäule, welche der Kraft F das Gleichgewicht hält, = H; so hat man $F = a^2 . H$. Für die natürliche Luft muß man H = 28 Zoll oder H 32 Fus, oder H = 27200 Fus setzen, nachdem man den Druck oder die Federkraft dieser Luft durch das Gewicht einer Quecksilber-, oder einer Wasser-, oder einer Luftsäule ausdrucken will.

297. Die Erfahrung beweißt (66 u. 67.), daß wenn eine und eben die Luftmasse, die immer einerlei Temperatur behält, dahin gebracht wird, daß sie nach und nach verschiedene Räume einnimmt, die Kräfte, welche sie zusammendrucken, und folglich auch ihre verschiedenen elastischen Kräfte sich umgekehrt wie die Räume, die sie ausfüllt, oder gradezu wie ihre Dichtigkeit verhalten. Aber eine Luftmasse dahin bringen, daß sie verschiedene Räume einnimmt, heißt ebensoviel, als in einerlei Raum verschiedene Luftmengen treten lassen, deren Dichtigkeiten iedesmal die nämlichen sind,

sind, wie die der vorgegebenen Masse in ihren verschiedenen Zuständen. Wir schließen also aus dieser Erfahrung, daß wenn verschiedene Luftmassen nach und nach einerlei Raum einnehmen, solche elastische Kräfte haben, die ihnen proportional sind, oder welches damit einerlei ist, welche ihren Dichtigkeiten proportional sind, weil die Dichtigkeit nichts anders ist als die Menge der in einerlei Raum enthaltenen Materie.

298. I. Aufg. **Die Geschwindigkeit zu bestimmen, mit der die Luft in iedem Augenblick aus dem Gefäs ABCD (fig. 37.) durch die kleine Oefnung C herausströhmt, angenommen, daß sie in einen leeren Raum trette oder bei ihrem Ausgang keinen Widerstand finde.**

Es sey für den ersten Augenblick der Bewegung P das Gewicht, dem die Federkraft der Luft das Gleichgewicht zu halten vermag; Q die Dichtigkeit dieser flüßigen Masse; V ihre Geschwindigkeit; q die Dichtigkeit, welche sie nach Verfluß der Zeit t hat; u ihre Geschwindigkeit am Ende dieser Zeit; ferner M und m die Luftmassen, welche in beiden Fällen in gleichen Zeiten ausströhmen; so sieht man aus dem vorigen §. daß am Ende der Zeit t die Federkraft der Luft $= \frac{Pq}{Q}$; und da die bewegenden Kräfte der Größe der Bewegung proportional sind, welche sie in einerlei Zeit hervorbringen, so hat man $P : \frac{Pq}{Q} = MV : mu$. Aber die Massen M und m verhalten sich wie die Produkte aus ihren körperlichen Räumen in ihre Dichtigkeiten, und ihre körperlichen Räume verhalten sich wie die Produkte aus der Oefnung in die Geschwindigkeiten. Man hat also, da die Oefnung in beiden Fällen die nämliche ist,

$$M : m = QV : qu$$

also $P : \frac{Pq}{Q} = QV^2 : qu^2$

demnach $u = V$

und es ist also die Geschwindigkeit, mit der die Luft ausströhmt, beständig fort der anfänglichen V gleich.

299. Zusatz. Man setze, die im ersten Augenblick im Gefäs befindliche Luftmasse sey natürliche Luft. In diesem Fall ist das Gewicht P einer Säule von natürlicher Luft, die die Oefnung C zur Grundfläche und 27200 Fus zur Höhe hätte (296). Weil nun die auf die Oefnung drückende Säule und die in iedem Augenblick ausfahrende Masse gleiche Dichtigkeit hat, so gehört die Geschwindigkeit in C der Höhe 27200 Fus zu. Nun erlangt ein 15 Fus hoch herabfallender schwerer Körper eine Geschwindigkeit, mit der er 30 Fus in einer Sekunde gleichförmig durchlaufen könnte; man erhält also die Geschwindigkeit V für eine Sek. durch folgende Proportion

$$\sqrt{15} : \sqrt{27200} = 30 \text{ Fus} : V = 1277 \text{ Fus}.$$

Die Luft muß also beim gewöhnlichen Zustand der Atmosphäre, wenn sie beständig in einem leeren Raum ströhmt, beiläufig 1277 Fus in 1 Sek. durchlaufen.

300. II. Aufg. **Unter den Voraussetzungen der vorigen Aufgabe einen allgemeinen Ausdruck für die Zeit t zu finden, welche die Luft braucht, um von der Dichtigkeit Q bis zu der Dichtigkeit q abzunehmen.**

Es sey H die der Geschwindigkeit V, welche die Luft im Durchgang durch C hat, zugehörige Höhe; θ die Zeit des Falls durch a; C die Fläche der Oefnung; A der körperliche Inhalt des Zilinders ABCD; so tritt in dem Augenblick dt ein Luftelement aus dem Gefäs,

Gefäs, daß sich durch $\frac{2Cdt\sqrt{aH}}{\theta}$ (201) ausdrucken läßt.

Da sich nun die Masse wie das Produkt aus dem körperlichen Inhalt in die Dichtigkeit verhält, so ist die in diesem körperlichen Raum enthaltene kleine Luftmasse $= \frac{2Cqdt\sqrt{aH}}{\theta}$. Es ist aber auch sonst klar, daß in der Zeit t aus dem Zilinder eine Masse austritt, die sich durch A.Q — A.q ausdrucken läßt. Man hat also

$$\frac{2Cqdt\sqrt{aH}}{\theta} = d(A.Q - A.q) = -A.dq$$

woraus sich $dt = \frac{\theta A}{2C\sqrt{aH}} \times -\frac{dq}{q}$ ergibt,

und dieses integrirt, so daß $t = o$ für $q = Q$ wird, gibt

$$t = \frac{\theta A}{2C\sqrt{aH}} \cdot L\left(\frac{Q}{q}\right) (*)$$

Aus diesem Ausdruck für die Zeit ersieht man, daß sich das Gefäs nur nach Verlauf einer unendlichen Zeit ausleeren würde; man muß sich aber hierbei erinnern, daß nach der Anmerk. §. 70. die Hypothese, worauf sich diese Formel gründet, nicht mehr der Wahrheit ganz getreu bleibt, wenn die Dichtigkeit q sehr klein wird.

III. Aufg. Wenn die Luft in dem Gefäs ABCD verdichtet worden ist, die Geschwindigkeit zu finden, mit der sie durch die kleine Oefnung

(*) Es bedarf kaum einer Erinnerung, daß Herr Bossüt unter L( ) allemal den natürlichen Logarithmen ( ) versteht.

Oefnung C herausfährt, vorausgesetzt, daß sie sich außerhalb in eine dünnere Luft verbreitet, die einen unendlich großen Raum einnimmt, wie sich allemal von der Atmosphäre in Vergleichung mit dem Gefäs ABCD annehmen läßt.

Es sey D die Dichtigkeit der äußern Luft; F ihre Federkraft; Q die anfängliche Dichtigkeit der innern Luft oder der im Gefäs befindlichen, und daher $\frac{QF}{D}$ ihre anfängliche Federkraft; q die Dichtigkeit der innern Luft nach Verfluß der Zeit t, und daher $\frac{qF}{D}$ ihre zugehörige Federkraft; M die anfängliche kleine Luftmasse, welche zur Oefnung herausfährt; V ihre Geschwindigkeit; m die kleine Luftmasse, welche nach Verfluß der Zeit t herausfährt, und u ihre Geschwindigkeit. Da nun die äußere Luft der herausfahrenden innern beständig den Widerstand F entgegensetzt, so ist klar, daß die anfängliche heraustreibende Kraft der innern Luft $= \frac{QF}{D} - F$ oder $\frac{(Q-D)F}{D}$, und daß die heraustreibende Kraft nach Verfluß der Zeit $= \frac{(q-D).F}{D}$ ist. Nun verhält sich die austreibende Kraft wie die Größe der Bewegung, welche sie in einerlei Zeit bewirkt; man hat also

$$\frac{(Q-D).F}{D} : \frac{(q-D).F}{D} = MV : mu$$

Aber die Massen M und m verhalten sich wie die Produkte aus ihren Dichtigkeiten in ihre körperlichen Räume, und diese Räume wie die Produkten aus der Oefnung in die Geschwindigkeiten; demnach

$$\frac{(Q-D).F}{D} : \frac{(q-D).F}{D} = QV^2 : qu^2$$

woraus

woraus sich

$$u = V \cdot \sqrt{\frac{Q \cdot (q - D)}{q \cdot (Q - D)}}$$

ergibt.

Es ist klar, daß man $u = o$ erhält, oder die Luft herauszufahren aufhört, wenn man $q = D$ hat. Ich brauche nicht zu erinnern, daß, wenn man $D = Q$ hätte, gar keine Bewegung entstehen würde, weil alsdann die anfängliche austreibende Kraft $\frac{(Q-D).F}{D} = o$ wäre, folglich auch die anfängliche Geschwindigkeit V verschwinden müßte.

302. Zusatz. Man setze z. B. $Q = 10\,D$, $q = 9\,D$, und der Druck der Atmosphäre oder die Federkraft F sey dem Gewicht einer Wassersäule von 32 Fus hoch gleich; so gleicht die anfängliche austreibende Kraft der Luft $\frac{Q - D}{D}$. F dem Gewicht einer Wassersäule, die 9. 32 oder 288 Fus hoch ist; und da die Luft, welche diese Kraft durch die Oefnung treibt, 85 mal dünner als das Wasser ist, so erhellet, daß der anfängliche Austritt der Luft eben so erfolgen müsse, als wenn in diesem Augenblick die Luft durch den Druck einer Luftsäule fortgetrieben würde, die mit ihr gleiche Dichtigkeit und eine Höhe von 85.288 oder 24480 Fus hätte. Es wäre also die Geschwindigkeit V für eine Sekunde $30.\frac{\sqrt{24480}}{\sqrt{15}}$ Fus, und die Geschwindigkeit u gleichfalls für eine Sekunde, $= 30\,\frac{\sqrt{24480}}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{81}}$. Man hätte also sehr nahe V = 1212 Fus und u = 1204 Fus.

Man kann sich hieraus einen Begriff von der Geschwindigkeit machen, mit der verdichtete Luft eine

Kugel

Kugel aus Gewehren treibt, die man Windbüchsen nennt, und deren Beschreibung man in allen Schriften über die Physik antrift (*).

303. IV. Aufgabe. Die Zeit t zu finden, welche die Luft braucht, unter der Voraussetzung der vorigen Aufgabe von der Dichtigkeit Q bis zu der q abzunehmen.

Wenn man die der anfänglichen Geschwindigkeit V zugehörige Höhe H nennt, und sich erinnert, daß die den Geschwindigkeiten V und u zugehörige Höhen sich wie die Quadrate dieser Geschwindigkeiten verhalten, so sieht man, daß die der Geschwindigkeit u zugehörige Höhe $= H. \frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}$ ist. Es ist also die kleine Luftmasse, welche in dem Augenblick dt herausfährt,

$$\frac{2Cqdt}{\theta}\sqrt{\frac{aHQ(q-D)}{p(Q-D)}}$$

Diese Masse wird aber auch durch den Ausdruck d (A.Q — A.q) oder $-Adq$ bestimmt. Man hat also

$$dt = \frac{\theta A\sqrt{(Q-D)}}{2C\sqrt{aHQ}} \cdot \frac{-dq}{\sqrt{(q^2-Dq)}}$$

dieses so integrirt, daß für $q = Q$, $t = o$ wird, gibt

$$t = \frac{\theta A\sqrt{(Q-D)}}{2C\sqrt{aHQ}} \cdot L\left(\frac{Q-\frac{1}{2}D+\sqrt{(Q^2-DQ)}}{q-\frac{1}{2}D+\sqrt{(q^2-Dq}}\right)$$

Wir haben gesehen, daß die Luft auszuströhmen aufhört, wenn $q = D$ wird. Setzt man also in vorstehendem Ausdruck $q = D$. so ergibt sich der Ausdruck für

(*) Die vollständige Theorie der Windbüchsen findet man in Herrn Hofr. Karstens Pneumatik, oder dem VI. Th. seines Lehrbegriffs.

für die Zeit, welche anzeigt, wie lange das Ausströhmen der Luft fortdauert.

304. V. Aufg. Das Gefäs ABCD enthalte dünnere Luft, als die atmosphärische ist; man sucht die Geschwindigkeit, mit der leztere durch die Oefnung C in das Gefäs ströhmen wird.

Die unveränderliche Dichtigkeit der äußern Luft heise D; ihre Federkraft F; die anfängliche Dichtigkeit der im Zilinder enthaltenen Luft Q, und daher ihre anfängliche Federkraft $\frac{QF}{D}$; die Dichtigkeit dieser Luft nach Verfluß der Zeit t, q; folglich ihre Federkraft nach Verfluß eben dieser Zeit $\frac{qF}{D}$; die anfängliche Geschwindigkeit, mit der die äußere Luft in den Zilinder fährt, V; ihre Geschwindigkeit nach Verfluß der Zeit t, u; so erhellet, daß die anfängliche eindringende Kraft der Luft in den Zilinder $= F - \frac{QF}{D}$ oder $\frac{(D-Q).F}{D}$, und nach Ablauf der Zeit t die eindringende Kraft $= \frac{(D-q).F}{D}$ ist. Man hat also

$$\frac{(D-Q).F}{D} : \frac{(D-q).F}{D} = DV^2 : Du^2$$

demnach

$$u = V.\sqrt{\frac{D-q}{D-Q}}$$

Wäre im ersten Augenblick der Zilinder leer, so hätte man $Q = o$ und alsdann

$$u = V.\sqrt{\frac{D-q}{D}}$$

Man sieht im einen Fall wie im andern, daß die Luft aufhört in den Zilinder zu tretten, wenn $q = D$,

oder die Dichtigkeit der innern der Dichtigkeit der äussern Luft gleich ist.

305. VI. Aufgabe. Unter der Voraussetzung der vorigen Aufg. die Gleichung zwischen der Zeit t und der Dichtigkeit q zu finden.

Die der Geschwindigkeit V zugehörige Höhe heise H, und die übrigen Benennungen wie vorhin. Die kleine Luftmasse, welche in der Zeit dt in den Zilinder ABCD tritt, ist $= \frac{2C.Ddt}{\theta} \sqrt{\frac{aH(D-q)}{D-Q}}$ und da sie sich außerdem auch durch d(A.q) oder Adq ausdrucken läßt, so hat man

$$dt = \frac{\theta A \sqrt{(D-Q)}}{2CD\sqrt{aH}} \cdot \frac{dq}{\sqrt{(D-q)}}$$

und das Integral

$$t = \frac{\theta A \sqrt{(D-Q)}}{2CD\sqrt{aH}} (\sqrt{(D-Q)} - \sqrt{(D-q)}) \text{ (*)}.$$

306.

(*) Da D die Dichtigkeit der äußern Luft und q die Dichtigkeit der innern nach Verfluß der Zeit t, Q aber die anfängliche Dichtigkeit der innern Luft bedeutet, so gibt sich die Zeit, in welcher ein anfänglich leeres Gefäs ganz mit atmosphärischer Luft angefüllt wird, durch diese Formel, wenn man in ihr $q = D$ und $Q = o$ setzt. Für diesen Fall wäre also die ganze Anfüllungszeit

$$t = \frac{\theta.A\sqrt{D}}{2CD\sqrt{aH}} \sqrt{D} = \frac{\theta.A.D}{2CD\sqrt{aH}} \text{ oder}$$

$$t = \frac{\theta.A}{2C.\sqrt{aH}}$$

woraus folgte, daß die Anfüllungszeit gar nicht von der Dichtigkeit der äußern Luft abhängt. Man kann auch $\theta = 1$ Sek. und für a den gewöhnlichen Buchstaben g setzen; ist nun ferner die Weite des Zilin-

306. VII. Aufg. Die beiden Zilinder ABCD, FCHG, (fig. 38.) sollen von allen Seiten verschlos-

Zilinders = W und seine Höhe = v, also A = v. W, so erhält man, wenn man auch noch w statt C schreibt

$$t = \frac{v \cdot W}{2w \cdot \sqrt{g \cdot H}}$$

oder H = 27200 gesetzt

$$t = \frac{W \cdot v}{w \cdot 2\sqrt{27200 \cdot g}} \quad (\text{H}$$

Allein diese Formel ist offenbar unrichtig; es ist nämlich $2\sqrt{27200 \cdot g}$ die anfängliche Geschwindigkeit der eindringenden Luft in der Oefnung w; wenn also diese Geschwindigkeit beständig unverändert fortdauerte, so müßte der Raum W. v in der Zeit $\frac{W \cdot v}{w \cdot 2\sqrt{27200 \cdot g}}$ mit äußerer Luft angefüllt werden, und die erwähnte Formel gibt also die Zeit t so, als wenn die Geschwindigkeit der eindringenden atmosphärischen immer die nämliche bliebe, da sie doch von Augenblick zu Augenblick abnehmen muß.

Einige Ueberlegung zeigt, daß die äußere Luft so durch die Oefnung eindringen muß, als wenn sie in einem unendlich weiten Gefäs von der Höhe v enthalten wäre, daß mit der Oefnung C des Gefäßes ABCD kommunicirte, worin aber die Lufttheilgen von einer Schwere $= \frac{27200}{v} \cdot g$ getrieben würden. Der Abfluß aus diesem unendlich weiten Gefäs in das endliche ABCD geschieht nun grade so, wie der Abfluß aus einem dergleichen mit Wasser angefüllten Gefäs in das damit kommunicirende ABCD erfolgen müßte, wenn die Schwere $\frac{27200}{v} \cdot g$ dabei wirkte. Denn ob das in das Gefäs ABCD dringende Wasser z. B. bis auf $\frac{1}{10}$ v als eine unelastische Masse steigt und so vermöge seines Gewichts den

schlossen seyn, und Luftmassen von verschiedener Dichtigkeit enthalten; man soll die Geschwindigkeit

Druck des äußern Wassers um $\frac{1}{10}$ vermindert, oder ob sich dieses auf $\frac{1}{10}$ v gestiegene Wasser in dem Gefäs gleichförmig ausbreitet und nun vermög seiner Federkraft den Druck des äußern Wassers um $\frac{1}{10}$ verschwächt, ist offenbar für die Geschwindigkeit der eindringenden Masse völlig gleichgültig. Die Kraft der äußern Masse nimmt allemal nach Verhältnis der Menge Theilgen ab, die in das endliche Gefäs übergegangen sind, die Masse mag elastisch seyn oder nicht. Die Zeit, worin das Gefäs ABCD mit der äußern Luft angefüllt wird, ist also mit der Zeit einerlei, worin eben das Gefäs aus dem damit kommunicirenden unendlich weiten, dessen Höhe v wäre

und wobei eine Schwerkraft $= \frac{27200}{v} . g$ wirkte, angefüllt würde. Diese Zeit ist aber $= \frac{W}{w} .$

$\sqrt{\frac{v}{\frac{27200}{v} . g}} = \frac{Wv}{w . \sqrt{27200} . g}$ also genau doppelt

so groß als die Formel (H) angibt. Ueberhaupt lassen sich alle pneumatische auf bloße hydraulische Fragen bringen, so daß man zu jenen keine neuen Formeln nöthig hat. Man hat vielmehr bei jenen noch den großen Vortheil, daß die Gestalt des Gefäßes auf den Erfolg gar keinen Einfluß hat; denn wenn z. B. das Gefäs ABCD eine Menge Lufttheilgen enthält, die nur $\frac{1}{10}$ so viel als ein eben solches Volumen ABCD von natürlicher Luft beträgt, so vermindert solche den Druck der äußern Luft oder deren eindringende Kraft allemal um $\frac{1}{10}$, d. i. grade so, als wenn das Gefäs auf $\frac{1}{10}$ seiner Höhe mit Luft von eben der Art angefüllt wäre, wie das damit kommunicirende gleichhohe unendlich weite Gefäs, wenn gleich der untere Theil des Gefäßes ABCD auf $\frac{1}{10}$ seiner Höhe weit mehr oder weit weniger als

ein

keit angeben, mit der die Luft durch die kleine Oefnung C aus einem Zilinder in den andern tritt.

Es

ein Zehntheil seines körperlichen Inhalts ausmachen sollte. Man kann also das Gefäs ABCD, dessen Inhalt A ist, allemal, wenn es auch noch so irregulär ist, so betrachten, als ob es ein senkrechter Zilinder wäre, der die Oefnung w zur Grundfläche und $\frac{A}{w}$ zur Höhe hätte. Man kann also das endliche Gefäs, welches mit der äußern Luft in Verbindung steht, und dessen Inhalt = A ist, so ansehen, als hätte es die Weite w der darin befindlichen Oefnung zur Weite und $\frac{A}{w}$ zur Höhe und kommunicirte mit einem unendlich weiten Behälter von eben der Höhe, die fließende Masse wäre übrigens Wasser und die wirkende Schwere $= f = \frac{H}{v} g = \frac{H}{\left(\frac{A}{w}\right)} . g$

Diesemnach erhielte man in dem vorhin erwähnten Fall allemal, wenn auch das Gefäs ABCD nicht zilindrisch und die Oefnung wo man wollte angebracht wäre, die Anfüllungszeit des leeren Gefäßes $= \sqrt{\frac{v}{f}}$

$= \sqrt{\frac{A : w}{gH : \frac{A}{w}}} = \sqrt{\frac{A^2 : w^2}{H . g}} = \frac{A}{w} . \sqrt{\frac{1}{H . g}}$ oder

$= \frac{A}{w . \sqrt{H . g}}$. Befände sich anfangs schon im Gefäs eine Luft von der Dichtigkeit Q, und man suchte nun die Zeit t, nach deren Verfluß solche $= q$ wäre, so setze man $Q = \frac{D}{m}$, $q = \frac{D}{n}$, und nehme nun an, das Gefäs ABCD, das eine ganz irreguläre Gestalt haben darf, gleiche einem Zilinder oder Prisma, dessen Grundfläche die Oefnung w und

Es fällt gleich in die Augen, daß die dichtere Luft zu der dünnern tretten müsse. Man setze, dieser Luftstrohm

die Höhe $= \frac{A}{w}$ sey; dieses Gefäs sey nun ferner schon anfangs auf die Höhe $\frac{1}{m} \cdot \frac{A}{w}$ mit Wasser angefüllt und kommunicire mit einem unendlich weiten Wasserbehälter von der Höhe $\frac{A}{w}$, und die wirkende Schwere sey $\frac{H}{\frac{A}{w}} \cdot g$ oder $\frac{H}{A} \cdot w \cdot g$; nun kommt es nur noch auf die Frage an: in welcher Zeit wird in dem erwähnten eingebildeten zilindrischen Gefäs der Wasserspiegel bis zur Höhe $\frac{1}{n} \cdot \frac{A}{w}$ steigen? Diese Zeit ist nun nach den hydraulischen Grundsätzen $= \frac{\sqrt{\left(1-\frac{1}{m}\right)} \cdot \frac{A}{w} - \sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)} \frac{A}{w}}{\sqrt{\frac{Hw}{A} \cdot g}} = \frac{\frac{A}{w}}{\sqrt{Hg}} \cdot \left(\sqrt{\left(1-\frac{1}{m}\right)} - \sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right)$; oder wenn man $\frac{Q}{D}$ statt $\frac{1}{m}$ und $\frac{q}{D}$ statt $\frac{1}{n}$ setzt, so hat man

$$t = \frac{\frac{A}{w}}{\sqrt{Hg}} \cdot \left(\sqrt{\left(1-\frac{Q}{D}\right)} - \sqrt{\left(1-\frac{D}{q}\right)}\right)$$

$$= \frac{A}{w \cdot \sqrt{Hg}} \times \frac{\left(\sqrt{(D-Q)} - \sqrt{(D-q)}\right)}{\sqrt{D}} \text{ oder}$$

$$t = \frac{A}{w \cdot \sqrt{H \cdot g \cdot D}} \cdot \left(\sqrt{(D-Q)} - \sqrt{(D-q)}\right).$$

Man

strohm erfolge aus dem Gefäs ABCD in das FCHG. Die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft heise D; ihre Federkraft F; die anfängliche Dichtigkeit der Luft ABCD, Q, folglich ihre anfängliche Federkraft $\frac{QF}{D}$; ihre Dichtigkeit nach Verfluß der Zeit t, q; und daher ihre Federkraft nach eben der Zeit $\frac{qF}{D}$; die anfängliche Dichtigkeit der Luft FCHG, R und daher ihre anfängliche Federkraft $\frac{RF}{D}$; ihre Dichtigkeit nach der Zeit t, r; folglich ihre Federkraft nach eben der Zeit $\frac{rF}{D}$; die anfängliche Geschwindigkeit der Luft ABCD, V; ihre Geschwindigkeit nach der Zeit t, u; so ist klar, daß die ausstoßende Kraft der Luft ABCD im ersten Augenblick $\frac{QF}{D} - \frac{RF}{D}$ ist, und nach der Zeit $t = \frac{qF}{D} - \frac{rF}{D}$. Man hat also

$$\frac{\frac{QF-RF}{D}}{\frac{qF-rF}{D}} = QV^2 : qu^2$$

dem-

Man sieht, daß diese Formel von des Herrn Bossüts seiner verschieden ist, indem letztere den Faktor $\frac{\sqrt{(D-Q)}}{2D}$ statt $\frac{1}{\sqrt{D}}$ enthält. Es fällt aber in die Augen, daß meine die richtige ist; sie gibt auch für den vorigen bestimmtern Fall $t = \frac{A}{w\sqrt{Hg}}$, so daß die ganze Anfüllungszeit eines leeren Gefäßes gar nicht von der Dichtigkeit der äußern Luft abhängt. Es stimmt auch Herrn Hofr. Karstens Formel (Pneumatik §. 28.) mit der meinigen vollkommen überein.

demnach

$$u = V.\sqrt{\frac{Q.(q-r)}{q.(Q-R)}}$$

Der Luftstrohm hört auf, wenn $r = q$ wird.

Da die in beiden Zilindern enthaltene gesammte Luftmasse immer die nämliche bleibt, so erhält man, wenn man den körperlichen Inhalt des Zilinders AB CD, A und den des Zilinders FCHG, B nennt, die zwote Gleichung

$$A.Q + B.R = A.q + B.r$$

weil sich die Massen wie die Produkte aus dem körperlichen Inhalt in die Dichtigkeit verhalten. Diese Gleichung gibt

$$r = \frac{A(Q-q) + B.r}{B}$$

Diesen Werth von r in den Werth von u gesetzt gibt

$$u = V.\sqrt{\frac{Q.(B(q-R) - A.(Q-q))}{Bq(Q-R)}}$$

wodurch die Geschwindigkeit u für iede zugehörige Dichtigkeit q bestimmt wird (*).

307.

(*) Die Auflösung dieser Frage gibt sich für Wasser auf folgende Art: A, B seyen die Breiten beider Gefäße; wenn das Wasser im Gefäs A, das anfangs auf die Höhe h voll ist, und nun ohne Zufluß zu erhalten, abfließt, noch die Höhe x hat, also um die Tiefe $h - x$ gesunken ist, so ist im Gefäs B um die Höhe $\frac{A}{B}.(h-x)$ gestiegen, und die Höhe des Spiegels in A über dem in B ist also noch $(h - \frac{R}{Q}h) - \left((h-x) + \frac{A}{B}.(h-x)\right) = \frac{B+A}{B}.x -$

(R+

307. VIII. Aufg. **Eine Gleichung zwischen der Zeit t und der Dichtigkeit q unter den Voraussetzungen der vorigen Aufg. zu finden.**

Zu einiger Abkürzung der Rechnung setze man $A.Q+B.R=f$; $A.Q+B.Q=K$; $B.Q-B.R=m$, so findet man durch völlig ähnliche Schlüsse

$$\frac{2Cq}{\left(\frac{R}{Q}+\frac{A}{B}\right).h}$$

Die dieser Höhe zugehörige Geschwindigkeit des Spiegels im Gefäs A ist $\frac{W}{A}.2\sqrt{g}.\left(\frac{B+A}{B}.x-\left(\frac{R}{Q}+\frac{A}{B}\right).h\right)$; ebendiese Geschwindigkeit läßt sich aber auch durch $-\frac{dx}{dt}$ ausdrucken, wenn die Auslaufszeit t heißt; man hat also $-\frac{dx}{dt}=\frac{2W}{A}\sqrt{g}.\left(\frac{B+A}{B}.x-\left(\frac{R}{Q}+\frac{A}{B}\right).h\right)$ wofür ich $-\frac{dx}{dt}=\alpha(\beta+\gamma x)$ schreiben will; das gibt nun $dt=-\frac{dx}{\alpha.\sqrt{(\beta+\gamma x)}}$ und das Integral $t=\frac{-(\beta+\gamma x)^{\frac{1}{2}}}{\alpha.\frac{1}{2}\gamma}=\frac{-2\sqrt{(\beta+\gamma x)}}{\alpha\gamma}$ + Const. Für $x=h$ muß $t=o$ seyn, also $o=-2\frac{\sqrt{(\beta+\gamma h)}}{\alpha\gamma}$ + Const und daher Const $=2.\frac{\sqrt{(\beta+\gamma h)}}{\alpha\gamma}$, folglich $t=2.\frac{\sqrt{(\beta+\gamma h)}-\sqrt{(\beta+\gamma x)}}{\alpha\gamma}$

oder

$$t=2\frac{\sqrt{\left(-\left(\frac{R}{Q}+\frac{A}{B}\right).h+\frac{B+A}{B}.h\right)}-\sqrt{\left(-\left(\frac{R}{Q}+\frac{A}{B}\right).h+\frac{B+A}{B}.x\right)}}{\frac{2W}{A}.(\sqrt{g}).\frac{B+A}{B}}$$

$$\frac{2Cqdt}{\theta}\sqrt{\frac{aH(Kq-fQ)}{mq}}=-Adq$$

oder auch

$$dt=\frac{\theta A\sqrt{m}}{2C\sqrt{aHK}}\times\frac{-dq}{\sqrt{(q^2-\frac{fQ}{K}.q)}}$$

und

oder

$$t=A.B.\frac{\sqrt{\left(\left(1-\frac{R}{Q}\right).h\right)}-\sqrt{\left(\frac{B+A}{B}.x-\left(\frac{R}{Q}+\frac{A}{B}\right).h\right)}}{(B+A).w.\sqrt{g}}$$

welches also die Zeit ist, worin der Spiegel im Gefäs A um die Tiefe h — x sinkt.

Man sieht, daß ich die Buchstaben R, Q hier beibehalten habe; man kann aber h statt Q und h' statt R setzen, so daß h' die anfängliche Wasserhöhe in dem prismatischen Gefäs B bedeutet. Dadurch erhält man

$$t=A.B.\frac{\sqrt{(h-h)}-\sqrt{\left(\frac{A+B}{B}.x-h'-\frac{A}{B}.h\right)}}{(A+B).w.\sqrt{g}}$$

Für $A=B$ und $h'=o$, gäbe sich

$$t=A^2.\frac{\sqrt{h}-\sqrt{(2x-h)}}{2A.w.\sqrt{g}}\text{ oder}$$

$$t=\frac{A}{2w}.\frac{\sqrt{h}-\sqrt{(2x-h)}}{\sqrt{g}}$$

die Bewegung hört auf für $x=\frac{1}{2}h$, und dann ist

$$t=\frac{1}{2}\frac{A}{w}.\sqrt{\frac{h}{g}}$$

Diese Zeit ist also halb so groß als die Zeit, worin das sämtliche Wasser aus dem vollen Gefäs durch die Oefnung w frei ablaufen würde, oder eben so groß als die Zeit, worin die Wassermasse A.h ablaufen würde, daferne das Gefäs beständig voll gehalten würde.

und das Integral hiervon ist

$$t = \frac{\vartheta A \sqrt{m}}{2C\sqrt{aHK}} \cdot L\left(\frac{Q - \frac{fQ}{2K} + \sqrt{\left(Q^2 - \frac{fQ^2}{K}\right)}}{q - \frac{fQ}{2K} + \sqrt{\left(q^2 - \frac{fqQ}{K}\right)}}\right)$$

308. Erinner. In den bisherigen Aufgaben habe ich bei der Luft allemal gleiche Temperatur vorausgesetzt, oder daß die Federkraft dieser flüßigen Masse lediglich von ihrer Dichtigkeit abhänge. Man muß aber bedenken, daß eine größere oder geringere Wärme einen beträchtlichen Einfluß auf die Federkraft der Luft hat. Wenn eine bestimmte Masse dieser Flüßigkeit auf irgend eine Art eine größere Wärme bekommt, so breitet sie sich entweder in einen größern Raum aus und stößt die umherliegende nicht so warme Luft, wenn sie die gehörige Freiheit hat, zurück; oder wenn sie in einen gewissen Raum eingesperrt ist, so daß sie sich nicht ausbreiten kann, so erlangt sie eine größere Federkraft, und übt also eine größere Gewalt gegen die Wände des Gefäßes aus, oder gegen die Dinge, welche ihre Ausbreitung verhindern. Diese Vergrößerung der elastischen Kraft ist übrigens von eben der Art, wie die, welche bei unveränderter Temperatur von einer größern Dichtigkeit der Luft entstehen würde. Die erfolgenden Wirkungen können daher in beiden Fällen einander ähnlich seyn. Eben so kann man auch die Wirkung einer ieden elastischen flüßigen Masse, woher auch ihre Elasticität rühren mag, mit der Federkraft einer verdichteten Luft vergleichen (*). So werden z. B. eine durch die Federkraft der in einer Windbüchse verdichteten Luft abgetriebene Kugel, und eine Stück-

(*) Man findet dergleichen Berechnungen in meinem Versuch einer neuen Theorie ꝛc. im XI. Kap.

Stückkugel, welche durch die Wirkung einer aus der Entzündung des Pulvers entstehenden flüßigen elastischen Masse fortgetrieben wird, durch ähnliche Ursachen in Bewegung gesetzt, denn die Stärke der letztern Kraft, die bei weitem größer als die der erstern ist, hebt diese Gleichheit nicht auf. Nach dieser allgemeinen Bemerkung fügen wir einige Aufgaben bei, die in der Mechanik und Physik ihre häufige Anwendungen finden.

309. IX. Aufgabe. Eine Stückkugel K (fig. 39.), welche eine Kanone oder einen horizontalen Zilinder ABCD genau ausfüllt ohne sich darin zu reiben, werde durch die Wirkung einer verdichteten Luft oder der sich durch die Entzündung des Pulvers entbindenden flüßigen elastischen Masse von A nach B getrieben; man sucht die Geschwindigkeit der Kugel in irgend einer Stelle der Kanone PM.

Es sey im ersten Augenblick AEFD der Raum, welchen die verdichtete Luft einnimmt; die Dichtigkeit dieser Luft heise Q, die der atmosphärischen Luft D und ihre Federkraft F; so ist die Federkraft der Luft AEFD $= \frac{QF}{D}$; man setze den Kreis, welcher zu EF oder PM gehört, $= a^2$; $AE = b$; $AP = x$; die Masse der Stückkugel $= K$, und ihre Geschwindigkeit in $P = u$. Wenn die Kugel von E bis P gekommen ist, folglich die Luft AEFD sich in dem Raum APMD verbreitet hat, so ist die Federkraft dieser ausgebreiteten Luft $\frac{QF}{D} \cdot \frac{a^2 b}{a^2 x}$ das ist $\frac{bQF}{xD}$. Diese Kraft kann als der Druck einer Queckſilbersäule auf den Querschnitt PM angesehen werden; sie wird durch den Gegendruck der Atmosphäre auf eben die Fläche zum Theil auf-

aufgehoben, so daß die absolute Kraft (*), welche die Kugel von A nach B treibt, nur noch $= \frac{bQF}{xD} - F$ ist. Wir erhalten daher durch den bekannten Grundsatz von beschleunigenden Kräften $K\,du = \left(\frac{bQF}{xD} - F\right) dx$, und hieraus ergibt sich, wenn man das vollständige Integral so macht, daß für $x = b$, $u = o$ wird,

$$u^2 = 2F.\left(\frac{bQ}{DK} L\left(\frac{x}{b}\right) + \frac{b-x}{K}\right)$$

Setzt man $x = AB = E$, so ergibt sich

$$2F\left(\frac{bQ}{DK} L\left(\frac{E}{b}\right) + \frac{b-E}{K}\right)$$

für das Quadrat der Geschwindigkeit V, womit die Kugel die Kanone verläßt.

310. I. Zusatz. Aus dieser Formel erhellet, daß, wenn aus der Erfahrung oder sonst irgend woher die Größe $\frac{Q}{D}$ bekannt wäre, d. i. die Verhältnis der Dichtigkeit der anfänglich verdichteten Luft zur Dichtigkeit der natürlichen Luft, oder, welches damit einerlei ist, die Verhältnis der anfänglichen Federkraft der flüßigen Masse, welche die Kugel forttreibt, zur Federkraft der natürlichen Luft, alsdann auch V gefunden wäre. Umgekehrt läßt sich $\frac{Q}{D}$ finden, wenn V gegeben ist. Um aber V durch die Erfahrung zu bestimmen, kann man die Kanone, anstatt sie horizontal zu legen, ein

(*) Statt absolute sollte eigentlich relative stehen; Hr. Bossüt kehrt aber hierin überhaupt den sonst gewöhnlichen Sprachgebrauch um; doch läßt sich die Umkehrung rechtfertigen und ich tadele ihn darum nicht.

ein wenig schief richten (welches nur einen unbedeutenden Einfluß auf die Formel haben kann), da man dann die Weite des Wurfs von der Kanone bis zur Stelle wo die Kugel niederfällt messen kann; hieraus ergibt sich, wenn man dem Widerstand der Luft Rechnung thut, die Geschwindigkeit V oder die dieser Geschwindigkeit zugehörige Höhe.

311. II. Zusatz. Unter allen Längen E, welche man der Kanone geben kann, gibt es eine, welche die Geschwindigkeit V am größten macht. Man findet solche, wenn man das Differential von V^2, so genommen, daß nur E dabei veränderlich ist, $= o$ setzt. Hierdurch erhält man $E = b. \frac{Q}{D}$

Diese Länge ist bei weitem größer, als sie die Erfahrung gibt. Man muß aber bedenken, daß sich unsere Rechnungen auf die Voraussetzung gründen, die Federkraft der flüßigen Masse, welche die Kugel längst der Kanone forttreibt, verhalte sich genau verkehrt wie der Raum, den diese Masse nach und nach einnimmt; dieses läßt sich aber nur für mittlere Verdichtungen der Luft annehmen; und für eine aus der Entzündung des Pulvers entbundene flüßige elastische Masse kann es noch mehr von der Wahrheit abweichen; denn diese letztere Flüßigkeit ist nicht gleichartig, sie wird nicht mit einmal entbunden und entwischt zum Theil merklich durch den Spielraum zwischen der Kugel und der Wand. Ueberdas leidet die Kugel um so viel länger die Reibung an der Kanonenwand, ie länger solche ist. Alle diese Betrachtungen schränken die Länge der Stücke in der Artillerie sehr ein. Man treibt aber diese Verminderung gewöhnlich zu weit. Die Erfahrung lehrt, daß die langen Stücke, deren man sich bei den Belagerungen bedient, die Kugeln mit weit größerer Geschwindigkeit abwerfen, als die kurzen Stücke,

Stücke, die man zuweilen in den Feldzügen gebrauchen muß, um den Transport und die Unternehmungen zu erleichtern. Man kann über diesen Gegenstand Robins Artillerie mit Herrn Eulers Anmerkungen nachlesen.

312. X. Aufg. LBCR sey ein lothrechter Zilinder (fig. 40.), der ringsum verschlossen und im obern Theil LADR leer sey, im untern Theil aber eine gewisse Menge Luft enthalte, die durch ein auf dem Deckel AD liegendes Gewicht K in diesem Zustand erhalten werde; dieser Deckel sey beweglich, ohne sich zu reiben, aber auch ohne einigen Spielraum um seinen Rand herum zu lassen, daß also iems Gewicht der Federkraft dieser Luft gleich ist; nun bringt man auf irgend eine Art auf den Deckel oder oben auf das Gewicht K noch ein anderes Gewicht G: man sucht die Geschwindigkeit, womit die Masse K + G niedersinkt.

Man setze, es sey der Deckel nach Verfluß der Zeit t in die parallele Lage PM gekommen, und es sey AB = a, AP = x, die Geschwindigkeit der Masse K + G in P = u, die Schwere = g; weil nun die Federkraft der Luft ABCD = g. K ist, so ist die der Luft PBCM = g. K. $\frac{a}{a-x}$ (67.) Folglich die absolute Kraft, welche den Deckel oder die Masse K + G zu sinken nöthigt, = g. (K + G) — g. K. $\frac{a}{a-x}$, und man erhält die Gleichung

$$(G + K).\, u\, du = \left(g.(K+G) - \frac{g.K.a}{a-x}\right).\, dx$$

Hieraus ergibt sich, wenn man das vollständige Integral so macht, daß für x = o auch u = o wird,

$u^2 =$

$$u^2 = 2g\left(x + \frac{Ka}{K+G} \cdot L\left(\frac{a-x}{a}\right)\right)$$

Der Ausdruck für die Zeit, deren Differentialgleichung $dt = \frac{dx}{u}$ ist, ergibt sich, wenn man in dieser Gleichung statt u seinen Werth setzt und hierauf integrirt.

313. Zusatz. Aus dem Ausdruck für u^2 erhellet, daß durch Vergrößerung des Werths von x das erste Glied dieses Ausdrucks vergrößert, das zweite aber vermindert wird. Es bleibt also der Werth von u nach $= o$, wenn man

$$x + \frac{Ka}{K+G} \cdot L\left(\frac{a-x}{a}\right) = o$$

oder $x.(K+G) = K.a.L\frac{a}{a-x}$

hat. Hieraus folgt, daß wenn der Deckel z. B. in ON gekommen ist, solcher wieder in seine erste Lage zurück steigt, um sodann von neuem zu sinken und so fort.

314. XI. Aufg. Man setze nun, es sey der lothrechte Zilinder LBCR (fig. 41.) oberhalb offen, und kommunicire also mit der Atmosphäre; der untere Theil ABCD enthalte natürliche Luft, deren Federkraft so groß ist, als der Druck der Atmosphäre auf den Deckel AD, und auf diesem Deckel AD befinde sich ein Gewicht G, das ihn zu sinken nöthigt: man sucht die Geschwindigkeit der Masse G, wann der Deckel in irgend eine Lage PM gekommen ist.

Es sey $AB = a$, $AP = x$, die sinkende Geschwindigkeit der Masse $G = u$. Den Druck der Atmosphäre auf den Deckel AD oder die Federkraft der Luft ABCD drucke ich durch g. K aus, wo g die Schwere

und

und K eine schickliche Masse bedeutet. Wenn sich der Deckel in PM befindet, so ist offenbar die Federkraft der Luft PBCM $= g.K.\frac{a}{a-x}$; folglich die absolute Kraft, welche alsdann den Deckel treibt, $= g.K + g.G - g.K.\frac{a}{a-x}$. Diese Kraft theilt die Bewegung der simplen Masse G mit, und man hat also die Gleichung

$$Gudu = \left(g(K+G) - \frac{Ka}{a-x}\right).dx$$

Demnach

$$u^2 = {}^2g\left(\left(\frac{K+G}{G}\right).x + \frac{Ka}{G}.L\left(\frac{a-x}{a}\right)\right)$$

315. I. Zus. Hieraus findet man durch ebendergleichen Berechnungen wie (313), daß der Deckel AD sinken muß und dann wieder steigen, und so abwechselnd fort.

316. II. Zus. Die Federkraft der Luft nimmt in der Kälte ab und in der Wärme zu; wenn man also durch irgend eine Veranstaltung die Luft ABCD zu erkälten und dann wieder zu erwärmen und solches abwechselnd fortzusetzen vermag, so erhellet, daß der Deckel AD ohne Beihülfe des Gewichts G abwechselnd sinken und steigen muß. Es ist also möglich, eine Maschine zu verfertigen, deren Bewegung durch wechselsweise Abkühlung und Erwärmung einer Luft-, oder andern flüßigen elastischen Masse hervorgebracht und unterhalten wird. Im Grund beruht hierauf der Mechanismus der Feuermaschine (*).

317.

(*) Man findet die Theorie dieser Maschine in dem mehr angeführten Versuch ꝛc. XI. Kap.

317. XII. Aufg. Der lothrechte Zilinder LBCR (fig. 42.) sey oben beständig offen, und enthalte im untern Theil ABCD natürliche Luft; der Deckel AD werde vermittelst des Gewichts G (welcher an die Schnure GSVF, die ohne Schwere angenommen wird, befestigt ist) lothrecht aufwärts gezogen: man sucht die Geschwindigkeit der Masse G, wann der Deckel AD in irgend eine Lage PM gekommen ist.

Es sey $AB = a$; $AP = x$; die sinkende Geschwindigkeit der Masse $G = u$, und den Druck der Atmosphäre auf AD oder die Federkraft der Luft ABCD drucke man, wie vorhin, durch g. K aus, so ist die Federkraft der Luft, wann sie den Raum PBCM einnimmt, $= g K. \frac{a}{a+x}$. Diese Kraft zu dem Druck g. G addirt, und von der Summe den Druck g. K der Atmosphäre auf den Deckel AD abgezogen, gibt $g. G + \frac{g. K a}{a+x} - g. K$ für die absolute Kraft, welche die Masse G zu sinken nöthigt. Demnach

$$Gudu = g\left(G - K + \frac{Ka}{a+x}\right). dx$$

und dieses gibt

$$u^2 = 2g\left(\frac{Ka}{G}. L\left(\frac{a+x}{a}\right) - (K-G).x\right)$$

318. I. Zus. Setzt man $K > G$, so erhellet, daß, wenn x vergrößert wird, das erste Glied im Werth von u^2 zunimmt, das zweite aber kleiner wird. Wenn also der Deckel irgendwohin, z. B. bis ON gestiegen ist, so muß er wieder bis AD sinken, und dann wieder von neuem steigen u. s. f.

319. II. Zus. Wenn man anstatt des Gewichts G, um den Deckel AD anfänglich zum Sinken zu bringen, annimmt, die Luft ABCD werde erhitzt, hierauf abgekühlt und so abwechselnd fort; so ist klar, daß der Deckel AD wechselsweis steigen und sinken müsse. Dieses ist der umgekehrte Fall von (316).

Zwölftes Kapitel.

Von der schwingenden Bewegung der Lufttheilgen.

320.

Wenn man von der Betrachtung der Bewegung einer Luftmasse, deren Querschnitte oder Theilgen, die selbst als kleine Massen angesehen werden, für einerlei Augenblick als gleich schnell angenommen werden, zur Untersuchung der Bewegung fortgeht, welche die kleinsten Theilgen einer irgendwo durch irgend eine Kraft erschütterten Luftmasse gegen einander annehmen; so wird die Untersuchung von ganz anderer Art, und man hat solche bisher nur noch bei einer geringen Anzahl besonderer Fälle vollständig entwickeln können, nicht aus Mangel mechanischer und hydrodynamischer Grundsätze, sondern weil die Analysis noch nicht bis zu der hierzu erfoderlichen Vollkommenheit gestiegen ist.

Herr de la Grange ist der Erste, der sich mit glücklichem Erfolg in diese tiefsinnige Untersuchung eingelassen hat (*Acad. de Turin, Tomes I. & II.*). Nachher hat sich Hr. Euler vorzüglich damit beschäftigt, und er hat darin nach und nach mehrere wichtige Entdeckungen gemacht (*Acad. de Turin Tom. II*; *Acad. de Berlin* 1759; 1765; *Acad. de Petersb.* 1775.).

321. Man weiß, daß der Klang oder der Schall überhaupt die Wirkung einer der Luft beigebrachten Erschütterung ist, die sich bis zum Trommelfell im Ohr fortpflanzt und an solches anstößt. Eine gespannte Saite, die man anschlägt oder in eine schwingende Bewe-

gung

gung versetzt, erschüttert die umherliegende Luft, theilt solcher ihre Bewegung mit, und bringt, wenn man will, die musikalischen Thöne hervor. Ebenso verhält es sich mit den Thönen einer Flöte oder einer Orgel. Es ist daher höchst interessant, die Gesetze von der schwingenden Bewegung der Luft zu kennen, indem diese Gesetze die Grundlage von der ganzen Akustik (*) ausmachen.

322. Die Federkraft der Luft ist die Hauptursache von der Entstehung oder Unterhaltung der zitternden Bewegung, woraus der Schall entsteht. Das Gewicht dieser flüßigen Masse hat hierauf keinen weitern Einfluß, als insoferne solches ihre Federkraft merklich verstärkt oder schwächt. Man bemerkt nämlich, daß ein durch einerlei Ursache erregter Schall an den Meeresufern und auf den Bergen, ohngeachtet des verschiedenen Gewichts der Luft, dennoch gleiche Stärke und gleiche Geschwindigkeit hat. Aber Wärme und Kälte verursachen durch ihr Ausdehnen oder Zusammenziehen der Luft, eine verhältnismäsige Verschiedenheit der Thöne, so wie eine stärker oder schwächer gespannte Saite durch ihre Schwingungen mehr oder minder helle Thöne erregt.

323. Da die in freier Luft erregten Thöne, und die, welche man aus einem erthönenden Rohr hervorbringt, gleiche Beschaffenheit haben, so muß die zitternde Bewegung der Luft in beiden Fällen einerlei Gesetze befolgen, zum wenigsten was die Hauptwirkungen betrift. Ich werde daher blos die Bewegung der Luft in einer Röhre betrachten. Dieses macht die Aufgabe einfacher, und erleichtert die Mittel zu Festsetzung

(*) Gehörlehre.

setzung der ersten Gründe und der Berechnungen, welche zur Auflösung führen müssen. Ich werde überdas für einerlei Ort eine unveränderliche Wärme annehmen, so daß die Federkraft der Luft in dieser Hinsicht keiner Abwechslung unterworfen ist. Man darf aber nicht vergessen, daß die nach Verschiedenheit der Orte sich ergebende Verschiedenheit in der Temperatur der Luft auch einige Verschiedenheit in den Thönen nach sich ziehen könne, wie solches den Organisten bekannt ist.

324. Wenn wir uns begnügen wollten, die Frage aus einem etwas eingeschränkten Gesichtspunkt und etwas hypothetisch zu betrachten, so würden wir lediglich bei dem äußerst sinnreichen Verfahren stehen bleiben, welches Herr Dan. Bernoulli (Acad. de Paris 1762.) mittheilt, um die Bildung der Thöne in den Orgelpfeifen zu erklären. Denn aus der allgemeinen Vorstellung, die ich von seiner Lehre über diesen Gegenstand mittheilen will, wird man sehen, daß solche von dem Mechanismus, wodurch die zitternde Bewegung der Luft erregt und fortgepflanzt wird, sehr scheinbare physische Gründe angibt.

325. Herr Bernoulli unterscheidet drei Arten von erthönenden Röhren: die Röhren, welche am einen Ende verschlossen und am andern offen sind; die Röhren, welche an beiden Enden offen, und die welche an beiden Enden verschlossen sind; wobei er voraussetzt, daß man in diesem letzten Fall auf irgend eine Art die Luft in Bewegung setzen könne, welches zur Erklärung der Entstehung der harmonischen Thöne dient, welche man bei einer nur am einen Ende verschlossenen Röhre hervorbringt, wie man bald sehen wird. Wir wollen nun die Bewegung der Luft in diesen dreien Gattungen von Röhren nach einander untersuchen.

326. Es sei also fürs Erste AB (fig. 43.) eine Röhre, die am einen Ende A verschlossen, und am andern B offen ist. Man lasse es auf irgend eine Art erthönen, so wird der Thon durch die zitternde Bewegung der Luftschichten a a, die sich dem Ende A abwechselnd nähern und wieder entfernen, hervorgebracht. Diese Schichten nehmen nach und nach die Lagen b b, c c an, indem sie in dem Raum b c hin und her wandern. Alle diese Wanderungen können als sehr klein angesehen werden; sie erfolgen nach eben den Gesetzen, wie die sehr kleinen Schwingungen eines einfachen Pendels. Es erhellet, daß die Luft abwechselnd dichter und dünner wird. Dabei muß man noch bemerken, daß die Luft nicht nach der ganzen Länge der Röhre auf einerlei Art verdichtet und verdünnet wird. Die stärksten Verdichtungen erfolgen bei A, die stärksten Verdünnungen bei B, und unmittelbar am Ende B hat die Luft in der Röhre mit der äußern gleiche Dichtigkeit. Diese Ungleichheiten der Verdichtungen und Verdünnungen verhindern aber nicht, daß die Wanderungen der Schichten isochronisch seyen, so wenig der Isochronismus der Schwingungen eines Pendels durch die Ungleichheiten der kleinen Bögen, die es nach und nach beschreiben kann, gestöhrt wird.

327. Fürs andere sey AB (fig. 44.) eine an beiden Enden offene Röhre. In der Mitte dieser Röhre gedenke man sich eine Absonderung CC, so erhält man zwo Röhren AC, BC, die beide an ihrem einen Ende verschlossen und am andern offen sind. Um aber die eingebildete Absonderung CC als eine feste Schiedwand ansehen zu können, müssen die gleichweit von CC entfernten Luftschichten a a zu beiden Seiten völlig gleiche und entgegengesetzte Schwingungen c a b machen. Diese Schichten müssen also gegen die Schiedwand CC, die nun unbeweglich bleibt, gleiche und

entgegengesetzte Wirkungen ausüben; und man kann die beiden eingebildeten Röhren AC, BC wie die einfache Röhre im vorigen §. betrachten. Nach dieser Erklärung muß eine an beiden Enden offene zilindrische Röhre eben den Thon geben, wie eine ähnliche am einen Ende verschlossene Röhre, deren Länge nur die Hälfte von iener betrüge. Da aber in den offenen Röhren der Thon mit äußerster Leichtigkeit hervorgebracht wird und die Luftschichten einen beständigen vollkommen harmonischen Gang haben, so ist der Thon, den sie geben, heller und angenehmer als aus einer Röhre, die am einen Ende verstopft ist.

328. Endlich sey AB (fig. 45.) eine an beiden Enden verschlossene Röhre, worin die Luft in eine zitternde Bewegung versetzt sey. Man kann diese Röhre so ansehen, als ob sie aus zween Theilen AC, BC zusammengesetzt wäre, deren iede eine bei A oder B verschlossene und in C offene Röhre vorstellt. Die Lufterschütterungen können daher in diesen beiden Röhrstücken wie bei der Röhre (fig. 43.) erfolgen, ohne daß die Schwingungen von beiden Seiten einander hinderlich sind, wofern man nur voraussetzt, daß alle Luftschichten in der ganzen Röhre AB allemal von einer Seite herkommen. Auf diese Art stimmt die Verdichtung in dem Theil AC mit der Verdünnung in dem Theil CB zusammen, und umgekehrt. Die Luftschichte in C muß beständig ihre natürliche Dichtigkeit behalten; und wenn man zu beiden Seiten Schichten nimmt, die gleichweit von der Stelle C entfernt sind, so müssen solche ihre Schwingungen allemal von einerlei Seite mit vollkommener Gleichheit ihrer Schwingungsräume (excursions) machen und auf eine völlig übereinstimmende Weise. Macht man eine kleine Oefnung in C, so kann man leicht aus dieser Oefnung einen Thon locken, und dieser muß mit dem, welcher der 43ten fig. zugehört,

zugehört, einerlei seyn, vorausgesetzt, daß die Länge AB (fig. 45.) doppelt so groß als die AB (fig. 43.) ist.

329. Hieraus erklärt Herr Bernoulli, wie man aus einer und eben der Röhre, die am einen Ende verschlossen und am andern offen ist, mehrere Thöne erwecken könne. Er theilt die Röhre in eine ungrade Anzahl gleicher Theile, und nimmt nun vom verschlossenen Ende an diese Theile paarweis, so daß am offenen Ende noch einer übrig bleibt; iedes solches Paar betrachtet er wie eine an beiden Enden verschlossene Röhre. Alle diese Röhren müssen, da sie gleiche Länge haben, gleichlautend seyn, und was den letzten Theil betrifft, der nur halb so lang als iede der übrigen eingebildeten Röhren ist, so muß solcher gleichfalls gleichlautend seyn, vermög der Bemerkung am Ende von (327.)

330. Dieses sind die allgemeinen Voraussetzungen, worauf Herr Bernoulli die ganze Theorie der musikalischen Thöne der Orgelpfeifen und alle Berechnungen gründet. Zuerst betrachtet er zilindrische Röhren; hierauf wendet er die nämlichen Grundsätze auf eine besondere Art der Orgelpfeifen mit länglichten runden Deckeln an. Durchaus findet man die feinsten Anwendungen der Geometrie und eine Reihe der sinnreichsten Versuche, welche die Resultate bestättigen. Da der Stoff dieser Untersuchungen mit dem, welchen die schwingenden Saiten darbiethen, von einerlei Art ist, so bedient sich dieser Schriftsteller in beiden Fällen ähnlicher Methoden. Aber bei aller Bewunderung, welche die Stärke seiner Geisteskraft verdient, muß man dennoch eingestehen, daß hier ebenso wie bei der Aufgabe von den schwingenden Saiten seine Auflösung nicht die völlige Allgemeinheit hat, welche die Natur der Frage verstattet. In der That können die gemeinen

Gesetze der Hydrodynamik auch auf die Bewegung der Luft angewendet werden, wie ich sogleich zeigen werde. Ich werde mich dabei der Methode des Herrn Eulers bedienen, die ich für höchst einfach halte.

331. I. Aufg. **Wenn das Gleichgewicht der Luft in der graden und waagrechten zilindrischen Röhre AB (fig. 46.) auf irgend eine Art aufgehoben worden ist; im Allgemeinen eine Gleichung zu finden, welche die hierauf erfolgende Bewegung dieser flüßigen Masse ausdruckt.**

Es gibt zwo Arten, diese Aufgabe zu betrachten: nach der einen kann man die absolute Bewegung der Luft für irgend eine Stelle nach einer gewissen Zeit ohne Rücksicht auf die anfängliche Bewegung verlangen; oder man kann auch die Verhältnis der Bewegung an irgend einer Stelle nach Verfluß einer gewissen Zeit zur Bewegung an einer andern Stelle verlangen, die gleichfalls als veränderlich in Ansehung ihrer Lage angesehen wird, aber unter der Bedingung, daß für eine bestimmte Zeit die Umstände der Bewegung für diese letztere Stelle bekannt seyen. Wir wollen die Frage aus dem letztern Gesichtspunkt betrachten, welcher für die Rechnung die größte Leichtigkeit und Simplicität darbiethet.

Es sey A ein fester Punkt, S irgend ein Punkt, wo die Luft im ersten Augenblick in Bewegung gerathen ist. Man stelle sich vor, die unendlich kleine Luftmasse oder Luftschichte SRR'S' sey nach Verfluß der Zeit t in srr's' gekommen, so daß S in s und S' in s' gekommen sey; so kommt es drauf an, den Zustand der Luft in srr's' mit ihrem anfänglichen Zustand SRR'S' zu vergleichen.

Man

Man setze AS = S; As = s; die Dichtigkeit der Luft in S = Q; den Druck, den sie an dieser Stelle leidet, = P; die Dichtigkeit der Luft in s = q; ihren Druck = p; die Geschwindigkeit in S = V; die Geschwindigkeit in s = v. Legt man nun hier die Voraussetzung des (§. 68.) zum Grund, daß nämlich bei einem unveränderlichen Wärmegrad, den wir hier voraussetzen, die Federkraft der Luft oder ihr Druck ihrer Dichtigkeit proportional ist, und nennt nun D die Dichtigkeit der natürlichen Luft, Π ihre Federkraft oder ihren Druck, so erhält man $P = \frac{Q.\Pi}{D}$, $p = \frac{q.\Pi}{D}$, oder, indem man $\frac{\Pi}{D} = k$ setzt, P = k. Q, p = k. q.

Wenn der anfängliche Zustand der Luft SRR'S' gegeben ist, so können die Größen Q und V allemal mittelst der einzigen veränderlichen Größe S und beständiger Größen ausgedruckt werden. Was die Größen s, q, v betrift, so sind solche, da sie nicht nur von S und V, sondern auch von der Zeit t abhängen, Funktionen von S und t, die von der Art seyn müssen, daß man, t = o gesetzt, q = Q, p = P und v = V erhält.

Da die Punkte s und s' zu einerlei Zeit t gehören, so erhellet, daß die kleine Linie ss' das Differential von s ist, so genommen, daß man nur S dabei als veränderlich ansieht. Man hat also nach der gewöhnlichen Art dergleichen eingeschränkte Differentialien zu bezeichnen (*) $ss' = dS\left(\frac{ds}{dS}\right)$. Es sey aa die unveränderliche Weite oder der senkrechte Querschnitt der Röhre, so

(*) S. oben 247. No. II. am Ende. Ich nenne Kürze halber dergleichen Differentialien, eingeschränkte; Herr Bossut nennt sie *partielles*.

so sind $aaQdS$, $aaq.dS\frac{ds}{dS}$ die Werthe der kleinen Luftmassen $SRR'S'$, $srr's'$, da sich die Masse überhaupt wie das Produkt aus dem körperlichen Raum in die Dichtigkeit verhält. Nun müssen diese beiden kleinen Massen einander gleich seyn; man erhält also $Q = q\left(\frac{ds}{dS}\right)$, die erste Gleichung zwischen Q, q, S, s.

Der in der Zeit dt von dem Punkt s durchloffene unendlich kleine Raum ist $= v.dt$. Es ist aber dieser kleine Raum als eine Abänderung von s, die blos aus der Abänderung von t entsteht, $= dt.\left(\frac{ds}{dt}\right)$; folglich $vdt = dt.\left(\frac{ds}{dt}\right)$, oder $v = \left(\frac{ds}{dt}\right)$. Ebenso erlangt die Geschwindigkeit v in der Zeit dt den Zuwachs $dt.\left(\frac{dv}{dt}\right)$ oder $dt.\left(\frac{dds}{dt^2}\right)$. Es bekommt also der Punkt s nach der Richtung As eine beschleunigende Kraft $= \left(\frac{dds}{dt^2}\right)$, die aus dem Ueberschuß des Drucks in s nach der Richtung As über den Druck in s' nach der entgegengesetzten Richtung erzeugt wird. Da diese beiden Ausdrücke zu einerlei Zeit t gehören und die erste p oder kq ist, so wird die zwote kq und noch das Differential dieser Größe, so genommen, daß man nur S dabei als veränderlich ansieht, das ist $kq + kdS\left(\frac{dq}{dS}\right)$. Es ist also der Ueberschuß der ersten über die zwote $-kdS\left(\frac{dq}{dS}\right)$ der Elementardruck, der auf alle Stellen des Querschnitts sr angewendet die absolute beschleunigende Kraft $-a^2kdS\frac{dq}{dS}$, welche die kleine Luftmasse $srrs$ nach der Richtung

As,

As treibt. Diese Kraft also durch die bewegte Masse, das ist durch $a^2 q dS. \left(\frac{ds}{dS}\right)$ oder durch $a^2 Q dS$ dividirt, gibt $-\frac{k}{Q}\left(\frac{dq}{dS}\right)$ für die einfache beschleunigende Kraft, welche den Punkt s nach der Richtung As treibt, und die $= \left(\frac{dds}{dt^2}\right)$ seyn muß. Man erhält daher diese zwote Gleichung

$$-\frac{k}{Q}\left(\frac{dq}{dS}\right) = \left(\frac{dds}{dt^2}\right) \text{ oder } k\left(\frac{dq}{dS}\right) + Q\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = o$$

zwischen S, s, Q, q, t.

Verbindet man beide Fundamentalgleichungen

$$Q = q\left(\frac{ds}{dS}\right); \; k\left(\frac{dq}{dS}\right) + Q\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = o$$

so lassen sich q und $\frac{dq}{dS}$ wegschaffen. Denn fürs Erste hat man $q = \frac{Q}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}$, und dann hat man auch, weil Q eine Funktion von S und beständigen Größen ist, wenn man die Gleichung $Q = q.\left(\frac{ds}{dS}\right)$ so differentiirt, daß nur s dabei als veränderlich angesehen wird,

$$dQ = dS\left(\frac{dq}{dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right) + q\,dS\left(\frac{dds}{dS^2}\right)$$

woraus sich

$$\left(\frac{dq}{dS}\right) = \frac{dQ}{dS\left(\frac{ds}{dS}\right)} - \frac{q}{\frac{ds}{dS}}\left(\frac{dds}{dS^2}\right)$$

ergibt. Setzt man nun in dieser Gleichung für q seinen vorhin gefundenen Werth, und hiernächst den sich

auf

auf diese Art ergebenden Werth von $\frac{dq}{dS}$ in der Gleichung $k\left(\frac{dq}{dS}\right) + Q\left(\frac{ddS}{dt^2}\right) = o$, so ergibt nach gehöriger Rechnung

$$\frac{kdQ}{QdS}\left(\frac{ds}{dS}\right) - \left(\frac{kddS}{dS^2}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)^2 \cdot \left(\frac{ddS}{dt^2}\right) = o. \text{ (A}$$

Diese Gleichung müßte man nun integriren, um im Allgemeinen die Bewegung der Luft in unserer Röhre zu bestimmen; dieses hat man aber bisher noch nicht vermogt. Wir wollen uns daher auf nachstehende Aufgabe einschränken, die zur Erklärung der Entstehung und Fortpflanzung des Lauts hinreichend ist, und dieses macht den Hauptzweck gegenwärtiger Untersuchung aus.

332. II. Aufgabe. **Die Bewegung der Luft in der gegebenen Röhre zu bestimmen, vorausgesetzt, daß die Bewegung äusserst gering ist.**

Bei dieser Voraussetzung sind die Linien S, s wenig von einander verschieden, so daß, wenn man $s = S + z$ setzt, z sehr klein ist. Diese Voraussetzung gibt aber $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + \left(\frac{dz}{dS}\right)$; $\left(\frac{ddS}{dS^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dS^2}\right)$; folglich verwandelt sich die Gleichung A in

$$\frac{kdQ}{QdS}\left(1 + \frac{dz}{dS}\right) - k\left(\frac{ddz}{dS^2}\right) + \left(1 + \left(\frac{dz}{dS}\right)\right)^2 \times \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = o$$

oder auch, weil $\frac{dz}{dS}$ in Vergleichung mit 1 ausser Acht gelassen werden kann,

kdQ

$\frac{k\,dQ}{q\,dS} - k\left(\frac{ddz}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = o$ (B

Um diese Gleichung integriren zu können, setze ich $z = x + r$, wo x eine unbestimmte veränderliche Größe, und r eine Funktion von S allein ist.

Demnach $\left(\frac{dz}{dS}\right) = \left(\frac{dx}{dS}\right) + \left(\frac{dr}{dS}\right)$; $\left(\frac{ddz}{dS^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dS^2}\right)$; $\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)$; $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \frac{ddx}{dt^2}$.

Es verwandelt sich also die Gleichung B in nachstehende

$\frac{k\,dQ}{Q\,dS} - k\left(\frac{ddr}{dS^2}\right) - k\left(\frac{ddx}{dS^2}\right) + \frac{ddx}{dt^2} = o$

woraus sich diese beiden besondere Gleichungen ziehen lassen

$\frac{dQ}{Q\,dS} - \left(\frac{ddr}{dS^2}\right) = o$; $-k\left(\frac{dds}{dS^2}\right) + \frac{ddx}{dt^2} = o$.

Die erste dieser Gleichungen gibt $\frac{dQ}{Q} = dS\left(\frac{ddr}{dS^2}\right)$

und das Integral hiervon ist $r = \int dS.L.\left(\frac{Q}{C}\right)$ wo C eine beständige Größe ist; und wenn man diese letzte Gleichung differentiirt, so erhält man $dr = dS.L\left(\frac{Q}{C}\right)$; $\frac{dr}{dS} = L\left(\frac{Q}{C}\right)$; $dS\left(\frac{ddr}{dS^2}\right) = \frac{dQ}{Q}$. Es ist also noch übrig, die zwote Gleichung $-k\left(\frac{ddx}{dS^2}\right) + \frac{ddx}{dt^2} = o$ zu integriren, die von eben der Art ist wie die bei der Aufgabe von schwingenden Saiten, und sich daher auch durch die nämlichen Mittel integriren läßt. Ich will sogleich eines von diesen Mitteln, das sehr analytisch und direkt ist, und das man gleichfalls Hrn. Euler zu verdanken hat (Institut. calc. integral. T. III. p. 234) hier vortragen.

Es

Es seyen u und y zwo neue veränderliche Größen, so daß $u = \alpha S + \beta t$ und $y = \gamma S + \delta t$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ unbestimmte beständige Koeffizienten seyen; so hat man $du = \alpha dS + \beta dt$; $\left(\frac{du}{dS}\right) = \alpha$; $\left(\frac{du}{dt}\right) = \beta$; $dy = \gamma dS + \delta dt$; $\left(\frac{dy}{dS}\right) = \gamma$; $\left(\frac{dy}{dt}\right) = \delta$.

Man setze, man habe die Gleichungen $dx = m dS + n dt$ (m und n Funktionen von S und t); $dx = m' du + n' dy$ (m' und n' Funktionen von u und y); diese geben $m = \left(\frac{dx}{dS}\right)$, $n = \left(\frac{dx}{dt}\right)$, $m' = \left(\frac{dx}{du}\right)$, $n' = \left(\frac{dx}{dy}\right)$. In der zwoten setze man für du und dy ihre Werthe, so erhält man $dx = m'\alpha dS + m'\beta dt + n'\gamma dS + n'\delta dt$; also $\left(\frac{dx}{dS}\right)$ oder $m = m'\alpha + n'\gamma$; $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ oder $n = m'\beta + n'\delta$. Also $dm = \alpha dm' + \gamma dn'$; $dn = \beta dm' + \delta dn'$. Weil nun m' und n' Funktionen von u und y sind, so hat man $dm' = \varphi du + \varphi' dy$, $dn' = \xi du + \xi' dy$, wo $\varphi = \left(\frac{dm'}{du}\right) = \left(\frac{ddx}{du^2}\right)$; $\varphi' = \left(\frac{dm'}{dy}\right) = \left(\frac{ddx}{dudy}\right)$, $\xi = \left(\frac{dn'}{du}\right) = \left(\frac{ddx}{dydu}\right)$, $\xi' = \left(\frac{dn'}{dy}\right) = \left(\frac{ddx}{dy^2}\right)$; in diesen Gleichungen setze man für du und dy ihre Werthe, so erhält man

$dm' = \varphi\alpha dS + \varphi\beta dt + \varphi'\gamma dS + \varphi'\delta dt$;

$dn' = \xi\alpha dS + \xi\beta dt + \xi'\gamma dS + \xi'\delta dt$;

demnach $dm = \varphi\alpha^2 dS + \varphi\alpha\beta dt + \varphi'\alpha\gamma dS + \varphi'^2\alpha\delta dt + \xi\alpha\gamma dS + \xi\gamma\beta dt + \xi'\gamma^2 dS + \xi'\gamma\delta dt$;

$dn = \varphi\alpha\beta dS + \varphi\beta^2 dt + \varphi'\gamma\beta dS + \varphi'\beta\delta dt + \xi\alpha\delta dS + \xi\beta\delta dt + \xi'\gamma\delta dS + \xi'\delta^2 dt$.

Mithin

Mithin

$$\left(\frac{dm}{dS}\right) = \phi\alpha^2 + \phi'\alpha\gamma + \xi\alpha\gamma + \xi'\gamma^2;$$

$$\left(\frac{dn}{dt}\right) = \phi\beta^2 + \phi'\beta\delta + \xi\beta\delta + \xi'\delta^2$$

Diese beide letzte Gleichungen sind die nämlichen wie nachstehende:

$$\left(\frac{ddx}{dS^2}\right) = \alpha^2\left(\frac{ddx}{du^2}\right) + 2\alpha\gamma\left(\frac{ddx}{dudy}\right) + \gamma^2\left(\frac{ddx}{dy^2}\right);$$

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \beta^2\left(\frac{ddx}{du^2}\right) + 2\beta\delta\left(\frac{ddx}{dudy}\right) + \delta^2\left(\frac{ddx}{dy^2}\right);$$

Man erhält also statt der vorgegebenen Gleichung

$$-k\left(\frac{ddx}{dS^2}\right) + \frac{ddx}{dt^2} = o \text{ diese}$$

$$\left.\begin{aligned} &-k\alpha^2\left(\frac{ddx}{du^2}\right) - 2k\alpha\gamma\left(\frac{ddx}{dudy}\right) - k\gamma^2\left(\frac{ddx}{dy^2}\right) \\ &+\beta^2\left(\frac{ddx}{du^2}\right) + 2\beta\delta\left(\frac{ddx}{dudy}\right) + \delta^2\left(\frac{ddx}{dy^2}\right) \end{aligned}\right\} = o.$$

Nun setze man (wegen der unbestimmten Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$). $\beta^2 - k\alpha^2 = o$, $\delta^2 - k\gamma^2 = o$; und $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{k}$, $\delta = -\sqrt{k}$, so müssen die beiden äussersten Glieder der vorigen Gleichung verschwinden und es bleibt nur noch

$$-(2k + 2k)\left(\frac{ddx}{dudy}\right) = o \text{ oder } \frac{ddx}{dudy} = o.$$

Um diese Gleichung zu integriren, setze man $dx = M\,du + N\,dy$, so daß $M = \left(\frac{dx}{du}\right)$ und $N = \left(\frac{dx}{dy}\right)$, so erhält man

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{ddx}{dudy}\right), \text{ und } \frac{dN}{du} = \left(\frac{ddx}{dydu}\right)$$

Nun ist iede der beiden Größen $\left(\frac{ddx}{dydy}\right), \frac{ddx}{dydu}$, die einander gleich sind, vermög der Voraussetzung $= o$; es enthält also die Größe M kein y, weil, wenn man sie nach y differentiirte, der Koefficient von $dy = o$ seyn würde; und eben so enthält die Größe N kein u. Demnach ist M eine Funktion von u und N eine Funktion von y; und man hat also (wenn man die Funktionen durch die Buchstaben F und f mit zween nachgesetzten Punkten bezeichnet) $x = F:u + f:y$; oder auch (weil $u = \alpha S + \beta t = S + t\sqrt{k}$, und $y = \gamma S + \delta t = S - t\sqrt{k}$)

$$x = F:(S + t\sqrt{k}) + f:(S - t\sqrt{k})$$

Diesen Werth von x substituire man in der Gleichung $z = r + x$, und statt r setze man seinen Werth $\int dS. L\left(\frac{Q}{C}\right)$, so erhält man

$$z = \int dS\, L\left(\frac{Q}{C}\right) + F:(S + t\sqrt{k}) + f:(S - t\sqrt{k})$$

Demnach, weil $s = S + z$,

$$s = S + \int dS. L\left(\frac{Q}{C}\right) + F:(S + t\sqrt{k}) + f:(S - t\sqrt{k})$$

Und weil $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + \left(\frac{dz}{dS}\right)$ und $\left(\frac{ds}{dt}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right)$ so erhält man

$$\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + L\left(\frac{Q}{C}\right) + F':(S + t\sqrt{k} + f:(S - t\sqrt{k})$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \sqrt{k}.F':(S' + t\sqrt{k}) - \sqrt{k}.f:(S - t\sqrt{k})$$

Die beständige Größe C kann der Dichtigkeit D der natürlichen Luft gleich angenommen werden. Es

ist

ist aber auch, weil die anfängliche Bewegung der Luft äusserst klein gewesen ist, die Dichtigkeit Q von der Dichtigkeit D wenig verschieden, so daß, wenn man $Q = D + \theta$ setzt, θ eine äusserst kleine Größe ist; und die logarithmische Gleichung

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{d\theta}{D+\theta} = \frac{d\theta}{D} - \frac{\theta d\theta}{D^2} + \frac{\theta^2 d\theta}{D^3} - \text{\&c.}$$

kann in diese $\frac{dQ}{Q} = \frac{d\theta}{D}$ abgekürzt werden, indem man das Quadrat und die höhere Potenzen von θ wegläßt. Demnach (indem man das vollständige Integral so macht, daß $Q = D$, $\theta = o$ gibt) $L\left(\frac{Q}{D}\right) = \frac{Q-D}{D}$.

Also

$$fdS.\, L\left(\frac{Q}{C}\right) = f\frac{Q\,dS}{D} - S$$

Man kann daher die Ausdrücke für S und $\left(\frac{ds}{dS}\right)$ in folgende abändern:

$$s = f\frac{Q\,dS}{D} + F:(S + t\sqrt{k}) + f:(S - t\sqrt{k})$$

$$\left(\frac{ds}{dS}\right) = \frac{Q}{D} + F':(S + t\sqrt{k}) + f':(S - t\sqrt{k})$$

Die Werthe von s, $\left(\frac{ds}{dS}\right)$, $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ passen auf den anfänglichen Zustand der Luft, wenn man in diesen Werthen $t = o$, $s = S$, $q = Q$ und folglich $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1$, weil $Q = q\frac{ds}{dS}$, und $\frac{ds}{dt} = V$ setzt.

Hierdurch erhält man

$$S = f\frac{Q\,dS}{D} + F:S + f:S$$

$$1 = \frac{Q}{D} + F':S + f':S$$

$$V = \sqrt{k} \cdot F' : S - \sqrt{k} : f' : S$$

Die drei Gleichungen geben im Grund nur zwo, weil die erste differentiirt die zwote gibt. Aus den beiden letztern mit einander verbunden erhält man die beiden Differentialfunktionen

$$F' : S = \frac{D-Q}{2D} + \frac{V}{2\sqrt{k}}$$

$$f' : S = \frac{D-Q}{2D} - \frac{V}{2\sqrt{k}}$$

folglich auch die beiden Integralfunktionen

$$F : S = \int dS \frac{D-Q}{2D} + \int \frac{V dS}{2\sqrt{k}}$$

$$f' : S = \int dS \frac{D-Q}{2D} - \int \frac{V dS}{2\sqrt{k}}$$

Wenn also die Funktionen F : S, f : S, welche dem anfänglichen Zustand der Luft zugehören, bekannt sind, so ergeben sich auch die Funktionen F : (S + t$\sqrt{k}$) und f : (S — t$\sqrt{k}$) welche dem Zustand der Luft nach Verfluß der Zeit t zugehören, weil sie alle nach einerlei Gesetz entstehen. Man kann also die Bewegungen der Luft in diesen beiden Zuständen mit einander vergleichen. Hieraus werden unsere Leser, wenn sie in der Analysis bewandert sind, ohne Mühe die ganze Theorie von der Fortpflanzung des Schalls in zilindrischen Röhren herleiten, es mögen solche eine bestimmte oder eine unbeschränkte Länge haben. Die ausführlicheren Untersuchungen kann man in den oben angeführten Werken nachlesen.

Dreizehntes Kapitel.

Von dem Stos oder dem Widerstand flüßiger Massen.

333.

Wenn eine flüßige in Bewegung gesetzte Masse einem Körper oder ihr im Weg liegenden Hindernis begegnet, so stößt sie nothwendig gegen diesen Körper oder gegen diese Hindernis mit einer gewissen Kraft, weil die flüßigen Theilgen selbst kleine Körpergen sind, die, durch ihre Geschwindigkeit vervielfältigt, eine Bewegung von bestimmter Größe bewirken. Wenn man, anstatt die flüßige Masse in Bewegung anzunehmen, solche als ruhig voraussetzt, dagegen aber annimmt, es stoße ein Körper gegen sie mit einer gewissen Geschwindigkeit, so wird der Widerstand, den die flüßige Masse dem angenommenen Körper entgegensetzt, dem Stos gleich seyn, welchen die mit der Geschwindigkeit dieses Körpers in Bewegung gesetzte flüßige Masse gegen diesen als ruhig angenommenen Körper ausüben würde. Um nämlich den **Widerstand** in Stos zu verwandlen, darf man nur den Körper als ruhig annehmen, und seine Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Richtung der flüßigen Masse beilegen. **Stos** und **Widerstand** der flüßigen Massen richten sich also nach einerlei Gesetzen, und ihre Stärke wird auf einerlei Art bestimmt.

334. Man unterscheidet im Allgemeinen zwo Arten von Kräften, die **todten** und die **lebendigen**. Die erstern sind bloße **Druckungen**, die keine wirkliche und endliche Geschwindigkeit hervorbringen und

solche erst, wann sie eine endliche Zeit hindurch wirksam gewesen sind, hervorbringen würden; die letztern, welche man gewöhnlich Kräfte des Stoßes nennt, bewirken eine wirkliche bestimmte Geschwindigkeit, und können als Summen vereinbarter Druckungen angesehen werden. Es ist klar, daß iede Gewalt eines Drucks durch ein Gewicht in der Waage erhalten oder ausgemessen werden kann; denn ein Gewicht ist nichts anders als eine Masse, die der Wirkung der Schwere ausgesetzt ist, und diese ist selbst ein Erfolg vom Druck. Was die Kräfte des Stoßes betrift, wenn man annimmt, daß sie ihre Wirkung in einem untheilbaren Augenblick hervorbringen, so müssen solche mit den Kräften des Drucks verglichen unendlich groß seyn, und können also durch kein Gewicht gemessen werden. Es läßt sich aber nicht begreifen, wie die Kraft eines Körpers in seiner Bewegung, die eine endliche Größe ist, in einem untheilbaren Augenblick einen endlichen Effekt hervorbringen, das ist, einem andern Körper einen bestimmten Grad von Bewegung beibringen könne. Jede Mittheilung der Bewegung geschieht in einer endlichen Zeit, ob solche gleich so kurz seyn kann, daß sie uns unbemerkbar ist. Wir können also die Kräfte des Stoßes allgemein als Kräfte ansehen, die allmälig wirken, so wie die Kräfte des Drucks, und die ihre Wirkung in einer endlichen äusserst kurzen oder gleichsam unendlich kleinen Zeit hervorbringen. Alsdann lassen sie sich durch Gewichte messen; denn die in einer endlichen Zeit auf einen Körper wirkende Schwere erzeugt eine lebendige Kraft, die folglich vermögend ist, mit einer andern lebendigen Kraft ein Gleichgewicht zu bewirken. Wenn also eine flüßige Masse gegen einen Körper stößt, so sieht man hieraus, daß sich der Stos, den sie auf solche Art ausübt, allemal auf ein gewisses Gewicht bringen läßt.

335. Es ist sehr schwer, die Gesetze des Stoßes flüßiger Massen auf eine genaue und in der Ausübung brauchbare Art zu bestimmen. Man hat hierin bisher noch zu keiner befriedigenden Theorie gelangen können. Bei der gewöhnlichen, die den Vortheil hat, daß sie ungemein einfach ist, nimmt man an, die flüßige Masse sey in iedem Augenblick nach der Richtung ihrer Bewegung aus einer unendlichen Menge paralleler Streifen zusammengesetzt, wovon ieder seinen Stos ausübt, ohne daß einer dem andern hinderlich ist; in aller Schärfe kann aber solches nicht statt finden, und in gewissen Fällen führt es auf Resultate, die von der Wahrheit zuweit abweichen, als man sie beibehalten könnte. Inzwischen bewegen mich zwo Ursachen diese Theorie, ihrer Unvollkommenheit ungeachtet, hier vorzutragen. Einmal dient sie, meinen Lesern das Verständnis verschiedener Werke über die Schiffsbaukunst zu erleichtern, bei denen solche zum Grunde liegt; fürs andere kann sie, wie ich aus der Erfahrung überzeugt worden bin, ohne großen Irrthum zu befürchten, bei Maschinenberechnungen angewendet werden, wenn solche von Wasserrädern in Bewegung gesetzt werden, und überhaupt in allen Fällen, wo der Anstoswinkel nicht zu klein ist, ich will sagen, wo solcher nicht unter 60 Grad beträgt.

336. I. Lehrsatz. **Wenn eine flüßige Masse MXZN (fig. 47.) deren Theilgen sich alle mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, senkrecht gegen die beiden festen Flächen AB, AR stößt; so verhalten sich die Kräfte der Stöße, wie diese Flächen.**

Denn da man voraussetzt, es bewegen sich alle Theilgen der flüßigen Masse nach Richtungen IK, OK, &c. die senkrecht auf beide Flächen sind, so verhält sich die Gewalt des Stoßes gegen die Fläche AB

zur Gewalt des Stoßes gegen die Fläche AR, wie das Produkt aus der Anzahl aller gegen AB stoßenden Theilgen in ihre Geschwindigkeit, zum Produkt aus der Anzahl aller gegen AR stoßenden Theilgen in ihre Geschwindigkeit. Nun sind die Massen, welche in gleichen Zeiten gegen die Flächen AB, AR anschlagen, Prismen, welche diese Ebenen zu Grundflächen und die Geschwindigkeit der flüßigen Masse zur gemeinschaftlichen Höhe haben. Es verhält sich also offenbar die Gewalt des Stoßes auf AB zur Gewalt des Stoßes auf AR völlig so wie die Ebene AB zu der AR.

337. II. Lehrsatz. **Wenn zwo gleichartige flüßige Massen MXZN, EGHF (fig. 47 u. 48.) mit verschiedenen Geschwindigkeiten senkrecht gegen die beiden festen Ebenen AB, CD anstossen, so verhält sich die Gewalt der Stöße, wie die Produkte aus den Ebenen in die Quadrate der Geschwindigkeiten der flüßigen Massen.**

Es sey

die Gewalt des Stoßes gegen AB	.	$= F$
— — — — gegen CD	.	$= f$
die gegen AB stoßende flüßige Masse	.	$= M$
die Geschwindigkeit dieser Masse	.	$= V$
die gegen CD stoßende flüßige Masse	.	$= m$
die Geschwindigkeit dieser Masse	.	$= u$

so hat man $F : f = MV : mu$. Weil nun die flüßigen Massen gleichartig sind, so verhalten sich die Massen M und m wie ihre Räume, und ihre Räume verhalten sich gegen einander wie die Produkten aus den Flächen AB, CD, die ihre Grundflächen ausmachen, in die Geschwindigkeiten der flüßigen Massen, die ihre Höhen vorstellen. Diesemnach hat man $M : m = AB . V : CD . u$, und $MV : mu = AB . V^2 : CD . u^2$; also auch

$$F : f = AB . V^2 : CD . u^2.$$

338. Anmerk. Wären die flüßigen Massen nicht gleichartig, so müßte die Verhältniß der Dichtigkeiten bei der Verhältnis der in einerlei Zeit gegen die Flächen AB, CD, anstoßenden Massen mit in Anschlag kommen. Alsdann wäre die Verhältnis der Stöße aus der Verhältnis der Flächen, der Dichtigkeiten der flüßigen Massen und der Quadraten ihrer Geschwindigkeiten zusammengesetzt.

Man muß diese Bemerkung immer vor Augen haben, wenn der Stos einer flüßigen Masse mit dem einer andern von verschiedener Dichtigkeit verglichen werden soll. So verhält sich z. B. bei gleicher Größe der Flächen, welche den Stos auffangen, und bei gleicher Geschwindigkeit beider flüßigen Massen, der Stos des Wassers zum Stos der Luft wie 850 zu 1, nämlich wie die Dichtigkeiten beider flüßigen Massen.

Der Kürze wegen nehme ich in der Folge allemal an, daß die flüßigen Massen gleichartig oder gleich dicht sind.

339. III. Lehrs. Die beiden flüßigen Massen MXZN, EGHF sollen mit den Geschwindigkeiten V und u beständig senkrecht gegen die beiden Flächen AB, CD stoßen; wenn nun diese Flächen im Augenblick des Stoßes sich selbst parallel mit den Geschwindigkeiten v und u' fortbewegen, so verhält sich die Gewalt der Stöße wie die Produkten aus den Flächen in die Quadrate von den Differenzen oder Summen der Geschwindigkeiten, welche die flüßigen Massen und die Flächen haben.

Denn es sey IT die Geschwindigkeit der ersten Flüßigkeit, und KT die Geschwindigkeit der Fläche AB; LQ die Geschwindigkeit der zwoten Flüßigkeit

und PQ die Geschwindigkeit der Fläche CD; so ist klar, daß die Stöße grade so erfolgen, als wenn die Flächen in Ruhe wären, und die flüßigen Massen, anstatt sich mit den Geschwindigkeiten IT, LQ zu bewegen, sich nur mit den Geschwindigkeiten IK, LP bewegten, weil die Flächen dem Stos mit den Geschwindigkeiten KT, PQ entweichen. Man erhält also, wenn man die Stöße beider flüßigen Massen F und f nennt,

$$F : f = AB . (V - v)^2 : CD\ (u - u')^2$$

Ebenso erhellet, daß, wenn die Flächen, anstatt den flüßigen Massen in ihrer Richtung grade auszuweichen, solchen sich mit den Geschwindigkeiten v, u' entgegen bewegten,

$$F : f = AB\ (V + v)^2 : CD . (u + u')^2$$

wäre. Wenn man also beide Fälle zusammennimmt, so erhält man

$$F : f = AB . (V \mp v)^2 : CD\ (u \mp u')^2$$

340. Zus. Wenn Eine von den Flächen, z. B. unbeweglich ist, so ist $v = o$, und man hat

$$F : f = AB . V^2 : CD . (u \mp u')^2$$

Diese Proportion dient, den senkrechten Stos einer flüßigen Masse gegen eine unbewegliche Fläche mit dem senkrechten Stos gegen eine in Bewegung befindliche zu vergleichen.

341. IV. Lehrs. **Wenn die flüßige Masse MXZN (fig. 47.) senkrecht gegen die unbewegliche Fläche AB anschlägt, und die flüßige Masse EGHF (fig. 49.) gegen die gleichfalls unbewegliche Fläche CD schief stößt; so verhält sich der Stos gegen die Fläche AB zu der senkrechten Wirkung des Stoßes auf CD, wie das Produkt**

aus

aus der Fläche AB in das Quadrat von der Geschwindigkeit der flüßigen Masse MXZN und in das Quadrat des Sinustotus zum Produkt aus der Fläche CD in das Quadrat von der Geschwindigkeit der flüßigen Masse EGHF und in das Quadrat vom Sinus des Anstoswinkels RCD der flüßigen Masse EGHF gegen die Fläche CD.

Es heise

der Stos gegen AB	F
die senkrechte Wirkung des Stoßes gegen CD	f
die Geschwindigkeit der flüßigen Masse MXZN	V
— — — — — EGHF	u
die Masse, welche auf AB stöst . .	M
— — — — CD — . .	m
die auf CD senkrechte Geschwindigkeit .	u′
der Sinustotus	R
der Sinus des Anstoswinkels RCD . .	p

so hat man fürs Erste

$$F : f = MV : mu'$$

Zieht man nun die grade Linie DR, so daß sie auf die Richtung der flüßigen Masse senkrecht ist und sich in der mit dieser Richtung parallelen Linie CR endigt, so ist klar, daß die Anzahl aller auf CD anstossenden Streifen mit der Anzahl aller Streifen, welche an DR stoßen, einerlei ist. Es verhalten sich demnach die flüßigen Prismen, welche in gleichen Zeiten gegen die Flächen AB, CD anstoßen, gegen einander wie ihre Grundflächen AB, DR mit den Geschwindigkeiten der flüßigen Massen, als ihren Höhen, multiplicirt. Man hat daher

$$M : m = AB . V : DR . u$$

oder auch, da $DR = CD . \frac{p}{R}$ ist,

M : m

$M:m=AB.V:CD.\frac{p}{R}.u=AB.V.R:CD.p.u$

Wenn man ferner nach der Richtung irgend eines Streifens xn der flüßigen Masse EGHF den Theil ny nimmt, um die Geschwindigkeit dieser flüßigen Masse auszudrucken, und nun das rechtwinklichte Parallelogramm ntyr verzeichnet, dessen Seite nt auf DC senkrecht und die Seite nr damit parallel ist; so erhellet, daß von den beiden Geschwindigkeiten nt, nr, in welche die Geschwindigkeit ny zerlegt wird, nur die erstere auf den senkrechten Stos gegen CD einen Einfluß hat, und daß man die letztere ganz beiseit setzen müsse. Vergleicht man die Geschwindigkeit nt oder u' mit der Geschwindigkeit u der flüßigen Masse EGHF; so hat man $u':u=ry:ny=p:R$, folglich $u'=u.\frac{p}{R}$. Man erhält also

$$MV:mu'=AB.V^2.R:\frac{CD.\mu^2 p^2}{R}$$

$$=AB.V^2.R^2:CD.u^2.p^2$$

und $$F:f=AB.V^2.R^2:CD.u^2.p^2$$

Diese Proportion dient, den schiefen Stos mit dem senkrechten zu vergleichen, wenn beide Flächen in dem Augenblick des Anprellens in Ruhe sind.

342. I. Zusatz. Wenn die Geschwindigkeiten V und u gleich sind, so hat man schlechtweg

$$F:f=AB.R^2:CD.p^2$$

Hiernach läßt sich der senkrechte Stos einer flüßigen Masse gegen eine Ebene mit dem Stos der nämlichen oder einer gleichen Masse, welche die nämliche Geschwindigkeit hat, gegen eine andere Fläche, die schief gestoßen wird, verglichen.

343. II. Zusatz. Hieraus folgt auch das Verfahren, die senkrechten Wirkungen schiefer Stöße, wann die gestoßenen Flächen in Ruhe bleiben, mit einander zu vergleichen; denn wenn man unter Beibehaltung der übrigen Benennungen (§. 341.) die Größe der Fläche AB = A und die der Fläche CD = B setzt; wenn man ferner eine dritte Fläche C annimmt, die von einer dritten mit der Geschwindigkeit v in Bewegung gesetzten flüßigen Masse gestoßen wird, und nun die sich gegen diese nämliche Fläche ergebende senkrechte Wirkung des Stoßes = φ, den Sinus des Anstoswinkels aber = q setzt; so erhält man diese zwo Proportionen:

$$F : f = A . V^2 . R^2 : B . u^2 . p^2 .$$

$$\varphi : F = C . v^2 . q^2 : A . V^2 . R^2$$

Diese nach der Ordnung mit einander multiplicirt, gibt

$$\varphi : f = C . v^2 . q^2 : B . u^2 . p^2 .$$

Man ersieht hieraus, daß die Kräften φ und f, welche senkrecht gegen die Flächen C und B wirken gegen einander in zusammengesetzter Verhältnis der Flächen, der Quadrate von den Geschwindigkeiten der flüßigen Massen und der Quadraten von Sinussen der Anstoswinkel stehen.

344. III. Zusatz. MXZN, EGHF (fig. 50 und 51.) seyen zwo flüßige Massen, welche unter schiefen Richtungen gegen die beiden Flächen AB, CD stoßen, die sich selbst parallel mit den Geschwindigkeiten IO, LS bewegen. Die Geschwindigkeiten der beiden flüßigen Massen drucke man durch die graden Linien IT, LQ aus; hiernächst zerlege man die Geschwindigkeiten IT in zwo andere IO, IP, deren Eine IO mit der Geschwindigkeit der Ebene AB einerlei ist;

und

und die Geschwindigkeit LQ in zwo andere, LS, LK, deren Eine LS mit der Geschwindigkeit der Ebene CD einerlei ist. Die beiden Geschwindigkeiten IP, LK und die Winkel PIA, KLC, die sie mit den Flächen AB, CD machen, sind Größen, welche sich durch die Regeln der Trigonometrie bestimmen lassen, indem in den beiden Parallelogrammen IPTO, LKQS die Diagonalen IT, LQ, die Seiten IO, LS, die Winkel OIT, SLQ und überdas die Winkel TIO und QLS (*) bekannt sind. Nun ist klar, daß die flüßigen Massen nur vermög der Geschwindigkeiten IP, LK auf die Flächen wirken, weil sich diese Flächen, vermög ihrer eigenen Geschwindigkeiten, der Wirkung der Geschwindigkeiten IO, LS ganz und gar entziehen. Die beiden Stöße erfolgen also nothwendig grade so, als wenn die Flächen unbeweglich wären, die flüßigen Massen aber mit den Geschwindigkeiten IP, LK gegen sie anstießen. Nennt man daher f und f' die Kräfte, welche aus diesen Stößen nach senkrechten Richtungen gegen die Flächen AB, CD entstehen; p den Sinus des Winkels PIA, q den Sinus des Winkels KLC, so hat man nach dem vorigen §.

$$f : f' = AB \cdot (IP)^2 \cdot p^2 : CD \cdot (LK)^2 \cdot q^2$$

Diese Proportion dient zur Vergleichung der Stöße, welche zwo flüßige Massen senkrecht gegen zwo Flächen ausüben, die sie schon aus andern Gründen, sich selbst parallel, fortbewegen.

345.

(*) Im Text steht eigentlich TIA, QLC, nach dem in der Originalschrift angehängten Verzeichnis von Druckfehlern soll man aber TIO, QLS lesen. Inzwischen ist solches eine offenbar falsche Korrektion, weil die vorhergenannten Winkeln OIT, SLQ eben die nämlichen sind.

345. Allgem. Erinner. Nachdem man nun gesehen hat, wie die verschiedenen Arten von Stößen flüßiger Massen mit einander verglichen werden, kommt es noch drauf an, das absolute Maas von einer unter ihnen angeben zum können, um daraus auf solches bei allen andern schließen zu können. Nun ist der Erfahrung gemäs der senkrechte und gradaus gehende Stos einer unbegrenzten flüßigen Masse gegen eine unbewegliche Fläche ohne merkliche Abweichung dem Gewicht einer Säule von dieser flüßigen Masse gleich, welche die angestoßene Fläche zur Grundfläche und die der Geschwindigkeit des Stoßes zugehörige Höhe zur Höhe hätte, so daß man diesen Stos P, die Größe der angestoßenen Fläche s^2, die der Geschwindigkeit der flüßigen Masse zugehörige Höhe h, und die specifische Schwere dieser flüßigen Masse p nennt, man beinahe

$$P = p . s^2 . h$$

erhält. Der Werth von h läßt sich nach den Gesetzen vom Fall schwerer Körper bestimmen.

Es sey z. B. die Fäche s^2 ein Quadratfus und die flüßige Masse sey süßes Wasser, wovon der Kubikfus beinahe 70 ℔. wiegt; das Wasser schieße in diesem Fall mit der gleichförmigen Geschwindigkeit von 1 Fus in einer Sekunde gegen die Fläche; so findet man, daß der Stos P einem Gewicht von etwa 19 Unzen gleichgültig ist.

Der Stos flüßiger Massen, die sich in engen Kanälen oder Fluthern gegen Flächen bewegen, die beinahe die ganze Breite dieser Fluther einnehmen, ist größer, wie man in der Folge aus Erfahrungen sehen wird.

Wir wollen einige allgemeine Anwendungen von vorstehender Theorie machen.

346.

346. I. Aufg. Es sey das gleichschenklichte Dreieck ABC (fig. 52.) unbeweglich, und dem Stos einer flüßigen Masse ausgesetzt, deren Richtung auf seine Grundfläche AB senkrecht ist; man sucht die Verhältnis des Stoßes, welchen dieses Dreieck nach einer mit seiner Höhe CD parallelen Richtung leidet, zu dem unmittelbaren senkrechten Stos, welchen seine Grundlinie AB leiden würde.

Wenn man den unmittelbaren Stos auf AD oder DBF; den Stos, welcher senkrecht gegen AC oder CB wirkt, f, und den Sinustotus R nennt; so erhält man (342)

$$F : f = AD . R^2 : AC . (\sin ACD)^2 = AD . (AC)^2 :$$
$$AC . (AD)^2 = AC . AD$$

also $f = \frac{F . AD}{AC}$. Nun überlege man, daß sich die Stöße auf AC und CB zum Theil einander aufheben. Denn nimmt man zween ähnlich liegende Streifen OR, or; druckt die senkrechten Stöße auf die Stellen R, r durch die gleichgroßen grade Linien RF, rf aus, die auf die Seiten des Dreiecks AC, CB senkrecht sind, und macht nun die rechtwinklichten Parallelogramme ERHF, erhf, deren Seiten RH, rh mit AB, und die Seiten RE, re mit CD parallel sind; so ist klar, daß von den vier Kräften RH, RE, rh, re, in die sich die Kräfte RE, rf zerlegen, die beiden RH, rh einander aufheben, und nur noch die beiden Kräfte RE, re übrig bleiben, um das Dreieck nach einer mit CD parallelen Richtung fortzustoßen. Setzt man nun ferner die Kraft RE oder re = Φ, so erhält man

$$f : \Phi = RF : RE = AC : AD$$

folglich

$$\Phi = \frac{f . AD}{AC}$$

Statt

Statt f seinen Werth $\frac{F.AD}{AC}$ gesetzt, gibt

$$\varphi = \frac{F.(AD)^2}{AC^2}$$

Demnach

$$\varphi : F = (AD)^2 : (AC)^2$$

und

$$2\varphi : 2F = (AD)^2 : (AC)^2$$

Diese Proportion lehrt, daß der gegen das Dreieck mit seiner Höhe parallel ausgeübte Druck sich zu dem Druck, welcher unmittelbar gegen seine Grundlinie ausgeübt würde, verhält wie das Quadrat der halben Grundlinie zum Quadrat Einer von den Seiten. Wenn also die zwote von den Kräften bekannt ist, so findet sich daraus auch die erste.

347. I. Zusatz. Wenn also das gleichschenklichte Dreieck ACB rechtwinklicht ist, so ist der auf dasselbe mit seiner Höhe parallel ausgeübte Stos nur halb so groß als der Stos, welcher die Grundlinie unmittelbar träfe. Denn alsdann ist ADC ein gleichschenklichtes Dreieck, und man hat $(AD)^2 : (AC)^2 = 1 : 2$.

348. II. Zusatz. Auch folgt hieraus, daß, wenn man ein Quadrat ACBM (fig. 53.) hat, welches zuerst nach der Richtung seiner Diagonale CM, hiernächst aber auf Eine seiner Seiten AC senkrecht gestossen wird, der erste Stos sich zum zweeten verhält wie 1 zu $\sqrt{2}$ oder beiläufig wie 7 zu 10. Denn im ersten Fall nimmt nur das Dreieck ACB den Stos auf, die andere Hälfte ABM des Quadrats leidet davon nichts, und im andern Fall empfindet nur die Seite AC allein den Stos. Wenn man also den ersten Stos M, den

andern A und überdas den Stos, welchen AB senkrecht aufnehmen würde, B nennt, so erhält man diese beide Proportionen

$$M : B = 1 : 2$$

$$B : A = AB : AC = \sqrt{2} : 1$$

woraus sich zween Werthe von B ergeben, die einander gleich gesetzt, die Proportion geben:

$$M : A = \sqrt{2} : 2 = 1 : \sqrt{2}$$

349. II. Aufgabe. Der halbe Umkreis AQB (fig. 54.) wird von einer flüßigen Masse gestoßen, deren Richtung OC auf den Durchmesser AB senkrecht ist; man sucht die Verhältnis des Stoßes, welcher auf diesen Halbkreis mit OC gleichlaufend wirkt, zu dem Stos, welcher unmittelbar und senkrecht auf den Durchmesser AB gerichtet wäre.

Es sey der Halbkreis AQB in unendlich viele Elementen Ff, Ll ꝛc. durch die graden mit dem Durchmesser AB parallelen FL; fl, getheilt, und die Ordinaten FS, fs, LT, lt ꝛc. gezogen; der unmittelbare Stos, den FR oder Ss aufnehmen würde, heise F; der Stos, welchen Ff in einer mit QC parallelen Richtung aufnimmt, Φ; so erhält man $\Phi = \frac{F.(FR)^2}{(Ff)^2}$

Man ziehe den Halbmesser CF, so geben die ähnlichen Dreiecke FRf, FSC, FR: Ff = FS: CF folglich $\frac{(FR)^2}{(Ff)^2} = \frac{FS^2}{CF^2}$, und $\Phi = \frac{F.(FS)^2}{(CF)^2}$.

Um also den ganzen Stos, welcher auf den Halbkreis nach einer mit OC parallelen Richtung wirkt, zu erhalten, kommt es nur drauf an, die Summe aller solcher Größen wie $\frac{F.FS^2}{CF^2}$ oder $\frac{Ss.(FS)^2}{(CF)^2}$ zu finden,

so

so daß man den unmittelbaren Stos gegen FR oder Ss durch diese Linie selbst ausdruckt. Wenn man nun den Halbkreis ABQ sich um den Durchmesser AB herumdrehen läßt, so erzeugt er eine Kugel, die $\frac{m}{1}$. $(FS)^2$. Ss zum Element hat, wo $\frac{m}{1}$ die Verhältnis des Umkreises zum Durchmesser bedeutet. Es verhält sich also der ganze gesuchte Stos zum körperlichen Raum der Kugel, wie $\frac{1}{(CF)^2}$ zu $\frac{m}{1}$. Es ist aber der körperliche Raum der Kugel $= m.(CF)^2 \frac{2}{3} AB$; demnach ist der gesuchte Stos $= \frac{2}{3} AB$; das ist, wenn der unmittelbare Stos gegen AB durch eben diese Linie AB ausgedruckt wird, so wird der Stos, welcher auf den Halbkreis parallel mit AC wirkt, durch zwei Drittheil von AB ausgedruckt. Es verhalten sich also diese beiden Stöße gegen einander wie 3 zu 2; und es gibt sich also einer aus dem andern (*).

Nach dieser Theorie ist der Stos des Wassers auf einen in einem Strohm befindlichen Zilinder, dessen Axe mit der Richtung des Wassers einen rechten Winkel macht, $\frac{2}{3}$ so groß als der Stos auf ein um denselben gelegtes rechtwinklichtes Parallelepipedum, dessen vordere Seitenfläche von dem Wasser senkrecht getroffen wird. Denn die vordere Zilinderfläche und die

(*) Man sieht ohne mein Erinnern, daß AQB hier nicht etwa eine Halbkugel, sondern nur einen Halbkreis vorstellt. Die Anwendung dieses Satzes auf einen Körper setzt also voraus, daß iede mit der Richtung OC parallel durch den Körper gelegte lothrechte Fläche solchen auf seiner gegen das Wasser gekehrten Oberfläche in einer Linie AQB schneide, die ein Halbkreis sey, d. i. daß die dem Stos zugekehrte Oberfläche des Körpers zilindrisch sey.

die damit korrespondirende vordere Fläche des Parallelepipedums sind die einzigen Theile, welche den Stos aufnehmen, so daß daher keiner der übrigen Theile getroffen werden kann.

350. III. Aufg. **Den Stos einer flüßigen Masse gegen eine krumme Linie oder gegen irgend einen Körper allgemein zu bestimmen.**

Aus der gegebenen Lage der krummen Linie findet man nach (341) die Kraft, welche der Stos gegen Eines seiner Elementen senkrecht ausübt. Dieser Stos kann allemal durch Funktionen einer einzigen veränderlichen Größe vermittelst der Gleichung für die gegebene krumme Linie ausgedruckt werden. Solchen zerlegt man in zwo Kräfte, die mit zwo Linien von gegebener Lage parallel laufen, welche ich A, B, nennen will, und die ich zur mehrern Simplicität gegen einander senkrecht annehme. Hierdurch erhält man zwo Arten von Kräften, deren Summen oder vereinigte Wirkungen man durch die Integration bestimmen muß (*); sodann findet man die Lagen dieser vereinigten Kräften durch die Theorie von den Momenten.

Man findet also die Größen und Richtungen der wirklichen Kräfte, welche die krumme Linie mit den beiden Linien A, B parallel treiben, und folglich auch die vereinigte Wirkung dieser beiden Kräfte.

Die

(*) Wenn aus verschiedenen gegen einen Körper angebrachten Kräften eine dritte nach einer dritten Richtung entsteht, wie z. B. wenn zwo Kräfte, durch die Seiten eines Parallelogramms ausgedruckt, eine dritte hervorbringen, deren Größe und Richtung durch die Diagonale ausgedruckt wird, so heißt diese dritte la résultante; ich übersetze dieses durch **vereinigte Kraft oder vereinigte Wirkung.**

Die nämliche Methode läßt sich auch auf ieden Körper anwenden, indem man den Stos, insoweit er gegen Eines von den Elementen dieses Körpers senkrecht wirkt, in drei Kräfte zerlegt, die mit drei Linien von gegebener Lage A, B, C parallel sind, welche sich in einem Punkt durchkreuzen, und die man senkrecht auf einander annehmen kann.

Da die Berechnungen, auf welche diese allgemeinen Methoden führen, ein wenig weitläuftig sind, ohne iedoch schwer zu seyn, und sie übrigens keinen großen Nutzen haben können, so schränke ich mich hier nur auf die Formeln für die einfachsten Fälle ein.

1stens. Es sey FQF' (fig. 55.) eine krumme Linie, die in zween gleiche und ähnliche Theile QF, QF' durch ihre Axe QC getheilt ist; sie werde von einer flüßigen Masse nach einer mit dieser Axe parallelen Richtung gestoßen. Auf der Axe QC ziehe man die einander unendlich nahe Ordinaten PF, pf; und die Fr der QC gleichlaufend; es sey PF = y, fr = dy, Ff = ds, die Geschwindigkeit der flüßigen Masse = V. Man nenne ferner F den senkrechten Stos einer mit der Geschwindigkeit U gegen eine gegebene unbewegliche ebene Fläche A stoßenden flüßigen Masse; so sieht man, daß (337) der senkrechte Stos gegen fr durch $\frac{F.V^2.dy}{AU^2}$ oder $n.V^2\,dy$ ausgedruckt wird, wenn man der Kürze wegen n statt des Koefficienten $\frac{F}{AU^2}$ setzt, der eine beständige und gegebene Größe ist, den ich allgemein den Koefficient des Stoßes nennen will (†).

Wenn

(†) Man muß sich diesen Ausdruck und den Sinn, den ich damit verbinde, merken, weil ich solchen noch oft gebrauchen werde.

Wenn die vom Stos entstehende senkrechte Wirkung auf Ff in zwo Kräften zerlegt wird, die Eine nach FP, die Andere nach Fr, und die erste dieser Kräften durch eine von F' herkommende gleiche und entgegengesetzte Kraft aufgehoben wird; so folgt (346), daß der Stos auf Ff nach der Richtung $Fr = nV^2 dy \frac{dy^2}{ds^2}$ oder $nV^2 . \frac{dy^3}{ds^2}$. Es ist nun weiter nichts mehr übrig, als ds aus dieser Formel mittelst der Gleichung für die krumme Linie wegzuschaffen, und dann zu integriren.

Man setze z. B. es sey FQF' ein Kreis vom Halbmesser CQ = a, so erhält man $ds^2 = \frac{a^2 dy^2}{a^2 - y^2}$, und die allgemeine Formel $\frac{nV^2 . dy^3}{ds^2}$ verwandelt sich in

$$\frac{nV^2 dy . (a^2 - y^2)}{a^2}$$ deren Integral =

$$nV^2 y - \frac{nV^2 y^3}{3a^2}$$

welches der Werth des Stoßes gegen den unbestimmten Bogen QF nach der Richtung QC ist.

Setzt man y = a, so erhält man $\frac{2nV^2 a}{3}$ für den Stos gegen den vierten Theil des Umfangs. Und da der senkrechte Stos gegen den Halbmesser $a = nV^2 a$ (337) wäre, so erhellet, daß der Stos gegen den vierten Theil des Umkreises zwei Drittheile von dem senkrechten Stos gegen den Halbmesser beträgt, und der Stos gegen den Halbkreis zwei Drittheile von dem senkrechten Stos gegen den Durchmesser, welches mit dem vorigen §. übereinstimmt (*).

Es

(*) Läge die Sehne des dem horizontalen Strohm ausgesetzten Bogens horizontal, so daß die Höhe des Bogens

Es sey für ein zweites Beispiel QF eine Parabel von dem Parameter p, so findet man $ds^2 = \frac{dy^2(p^2+4y^2)}{p^2}$, und die Formel $\frac{nV^2 dy^3}{ds^2}$ verwandelt

---

Bogens $= \frac{a}{m}$ wäre, so wäre der Stos gegen das Komplement dieses Bogens zu $90° = nV^2\left(a - \frac{a}{m}\right) - \frac{nV^2}{3a^2} \cdot \left(a - \frac{a}{m}\right)^3$, also der Stos gegen das Bogenstück, dessen Höhe $\frac{a}{m}$ ist, $= \frac{2nV^2a}{3} - \left(nV^2\left(a - \frac{a}{m}\right) - \frac{nV^2}{3a^2} \times \left(a - \frac{a}{m}\right)^3\right) = \frac{nV^2}{3a^2} \cdot \left(a - \frac{a}{m}\right)^3 + nV^2 \cdot \frac{a}{m} + \left(\frac{2}{3}nV^2a - nV^2a\right) = nV^2\left(\frac{\left(a - \frac{a}{m}\right)^3}{3a^2} + \frac{a}{m} - \frac{1}{3}a\right)$

oder

$$= nV^2 \cdot \frac{a}{m} - nV^2\left(\frac{1}{3}a - \frac{\left(a - \frac{a}{m}\right)^3}{3a^2}\right)$$

Exempel. Es sey $m = 4$, so wäre der unmittelbare Stos gegen eine Vertikallinie von der Höhe $\frac{1}{4}a = nV^2 \cdot \frac{1}{4}a$, gegen den Bogen aber, dessen Höhe $= \frac{1}{4}a$ ist und dessen Sehne horizontal liegt, findet sich der Stos nur $= \frac{11}{192} \cdot nV^2 \cdot a$, der sich zu jenem verhält wie $\frac{11}{192}$ zu $\frac{11}{44}$ oder wie 44 zu 192.

Eben so ergibt sich für $m = 8$ diese Verhältnis wie 23 zu 192.

delt sich in $\frac{nV^2 . p^2 dy}{p^2 + 4y^2}$, dessen Integral $= nV^2 \int \frac{\frac{p^2}{4} dy}{\frac{p^2}{4} + y^2}$ das ist dem Produkt aus der beständigen Größe nV^2 in einen Kreisbogen, dessen Tangente, für den Halbmesser $\frac{p}{2}$, $= y$ ist.

2tens. Die krumme Linie QPF erzeuge durch ihre völlige Umwälzung um die Axe QC einen Körper. Das Element Ff beschreibe eine Zone, welche nach der Richtung QC einen Stos erhalte (der hier allein in Betrachtung kommt), welcher sich zu dem auf den durch fr beschriebenen Ring senkrechten Stos offenbar verhält, wie der einfache Stos gegen Ff nach der Richtung QC zu dem senkrechten Stos auf fr, das ist,

wie $\frac{nV^2 . dy^3}{ds^2}$ zu $nV^2 . dy$ oder wie dy^2 zu ds^2.

Nun ist, wenn man die Verhältnis des Umkreises zum Durchmesser m heist, der senkrechte Stos gegen den von fr beschriebenen Ring

$$= nV^2 . 2my dy$$

Es ist also der elementarische Stos gegen die von Ff beschriebene Zone nach der Richtung QC

$$= \frac{2nmV^2 . y dy^3}{ds^2}$$

In diesem Ausdruck muß man für ds^2 seinen aus der Natur der krummen Linie gegebenen Werth substituiren und hierauf integriren.

Es sey z. B. FQF' ein Kreis vom Halbmesser $CQ = a$. Statt ds^2 seinen Werth $\frac{a^2 dy^2}{a^2 - y^2}$ gesetzt, gibt

gibt statt der vorhergehenden Formel

$$\frac{2nmV^2ydy(a^2-y^2)}{a^2}$$

und dieses integrirt

$$nmy^2V^2 - \frac{nmV^2y^4}{2a^2}$$

Setzt man $y = a$, so erhält man $\frac{nmV^2a^2}{2}$ für den Stos gegen die Halbkugel oder gegen die ganze Kugel (denn dieses ist gleichgültig).

Der Stos gegen die Fläche des größten Kreises der Kugel wäre $nV^2 . ma^2$. Also beträgt der Stos gegen die Kugel nur die Hälfte von dem Stos gegen ihre größte Kreisfläche. (*)

Wenn QF eine Parabel vom Parameter p ist, so verwandelt sich die Formel $\frac{2nmV^2 . ydy^3}{ds^2}$ in $\frac{2nmV^2p^2ydy}{p^2+4y^2}$, und dieses integrirt, gibt

$$\frac{nmV^2p^2}{4} L\left(\frac{p^2+4y^2}{p^2}\right).$$

Anmer-

(*) S. meine mechanische und hydrodyn. Untersuchungen S. 224 u. f. wo gewiesen wird, daß die senkrechte Wirkung, welche der Stos auf die Kugel ausübt, gleichfalls dem halben Stos auf die größte Kreisfläche gleich ist; es ist also bei der Kugel die Kraft, womit der Stos senkrecht auf die Oberfläche wirkt, so groß als die Kraft, womit derselbe längst der Richtung der flüßigen Masse wirkt. Bei mir ist nämlich a. a. O. nicht von der mit der flüßigen Masse parallelen, sondern von der senkrechten Wirkung die Rede, daher für andere Körper meine dortigen Sätze von denen hier nothwendig abweichen.

Anmerkung über die drei vorstehende Aufgaben.

351. Die Auflösung von der ersten dieser Aufgaben wird mit der Erfahrung ziemlich übereinstimmen, wofern der Winkel ORC oder ACD (fig. 52), unter welchem die flüßige Masse gegen iede Seite des Dreiecks stößt, etwas groß, das ist zwischen 60 und 90 Graden enthalten ist. Für Winkel aber, die schon merklich kleiner als 60 Grad sind, entspricht die Theorie nicht mehr der Erfahrung. Die Gewalt des Stoßes nimmt alsdann nach der Erfahrung nicht soviel ab, als nach der Theorie geschehen sollte.

Die beiden andern Aufgaben dienen zu weiter nichts, als zu zeigen, wie man die vorgetragene Theorie auf krumme Flächen anwendet. Denn die Erfahrung ist auch hierin der Theorie entgegen, aber in einer andern Bedeutung. Die Erfahrung beweißt nämlich z. B. daß der Stos gegen den Halbkreis AQB (fig. 54.) nur etwas weniges größer als die Hälfte von dem senkrechten Stos auf den Durchmesser AB ist, da er doch nach der Theorie zwei Drittheile davon betragen sollte.

Man sieht hieraus, daß alle Anwendungen, die man von dieser Theorie gemacht hat, um den **Körper vom geringsten Widerstand** zu bestimmen, oder um überhaupt die Aufgaben, welche sich auf die umgekehrte Methode der Tangenten beziehen, aufzulösen, blos hypothetische Resultaten geben, die man nur mit großer Behutsamkeit auf die Schifffahrt anwenden darf.

Ich füge hier noch eine Aufgabe bei, die sich auf eben diese Theorie gründet, um die Vorstellung zu erläutern, welche Leibnitz von den Veränderungen des Barometers gegeben hat, und die wir oben (116) erwähnt haben.

352.

352. IV. Aufg. **Wenn ein sphärischer Körper in der flüßigen Masse, worin er eingetaucht ist, lothrecht herabfällt; die Kraft zu finden, welche aus dieser Bewegung gegen den Boden entsteht.**

Es ist klar, daß der Körper während dem Fallen in iedem Augenblick vermög seiner erlangten Geschwindigkeit gegen die flüßige Masse stöst, und daß dieser Stos, der sich nach allen Richtungen durch die flüßige Masse fortpflanzt, auch auf den Boden des Gefäßes wirkt. Wir suchen also seinen Werth. Es sey

der Halbmesser des Körpers . . = a
seine Masse oder sein Gewicht . . = P
das Gewicht der durch den Körper aus ihrer Stelle getriebenen flüßigen Masse = P'
der lothrecht durchloffene Raum . . = s
die Geschwindigkeit am Ende dieses Raums = u
der Koefficient des Stoßes . . = n
die Verhältnis des Umkreises zum Durchmesser . . . . . = m

Der Körper wird in iedem Augenblick von oben herab durch den Ueberschuß seines Gewichts über das Gewicht der aus ihrer Stelle vertriebenen Flüßigkeit, und über den Widerstand, den er durch seinen Stos gegen diese Flüßigkeit leidet, der $= \frac{n m a^2 u^2}{2}$ ist (350), nieder getrieben. Es ist also die absolute beschleunigende Kraft des Körpers $P - P' - \frac{n m a^2 u^2}{2}$; und man hat nach den gemeinen Formeln dieser Bewegungsarten

$$P du = \left(P - P' - \frac{n m a^2 u^2}{2}\right) ds$$

oder

$$ds = - \frac{P}{n m a^2} \times - \frac{2 n m a^2 u du}{2P - 2P' - n m a^2 u^2},$$

wovon

wovon das Integral

$$s = A - \frac{P}{n m a^2} \times L(2P - 2P' - n m a^2 u^2)$$

Die beständige Größe A muß so beschaffen seyn, daß $s = o$, $u = o$ gibt; und man hat also

$$s = \frac{P}{n m a^2} \times L\left(\frac{2P - 2P'}{2P - 2P' - n m a^2 u^2}\right)$$

Wenn also die Zahl, deren natürlicher Logarithme 1 ist, c heist, so multiplicire man s durch L. c, und gehe hierauf von den Logarithmen wieder auf die Zahlen selbst zurück, so erhält man

$$u^2 = 2\left(\frac{P - P'}{n m a^2}\right) \times \left(1 - c^{-\frac{n m a^2 s}{P}}\right)$$

Der Ausdruck für den Stos der flüßigen Masse d. i. $\frac{n m a^2 u^2}{2}$ verwandelt sich also in

$$(P - P') \cdot \left(1 - c^{-\frac{n m a^2 s}{P}}\right)$$

Da die Zahl c größer als 1 ist, indem sie zwischen 2 und 3 fällt (*), so erhellet, daß der Werth für den Stos wächst, wenn s zunimmt, und daß dieser Stos $= P - P'$ wird, wenn $s = \infty$ ist.

Da nun die Höhe, von der ein Regentropfen herabfällt, niemalen sehr beträchtlich ist, so folgt, daß der Widerstand, den er im Fallen leidet, oder der Druck, den er daher auf die Oberfläche der Erde ausübt, allemal merklich geringer ist, als das Gewicht eines

(*) Es ist nämlich $c = 2{,}718281828\ldots$.

eines solchen Tropfens. Der Druck der Luft auf den untern Knopf des Barometers ist also geringer, wann die Regentropfen fallen, als wenn solche in der Atmosphäre in kleinen Theilgen zurückgehalten werden, und das Barometer muß daher, wie Leibnitz aus seiner Hypothese schließt, alsdann fallen.

Vierzehntes Kapitel.

Allgemeine Betrachtungen über die hydraulische Maschinen, und die besondere Theorie solcher Maschinen, welche durch den Stos des Wassers betrieben werden.

353.

Eine hydraulische Maschine heißt ohne Unterschied iede Maschine, welche bestimmt ist, Wasser auf eine gewisse Höhe zu erheben, oder welche durch die Wirkung eines laufenden Wassers in Bewegung gesetzt wird. Die wirkenden Kräfte, welche im ersten Fall die Bewegung verursachen oder unterhalten, können von ieder verlangten Art seyn. Oft wird eine zur Erhebung des Wassers bestimmte Maschine zugleich durch laufendes Wasser betrieben. Sie ist alsdann in gedoppeltem Betracht hydraulisch. Die Effekte dieser Maschinen werden ebenso wie die von den übrigen durch die bekannte Gesetze der Mechanik bestimmt.

354. Ohne diese Gesetze umständlich zu wiederholen, bemerken wir, daß die bewegende Kraft allemal eine durch den Bau und das Spiel der Maschine bestimmbare Verhältnis zu dem wirklichen und nutzbaren Effekt dieser Maschine hat, um dessen willen sie angelegt wird. Diese Kraft und dieser Effekt lassen sich durch gegebene Gewichte ausdrucken, die sich mit bekannten Geschwindigkeiten bewegen. Es sey daher P das erste Gewicht, V seine Geschwindigkeit, π das zweite Gewicht, v seine Geschwindigkeit; so erhellet sogleich, daß der Effekt $\pi . v$ niemalen größer seyn kann

kann als die Ursache P. V. Es ist also umsonst, wenn manche Maschinenkundige den Effekt einer bewegenden Kraft durch Hebel, Räder und dergleichen Mittel zu vergrößern meinen. Die Hebel haben für sich selbst keine wirkende Kraft; sie können zu weiter nichts dienen, als die beiden Faktoren P und V, welche durch ihre Multiplikation die bewegende Kraft ausmachen, auf verschiedene Weise zu modificiren. Wenn sie das Bewegungsgewicht P vergrößern, so vermindern sie in eben der Verhältnis seine Geschwindigkeit V; und umgekehrt, wenn sie seine Geschwindigkeit V vergrößern, so vermindern sie P in eben der Verhältnis. Der Effekt π. v wäre der ganzen Bewegursache P. V gleich, wenn diese nicht zum Theil verwendet würde, die Reibung zu überwinden oder noch andere bei der Maschine vorfallende Bewegungen, um deren willen eigentlich die Maschine nicht betrieben wird, hervorzubringen (*).

Man

(*) Eigentlich ist allemal der Effekt der Ursache gleich, wenn nämlich unter dem Effekt der Inbegriff aller Wirkungen verstanden wird, welche durch die Ursache hervorgebracht werden. Es ist aber allerdings sehr nützlich, den nutzbaren Effekt von dem allgemeinen zu unterscheiden. Ersterer ist eigentlich die Wirkung, die man von einer Maschine verlangt, und die man auch im praktischen Leben unter dem Wort Effekt versteht. Wenn man zwo Pumpwerke hat, wo das erste stündlich 1000 Eimer Wasser auf eine gewisse Höhe hebt, das letztere aber nur 800 Eimer auf eben die Höhe bringt, bei ersterem hingegen nur $\frac{1}{5}$ der angewendeten Kraft auf die Friktion verwendet wird, und bei letzterem $\frac{2}{5}$, so ist offenbar der allgemeine Effekt bei dem zweiten Pumpwerk größer als beim ersten, allein der nutzbare Effekt ist kleiner, und man sagt daher schlechtweg, das zweite Pumpwerk leiste nicht soviel als das erste, weil die Wältigung der Friktion nicht zum Zweck der Maschine gehört. In diesem Sinne ist also allemal P. V >

π. v

Man hat daher für die Ausübung P. V > π. v. Die vollkommenste Maschine wäre diejenige, welche durch ihren Bau und das Spiel aller ihrer Theile den Werth von π. v dem von P. V am nächsten brächte. Wenn man unter π. v den gesammten Effekt der Maschine versteht, oder unter diesem Ausdruck nicht blos den nutzbaren Effekt, sondern auch die zur Wältigung der Hindernisse ausgeübte Wirkung mit begreift, so hat man für alle Fälle π. v = P. V.

355. Die Wahl einer Maschine, die Bestimmung und Verbindung der einzelen Theile, woraus sie zusammengesetzt werden muß, um den verlangten Effekt zu erhalten, gehört eigentlich für die Mechanik. Hier ist es meine Absicht, überhaupt die Wirkung einer flüßigen Masse als Bewegungskraft einer Maschine zu untersuchen, auf welche diese Wirkung mittelst eines durch die flüßige Masse herumgedrehten Rads fortgepflanzt wird; es mag nun die flüßige Masse dieses Rad mittelst ihrer erlangten Geschwindigkeit durch den Stos in Bewegung setzen, oder mittelst ihres Gewichts durch den Druck, oder endlich mittelst einer ihrer Bewegung entgegengesetzten Rückwirkung. Hr. Joh. Albert Euler, ein würdiger Sohn und Nacheiferer des großen Meßkünstlers Leonhard Euler, hat diesen Gegenstand in einer trefflichen Abhandlung, welche 1754 von der Akademie zu Göttingen den Preis erhalten hat, abgehandelt. Er hat den Effekt derer durch die Rückwirkung des Wassers betriebenen Maschinen mit einer ganz vorzüglichen Sorgfalt untersucht; und

---

π. v Will man den vortheilhaftesten Gang einer Maschine berechnen, so muß man offenbar den Gang suchen, wobei der nutzbare Effekt am größten wird, und es ist ein Fehler, wenn in den mechanischen Schriften dergleichen Berechnungen allemal für den allgemeinen Effekt angestellt werden.

und die Reichhaltigkeit dieser Materie ist so groß, daß wir ihr noch drei schöne Abhandlungen des ältern Herrn Eulers zu verdanken haben (Acad. de Berlin 1750, 1751, 1754).

356. Herr Parent hat zuerst die gemeine Theorie vom Stos flüßiger Massen auf die Bewegung der Räder, welche durch den Stos fließenden Wassers betrieben werden, glücklich angewendet (Acad. de Paris 1704). Seine Methode beruht auf einigen etwas willkührlichen Vorausseßungen, welche die Rechnung erleichtern und einfacher machen: will man aber die Frage mit mehr Strenge und Allgemeinheit vortragen, und übrigens dabei die nämlichen Grundsätze befolgen, so stößt man auf schwierige Aufgaben, wovon der größte Theil ganz neu war, als ich sie zum Gegenstand einer Abhandlung wählte, welche unter die Denkschriften der Akademie (1769.) eingerückt worden sind. Hier folgt eben diese Theorie noch umständlicher und in weiterem Umfang.

357. Ein Rad, das vermög des Wasserstoßes herumgeht, ist an seinem Umfang mit Brettern beseßt, die man im gemeinen Leben Schaufeln (ailes ou aubes) nennt, gegen welche das Wasser nach und nach anschlägt. Diese Gewalt des Wassers vertritt die Stelle eines am einen Ende eines Hebels angebrachten Gewichts, der sich um seinen andern Endpunkt, welchen hier der Mittelpunkt des Rads vorstellt, frei herumdrehen läßt. Ich bringe alle solchergestalt bewegte Räder auf zwo Arten: die vertikalen, welche durch einen horizontalen Wasserschuß in Bewegung geseßt werden (*), und

(*) Diese Erklärung ist der Natur der Sache nicht angemessen, denn auch auf die vertikalen Räder, d. i.

und die horizontalen, deren gegen den Horizont geneigten Schaufeln durch einen gleichfalls schiefen Wasserschuß gestoßen werden. Ich setze ferner allemal voraus, daß die Schaufeln nach dem Mittelpunkt des Rads gerichtet sind; wobei ich mir vorbehalte, in der Folge aus der Erfahrung mit Zuziehung der Theorie zu untersuchen, in welchen Fällen es vortheilhaft ist, die Schaufeln gegen den Halbmesser zu neigen. Wir wollen mit den vertikalen Rädern den Anfang machen.

358. Es sey also AHLK (fig. 56.) das vertikale Rad, dessen Schaufeln nach und nach durch den horizontalen Strohm XYTS getroffen werden, so daß sich das Rad nach der Richtung AHLK herumdreht. Alle diese Schaufeln, die gleichgroß sind und gleichweit von einander abstehen, sind Rektangeln, deren Seiten SK, ED, BA ꝛc. die nach dem Mittelpunkt gerichtet sind, die Höhen der Schaufeln ausdrucken, und die andern Seiten, welche horizontal liegen und durch die Punkte S, E, B ꝛc. angedeutet werden, die Breite der Schaufeln ausmachen. In den ersten Augenblicken des Wasserstoßes wird die Bewegung des Rads allmälig, beinahe wie die Bewegung frei fallender Körper, beschleunigt (*). Es erfolgt aber diese

---

solche, deren Wellbäume horizontal liegen, wird das Wasser in schiefer Richtung geleitet. Horizontale sind solche, deren Wellbäume vertikal stehen.

(*) Doch unterscheidet sich die beschleunigende Kraft beim Rad von der bei fallenden Körpern darin sehr beträchtlich, daß sie bei letztern unveränderlich, bei ersteren aber beständig abnehmend ist, weil die relative Geschwindigkeit des anstoßenden Wassers immer kleiner wird. Das Gesetz der allmäligen Beschleunigung ließe sich zwar durch die mechanischen Grundsätze vom Moment der Trägheit und der Uebermacht

diese Beschleunigung sehr schnell, und die Bewegung des Rads wird bald gleichförmig. Soll hiernächst die Bewegung in diesem Zustand beständig bleiben, so muß in iedem Augenblick der Wasserstos dem Widerstand, welchen ihm die Maschine entgegensetzt, das Gleichgewicht halten; es muß nämlich hier unter dem Widerstand der gesammte Effekt der Maschine verstanden werden, welcher die Reibung und alle andere zur Verminderung des wahren oder eigentlich beabsichteten nutzbaren Effekts vorfallende Nebenwirkungen mit unter sich begreift. Dieser Effekt kann allemal durch ein Gewicht Π vorgestellt werden, das am Ende einer Schnure angebunden ist, welche über eine Rolle geht und sich um den Wellbaum des Rads herumwickelt, bei dessen Umdrehung das Gewicht in die Höhe gezogen wird. Wir setzen voraus, daß das Rad in eine Bewegung gekommen ist, die für gleichförmig angenommen werden kann, welches sehr bald geschieht. Die Betrachtung der Art, wie die Bewegung in den ersten Augenblicken beschleunigt wird, wäre in iedem Betracht ohne allen Nutzen.

359. Das schießende Wasser, welches alle Schaufeln nach der Reihe trift, kann in Ansehung der Breite entweder als unbegrenzt angesehen werden; von der Art ist z. B. die Breite eines Flusses in Vergleichung mit denen darin angelegten Mühlrädern; oder es kann auch die Breite des schießenden Wassers begrenzt und nur grad so groß seyn, daß die Schaufeln am Boden und den Wänden keine Reibung leiden; von der Art sind die Kanäle oder Schußgerinnen, welche

---

wucht bestimmen, die sich ergebende Formel wäre aber ebenso verwickelt als unnütz, und es ist also nicht der Mühe werth, sich dabei aufzuhalten.

welche die Wasser aus einem Behälter zu den Schaufeln eines Rads führen. Der Stos hat, wie wir in der Folge sehen werden, in beiden Fällen nicht einerlei Maas, er folgt aber übrigens einerlei Gesetzen. Wir werden daher für alle Fälle den unbestimmten Ausdruck **Strohmwasser** (*) gebrauchen, iedoch, wo es die Gelegenheit mit sich bringt, das wahre Maas des Stoßes, oder die Größe, welche wir den **Koefficient** des Stoßes genennt haben (350), bestimmen.

360. Der ganze Effekt eines durch den Wasserstos in Bewegung gesetzten Rades gründet sich auf die Lage und Anzahl seiner Schaufeln, auf die relative Geschwindigkeit des Rads gegen der des Strohmwassers, auf die beste Verhältnis zwischen der Höhe und Länge der Schaufeln, und endlich auf die Mittel, mit dem Aufschlagwasser, wo es nöthig und thunlich ist, spärlich umzugehen. Wir wollen diese verschiedene Punkte nach der Reihe durchgehen.

361. I. Aufgabe. **Wenn von zwo Schaufeln die eine lothrecht und die andere schief gegen das Strohmwasser gerichtet ist, dieienige anzugeben, welche von dem Wasser das größte Moment des Stoßes erhält.**

Beim ersten Anblick urtheilt man vielleicht, daß die lothrechte Schaufel, das ist dieienige, welche senkrecht gestoßen wird, das größte Moment des Stosses geben müsse; und von dieser Art ist das Resultat der Rechnung, wenn das Rad im Augenblick des Stoßes in Bewegung ist. Die hydraulischen Schriftsteller haben aber diese Aufgabe aufgeworfen, weil, wenn der senkrechte Stos stärker ist als der schiefe, die

(*) Hier in der Uebersetzung auch wohl Aufschlagwasser.

die schief getroffene Fläche dagegen auch größer ist als die senkrecht getroffene, welches sich gewissermassen mit einander vergleicht; und weil übrigens, wenn das Rad in Ruhe ist, die Momente beider Stöße gleich groß sind. Es kann also die Frage durch nichts deutlich entschieden werden, als durch eine genaue Berechnung.

Das Strohmwasser XYTZ (fig. 56.) habe eine horizontale Richtung, die Schaufel AB eine lothrechte, und die folgende DE eine schiefe Lage gegen das Strohmwasser, und EO sey horizontal gezogen; so sieht man, daß der Theil AO der Schaufel AB von dem Wasser ungehindert und senkrecht getroffen würde, wenn die diesem Stos hinderliche Schaufel DE weggenommen würde, da hingegen VE der Theil der Schaufel DE ist, welcher wirklich und zwar schief von dem Strohmwasser getroffen wird. Es kommt also drauf an, das Moment des senkrechten und freien Stoßes gegen AO mit dem Moment des Stoßes gegen VE, in soweit solcher senkrecht wirkt, zu vergleichen; denn wenn man findet, daß das erste Moment größer als das zweite ist, so ist weiter nichts mehr übrig, als die Einrichtung so zu machen, daß die lothrechte Schaufel im Augenblick des Stoßes auf keine Weise durch eine hintere Schaufel verdeckt werde.

QM, qm seyen unendlich nahe beisammen liegende Horizontallinien, welche zwei zusammengehörige Elementen Qq, Mm der lothrechten und der schiefen Schaufel bestimmen. Mx drucke die Geschwindigkeit des Wassers aus, und die kleine Bögen Qr, My die Geschwindigkeiten der Punkte Q, M für einerlei Augenblick. Die Geschwindigkeit des Wassers Mx zerlege ich in zwo andere My, Mz, wovon die erste mit der von der Stelle M der Schaufel einerlei ist und daher auf das Element Mm keine Wirkung hat; die zwote kommt allein in Betrachtung. Der senk-

rechte Stos gegen das Element Q q erfolgt grade so, als wenn dieses Element ruhig läge, das Wasser aber mit der Geschwindigkeit M x — Q t dagegen ströhmte, und die vom Stos gegen das Element M m entstehende senkrechte Wirkung, als wenn dieses Element ruhig wäre, das Wasser aber mit der Geschwindigkeit M z dagegen ströhmte. Wenn man also n den Koefficient des Stoßes nennt, V die Geschwindigkeit M x des Strohmwassers; u die Geschwindigkeit Q t des Punkts Q; V' die Geschwindigkeit M z; R den Halbmesser oder Sinustotus; so folgt, (341) daß der erste Stos durch n. Q q. $(V - u)^2$. R^2 und der zweete durch n. M m. $(V')^2$. $(\sin DMz)^2$ (*) ausgedruckt werde. Wenn man also die Momente dieser beiden Stöße durch den vor die gestoßenen Flächen gesetzten Buchstaben M bezeichnet, so hat man

$$M.Qq : M.Mm = n.Qq.(V-u)^2.R^2 CQ : n.Mm.(V')^2.(\sin DMz)^2.CM$$

Aber

(*) Nach meiner Einsicht bedarf dieser Ausdruck einer wichtigen Korrektion. Es kommt hier nicht die ganze Geschwindigkeit M z, sondern nur der aus solcher mit M y parallel entstehende Theil n z, der $= V'. \sin DMz$ ist, in Betrachtung. Ich will ihn Kürze halben c nennen, so wirkt der Wasserstrahl, der gegen M m hinströhmt, ebenso als wenn er mit der Geschwindigkeit c senkrecht auf die Schaufelfläche geleitet würde. Heißt nun der senkrechte Querschnitt des Strahls δ, so ist der erwähnte Stos $= n.\delta.c^2$; und wenn man statt δ seinen Werth M m. sin μ und statt c seinen Werth $V' \times \sin DMz$ substituirt, so findet sich der Stos $=$

$$n.Mm.\sin\mu.(V'.\sin DMz)^2$$

daß man also im Buch M m. sin μ statt M m setzen müßte, wo ich nämlich den Winkel, unter welchem das Wasser die Schaufel trifft, μ nenne.

Aber wegen der ähnlichen Bogen Qt, My, welche My oder $zx = \frac{u.CM}{CQ}$ geben, und wegen der beiden rechtwinklichten ähnlichen Dreiecke Mnx, MQC, welche $nx = \frac{V.CQ}{CM}$ geben, findet man

$$nz = V.\frac{CQ}{CM} - u.\frac{CM}{CQ} = \left(V - u.\frac{(CM)^2}{(CQ)^2}\right).\frac{CQ}{CM}$$

Ausserdem hat man auch $\sin DMz = R.\frac{nz}{Mz}$ und $(Mz)^2.(\sin DMz)^2 = R^2.\left(V - u\frac{(CM)^2}{(CQ)^2}\right)^2 \times \frac{(CQ)^2}{(CM)^2}$. Folglich erhält man zwischen den Momenten die Proportion

$$M.Qq : M.Mm = Qq.(V-u)^2.CM :$$
$$Mm.\left(V - u.\frac{(CM)^2}{CQ^2}\right)^2.CQ.(*)$$

oder (wegen der Parallelen MQ, mq, welche Qq : Mm = CQ : CM, und daher Qq . CM = Mm . CQ geben)

$$M.Qq : M.Mm = (V-u)^2 : \left(V - u.\frac{(CM)^2}{(CQ)^2}\right)^2$$

Da in dieser Proportion das dritte Glied augenscheinlich größer ist als das vierte, so erhellet, daß auch das erste größer seyn müsse als das zweite. Es ist

(*) Hier müßte nun zur Rechten wieder Mm . sin μ statt M stehen, und das gäbe

$$M.Qq : M.Mm = (V-u)^2 : \sin\mu.\left(V - u.\frac{CM^2}{CQ^2}\right)^2$$
$$= (V-u)^2 : \sin\mu.\left(V - u.\frac{1}{(\sin\mu)^2}\right)^2$$

ist also das Moment des Stoßes gegen das senkrecht getroffene Element Qq größer als das Moment des Stoßes gegen das schief getroffene Element Mm. Der nämliche Schluß findet für die endlichen Flächen AO, VE statt, welche aus einerlei Anzahl von Elementen, Qq, Mm bestehen, die allemal zusammen gehören.

362. I. Zusatz. Wenn die Schaufeln in dem Augenblick, wo sie den Stos erhalten, in Ruhe sind, so hat man $u = o$, und $M.Qq = M.Mm$ (*). Es ist also alsdann gleichgültig, ob das Strohmwasser den Theil AO der vertikalen Schaufel oder den korrespondirenden Theil VE der schief liegenden Schaufel trift. Da aber auch der Theil OB der vertikalen Schaufel von dem Wasser getroffen wird, so folgt, daß es selbst in diesem Fall vortheilhafter ist, wenn die Schaufel, welche den Stos leidet, gegen die Richtung des Strohmwassers lothrecht, als wenn sie dagegen schief gerichtet ist.

363. II. Zusatz. Weil unter der nämlichen Voraussetzung, daß $u = o$, das Moment des Stoßes gegen den Theil VE der schiefen Schaufel dem Moment des Stoßes gegen den Theil AO der vertikalen Schaufel gleich

(*) Nach meinen Erinnerungen ergäbe sich für $u = o$

$$M.Qq : M.Mm = V^2 : \sin\mu . V^2$$
$$= 1 : \sin\mu$$

folglich nicht gleichgültig, ob das ꝛc.

Man hat auch in diesem Fall unmittelbar aus 342

$$M.Qq : M.Mm = F : f = Qq.R^2 : Mm.\sin\mu^2,$$

aber $Qq : Mm = \sin\mu : R$, also

$$M.Qq : M.Mm = \sin\mu . R^2 : \sin\mu^2 R$$

oder $R = 1$ gesetzt, $= 1 : \sin\mu$.

gleich ist, so sieht man, daß das Wasser dem Rad eine desto größere Gewalt mittheilt, ie mehrere Schaufeln man ihm gibt; denn durch die Vermehrung der Schaufeln wird der Winkel ECB, den zwo aufeinander folgende Schaufeln mit einander machen, verkleinert und das Moment des Stoßes gegen das Rad also vergrößert, wenn sich die Schaufeln in derienigen Lage befinden, wobei der Stos die geringste Wirkung thut; diese Lage tritt allemal ein, wann der zwischen zween auf einander folgenden Schaufeln enthaltene Winkel von der Vertikallinie (*) in zween gleiche Theile getheilt wird.

Da in den verschiedenen Zuständen des Wachsthums oder des Abnehmens, in welche Größen von einerlei Art tretten können, das Gesetz der Stetigkeit allemal beobachtet wird, so schließt man daraus weiter, daß, wenn ein Rad mit einer Geschwindigkeit herumgeht, die in Ansehung der Geschwindigkeit des Strohmwassers sehr langsam ist, seine Gewalt dadurch vergrößert werden könne, daß man ihm eine große Anzahl von Schaufeln gibt.

364. I. Anmerk. Es zeigt sich bei dieser Untersuchung eine Schwierigkeit, die einige Leser in Verlegenheit setzen könnte, und die wir bei dieser Gelegenheit beleuchten wollen. Wenn das Rad im Augenblick des Stoßes als stillstehend angenommen wird, so ist klar, daß in geometrischer Schärfe die vortheilhafteste Anzahl von Schaufeln unendlich groß seyn müßte. Aber, wird man sagen, wenn die Anzahl der Schaufeln unendlich groß wird, so bilden ihre äusserste Punkten einen Kreis FBGO (fig. 57.), und da

(*) Die nämlich aus dem Mittelpunkt C herabgelassen wird.

da die aus dem Stos gegen iedes Element KN des Bogens FBG entstehende senkrechte Wirkung gegen den Mittelpunkt C gerichtet ist, so kann sie keine umlaufende Bewegung des Rads hervorbringen; hieraus scheint zu folgen, daß das Rad, anstatt das größte Moment des Stoßes zu erhalten, vielmehr im Gegentheil gar keine Empfänglichkeit dazu habe (*). Man muß

(*) Dieser Schluß wird durch des Herrn V. eigene richtige Theorie (350.) widerlegt, vermög der ein Zilinder, dessen untere Hälfte im Strohm hienge, nach der Richtung des Strohms eben den Stos leidet, wie $\frac{2}{3}$ von dem lothrechten Rektangel, dessen Länge die Länge des Zilinders und dessen Höhe der Halbmesser von der Grundfläche des Zilinders wäre. Liese also der Zilinder um eine Axe frei herum, die in des Strohms Oberfläche läge und mit der Richtung des Strohms einen rechten Winkel machte, so müßte der Zilinder vom Wasserstos wirklich herumgedreht werden. Wenn der Stos gegen erwähntes Rektangel A heißt, so ist also der Stos gegen den Zilinder längst dem Strohm $= \frac{2}{3}$ A. Nun ist zwar der senkrechte gegen den Mittelpunkt oder die Axe gerichtete Stos $= \frac{2}{3,14}$. A, allein der Widerstand, den die als hinlänglich fest angenommene Axe leistet, hebt ienen Stos $\frac{2}{3}$ A doch nicht auf; er hat vielmehr auf diesen Stos gar keinen Bezug, sondern nur auf die Friktion in den Zapfen, indem die Größe $\frac{2}{3}$ A schon so genommen ist, wie sie nach Abzug des durch den Druck nach dem Mittelpunkt sich ergebenden Verlusts herauskommt. Auf eben die Art muß also auch das Wasser ein Rad mit unendlich vielen Schaufeln herumzudrehen streben, da solches gleichfalls ein wahrer Zilinder ist, nur daß gewöhnlich nicht dessen ganze untere Hälfte, sondern nur ein Theil davon dem Strohm ausgesetzt ist. Aber freilich ist dieser Stos in den meisten Fällen so klein, daß sie kaum die Friktion zu wältigen hinreichend ist. Stünde z. B. ein dergleichen zilindrisches Rad mit dem

muß aber bemerken, daß in unserm Fall die Schaufeln als eine Reihe schiefer Ebenen, die unter verschiedenen Winkeln geneigt sind, angesehen werden, welche alle gegen den Mittelpunkt gerichtet sind und von dem Wasser unter verschiedenen Winkeln getroffen werden; daß also, sobald diese Hypothese aufgehoben wird, auch nothwendig die daraus fließende Folgen wegfallen. Nun ist aber die Voraussetzung, daß FBG ein Kreisbogen ist; dessen Elemente KN anstatt gegen den Mittelpunkt C gerichtet zu seyn, im Gegentheil auf die Halbmesser GK senkrecht sind, der vorigen völlig entgegengesetzt. Man darf sich also nicht wundern, daß man in beiden Fällen auf äusserst verschiedene Resultate geführt wird. Inzwischen können wir hieraus schließen, daß da die Wasserstreifen aus physischen Theilgen zusammengesetzt sind oder eine endliche Größe haben und diese Streifen überdas einander in ihrer Bewegung hinderlich fallen, die Enden der Schaufeln wenigstens so weit von einander entfernt seyn müssen, daß das Wasser seine volle Wirkung auszuüben im Stand ist. Es ist also die Anzahl von Schaufeln, welche man einem in Ruhe = und um so viel mehr die, welche man einem in Bewegung befindlichen Rad geben muß, um die möglich größte Gewalt von Seiten des Wassers zu gewinnen, allemal endlich und eingeschränkt. Hierzu kommt noch, daß man durch Vermehrung der Schaufeln das Rad schwerer macht und hierdurch einer grössern Friktion unterwirft.

365.

---

dem 8ten Theil des Halbmessers unter Wasser, so betrüge der Wasserstos gegen den Umfang dieses Rads nur $\frac{23}{192}$ von dem Stos, welcher gegen eine vertikal hängende Schaufel wirkte, deren Höhe $\frac{1}{4}$ vom Halbmesser betrüge, wie aus der Anmerk. zu 530 erhellet.

365. II. Anmerk. Verschiedene Schriftsteller (Mém. de l'Acad. 1729. page 253; Archit. hydr. Tome I. page 309.) haben den Vorzug der lothrechten Schaufeln vor den schief gestellten allgemein behauptet, wiewohl aus unrichtigen Gründen. Sie schließen auf folgende Weise. Es ist ausgemacht, sagen sie, daß wenn die Schaufel DE ins Wasser greift, indeß die AB sich noch in der Vertikallinie befindet, der Theil VE der ersten den Theil AO der zwoten, welcher nicht getroffen werden kann, völlig verdeckt, und daß also die Schaufel AB nur in dem Theil OB getroffen werden kan. Es scheint zwar, sagen sie weiter, dieser Verlust durch den Stos auf VE, welches größer als AO ist, wieder ersetzt zu werden; aber der Ersatz ist nicht vollständig, denn der unmittelbare Stos gegen AO oder VI verhält sich zu der aus dem Stos gegen VE entstehenden senkrechten Wirkung wie VI. R^2 zu VE. $(\sin VEI)^2$ oder wie VI. $(VE)^2$ zu VE. $(VI)^2$ oder endlich wie VE zu VI (*). Folglich, schließen sie, muß das Ende E (fig. 58.) der Schaufel DE (fig. 58.) grade die Oberfläche des Wassers XY in dem Augenblick erreichen, wo die Schaufel AB die Vertikallinie zu verlassen beginnt (**). Alsdann ist es leicht, die Anzahl der Schaufeln, welche ein Rad haben muß, zu berechnen; denn in dem rechtwinklichten Dreieck EAC ist die Seite CA als der Halbmesser des Rads AHLK, und die Hypothenuse CE bekannt, weil die Höhe DE der Schaufel gegeben ist. Man findet

(*) Es ist aber VE: VI = 1: sin μ (3te Anmerk. zu 361.) und es stimmt also dieses mit meinen Erinnerungen überein.

(**) So schließt auch H. H. Karsten Hydraul. §. 116. und bestimmt hiernach gleichfalls die Anzahl der Schaufeln.

findet also auch den Bogen DA. Nun gibt der ganze Umkreis durch den Werth des Bogens DA dividirt einen Quotienten, der die Anzahl aller Schaufeln des Rads ausdruckt. Die Schriftsteller, von denen ich hier rede, haben hiernach mit vieler Mühe Tafeln berechnet, welche für den iedesmaligen Halbmesser und die iedesmalige Höhe der Schaufeln eines Rads die Anzahl aller Schaufeln angeben. Aber dieses ganze Gebäude zerfällt, 1stens weil man dabei keine Rücksicht auf die verschiedenen Hebelärme der vertikalen und schief gerichteten Schaufel nimmt (*); 2tens weil, wenn in dem Fall fig. 58. das Moment des Wasserstoßes gegen die lothrechte Schaufel AB das größtmögliche ist, dagegen auch, wenn die Schaufel DE in eine solche Lage gekommen ist, daß der Winkel ECB durch die Vertikallinie in zween gleiche Theile getheilt wird, das Moment des Stoßes alsdann geringer ist, als es seyn würde, wenn das Rad eine größere Anzahl von Schaufeln hätte, und daß es also ungewiß bliebe, ob nicht das mittlere Moment im zweeten Fall größer seyn mögte als im ersten.

Eben dieser Fehlschluß ist schon in einer Abhandlung über die hydraulische Maschinen (Savans Etrangers Tome I. page 261). Aber der Verfasser dieser Abhandlung hat selbst einen falschen Satz dabei zum Grund

(*) Es ist, strenge genommen, allerdings wahr, daß der Mittelpunkt des Stoßes auf VE (fig. 56.) weiter von der Axe C entfernt ist, als der Mittelpunkt des Stoßes auf das verdeckte Stück AO von C entfernt seyn würde. Allein in der Ausübung kommt solches um so weniger in Betrachtung, als eben in der Ausübung auch die Schaufel VE das Wasser um etwas früher aufnimmt, als solches seinen ganzen Fall vollendet, also seine größte Geschwindigkeit erlangt hat.

Grund gelegt, wonach er schließt, daß das Moment des Stoßes gegen den Theil VE der schief gerichteten Schaufel DE (fig. 56.) allemal dem Moment des Stoßes gegen den korrespondirenden Theil AO der lothrecht hängenden Schaufel gleich sey, es mag das Rad beim Anstos in Ruhe seyn oder schon herumlaufen. Es hat aber solches nur für den ersten Fall seine Richtigkeit (*). Wenn das Rad im Augenblick des Stoßes schon eine erlangte Geschwindigkeit hat, so ist das erste Moment kleiner als das zweite. Die Art, wie der erwähnte Verfasser die Stärke des Stoßes einer flüßigen Masse gegen eine bewegte Fläche bestimmt, ist fehlerhaft. Er zerlegt die Geschwindigkeit der Ebene in zwo andere, die eine parallel, die andere senkrecht auf die Richtung des Strohmwassers; und er behauptet, die flüßige Masse wirke auf die Fläche nur mit dem Ueberschuß ihrer eigenen Geschwindigkeit über die erste von den beiden eben erwähnten. Es ist aber klar, daß die Fläche vermög der Geschwindigkeit, die sie senkrecht auf die Richtung des Wassers hat, von dem Wasser zurückgetrieben wird, ebenso als wenn sie in Ruhe wäre und das Wasser mit dieser Geschwindigkeit gegen sie anschlüge; hieraus entsteht ein neuer Stos, der sich mit dem ersten verbindet, und den der Verfasser ganz am unrechten Ort ausser Acht gelassen hat. Sonst enthält seine Abhandlung viele richtige und nützliche Sätze.

366. II. Aufg. **Die Geschwindigkeit zu bestimmen, welche das Rad in Vergleichung mit der Geschwindigkeit des Strohmwassers haben muß, wenn der Effekt der Maschine ein *Maximum* werden soll.**

Man

(*) Und nach meinen Erinnerungen auch für diesen Fall nicht.

Man gedenke sich hier mit Hrn. Parent (wir werden der Aufgabe nach und nach mehr Allgemeinheit geben) statt der von der flüßigen Masse wirklich getroffenen Schaufeln AB, DE (fig. 56.) eine einzige senkrecht getroffene Schaufel, die vor dem Stos schon eine gleichförmige und fortdauernde Geschwindigkeit habe; die Höhe dieser eingebildeten Schaufel sey klein genug, um die Umdrehungsgeschwindigkeit aller ihrer Punkten als gleichgroß und ihren Schwerpunkt als den Mittelpunkt des Stoßes annehmen zu können. Die Fläche dieser Schaufel heiße B; die Geschwindigkeit ihres Schwerpunkts u; die Entfernung dieses Punkts vom Mittelpunkt des Rads b; die Geschwindigkeit des Wassers V; die erhobene Last, deren Bewegung den Effekt der Maschine ausmacht Π; ihre Geschwindigkeit v; ihr Hebelarm als Abstand vom Mittelpunkt des Rads betrachtet c, und der Koefficient des Stoßes n; so ist der senkrechte Stos auf die Fläche $B = n.B.(V-u)^2$ und sein Moment gegen den Mittelpunkt $= n.B.(V-u)^2.b$. Dieses Moment dem Moment des Gewichts Π gleich gesetzt, gibt

$$n.B(V-u)^2.b = \Pi.c$$

und da $b:c = u:v$, also $o = \frac{bv}{u}$, so erhält man, wenn man statt c seinen Werth setzt,

$$n.B.(V-u)^2.u = \Pi.v$$

Nun soll das Produkt Πv, das den Effekt der Maschine ausdruckt, ein Maximum seyn, also muß es auch $n.B.(V-u)^2.u$ oder schlechthin $(V-u)^2.u$ seyn. Setzt man nun das Differential dieser Größe $= o$, so erhält man $u = \frac{V}{3}$ (*), woraus erhellet, daß die

(*) Ich gestehe, daß mir der Ausdruck: man solle ein Differential $= o$ setzen, in solchen Fällen allemal miß-

die Schaufel, welche senkrecht vom Wasser gestoßen wird, den dritten Theil von der Geschwindigkeit des Strohmwassers annehmen muß, wenn die Maschine den größtmöglichen Effekt leisten soll.

Der

---

mißfällt, weil Differentialien überhaupt = o sind. Es werden in solchen Fällen nicht Differentialien, sondern die sonst endliche Verhältnis der Differentialien = o gesetzt. Man setze nämlich den veränderlichen Werth von $(V-u)^2 . u = X$, so ist fürs Maximum

$$\frac{dX}{du} = 0; \text{ aber } X = V^2u - 2Vu^2 + u^3$$

und $dX = V^2 du - 4Vudu + 3u^2 du$

demnach $\frac{dX}{du} = V^2 - 4Vu + 3u^2 = 0$

Es ist also $V^2 - 4Vu = -3u^2$

und $V^2 - 4Vu + 4u^2 = u^2$

folglich $V - 2u = u$

und $V = 3u$ oder $u = \frac{V}{3}$

Allein ich sehe nicht, wie man im Ernst diese Formel für brauchbar halten könne. Sie zeigt weiter nichts an, als daß $u = \frac{1}{3} V$ seyn müsse, um den größten Werth von der gesammten Gewalt, die das Rad ausübt, zu erhalten. Diese Gewalt kann aber großen Theils auf die Wältigung der Friktion verwendet werden, und anderer Hindernisse, die nicht zum Zweck gehören. Ein Rad könnte z. B. so starke Friktionen zu wältigen haben, daß sonst gar keine weitere Last damit betrieben werden könnte, wenn es mit der Geschwindigkeit $u = \frac{1}{3} V$ herumgehen sollte; sein nutzbarer Effekt wäre alsdann der geringstmögliche, nämlich = o, und also seine Geschwindigkeit, anstatt die vortheilhafteste zu seyn, grade die schädlichste. Die vortheilhafteste Geschwindigkeit ist offenbar diejenige, wobei der nutzbare Effekt am

größten

Der Ausdruck für diesen Effekt ergibt sich, wenn man in der Gleichung $\Pi v = n . B . (V - u)^2 . u$ statt u seinen Werth setzt; hierdurch erhält man

$$\Pi . v = \frac{4 n . B . V^3}{27}$$

367. Zus. Um diese Formel gebrauchen zu können, müssen wir den Koefficient n oder $\frac{F}{A . U^2}$ des Stoßes (350) festsetzen. Da die Geschwindigkeit U und

---

größten wird. Nun läßt sich allemal v als eine Funktion von u ansehen: man setze also $v = \beta . u$; die wirklich zu hebende nutzbare Last heiße P, die schädliche Last, nämlich Friktion und andere Nebenhinderniße, heiße p, daß $\Pi = P + p$ ist, so hat man n. B. $(V-u)^2 . u = (P+p) \beta u = P . \beta u + p . \beta u$, wo $P . \beta u$ der nutzbare Effekt ist; es kommt also dranf an, wann $P . \beta u$ oder $n . B . (V-u)^2 . u - p . \beta u$ ein Maximum wird. Diese Größe heiße X, so ist $X = n . B . u \times V^2 - 2Vu + u^2 - p\beta u = n . B . \left(V^2 u - 2Vu^2 + u^3 - \frac{p\beta}{nB} . u\right)$, die ein Max. wird, wenn es $\left(V^2 - \frac{p\beta}{nB}\right) . u - 2Vu^2 + u^3$ wird. Es ist aber $\frac{\left(V^2 - \frac{p\beta}{nB}\right) . du - 4Vudu + 3u^2 du}{du} = 0$ oder $V^2 - \frac{p\beta}{nB} - 4Vu + 3u^2 = 0$ oder $u^2 - \frac{4}{3} Vu = \frac{1}{3}\left(\frac{p\beta}{nB} - V^2\right)$ und $u = \frac{2}{3} V \pm \sqrt{\left(\frac{p\beta}{3.nB} - \frac{1}{3} V^2 + \frac{4}{9} V^2\right)}$ oder $u = \frac{2}{3} V - \sqrt{\left(\frac{p\beta}{3.nB} + \frac{1}{9} V^2\right)}$

und die Fläche A gegeben sind, so können wir hier $A = B$ und $U = V$ setzen. Wenn nun 1stens das Rad in einem nach der Breite unbegrenzten Strohm herumlauft, und die der Geschwindigkeit dieses Strohms zugehörige Höhe H genennt wird, so hat man nach der Erfahrung ohne merklichen Fehler $F = B \cdot H$. Es verwandelt sich also der Ausdruck $\Pi \cdot v = \frac{4 n B \cdot V^3}{27}$ für den größten Effekt der Maschine in $\Pi \cdot v = B \cdot H \cdot \frac{4}{27} V$. Das Maas dieses Effekts ist also ein Gewicht von

---

Das beiahte Zeichen hat nämlich hier keinen Gebrauch. Nur wenn $\frac{p\beta}{3 \cdot nB} = o$ wäre (das aber niemalen statt findet) hätte man $u = \frac{2}{3} V - \sqrt{\frac{1}{9} V^2} = \frac{1}{3} V$.

Wenn man den Stos der einfachen Wasserhöhe gemäs annimmt, so ist $n = \frac{1}{4g}$ (g für die Fallhöhe eines schweren Körpers in 1 Sek. genommen), also

$$u = \frac{2}{3} V - \sqrt{\left(\frac{4 p \beta g}{3B} + \frac{1}{9} V^2\right)}$$

Exempel. Es sey p, welches in Kubikfußen Wassers ausgedruckt werden muß, $= 3$ Kubikfus, $V = 12$ Fus; $\beta = 0,3$; $g = 15$ Fus; $B = 1$ Quadratfus, so erhielte man

$$u = 8 - \sqrt{\left(\frac{4 \cdot 3 \cdot 0,3 \cdot 15}{3} + 16\right)} = 8 - \sqrt{34}$$

$$= 8 - 5,83 = 2,17 \text{ Fus}$$

anstatt daß die Formel $u = \frac{1}{3} V$, $u = 4$ Fus gäbe. Man sieht also, wie sehr man sich von dem vortheilhaftesten Gang des Rads entfernen würde, wenn man ihn nach der gewöhnlichen Formel einrichten wollte.

von Wasser = B. H, das mit $\frac{4}{27}$ von der Geschwindigkeit des Strohmwassers sich fortbewegt, oder $\frac{4}{27}$ dieses Gewichts, das sich mit der ganzen Geschwindigkeit des Strohmwassers bewegt (*).

2tens. Wenn das Rad in einem schmalen Schußgerinne herumliefe, das grad nur so breit wäre, daß sich die Schaufeln ohne Reibung am Boden oder an den Wänden hindurch bewegen könnten; so wäre der Stos stärker, und die Erfahrung gibt alsdann beinahe F = 2 B . H (unter H allemal die der Geschwindigkeit des Strohmwassers zugehörige Höhe verstanden). Der größte Effekt der Maschine ist also in diesem Fall ohne merklichen Fehler B . H. $\frac{8}{27}$ V. (**).

368.

(*) Es könnte nämlich am Umfang des Rads eine Last angebracht werden, deren Größe mit ihrer Geschwindigkeit multiplicirt im vortheilhaftesten Fall = B. H. $\frac{4}{27}$ V wäre; nun ist aber ihre wahre Geschwindigkeit nur = $\frac{1}{3}$ V (wenn man nämlich den gesammten Widerstand auf den Umfang brächte); es wäre also in dem Ausdruck B. H. $\frac{4}{9}$. $\frac{1}{3}$ V, der letzte Faktor $\frac{1}{3}$ V die Geschwindigkeit und $\frac{4}{9}$. H. B der Ausdruck für die Wasserlast, welche beim vortheilhaftesten Gang des Rades an dessen Umfang der Kraft entgegenwirken könnte. Gedächte man sich aber den gesammten Widerstand in der Entfernung c vom Mittelpunkt des Rades, dessen Halbmesser = b wäre, angebracht, so wäre er = $\frac{4}{9}$. $\frac{b}{c}$. H. B. das ist, er wäre so groß als das Gewicht einer Wassermasse = $\frac{4}{9}$. $\frac{b}{c}$. H. B.

(**) Herr Bossut und die Herrn Fabre und Bernard, welche ienem hierin gefolgt sind, machen hier zwischen den verschiedenen Wasserstrahlen in Vergleichung mit den Schaufelflächen einen Unterschied, den die Herrn Euler, Bernoulli, Kästner und Karsten u. a. nicht gemacht haben. Nach

368. Anmerk. Wir können den Effekt der Maschine in den beiden Fällen auf eine andere Art bestimmen, die uns in der Folge nützlich seyn wird. Man bedenke nämlich, daß es verstattet ist, die gege-

bene

---

diesen ist die Frage, was überhaupt ein ieder frei schießender Strahl gegen eine Ebene für eine Gewalt ausübt? oder wie groß bei einem frei schießenden Strahl der Werth von F sey? Herr Bossut setzt schlechtweg in diesem Fall F = B. H. Andere Lehrer der Hydrodynamik finden aber in dieser Bestimmung mehr Schwierigkeit, wie man finden wird, wenn man Hr. Hofr. Kästners Hydrodyn. S. 267 — 297. nachliest. Nach der dort ausgeführten Theorie wäre der Stos eines freien Strahls = 2. BH, und wenn der anstoßende Strahl, der sich beim Anstos allemal nach der Fläche hin trompetenartig erweitert, wirklich ein hyperbolisches Sphäroid bildete, worin sich die Geschwindigkeit der einzelen Schichten umgekehrt wie ihre Größe verhielte, so ließe sich daraus gleichfalls der Ausdruck F = 2. BH sehr leicht herleiten. Allein diese Hypotheſe ist so wie die Bernoullische bei H. H. Kästner a. a. O. nicht zu beweisen. Doch fällt die hyperbelartige Krümmung des Strahls allerdings in die Augen. Ist nämlich die Fläche nicht ganz dicht an der Oefnung, aus welcher der Strahl schießt, angebracht, so fängt er in kurzer Entfernung von der Ebene an, sich immer mehr auszubreiten, und seine äußere Oberfläche geht ziemlich asymptotenartig über die Fläche hin. Man kann also die so entstehende hyperbolische Masse als ein am asymptotischen Ende durch die dem Stos ausgesetzte Fläche abgeschnittenes Hyperboloid ansehen, dessen Inhalt sich leicht ergibt. Es heiße nämlich die Grundfläche, über die sich der Strahl auf der gestoßenen Ebene ausbreitet, W, der Querschnitt des natürlichen Strahls = w, so ist der Inhalt aller bewegenden Kräfte des bis zur unendlichen asymptotischen Fläche fortgehenden Strahls, wenn die Wasserhöhe h heißt, = 2. h. w, und der Inhalt des durch die Fläche abgeschnittenen

Theils

bene Fläche der Schaufel, welche den Stos aufnimmt, wie eine Oefnung anzusehen, wodurch in einer gegebenen Zeit eine gegebene Wassermenge auslauft, weil die Geschwindigkeit V der flüßigen Masse unveränderlich ist.

Theils $= \frac{w^2}{W^2} \cdot 2hw$, also die Summe der wirklich angewendeten bewegenden Kräfte $= 2hw \cdot \frac{W^2 - w^2}{W^2}$. Dieses könnte man also als den Ausdruck für den Stos ansehen, ohne merklichen Irrthum befürchten zu dörfen. Inzwischen ist der Werth von W unbekannt. Ich merke übrigens hierbei noch folgendes an. Wenn diese Wirkung erfolgen soll, so muß der Strahl seine Freiheit haben, die hierzu erfoderliche Gestalt annehmen zu können, und die Fläche, welche den Stos aufnimmt, muß also 1) nicht zu dicht vor der Oefnung, aus welcher der Strahl schießt, stehen; 2) groß genug seyn, um den sich frei ausbreitenden Strahl ganz aufzufangen. Beides wird auch durch die Erfahrung bestättigt, wie man im zweeten Band finden wird.

Ist der Strahl sehr dünne, so ist die Fläche, über die sich der Strahl beim Anstoßen ausbreitet, ungemein viel größer als der natürliche Querschnitt des Strahls. Ich ließ z. B. das Wasser durch eine Röhre aus einem Gefäs sprützen und fand seinen Querschnitt bei der Oefnung beiläufig $= \frac{1}{3}$ Quadratlinie, auf der Fläche aber, gegen die er anstieß, fand ich ihn beiläufig $\frac{1}{4}$ Quadratzoll, also 108 Quadratlinien, also $\frac{W}{w} = \frac{108}{\frac{1}{3}} = 324$. Hier wäre also der Stos $= 2hw \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{324}\right)^2\right) = 2hw \cdot \left(1 - \frac{1}{104976}\right)$ also soviel als gar nicht von 2hw verschieden. Aber bei größern Strahlen wird $\frac{W}{w}$,

ist. Man setze, in einer Sek. laufe durch B eine Wassermenge = Q; man lege der Erfahrung gemäs den Satz zum Grund, daß schwere Körper beim freien Fall ziemlich genau in der ersten Sek. 15 Fus durchlaufen;

---

wenn auch die Höhe die nämliche ist, doch geringer, und desto größer, ie größer h ist. Es ist daher gar kein Zweifel, daß $\frac{W}{w}$ eine Funktion von $\frac{h}{w}$ oder von $\frac{c}{w}$ ist, wenn c die Geschwindigkeit des Strahls bedeutet. Eine allgemeine Formel für den Stos müßte also, wenn ich den Stos p nenne, etwa so aussehen $p = hw\left(1 + \frac{1}{1 + \frac{w}{c}}\right)$ oder $p = hw.\left(\frac{2c + w}{c + w}\right)$; ströhmt z. B. ein Strahl, dessen Querschnitt ein Quadratfus beträgt, mit einer Geschwindigkeit von 1 Fus in 1 Sek. gegen eine Fläche senkrecht, so gäbe diese Formel $p = hw.\left(\frac{2+1}{1+1}\right) = 1{,}5.hw$; wäre w nur 1 Quadratlinie, und c = 2 Fus, so ergäbe sich $p = h.w \times \frac{4 + \frac{1}{144^2}}{2 + \frac{1}{144^2}}$ das ist fast um nichts von 2hw verschieden. Man wird nie im Stande seyn, eine passende Formel aus der Theorie herzuleiten, und hiermit muß ich es allein rechtfertigen, daß ich freilich nicht aus völlig überzeugenden Gründen, aber doch aus der Natur der Sache die vorstehende Formel für p hergeleitet habe, die für die Ausübung ziemlich brauchbar ist. Für einen unbeträchtlichen Werth von $\frac{w}{c}$ gibt sie p = 2hw, und für c = o erhält man p = hw.

laufen; alle Längenmaase drucke man in Fußen aus, und erinnere sich, daß in der Anwendung unserer Formeln die Gleichheit der Abmessungen nach diesen Voraussetzungen beobachtet werden muß. Nennt man die

---

hw. Beides bestättigt die Erfahrung. Vergleicht man diese Formel mit der $p = 2hw \cdot \frac{W^2 - w^2}{W^2}$, so gibt sich $2 \cdot \frac{W^2 - w^2}{W^2} = \frac{2c + w}{c + w}$, also $W^2 - w^2 = \frac{c + \frac{1}{2}w}{c + w} \cdot W^2$ und $\left(1 - \frac{c + \frac{1}{2}w}{c + w}\right) \cdot W^2 = w^2$, demnach $W = \frac{w}{\sqrt{\left(1 - \frac{c + \frac{1}{2}w}{c + w}\right)}}$. Es sey also z. B. c = 1 Fus, w = 1 Quadratfus, so ist $W = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1,5}{2}\right)}} = 2$ Quadratfus. Die Fläche müßte also, um den ganzen Stos aufnehmen zu können, 2 Quadratfus groß seyn. Und so dient also diese Formel für W die Größe der Fläche zu bestimmen, welche erfodert wird, um den ganzen Stos zu erhalten. Ich füge dieser äußerst wichtigen Materie noch folgende Betrachtung bei. Wenn der Strahl mit der zur Höhe h gehörigen Geschwindigkeit anfangs gegen die Fläche senkrecht anstößt, so wirkt diese Fläche senkrecht mit der Kraft h. w zurück, und der Abfluß sollte also gehemmt werden. Dieses zu untersuchen stellte ich mit einem Gefäs, aus welchem das Wasser durch eine Röhre mit einem Strahl horizontal abfloß, dessen Querschnitt etwa $\frac{1}{7}$ Quadratlinie betrug, 20 Versuche an. Bei den 10 ersten Versuchen lies ich das Wasser ganz frei ablaufen, und die Wassermenge, welche das Gefäs faßte, lief allemal in 120 Sekunden ganz ab. Bei den 10 folgenden Versuchen, hatte ich eine lothrechte Fläche so nahe vor die Oefnung der Röhre

die Schwere g, die der Geschwindigkeit V der flüßigen Masse zugehörige Höhe H, die der Geschwindigkeit v der Last Π zugehörige Höhe k, so erhält man $V^2 = 2.g.H$; $v^2 = 2gk$, und (201) $Q = 2B\sqrt{15H}$, oder

---

gestellt, daß ihre Entfernung von derselben ohngefähr nur dem Durchmesser der Oefnung gleich war. In allen diesen 10 letzten Versuchen leerte sich nun das Gefäs iedesmal, wie vorhin, in 120 Sek. aus. Die so nahe vor die Oefnung dem Strahl senkrecht entgegengesetzte Fläche konnte also dem Ablaufen des Wassers gar keine merkbare Hindernis entgegen setzen, da doch die Fläche dem natürlichen Strahl mit der Gewalt h.w entgegenwirken muß. Der Strahl muß also eine gedoppelte Kraft angewendet haben, 1) die eine, um den Widerstand hw der Ebene zu überwinden, 2) die andere, um den zur Wassersäule hw gehörigen Abfluß zu bewirken, und zu dem Ende den Strahl auseinander zu breiten. Man könnte iene die hydrostatische, diese die hydraulische Kraft nennen. So wäre also die gesammte Wirkung $= 2hw$, und man würde daher, wenn der Strahl beim Austoßen sich unendlich ausbreitete, wirklich gar keine Abänderung in der Geschwindigkeit des Ausflußes bemerken können, indem sich die hydraulische Kraft alsdann ganz auf der Fläche mit einer Geschwindigkeit $= o$ verlöhre. Weil aber die Grundfläche des Strahls nicht unendlich groß, sondern $= W$ ist, so wirkt die Fläche mit einer endlichen Geschwindigkeit zurück, so daß die daher rührende Wirkung mit der Richtung des Strahls parallel $= \frac{w^2}{W^2} \cdot 2hW$ ist, und der hiervon auf die Oefnung fallende Theil ist also $\frac{W^2}{w^2} \cdot 2h.w.\frac{w}{W} = \frac{w^2}{W^2} \cdot 2hw$; hierdurch wird der Abfluß oder die Geschwindigkeit des Abflußes vermindert, und die gesammte Wirkung des Strahls bleibt daher nur

oder $B = \frac{Q}{2\sqrt{15H}}$. Es verwandeln sich also die Ausdrücke für den größten Effekt der Maschine in folgende

I. Fall, $\Pi\sqrt{k} = \frac{2QH}{27\sqrt{15}}$

II. Fall, $\Pi\sqrt{k} = \frac{4QH}{27\sqrt{15}}$

369.

---

nur noch $= 2hw - \frac{w^2}{W^2} \cdot 2hw = 2hw \cdot \frac{W^2 - w^2}{W^2}$, welches die obige Formel ist. Bei obigen Versuchen war $W = \frac{3}{4}$ Quadratzoll $= 108$ Quadratlinien und $w = \frac{1}{3}$ Quadratlinie, also $\frac{W}{w} = \frac{108}{3} = 324$ und die der hydraulischen Kraft entgegengesetzte Wirkung $2hw\left(\frac{1}{324}\right)^2$, welche zu unbeträchtlich ist, als daß sich in der Ausflußzeit eine Aenderung hätte bemerken lassen. Es hätte nämlich bei den zehen letzten Versuchen die Ausflußzeit $= 120. \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{324}\right)^2}}$ welches eine Zeit ist, die sich von 120 Sek. gar nicht unterscheiden läßt. Herr Alb. Euler nimmt zwar den Koefficient von hw, dafern die Fläche, welche den Stos aufnimmt, größer als w ist, gleichfalls größer als 1 an, überhaupt aber fehlt seiner Rechnung die erfoderliche Bestimmtheit, wie Herr Hofr. Kästner mit Grund erinnert. Der Unterschied, welchen Herr Bossüt und seine Anhänger hier machen, gehört zu dieser Betrachtung gar nicht. Denn in einem Schußgerinne von der beschriebenen Art wirkt das Wasser nicht blos durch den Stos, sondern zugleich mit seinem Gewicht, und da ist es keinem Zweifel unterworfen, daß p merklich größer als hw und selbst $> 2.hw$ werden könne.

369. III. Aufgabe. Angenommen, daß das Rad unaufhörlich von dem senkrechten Stos gegen eine einzige rechtwinklichte Schaufelfläche von gegebener Größe, deren Höhe aber nicht mehr als unbeträchtlich angesehen wird, betrieben werde; die Verhältnis zu finden, welche die Breite und Höhe der Schaufel gegen einander haben müssen, und die Geschwindigkeit, welche ein gegebener Punkt der Schaufel annehmen muß, um den größten Effekt der Maschine zu erhalten.

Es sey (fig. 56.) CB der gegebene äußere Halbmesser des Rads; AB die Höhe der Schaufel, welche frei und ganz getroffen wird, und deren Breite eine grade horizontale Linie ist; ab ihre Lage im folgenden Augenblick; Qq irgend eines ihrer Elemente, Π die gewältigte Last, die durch die Größe ihrer Bewegung den Effekt der Maschine ausdruckt. Man setze

CB	= a
CA	= x
CQ	= z
die gegebene Schaufelfläche . .	= B
ihre Breite	= r
die gleichförmige Geschwindigkeit des Strohms	= V
die gleichförmige Geschwindigkeit Bb des gegebenen Punkts B im Augenblick des Stoßes	= u
die Geschwindigkeit der Last Π . .	= v
ihr Hebelarm	= c
der Koefficient des Stoßes . . .	= n

Die Geschwindigkeit des Punkts Q ist $\frac{zu}{a}$ und das Moment des senkrechten Stoßes gegen Qq ist n. r. z. dz $\times \left(V - \frac{zu}{a}\right)^2$; diesen Ausdruck muß man so

so integriren, daß nur z allein dabei als veränderlich angesehen wird, und daß das Integral für $z = x$ verschwinde, und für $z = a$ seinen vollständigen Werth erhalte. Auf diese Art ergibt sich das Moment des Stoßes gegen die ganze Schaufel

$$nr\left(\frac{V^2(a^2-x^2)}{2} - \frac{2Vu(a^3-x^3)}{3a} + \frac{u^2(a^4-x^4)}{4a^4}\right)$$

Dieses Moment muß dem $\Pi . c$ des Gewichts Π gleich seyn, und man hat also

$$\Pi c = nr\left(\frac{V^2(a^2-x^2)}{2} - \frac{2Vu(a^3-x^3)}{3a} + \frac{u^2(a^4-x^4)}{4a^2}\right)$$

Da nun $r.(a-x) = B$; $(a^2-x^2) = (a-x).(a+x)$; $a^3-x^3 = (a-x).(a^2+ax+x^2)$; $a^4-x^4 = (a-x).(a^3+a^2x+ax^2+x^3)$; ferner $u : v = a : c$, oder $c = \frac{av}{u}$, so folgt, daß sich die vorige Gleichung so ausdrucken läßt:

$$\Pi v = nB.\left(\frac{V^2u(a+x)}{2a} - \frac{2Vu^2.(a^2+ax+x^2)}{3a^2} + \frac{u^3(a^3+a^2x+ax^2+x^3)}{4a^3}\right) \quad (A.$$

Soll nun der Effekt Πv der Maschine durch gehörige Werthe von x und u ein Maximum werden, so muß man das zweite Glied, indem man x und u nach einander sich abändern läßt, differentiiren, und iedes der beiden Differentialien $= o$ setzen; hieraus ergeben sich diese beide Gleichungen

$$6a^2V^2u - 8Vu^2a(a+2x) + 3u^3.(a^2+2ax+3x^2) = o$$

$$6V^2$$

$$6\,V^2 a^2 (a + x) - 16\,V u a\,.\,(a^2 + ax + x^2) + 9u^2 (a^3 + a^2 x + ax^2 + x^3) = 0.$$

Beide mit einander verbunden geben die Werthe von x und u, die man in der Gleichung (A) substituiren muß, um den Ausdruck für den größten Effekt der Maschine zu erhalten. Ich setze diese Werthe nicht hierher; in iedem einzelen Fall läßt sich die Rechnung abkürzen, sobald man anfängt, statt der gegebenen Größen ihre Werthe in Zahlen zu substituiren.

370. Wenn man in der Gleichung (A) annimmt, die Höhe der Schaufel sey unendlich klein oder doch ohne merklichen Fehler in Vergleichung mit dem Halbmesser a; so findet man alsdann, indem man a für x substituirt und u unter der Voraussetzung bestimmt, daß Πv ein Maximum sey, $u = \frac{V}{3}$ wie (§. 366.) Und in der That beruhen die Berechnungen in beiden Fällen auf einerlei Gründen. Nimmt man aber die Höhe der Schaufel nicht als unendlich klein an, sondern nur als sehr klein in Vergleichung mit dem Halbmesser a, so daß, wenn man $a - x = h$ oder $x = a - h$ annimmt, h eine gegebene Größe ist, deren Quadrat und höhere Potenzen man beiseit setzen kann, so wird aus der Gleichung (A) wenn man x wegschaft, diese

$$\Pi v = nB\left(\frac{V^2 u\,(2a - h)}{2a} - \frac{2V u^2 (a - h)}{a} + \frac{u^3 (2a - 3h)}{2a}\right) (*)$$

und

(*) Um den Werth von u für den größten nutzbaren Effekt zu erhalten, setze man wie in der Anmerk. zu 366. $v = \beta u$, und $\Pi = P + p$, also $P.\beta u + p.\beta u$ statt Πv, so ergibt sich der Werth von $P.\beta u$ oder vom nutzbaren Effekt, und nach der Methode des Größten

und hieraus ergibt sich, wenn man nach der veränderlichen Größe u differentiirt, und das Differential = o setzt,

$$u = \frac{V(4a - 4h) - V.\sqrt{(4a^2 - 8ah)}}{3(2a - 3h)}$$

für

Größten und Kleinsten ergibt sich für den größten nutzbaren Effekt

$$u = \frac{4.(a-h).V}{3(2a-3h)} - \sqrt{\left(\frac{16\,V^2.(a-h)^2}{9.(2a-3h)^2} + \frac{\frac{2ap\beta}{nB} - V^2.(2a-h)}{3.(2a-3h)}\right)} \quad (\text{H}$$

Setzt man sowohl p als h = o, so findet sich hieraus der gewöhnliche Ausdruck, nämlich

$$u = \frac{4V.a}{6a} - \sqrt{\left(\frac{16.a^2V^2}{94.a^2} + \frac{o - 2aV^2}{6.a}\right)}$$

$$= \tfrac{2}{3}V - \sqrt{(\tfrac{4}{9}V^2 - \tfrac{3}{9}V^2)} = \tfrac{2}{3}V - \sqrt{\tfrac{1}{9}V^2}$$

oder $u = \frac{1}{3}V$.

Offenbar kommt es, um die vortheilhafteste Einrichtung zu erhalten, nicht auf die Formel des Hrn. Bossüt an, sondern auf die hier gegebene (H).

Die Last, welche am Umfang des Rads mit der Geschwindigkeit u gewältigt wird, ist $\alpha B.H = \alpha B \times \frac{(V-u)^2}{4g}$ (wenn g den Fall in einer Sek. bedeutet) folglich die vortheilhafteste Last $= \left[\frac{2a-5h}{6a-9h}V + \sqrt{\left(\frac{16.V^2(a-h)^2}{9.(2a-3)h^2} + \frac{\frac{2ap\beta}{nB} - V^2.(2a-h)}{6a-9h}\right)}\right]^2 \times \frac{\alpha B}{4g}$, wo ich nämlich, ohne zu bestimmen, ob

der

für den vortheilhaftesten Werth der Geschwindigkeit u. Diese Formel findet ihre vorzügliche Anwendung bei Rädern, die in einem Kropf laufen, weil nämlich bei solchen Rädern die Höhe der Schaufeln gewöhnlich in Vergleichung mit dem äußern Halbmesser sehr klein ist.

Es

---

der Stos = B. H oder 2 B. H oder sonst ausgedruckt werden müsse, den allgemeinen Koefficient α gesetzt habe, den ich vorhin $= \frac{2c+w}{c+w}$ (oder nach den gegenwärtigen Buchstaben $= \frac{2.(V-u)+w}{(V-u)+w}$) angegeben hatte. Man sieht hieraus, wieviele Berechnungen die Untersuchung des stärksten Stoßes nothwendig macht. Und doch ist diese Untersuchung noch nicht erschöpft. Ich habe nämlich oben schon erinnert, daß die von der Ausbreitung des Strahls abhängende Wirkung des Stoßes zuverläßig durch die Geschwindigkeit vergrößert wird, welche der Strahl gegen die gestoßene Fläche hat, d. i. durch die Geschwindigkeit $V - u$. Nun wurde vorhin n als eine beständige Größe angesehen; setzt man aber $\alpha = \frac{2(V-u)+w}{V-u+w}$, so ist $n = \frac{\alpha}{4g} = \frac{2(V-u)+w}{4g(V-u+w)}$ und nun

$$P.\beta u = -p\beta u + \frac{2(V-u)+w}{4g(V-u+w)} . B \times \left(\frac{V^2 u(2a-h)}{2a} - \frac{2Vu^2.(a-h)}{a} + \frac{u^3(2a-3h)}{2a}\right)$$

Wollte man nun nach der Methode des Größten und Kleinsten den größten Werth dieses Ausdrucks von $P.\beta u$ suchen, so käme man auf eine ziemlich verwickelte Gleichung vom vierten Grad, die zur Anwendung äußerst unbequem wäre. Man sieht aber schon aus der Anmerk. zu 366. und dem dortigen Exempel, daß wegen der Friktion und sonstigen Nebenlast selten $u > \frac{1}{4} V$ ausfällt, wenn auch die

lang-

Es sey z. B. a = 8 Fus, h = 8 Zoll, so findet sich ziemlich nahe $u = \frac{22}{63} V$.

371. II. Anmerk. Die Räder, welche in Kröpfen laufen, erfodern eine andere Betrachtung, die in gewissen Fällen von Wichtigkeit seyn kann. In den bisherigen Berechnungen haben wir die Geschwindigkeit V als eine beständige und gegebene Größe angesehen, was auch die Abmessungen und die Geschwindigkeit der Schaufel für Veränderungen leiden mag; aber bei Anwendung der Kröpfe können diese Veränderungen einen merklichen Einfluß auf die Wirkung des Wassers gegen das Rad haben. Ich will mich näher erklären.

SDKR (fig. 59) sey die vertikale vordere Fläche eines Behälters, worin die rechtwinklichte Oefnung MNOP

---

langsamere Bewegung der Schaufel oder die Vergrößerung des Werths V — u keinen Einfluß auf die Vergrößerung der von der Ausbreitung des Strahls abhängenden Wirkung hätte; da nun wegen des letztern Umstands die Wirkung noch etwas größer wird, wenn u noch kleiner genommen wird, so übersieht man, daß in der Ausübung gewiß $u < \frac{1}{4} V$ ausfallen müsse. Aus diesem Grund kann man aus der sich ergebenden biquadratischen Gleichung die Glieder, welche die 3te und 4te Potenz von u enthalten, umsomehr weglassen, da solche zum Theil noch mit entgegengesetzten Zeichen vorkommen. Durch dieses Mittel erhält man eine quadratische Gleichung, woraus sich ein ziemlich einfacher und für die Ausübung hinlänglich genauer Ausdruck für den vortheilhaftesten Werth von u ergibt. Diese Betrachtung dient zu übersehen, wie vielen Schwierigkeiten die Bestimmung des vortheilhaftesten Werths von u ausgesetzt ist, und wie wenig die Formel $u = \frac{1}{3} V$ dieser Bestimmung ein Genüge thut.

MNOP angebracht ist. SR stelle die Oberfläche des Wassers vor. Man setze, es sey an der Oefnung MNOP ein Kanal oder rechtwinklichtes Gerinne angebracht, welches das Wasser gegen die Schaufeln eines Rads führt. Da die Schaufeln allemal einen gewissen Spielraum im Gerinne haben müssen, um die Reibung am Boden und den Wänden zu verhüten, so kann man sich die Schaufel, welche den senkrechten Wasserstos aufnimmt, durch das Rektangel mnop vorstellen, dessen Seiten mit denen des Rektangels MNOP parallel laufen und um eine geringe gegebene Entfernung davon abstehen. Es kann also weiter kein Wasser auf die Bewegung der Schaufel wirken, als das durch die Oefnung mnop durchschießende; das durch die Spielräume Mp, No, Oz durchgehende geht ganz unbenutzt verlohren. Nun stelle man sich vor, es werde die Schaufel mnop in eine andere gleichfalls rechtwinklichte efgh verwandelt, die eine eben so große Oberfläche habe, und die Oefnung MNOP werde also in eine andere EFGH verwandelt, so daß die Spielräume Ee, Ff, Hi der neuen Schaufel die nämlichen sind, wie Mm, Nn, Pz bei der vorigen. Wenn die Wassermasse, welche der Behälter abgeben kann, festgesetzt und angegeben ist, so ist klar, daß der anfängliche Wasserspiegel um eine gewisse Tiefe Sr sinken müsse. Nun ist noch die Frage, ob nicht wegen dieser Erniedrigung das Moment des Wasserstoßes gegen die Schaufel abnehme? Was zu diesem Zweifel Anlaß gibt, ist dieses, daß destomehr Wasser ganz unbenutzt abfließt, ie größer die Grundlinie GH des rechtwinklichten Spielraums Gi ist, denn der zugehörige Wasserdruck ist größer als derienige, welcher zu den Seitenräumen Fg. Eh, Mp, No gehört. Hieraus entsteht folgende Aufgabe.

372. IV. Aufgabe. Die vortheilhaftesten Abmessungen und Geschwindigkeit der vom Wasser senkrecht gestoßenen Schaufel zu bestimmen, vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeiten des Wassers in den verschiedenen Punkten der Schaufel denen zugehörigen Höhen des Wassers im Behälter angemessen seyen.

Es sey ABPM die Hälfte der Oefnung; Abpm die Hälfte der gesuchten Schaufel; C der Mittelpunkt des Rads; SR die Horizontallinie, bis zu der der Behälter mit Wasser angefüllt ist; Q ein unbestimmter Punkt der Schaufel, der eine der Höhe QT angemessene Geschwindigkeit zugehöre. Man setze

die Schwere	= g
den Halbmesser des Rads Cb . .	= a
2Am	= r
CT	= p
CA	= x
CQ	= z
die Umdrehungsgeschwindigkeit des Punkts b der Schaufel	= u
die Geschwindigkeit der gewältigten Last Π .	= v
ihr Hebelarm	= c
der Koefficient des Stoßes . . .	= n

Die Geschwindigkeit des durch die kleine rechtwinklichte Oefnung Qqdc durchschießenden Wassers, und welche in dieser Stelle gegen das Element der Schaufel stößt, ist $= \sqrt{(2g.(z-p))}$ (*). Die Umdre-

(*) Man erinnere sich nämlich, daß hier g die am Ende einer Sek. erlangte Geschwindigkeit bedeutet, daß also dieses g doppelt so groß ist, als das g welches ich in meinen Formeln gebrauche, wo es den Fall in der ersten Sek. vorstellt. In meine und die unter den Teutschen gewöhnliche Sprache übersetzt, heißt also diese Formel $\sqrt{(4g.(z-p))} = 2\sqrt{g}.(z-p)$ die unter dieser Gestalt ganz bekannt ist.

Umdrehungsgeschwindigkeit des Punkts Q der Schaufel oder ihres Elements Qpdc ist $\frac{zu}{a}$. Demnach muß das elementarische Element des senkrechten Wasserstoßes =

$$nrzdz\left[\sqrt{\left(2g\,(z-p)-\frac{zu}{a}\right)}\right]^2$$

seyn. Integrirt man also so, daß das Integral für $z=x$ verschwindet, und für $z=a$ seinen vollständigen Werth erhält, so erhält man

$$nr.\left[\frac{2g.(a^3-x^3)}{3}-gp.(a^2-x^2)-\frac{2u\sqrt{2g}}{a}\right.$$
$$\times\left(\frac{2p^2\left[(a-p)^{\frac{3}{2}}-(x-p)^{\frac{3}{2}}\right]}{3}\right.$$
$$+\frac{4p\left[(a-p)^{\frac{5}{2}}-(x-p)^{\frac{5}{2}}\right]}{5}$$
$$\left.+\frac{2\left[(a-p)^{\frac{7}{2}}-(x-p^{\frac{7}{2}}\right]}{7}\right)$$
$$\left.+\frac{u^2.(a^4-x^4)}{4a^2}\right]$$

zum Moment des Wasserstoßes gegen die ganze Fläche mnop. Dieses Moment muß dem $\int c$ der gewältigten Last gleich seyn. Aber zur Abkürzung, und um die Gleichung, welche daraus entstehen muß, sogleich unter ihre letzte Gestalt zu bringen, bemerke man, daß wenn die Schaufelfläche gegeben ist, die B heißen soll, man $r.(a-x)=B$ oder $r=\frac{B}{a-x}$ hat; man bedenke ferner, daß man $u:v=a:c$ oder $c=\frac{av}{u}$ hat. Diese

Werthe

Werthe statt r und c gesetzt, gibt für den Effekt der Maschine diese Gleichung

$$\Pi v = \frac{nBu}{a(a-x)}\left[\frac{2g(a^3-x^3)}{3} - gp(a^2-x^2)\right.$$

$$- \frac{2u\sqrt{2g}}{a}\cdot\left(\frac{2p^2((a-p)^{\frac{3}{2}}-(x-p)^{\frac{3}{2}})}{3}\right.$$

$$+ \frac{4p((a-p)^{\frac{5}{2}}-(x-p)^{\frac{5}{2}})}{5}$$

$$\left.\left. + \frac{2((a-p)^{\frac{7}{2}}-(x-p)^{\frac{7}{2}})}{7}\right) \quad \text{(D.}\right.$$

$$\left. + \frac{u^2}{a^2}\cdot\left(\frac{a^4-x^4}{4}\right)\right]$$

Nun sey Q die Wassermasse, welche in einer Sekunde durch die Oefnung MNOP durchschießt; π iede von den kleinen Linien mM, nN, bB, welche die Spielräume der Schaufel in dem Schußgerinne (*) ausdrucken; so erhält man

$$MN = r + 2\pi$$
$$TB = a - p + \pi$$
$$TA = x - p$$

und wenn man also die Erfahrung zum Grund legt, daß schwere Körper in der ersten Sekunde ihres Falls 15 Fus durchlaufen, so erhält man aus (216.)

$$Q =$$

(*) Bekanntlich heißt ein nach der Rundung des Rads gebogenes Schußgerinne auch ein Kropf, daher ich mich dieses Ausdrucks schon mehrmalen bedient habe. Der Herr Verfasser redet aber eigentlich nur von Schußgerinnen, welche das Wasser in horizontaler Richtung gegen die vertikalhängende Schaufel leiten.

$$Q = \frac{4t.(r+2\pi).\sqrt{15}.((a-p+\pi)^{\frac{3}{2}} - (x-p)^{\frac{3}{2}})}{3}$$

Substituirt man in dieser letzten Gleichung für r seinen Werth $\frac{B}{a-x}$, sondert p ab, wenigstens durch eine Näherung, und substituirt hierauf diesen Werth in der Gleichung (B), so wird man eine Gleichung erhalten, worinn weiter keine unbestimmten Größen mehr vorkommen als x und u, indem die Größe Q als gegeben angenommen wird. Man erhält also für den Effekt der Maschine ein Maximum, wenn man den zweeten Theil dieser Gleichung nach den veränderlichen Größen x und u differentiirt, und die beiden Differentialien = o setzt; dieses gibt zwo Gleichungen, die denen ähnlich sind, welche man aus der Gleichung (A) in (369) hergeleitet hat, und die eben die Absicht haben.

Wäre Q nicht gegeben, dagegen aber p oder hätte der Wasserspiegel im Behälter eine festgesetzte Lage, so müßte man sogleich die Gleichung B nach den veränderlichen Größen x und u differentiiren ꝛc.

Wären in der Gleichung (B) p und x gegeben, so differentiirte man nach u allein, und erhielte ein Resultat, das dem von 370. ähnlich wäre.

Ich begnüge mich, alle diese Berechnungen nur anzuzeigen, da sie größtentheils sehr weitläuftig aber nicht schwer sind, und sich solche (wenn man in den Fall kommt, sie durchzusetzen) noch abkürzen lassen, wenn man in iedem besondern Fall an die Stelle der gegebenen Größen ihre Werthe in Zahlen setzt.

Wir müssen noch bemerken, daß es, anstatt die vortheilhaftesten Abmessungen und Geschwindigkeit der Schaufeln zu suchen, in der Ausübung besser ist, die Effekte zwoer Schaufeln, wie mnop, efgh die zu

den

den beiden Oefnungen MNOP, EFGH gehören, mit einander zu vergleichen und diejenige zu wählen, welche für eine gegebene Wassermenge oder für eine gegebene Wasserhöhe im Behälter den größten Effekt gibt. Man wird niemalen gar lange zu probiren brauchen, und auf solche Art Resultate finden, welche für die Ausübung hinlängliche Genauigkeit haben; denn man weiß, daß eine Größe, die ein Maximum oder Minimum seyn soll, physisch betrachtet, noch eben diese Eigenschaft behält, wenn sie auch um etwas über die mathematische Grenzlinie hinausgeht oder darunter bleibt.

Fünfzehntes Kapitel.

Fortsetzung der vorigen Untersuchung; von vertikalen Rädern, welche durch den Stos des Wassers betrieben werden, mit Rücksicht auf die verschiedenen Stöße des Wassers gegen die verschiedenen Schaufeln, welche wirklich gestoßen werden.

373.

Wir haben im vorigen Kapitel die Effekte der Wasserstöße gegen die Schaufeln eines Rads auf den bloßen Effekt einer einzigen Schaufel gebracht, welche von dem Strohm senkrecht getroffen würde. Diese Abweichung von dem wirklichen Erfolg, welche die Rechnung einfacher macht, ist alsdann verstattet, wann das Rad im Augenblick des Stoßes ruhig steht. Sie läßt sich aber alsdann nicht annehmen, wenigstens nicht ohne Verletzung der Genauigkeit, wann das Rad im Augenblick des Stoßes schon mit einer erlangten Geschwindigkeit herumlauft. Man muß alsdann, um die den Geometern so wichtige Allgemeinheit zu erhalten, alle Stöße mit Rücksicht auf ihre verschiedenen Anstoswinkel bestimmen. Diese Aufgabe, deren Auflösung in meiner Abhandlung von 1769. vorkommt, findet hier ihren eigentlichen Platz. Wir wollen nun mit Festsetzung der Gründe, worauf meine Rechnungen gebaut werden müssen, den Anfang machen.

374. Es sey SBDK (fig. 60.) der äußere Umfang eines Rads, der in einem horizontalen Strohm

XYZT

XYZT hänge, dessen Theilgen sich alle mit gleichförmiger Geschwindigkeit und einander parallel bewegen. Dieses Rad führe irgend eine Anzahl von Schaufeln Ee, Ff, Gg, Hh ꝛc. die alle nach dem Mittelpunkt C gerichtet sind. Aus C sey CI lothrecht, oder senkrecht auf die Oberfläche des Wassers XY herabgelassen, und mit eben dieser Fläche die graden Linien E1, F2, G3, H4 ꝛc. parallel gezogen. Es ist klar, daß von S nach B herab die folgenden Schaufeln von den vorhergehenden zum Theil verdeckt und gegen den Stos beschützt werden. Ich werde schlechthin auf den Stos der flüßigen Masse gegen die Theile EV, FV', GV'' ꝛc. der Schaufeln sehen, und voraussetzen, daß die Theile V'f, V''g ꝛc. keinen Stos leiden, wenigstens werde ich einen solchen Stos, falls er wirklich vorhanden ist, ausser Acht lassen. Ich halte diese Art, den Wasserstos zu betrachten, für richtig, wenigstens bei einer physisch mathematischen Aufgabe, wie die gegenwärtige ist, für sehr zuläßig, da solche an dem Mangel einer strengen Methode, die Aufgabe vom Stos flüßiger Massen allgemein aufzulösen, nothwendig Theil nehmen muß (*). Denn

1stens. Bei Rädern, die in Flüssen angebracht werden, ist es klar, daß das Wasser, nachdem es gegen die Theile EV, FV', GV'' ꝛc. angeschlagen hat, zurück-

(*) Allerdings bleibt auch die vom Hrn. Bossüt angestellte Untersuchung, so schön sie auch für das feine Gefühl eines Geometers ist, dennoch bei dem gegenwärtigen Zustand der Hydrodynamik für die Ausübung von sehr geringem Nutzen, weil in der Hauptformel für den Effekt des senkrechten Stoßes, vermög der solcher $= \alpha . B \times u . \frac{(V-u)^2}{60}$ ist, (wenn die Buchstaben die Bedeutung aus dem vor. Kap. haben) der Werth von α noch nicht zur völligen Richtigkeit

zurückprellt, seitwärts abfließt und sich mit dem umherliegenden Wasser vermischt. Es bleibt ihm also nach der Richtung des Strohms nur eine sehr kleine Geschwindigkeit übrig, die folglich keinen merklichen Stos verursachen kann. Ich gebe zu, daß wenn die Zwischenräume zwischen den Schaufeln von Beträchtlichkeit wären, das Wasser in diesem Zwischenraum zwischen beiden Schaufeln wieder von neuem eine Geschwindigkeit erlangen könnte, welche der vorausgehenden Schaufel einen merklichen Stos zu ertheilen fähig wäre; allein dieser Fall findet in der Ausübung nicht statt, zumal wenn man, wie es sich gehört, den Bedacht nimmt, daß das Rad wenigstens 8 bis 10 Schaufeln bekommt.

2tens. Was die Räder betrifft, welche in einem Kropf laufen, so hat das Wasser, nachdem es gegen die Theile EV, FV', GV'' ꝛc. angeschlagen hat, nicht eben die Freiheit, sich von den Schaufeln zu entfernen, wie im vorigen Fall; aber es findet dennoch einen Ausweg; zum Theil fließt es über die Schaufeln weg, zum Theil durch den Spielraum zwischen der Schaufel und dem Kropf, und zum Theil durch den leeren Raum, welchen zwo nach einander folgende Schaufeln auf dem Boden lassen, wenn die grade Linie, welche den von zwoen Schaufeln gemachten Winkel in zween gleiche Theile

---

gebracht ist. Ich habe schon erwähnt, daß solcher ausser allem Zweifel selbst eine Funktion von u ist, und dieser Umstand macht, daß alle Formeln für die vortheilhaftesten Werthe sehr beträchtlich von allen denen, die der Herr Verfasser findet, verschieden seyn müssen. Doch erkläre ich hierdurch des Herrn Verfassers Untersuchung nicht für unnütz, indem sie doch zur Grundlage einer künftigen genauern Theorie dienen kann, wenn man sich über den Werth von « erst einmal mehr vereinigt haben wird.

Theile theilt, in die vertikale Lage kommt (*). Der Stos gegen die Theile EV, FV', GV'' ꝛc. ist also allemal ohne Vergleich beträchtlicher als der Stos (angenommen, daß solcher vorhanden sey) gegen die Theile V'f', V''g' ꝛc. oder, als der Druck, der der Höhe gemäs auf diese Theile wirkt.

375. I. Aufgabe. **Die Summe der Momenten der Wasserstöße gegen alle Theile der Schaufeln zu bestimmen, welche zugleich gestossen werden, vorausgesetzt, daß das Rad im Augenblick des Stoßes schon mit einer erlangten Geschwindigkeit herumlaufe.**

I. Es sey Mm irgend ein Element des Theils EV der ersten Schaufel, welche getroffen wird. Aus dem Punkt S, wo der Umfang SBDK der Oberfläche des Wassers begegnet, ziehe man den Halbmesser SC. Die unendlich kleinen graden Linien Mx, My seyen die Räume, welche das Wasser und der Punkt M der Schaufel durchlaufen. Ich zerlege die Geschwindigkeit Mx in zwo andere My, Mz; so ist klar, daß das Wasser auf das Element Mm nur vermög der zwoten Geschwindigkeit Mz wirkt. Man verlängere die grade Linie xz bis in n, so ist solche auf EV offenbar senkrecht. In den Berechnungen der gesuchten Momente setzen wir die Breite der Schaufeln beiseite, weil diese Breite ein unveränderlicher Faktor ist, den man hiernächst

(*) Es bleibt nämlich allemal zum Abfluß des Wassers auf dem Boden des Kropfs ein gewisser Durchgang in der Breite des Kropfs, dessen Höhe aber am kleinsten ist, so oft eine Schaufel in die lothrechte Lage kommt, und am größten, so oft die durch den Mittelpunkt des Rads und in der Mitte zwischen zwoen Schaufeln durchgezogene grade Linie in die lothrechte Lage kommt.

nächst allen Gliedern der Formeln beilegen kann. Es sey nun

der äußere Halbmesser CB des Rads . = a
der Sinustotus . . . . . = 1
der unveränderliche Winkel SCI . . = m
der veränderliche Winkel ECI . . = p
der beständige Winkel zwischen zwoen auf einander folgenden Schaufeln . . = q
die Geschwindigkeit des Strohms . . = V
die gleichförmige Geschwindigkeit des Umfangs SBDK . . . . = u
EM . . . . . = x
der Koefficient des Stoßes . . . = n

so hat man offenbar My oder $zx = \frac{u.(a-x)}{a}$; $nx = V.\,Cos\,p$; $nz = nx - zx = V.\,Cos\,p - \frac{u.(a-x)}{a}$;

$$\sin zMn = \frac{a.\,V.\,Cos\,p - u.\,(a-x)}{a.\,Mz}$$

Es wird also der senkrechte Wasserstos gegen das Element Mm, der $= n.\,Mm.\,(Mz)^2.\,(\sin zMn)^2$ ist, (*) =

$$ndx\,(a.\,V.\,Cos\,p - u.\,(a-x))^2$$

und wenn man das Moment dieses elementarischen Stoßes dM nennt, so erhält man

$$dM = ndx\left(V - \frac{u.(a-x)}{a.\,Cos\,p}\right)^2 \times (Cos\,p)^2.\,(a-x) \quad (A.$$

II. Man sieht, daß sich diese Gleichung ohne einige Schwierigkeit integriren läßt. Aber bevor man dieses

(*) Nach der Erinnerung zu §. 361. müßte man hier Mm. sin μ oder Mm. Cos p statt Mm setzen.

dieses thut, bemerke ich, daß wenn die Größe $V - \frac{u.(a-x)}{a.\,Cos\,p}$, anstatt beiaht zu seyn, verneint wäre, so würde solches eine Schaufel seyn, welche die flüßige Masse forttriebe anstatt von solcher fortgetrieben zu werden. Da inzwischen das Quadrat in beiden Fällen einerlei wäre, so ließe sich nicht unterscheiden, welcher von beiden Fällen statt fände, wenn man auf die gewöhnliche Weise integriren wollte. Man muß daher allgemein auf folgende Art verfahren. Man muß untersuchen, was aus der Größe $V - \frac{u.(a-x)}{a.\,Cos\,p}$ wird, wenn $x = EV = CE - CV = a - \frac{Ch}{Cos\,p} = a - \frac{a.\,Cos\,m}{Cos\,p}$, und wenn $x = o$. Wenn nun 1) die Größe, wovon hier die Rede ist, in beiden Fällen beiaht ist, so treibt das Wasser die Schaufel in allen Stellen der Strecke VE fort, und die Rechnung ergibt sich, wie wir sehen werden, ohne weitern Anstand. 2) Wenn diese Größe in beiden Fällen verneint ist, so treibt die Schaufel in ieder Stelle von VE das Wasser fort, und die Rechnung macht wieder eben so wenig Umstände. 3) Wenn ebendie Größe im ersten Fall beiaht und im andern verneinet ist, so wird ein Theil VR der Schaufel vom Strohm fortgetrieben, indeß im Gegentheil der andere Theil RE der Schaufel das Wasser forttreibt. In solchem Fall muß man das Moment M so bestimmen, daß das Integral verschwindet, wann $V - \frac{u.(a-x)}{a.\,Cos\,p} = o$, oder wann $x = \frac{au - Va.\,Cos\,p}{u}$ wird, und daß es seinen vollständigen Werth erhalte, wann $x = EV = a - \frac{a.\,Cos\,m}{Cos\,p}$. Dieses Integral, welches das Moment des Wasserstoßes gegen VR ausdruckt, heiße G. Auch muß man M so bestimmen, daß das

Integral

Integral verschwindet, wann $x = o$ wird, und seinen vollständigen Werth erhalte, wann $x = ER = \frac{au - V a . Cos p}{u}$ ist. Dieses Integral, welches das Moment des Stoßes vom Theil RE der Schaufel gegen das Wasser ausdruckt, heiße H; so ist klar, daß G — H oder H — G das Moment der entstehenden Wirkung ist, welche die Schaufel oder das Wasser forttreibt.

Ich brauche nicht hinzuzusetzen, daß, wenn die Größe $V - \frac{u.(a-x)}{a. Cos p}$ in E beiaht ist, sie es um soviel mehr in V und in ieder andern Stelle von EV seyn müsse.

Es ist klar, daß das Verfahren bei der Rechnung in den dreien Voraussetzungen einerlei ist, und daß es allemal drauf ankommt, eine Summe oder eine Differenz von Momenten der Stöße zu nehmen. Ich werde hier nur die erste Voraussetzung untersuchen, weil es sich in der Ausübung gehört, daß die Schaufel in ieder sich im Strohm befindlichen Stelle vom Wasser fortgestoßen werde. Dieses erhält man aber, wenn nur $V . Cos p = u$ oder $Cos p = \frac{u}{V}$ ist. Es sei z. B. $u = \frac{V}{3}$, so hat man $Cos p = \frac{1}{3}$, folglich den Winkel $= 70\frac{1}{2}$ Gr. Es muß also für diesen Fall der in dem Strohm hängende Theil der Schaufel vertikal gemessen, weniger als zwei Drittheile vom Halbmesser betragen. Bei Rädern, die in Schußrinnen laufen, ist der vom Wasser getroffene Theil gegen dem Halbmesser allemal sehr gering. Bei Rädern, die in Flüssen hängen, erreicht der eingetauchte Theil bei weitem die nur erwähnte Grenze nicht. Meine Rechnung hat also die völlige Allgemeinheit, die wir nöthig

nöthig haben. Wenn die Größe $V - \frac{u.(a-x)}{a.\,Cos\,p}$ als beiaht angenommen wird, so erhellet, daß die Größen $V - \frac{u.(a-x)}{a.\,Cos\,(p-q)}$, $V - \frac{u.(a-x)}{a.\,(Cos\,p - 2q)}$, $V - \frac{u.(a-x)}{a.\,Cos\,(p-3q)}$ u.s.w. um sovielmehr beiaht seyn müssen.

III. Integrirt man die Gleichung (A) so, daß das Integral verschwindet, wenn $x = o$, und daß es seinen vollständigen Werth erhält, wenn $x = EV = a - \frac{a.\,Cos\,m}{Cos\,p}$, so findet man, daß

$$M = \frac{n a^2 V^2 . Cos\,p^2 - Cos\,m^2}{2} - \frac{2 n a^2 V u}{3} \times \left(Cos\,p - \frac{Cos\,m^3}{Cos\,p^2}\right) + \frac{n a^2 u^2}{4} . \left(1 - \frac{Cos\,m^4}{Cos\,p^4}\right) \text{ (†)}$$

Zur Abkürzung wollen wir $n^2 a^2 V = N$ und $u = kV$ setzen, wo k einen gegebenen Koefficienten bedeutet, so daß

$$M = N \left[\frac{Cos\,p^2 - Cos\,m^2}{2} - \frac{2k}{3} . \left(Cos\,p - \frac{Cos\,m^3}{Cos\,p^2}\right) + \frac{k^2}{4} \left(1 - \frac{Cos\,m^4}{Cos\,p^4}\right) \right]$$

IV. Nennt man M' das Moment des Wasserstoßes gegen den Theil FV' der folgenden Schaufel, so findet man allemal durch die nämliche Methode

$$M' = N \left[\frac{Cos\,(p-q)^2 - Cos\,p^2}{2} - \frac{2k}{3} . \left(Cos\,(p-q) - Cos\right.$$

(†) Man sieht, daß ich statt $(Cos\,p)^2$, $(Cos\,m)^2$ &c. zu schreiben, schlechtweg $Cos\,p^2$, $Cos\,m^2$ &c. schreibe, um kürzer zu seyn und die allzuvielen Parentheſen zu vermeiden.

$$\frac{\text{Cof } p^3}{\text{Cof } (p-q)^2}\Big) + \frac{k^2}{4} \cdot \Big(1 - \frac{\text{Cof } p^4}{\text{Cof } (p-q)^4}\Big)\Big]$$

Ebenso, wenn man M'', M''' u. s. f. M^λ die iedesmaligen Momente der Stöße gegen die Theile GV'', HV''' u. s. f. und gegen einen unbestimmten Theil nennt, so erhält man die Gleichungen

$$M'' = N\Big[\frac{\text{Cof } (p-2q)^2 - \text{Cof } (p-q)^2}{2} - \frac{2k}{3}$$
$$\Big(\text{Cof } (p-2q) - \frac{\text{Cof } (p-q)^3}{\text{Cof } (p-2q)^2}\Big) + \frac{k^4}{4} \times$$
$$\Big(1 - \frac{\text{Cof } (p-q)^4}{\text{Cof } (p-2q)^4}\Big)\Big]$$

$$M''' = N\Big[\frac{\text{Cof } (p-3q)^2 - \text{Cof } (p-2q)^2}{2}$$
$$- \frac{2k}{3} \cdot \Big(\text{Cof } (p-3q) - \frac{\text{Cof } (p-2q)^3}{\text{Cof } (p-3q)^2}\Big)$$
$$+ \frac{k^2}{4} \cdot \Big(1 - \frac{\text{Cof } (p-2q)^4}{\text{Cof } (p-3q)^4}\Big)\Big]$$

. . . . . .

$$M^\lambda = N\Big[\frac{\text{Cof } (p-\theta q)^2 - \text{Cof } (p-(\theta-1).q)^2}{2}$$
$$- \frac{2k}{3}\Big(\text{Cof } (p-\theta q) - \frac{\text{Cof } (p-(\theta-1).q)^3}{\text{Cof } (p-\theta q)^2}\Big)$$
$$+ \frac{k^2}{4}\Big(1 - \frac{\text{Cof } (p-(\theta-1).q)^4}{\text{Cof } (p-\theta q)^4}\Big)\Big]$$

wo die ganze Zahl $\theta + 1$ die Anzahl der getroffenen Schaufeln bedeutet.

V. Setzt man also, um den Ausdruck abzukürzen,

$$S = \frac{M + M' + M'' + \ldots + M^\lambda}{N}$$

und

und streicht die einander aufhebenden Glieder weg, so erhält man

$$S = \frac{Cof(p - \theta q)^2 - Cof\,m^2}{2}$$

$$- \frac{2k}{3} \left\{ \begin{array}{rl} & Cof\,p - \frac{Cof\,m^3}{Cof\,p^2} \\ + & Cof(p - q) - \frac{Cof\,p^3}{Cof(p-q)^2} \\ + & Cof(p - 2q) - \frac{Cof(p-q)^3}{Cof(p-2q)^2} \\ + & Cof(p - 3q) - \frac{Cof(p-2q)^3}{Cof(p-3q)^2} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + & Cof(p - \theta q) - \frac{Cof(p-(\theta-1).q)^3}{Cof(p-\theta q)^2} \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{k^2}{4} \left\{ \begin{array}{rl} & 1 - \frac{Cof\,m^4}{Cof\,p^4} \\ + & 1 - \frac{Cof\,p^4}{Cof(p-q)^4} \\ + & 1 - \frac{Cof(p-q)^4}{Cof(p-2q)^4} \\ + & 1 - \frac{Cof(p-2q)^4}{Cof(p-3q)^4} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + & 1 - \frac{Cof(p-(\theta-1).q)^4}{Cof(p-\theta q)^4} \end{array} \right\}$$

woraus sich für einen Augenblick das gesammte Moment des Wasserstoßes ergibt, das Rad mag soviel Schaufeln haben als man will. Es ist klar, daß sich S abändert, so wie sich (wenn alles übrige ungeändert bleibt)

der

der Winkel p ändert oder das Rad beim Umlaufen verschiedene Lagen annimmt.

VI. Außer den vorigen Benennungen heiße noch Π das veränderliche Gewicht, dem der Wasserstos in iedem Augenblick das Gleichgewicht halten kann; c sein Hebelarm, dt das Zeitelement, dy den kleinen in dem Augenblick dt von einem Punkt des Umkreises SBDK beschriebenen Bogen; so erhält man

$$\Pi . c = N . S, \text{ und } \pi . c . dt = N . S . dt$$

Aber

$$dt = \frac{dy}{u} = -\frac{a\,dp}{u}$$

ich schreibe — dp, weil p abnimmt, wenn t wächst. Man hat also

$$\Pi . c . dt = -\frac{a . N . S dp}{u}$$

und

$$c \int \pi\, dt = \frac{aN}{u} \int -S dp$$

VII. Substituirt man für S seinen (N°. V.) gefundenen Werth, so erhält man im zweeten Theil der Gleichung verschiedene Arten von Gliedern. In den folgenden Berechnungen setze ich die beständigen Koefficienten beiseite. Zuerst ergibt sich die Integration des Glieds $dp\,(\mathrm{Cof}\,(p - \theta q)^2 - \mathrm{Cof}\,m^2)$ auf eine leichte Art; denn es verwandelt sich in

$$\frac{dp}{2} + \frac{dp\,\mathrm{Cof}\,(2p - 2\theta q)}{2} - dp\,\mathrm{Cof}\,m^2$$

dessen Integral =

$$\frac{p}{2} + \frac{\mathrm{fin}\,(2p - 2\theta q)}{4} - p . \mathrm{Cof}\,m^2$$

Das Integral von $dp\,\mathrm{Cof}\,p$ ist fin p; das von $dp\,\mathrm{Cof}\,(p - q)$ ist fin (p − q); das von $dp\,\mathrm{Cof}\,(p - 2q)$ ist

ist $\sin(p - 2q)$, und so fort für die Glieder dieser Art.

Die einzige Schwierigkeit liegt in der Integration der Glieder

$$\frac{dp \operatorname{Cof} m^3}{\operatorname{Cof} p^2}$$

$$\frac{dp \operatorname{Cof} p^3}{\operatorname{Cof}(p-q)^2}$$

$$\frac{dp \operatorname{Cof}(p-q)^3}{\operatorname{Cof}(p-2q)^2}$$

u. s. w.

ingleichen der Glieder

$$\frac{dp. \operatorname{Cof} m^4}{\operatorname{Cof} p^4}$$

$$\frac{dp. \operatorname{Cof} p^4}{\operatorname{Cof}(p-q)^4}$$

$$\frac{dp \operatorname{Cof}(p-q)^4}{\operatorname{Cof}(p-2q)^4}$$

u. s. w.

Diese Integrationen ergeben sich durch folgendes Verfahren.

1) $\frac{dp}{\operatorname{Cof} p^2}$ ist leicht zu integriren; denn wenn man $\operatorname{Cof} p = \frac{1}{z}$ setzt, so erhält man $\frac{dp}{\operatorname{Cof} p^2} = \frac{zdz}{\sqrt{(z^2-1)}}$, und das Integral hiervon ist

$$\sqrt{(z^2-1)} = \frac{\sin p}{\operatorname{Cof} p}$$

2) Um $\frac{dp. \operatorname{Cof} p^3}{\operatorname{Cof}(p-q)^2}$ zu integriren, muß man bemerken, daß

$$\text{Cof } p = \text{Cof}((p-q)+q)$$
$$= \text{Cof}(p-q).\text{Cof } q - \text{ſin}(p-q).\text{ſin } q$$

folglich

$$\frac{dp.\,\text{Cof } p^3}{\text{Cof}(p-q)^2} = dp\,\text{Cof}(p-q).\text{Cof } q^3 - 3\,dp\,\text{ſin}(p-q)$$
$$.\,\text{ſin } q.\,\text{Cof } q^2 + \frac{3\,dp.\,\text{ſin}(p-q)^2.\,\text{ſin } q^2.\,\text{Cof } q}{\text{Cof}(p-q)}$$
$$- \frac{dp\,\text{ſin}(p-q)^3.\,\text{ſin } q^3}{\text{Cof}(p-q)^2}$$
$$= \text{Cof } q^3.\,dp\,\text{Cof}(p-q) - 3\,\text{ſin } q.\,\text{Cof } q^2 \times$$
$$dp\,\text{ſin}(p-q) + 3.\,\text{ſin } q^2.\,\text{Cof } q.\,\frac{dp}{\text{Cof}(p-q)}$$
$$- 3.\,\text{ſin } q^2.\,\text{Cof } q.\,dp\,\text{Cof}(p-q) - \text{ſin } q^3 \times$$
$$\frac{dp\,\text{ſin}(p-q)}{\text{Cof}(p-q)^2} + \text{ſin } q^3.\,dp\,\text{ſin}(p-q);$$

Aber

$$\int dp\,\text{Cof}(p-q) = \text{ſin}(p-q);$$
$$\int dp.\,\text{ſin}(p-q) = -\,\text{Cof}(p-q)$$

Die Integration des Glieds $\frac{dp}{\text{Cof}(p-q)}$ gibt ſich, wenn man $\text{Cof}(p-q) = \frac{1}{s}$ ſetzt; dieß gibt

$$dp = -\frac{d\frac{1}{s}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{1}{s}\right)^2\right)}}$$
$$= \frac{ds}{s\sqrt{(s^2-1)}}$$

und

$$\frac{dp}{\text{Cof}(p-q)} = \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)}}$$

wovon

wovon das Integral

$$= L(s + \sqrt{(s^2 - 1)})$$

$$= L\left(\frac{1 + \sin(p-q)}{\cos(p-q)}\right)$$

Das Glied $\frac{dp \sin(p-q)}{\cos(p-q)^2}$ ist das nämliche wie $\frac{-d\cos(p-q)}{\cos(p-q)^2}$, und es hat also zum Integral $\frac{1}{\cos(p-q)}$. Demnach ist das völlige Integral von

$$\frac{dp.\cos p^3}{\cos(p-q)^2} = \cos q^3 \sin(p-q) + 3.\sin q . \cos q^2 . \cos(p-q) + 3.\sin q^2 . \cos q \times L\left(\frac{1+\sin(p-q)}{\cos(p-q)}\right) - 3.\sin q^2 . \cos q . \sin(p-q) - \frac{\sin q^3}{\cos(p-q)} - \sin q^3 . \cos(p-q).$$

Und wenn man bemerkt, daß

$$\cos(p-q) = \cos((p-2q)+q) = \cos(p-2q).\cos q - \sin(p-2q).\sin q$$

so findet man ebenso, daß das Integral von

$$\frac{dp\cos(p-q)^3}{\cos(p-2q)^2} = \cos q^3 . \sin(p-2q) + 3.\sin q . \cos q^2 . \cos(p-2q) + 3.\sin q^2 . \cos q \times L\left(\frac{1+\sin(p-2q)}{\cos(p-2q)}\right) - 3.\sin q^2 . \cos q . \sin(p-2q) - \frac{\sin q^3}{\cos(p-2q)} - \sin q^3 . \cos(p-2q).$$

Nach eben der Methode integrirt man die ähnlichen Größen

$$\frac{dp\,Cof\,(p-2q)^3}{Cof\,(p-3q)^2},\ \frac{dp\,Cof\,(p-3q)^3}{Cof\,(p-4q)^2}\ \text{u. s. f.}$$

3) Um $\frac{dp}{Cof\,p^4}$ zu integriren, setze man $Cof\,p = \frac{1}{\sqrt{(1+z^2)}}$, so erhält man

$$\frac{dp}{Cof\,p^4} = dz + z^2\,dz$$

und das Integral hiervon ist

$$z + \frac{z^3}{3} = \frac{sin\,p}{Cof\,p} + \frac{sin\,p^3}{3.\,Cof\,p^3}$$

4) Um $\frac{dp\,Cof\,p^4}{Cof\,(p-q)^4}$ zu integriren, bemerke man wie vorhin, daß

$$Cof\,p = Cof\,((p-q)+q)$$
$$= Cof\,(p-q).\,Cof\,q - sin\,(p-q).\,sin\,q$$

und daß also

$$\frac{dp\,Cof\,p^4}{Cof\,(p-q)^4} = dp.\,Cof\,q^4 - 4\,Cof\,q^3.\,sin\,q \times \frac{dp.\,sin\,(p-q)}{Cof\,(p-q)} + 6.\,Cof\,q^2.\,sin\,q^2.\,\frac{dp\,sin\,(p-q)^2}{Cof\,(p-q)^2}$$
$$- 4\,Cof\,q\,sin\,q^3.\,\frac{dp\,sin\,(p-q)^3}{Cof\,(p-q)^3} + sin\,q^4 \times \frac{dp\,sin\,(p-q)^4}{Cof\,(p-q)^4} =$$
$$dp.\,(Cof\,q^4 - 6\,Cof\,q^2.\,sin\,q^2 + sin\,q^4) - (4.\,Cof\,q^3\,sin\,q - 4\,Cof\,q.\,sin\,q^3) \times \frac{dp\,sin\,(p-q)}{Cof\,(p-q)} + (6\,Cof\,q^2.\,sin\,q^2 - 2\,sin\,q^4).$$

$$\frac{dp}{Cof(p-q)^2} - 4\,Cof\,q.\,sin\,q^3 \times \frac{dp\,sin\,(p-q)}{Cof(p-q)^3} + sin\,q^4.\,\frac{dp}{Cof(p-q)^4}$$

Die Integration der verschiedenen Glieder dieser Größe ergibt sich durch ähnliches Verfahren und Verwandlungen wie vorhin, und man findet das völlige Integral von $\frac{dp.\,Cof\,p^4}{Cof\,(p-q)^4} =$

$$p\,(Cof\,q^4 - 6.\,Cof\,q^2.\,sin\,q^2 + sin\,q^4) +$$
$$(4.\,Cof\,q^3.\,sin\,q - 4\,Cof\,q.\,sin\,q^3).\,L\,Cof\,(p-q) +$$
$$(6.\,Cof\,q^2.\,sin\,q^2 - sin\,q^4).\,\frac{sin\,(p-q)}{Cof\,(p-q)} -$$
$$\frac{2\,Cof\,q.\,sin\,q^3}{Cof\,(p-q)^2} + \frac{sin\,q^4.\,sin\,(p-q)^3}{3.\,Cof\,(p-q)^3}$$

Endlich ergeben sich die Integrationen der Größen

$$\frac{dp.\,Cof\,(p-q)^4}{Cof\,(p-2q)^4},\ \frac{dp\,Cof\,(p-2q)^4}{Cof\,(p-3q)^4}\ \text{u. s. f.}$$

auf eben die Art.

VIII. Führt man alle diese Rechnungen aus, und nimmt das Integral $\int - Sdp$ so, daß es verschwindet, wann $p = m$, und seinen vollständigen Werth erhält, wann $p = m - q$, so erhält man verschiedene Reihen von Gliedern, so daß sich die Glieder dieser verschiedenen Reihen zum Theil einander aufheben. Streicht man nun alle diese Glieder weg, so verwandelt sich die Gleichung

$$c\int \pi\,dt = \frac{aN}{u}\int - Sdp$$

in diese (B)

$$\int \pi dt = \frac{aN}{u} \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{\text{Cof}\, m^2}{2} \right) . q + \frac{1}{8} (\sin (2m - 2\theta q) - \sin (2m - 2(\theta + 1).q)) + \frac{2k.\text{Cof}\, m^3}{3} \left(\frac{\sin m}{\text{Cof}\, m} - \frac{\sin (m-q)}{\text{Cof}\, (m-q)} \right) - \frac{2k}{3} (\sin m - \sin (m - (\theta + 1).q)) + \frac{2k}{3} (\text{Cof}\, q^3 - 3 \sin q^2 \text{Cof}\, q) (\sin (m-q) - \sin (m - (\theta + 1).q)) + \frac{2k}{3} (3 \sin q. \text{Cof}\, q^2 - \sin q^3). (\text{Cof}\, (m-q) - \text{Cof}\, (m - (\theta + 1).q)) - \frac{2k.\sin q^3}{3} \left(\frac{1}{\text{Cof}\, (m-q)} - \frac{1}{\text{Cof}\, (m - (\theta + 1).q)} \right) + 2k. \sin q^2 . \text{Cof}\, q. L \left(\frac{(1 + \sin (m-q)).\text{Cof}\, (m - (\theta + 1).q)}{\text{Cof}\, (m-q) [1 + \sin (m - (\theta + 1).q)]} \right) + \frac{k^2 q}{4} (\theta + 1 - \theta (\sin q^4 + \text{Cof}\, q^4 - 6 \text{Cof}\, q^2 \sin q^2)) - \frac{k^2 \text{Cof}\, m^4}{4} \left(\frac{\sin m}{\text{Cof}\, m} + \frac{\sin m^3}{3 \text{Cof}\, m^3} - \frac{\sin (m-q)}{\text{Cof}\, (m-q)} - \frac{\sin (m-q)^3}{3. \text{Cof}\, (m-q)^3} \right) - k^2. (\text{Cof}\, q^3 . \sin q - \text{Cof}\, q. \sin q^3). L \frac{\text{Cof}\, (m-q)}{\text{Cof}\, (m - (\theta + 1).q)} - \frac{k^2}{4} . (6. \text{Cof}\, q^2 . \sin q^2 - \sin q^4). \left(\frac{\sin (m-q)}{\text{Cof}\, (m-q)} - \frac{\sin (m - (\theta + 1).q)}{\text{Cof}\, (m - (\theta + 1).q)} \right) + \frac{k^2 . \text{Cof}\, q. \sin q^3}{2} \times \left(\frac{1}{\text{Cof}\, (m-q)^2} - \frac{1}{\text{Cof}\, (m - (\theta + 1).q)^2} \right) - \frac{k^2}{12} . \sin q^4 . \left(\frac{\sin (m-q)^3}{\text{Cof}\, (m-q)^3} - \frac{\sin (m - (\theta + 1).q)^3}{\text{Cof}\, (m - (\theta + 1).q)^3} \right) \right]$$

IX. In dieser Formel stellt $\int \pi dt$ das Gewicht vor, welchem der Wasserstos in der Zeit t, worin sich das Rad um den Winkel q herumdreht, das Gleich-

gewicht

gewicht halten kann. Man setze $\frac{\int \pi dt}{t} = \pi'$, wo π' nur ein Gewicht bedeutet, und überlege, daß $t = \frac{aq}{u}$. Ferner gedenke man sich, es sey in dem Augenblick, wo die erste Schaufel Ee in das Wasser tritt, die Schaufel AB in der Vertikallinie; dieses gibt $m = (\theta + 1).q$. Dividirt man den ersten Theil der Gleichung (B) durch t, den zweeten durch $\frac{aq}{u}$, und setzt $m = (\theta + 1).q$, so findet man die Gleichung (C)

$$\pi.c = \frac{N}{q}\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{\text{Cof}\,m^2}{2}\right).q + \frac{\sin 2q}{8} + \frac{2k.\text{Cof}\,m^3}{3}\left(\frac{\sin m}{\text{Cof}\,m} - \frac{\sin(m-q)}{\text{Cof}(m-q)}\right) - \frac{2k\sin m}{3} + \frac{2k}{3}\text{Cof}\,q^3 - 3\sin q^2.\text{Cof}q).\sin(m-q) + \frac{2k}{3}.(3.\sin q.\text{Cof}q^2 - \sin q^3).(\text{Cof}(m-q) - 1) - \frac{2k.\sin q^3(1-\text{Cof}(m-q))}{3.\text{Cof}(m-q)} + 2k.\sin q^2.\text{Cof}\,q.\text{L}\,\frac{1+\sin(m-q)}{\text{Cof}(m-q)} + \frac{k^2q}{4}.[\theta + 1 - \theta(\sin q^4 + \text{Cof}\,q^4 - 6\,\text{Cof}\,q^2.\sin q^2)] - \frac{k^2.\text{Cof}\,m^4}{4}\left(\frac{\sin m}{\text{Cof}\,m} + \frac{\sin m^3}{3.\text{Cof}\,m^3} - \frac{\sin(m-q)}{\text{Cof}(m-q)} - \frac{\sin(m-q)^3}{3.\text{Cof}(m-q)^3}\right) - k^2.(\text{Cof}\,q^3.\sin q - \text{Cof}\,q.\sin q^3).\text{L}\,\text{Cof}(m-q) - \frac{k^2}{4}(6\,\text{Cof}\,q^2.\sin q^2 - \sin q^4).\frac{\sin(m-q)}{\text{Cof}(m-q)} + \frac{k^2.\text{Cof}\,q.\sin q^3.\sin(m-q)^2}{2.\text{Cof}(m-q)^2} - \frac{k^2.\sin q^4.\sin(m-q)^3}{12.\text{Cof}(m-q)^3}\Bigg]$$

376. Zusatz. Um eine sehr einfache Anwendung von dieser Formel zu machen, setze man, das

Rad drehe sich mit einer Geschwindigkeit herum, die man gegen der Geschwindigkeit des Wasserstrohms als unendlich klein ansehen könne. Man erhält also k = o, und die Gleichung (C) verwandelt sich in

$$\pi . c = N\left(\frac{1}{4} - \frac{Cof\, m^2}{2}\right) + \frac{N . \sin 2q}{8q}$$

Wenn also das Moment des Wasserstoßes ein Maximum seyn soll, so erhält man, q allein als veränderlich angenommen,

$$2q\,dq . Cof\, 2q - dq . \sin 2q = o$$

oder auch

$$2q\sqrt{(1 - (\sin 2q)^2)} - \sin 2q = o$$

Dieser Gleichung thut q = o ein Genüge. Hieraus folgt, daß die Anzahl der Schaufeln unendlich groß seyn müsse, wie man auch §. 364. gefunden hat.

Wir haben schon angemerkt, daß dieser Schluß nicht nach der Strenge angenommen werden dürfe. Die Erfahrung beweißt, daß, wenn die Anzahl der Schaufeln bis zu einer gewissen Grenze vergrößert worden ist, man alsdann durch fernere Vergrößerung nichts mehr gewinnt, die übrigen nachtheiligen Folgen nicht zu rechnen, welche eine allzugroße Anzahl von Schaufeln verursachen kann.

377. I. Anmerk. Es ist nicht leicht, aus unserer allgemeinen Formel unmittelbar die vortheilhafteste Anzahl von Schaufeln für ein Rad zu finden, das sich mit einer merkbaren Geschwindigkeit dreht, die mit der Geschwindigkeit des Wassers nur einigermassen verglichen werden kann, weil die Gleichung für das Maximum äußerst zusammengesetzt und beinahe ganz unbrauchbar ist; man kann aber eben den Zweck auf eine indirekte Weise erreichen; diese besteht darin, daß man durch die nämliche Formel die Momenten der

Stöße

Stöße für verschiedene Anzahlen von Schaufeln sucht, und unter diesen Zahlen diejenige nimmt, welche das größte Moment gibt. Man weis aus der Analogie und dem Gesetz der Stetigkeit, daß das Rad destomehr Schaufeln haben muß, ie langsamer es geht (*).

378. II. Anmerk. Bevor man in der Ausübung die Anzahl der Schaufeln eines Rads bestimmt, ist noch eine Hauptbemerkung nöthig. Die Schaufeln AB, Oo, Pp, Qq u. s. f. welche auf der andern Seite der Vertikallinie CI liegen, haben ein Bestreben, gegen das Wasser zu stoßen, welches durch den Stos einen beträchtlichen Theil der Geschwindigkeit verlohren hat, die es vor dem Anschlag an das Rad hatte. Wenn

(*) Die Ausführung einer so mühsamen Berechnung (375) verdient Bewunderung; sie ist auch in soferne wirklich nützlich, als sie zur Grundlage gebraucht werden kann, wenn einmal die einfache Theorie vom Stos flüßiger Massen gegen iede einzele sowohl ruhige als bewegte Fläche zu einer größern Vollkommenheit gebracht seyn wird. Gegenwärtig aber hat die so mühsam gefundene weitläuftige Formel keinen praktischen Nutzen, weil der Koefficient des Wasserstoßes $n\left(\frac{\alpha}{4g}\right.$ Anm. zu 370$\left.\right)$ darin als eine beständige Größe angenommen worden ist, da er doch selbsten eine Funktion von u ist. Aus dieser Ursache gibt schon die Formel die Summe der Stosmomenten ganz falsch an; und es läßt sich also auch die vortheilhafteste Anzahl von Schaufeln nicht daraus herleiten. Zum Glück ist der Einfluß, den die Mehrheit der Schaufeln auf den Effekt des Wasserstoßes hat, nicht von der Wichtigkeit, daß es so sehr der Mühe werth wäre, in diesem Punkt um eine vollkommenere Theorie der unterschlächtigen Wasserräder bemüht zu seyn, da einige Schaufeln mehr oder weniger den Effekt nicht einmal merklich abän-

Wenn es also nicht mehr Geschwindigkeit genug übrig hat, um sich dem Stos der erwähnten Schaufeln zu entziehen, so muß daraus für die Maschine ein Verlust in der Bewegung entstehen. Das Stosmoment der nämlichen Schaufeln wird durch eine ähnliche Größe wie 375. No. VIII und IX ausgedruckt. Man sieht also, daß in diesem Fall die nämlichen Mittel, welche das Stosmoment des vordern Wassers gegen das Rad vergrößern, auch zugleich den Widerstand des Hinterwassers (*) befördern. Man darf in solchem Fall die Zahl der Schaufeln nicht zu sehr vergrößern. Mit Recht wird dieses in der Ausübung bei Rädern beobachtet, die in Flüssen hängen (**). Zuweilen wird sogar die Anzahl der Schaufeln zu sehr vermindert. Die

---

dern. Nur sehr viele Schaufeln vermindern den Effekt, welches der Theorie grade zuwider ist; und wenn also auch der Koefficient des Wasserstoßes für ieden Fall bekannt wäre, so würde dennoch die Theorie keineswegs zureichen, die Momente richtig zu bestimmen und die vortheilhafteste Anzahl der Schaufeln theoretisch anzugeben. Es bleibt also hierin nichts anders übrig, als unmittelbare Versuche darüber zu Rath zu ziehen, und daraus eine Regel für die Bestimmung der vortheilhaftesten Schaufelzahl herzuleiten. Ich werde selbsten dergleichen Versuche anstellen, und solche entweder im zweeten Band dieses Werks oder bei anderer Gelegenheit mittheilen.

(*) Man tadele mich nicht wegen dieses Worts statt hintern Wassers, indem beim Mühlenbau der Ausdruck Hinterwasser technisch geworden ist.

(**) Diesem Nachtheil ließe sich auch dadurch großentheils abhelfen, daß man gegen den hintern Theil der Schaufeln eine schiefe Fläche anwendete, die allemal von dem äußern Ende der einen Schaufel bis zum innern der andern herablaufen könnte. Noch besser wäre es, wenn man iede Schaufel hinterwärts pyramidisch ablaufen ließe.

Die Räder, welche in Schußgerinnen laufen, erfodern eine ziemlich beträchtliche Anzahl von Schaufeln, besonders wenn man, wie sich gewöhnlich thun läßt, dem Wasser auf der andern Seite der Vertikallinie CI einen Abfall zu geben sucht, um ihm den Ablauf zu erleichtern und der Bewegung des Rads alle Hindernis zu benehmen.

379. II. Aufgabe. **Aus der Anzahl der Schaufeln, die das Rad bekommen soll, die Geschwindigkeit u zu finden, mit welcher der Umfang SBDK herumlaufen muß, um den größten Effekt der Maschine zu erhalten.**

Man multiplicire den ersten Theil der Gleichung (C) durch v, die Geschwindigkeit der Last Π', die durch die Größe ihrer Bewegung den Effekt der Maschine ausdruckt; und den zweeten durch $\frac{cu}{a}$ eine der v gleiche Größe; hierauf schaffe man k mittelst seines Werths $\frac{u}{v}$ weg, so erhält man eine Gleichung von dieser Form

$$\Pi' v = Au + Bu^2 + Cu^3$$

wo A, B, C gegebene unveränderliche Koefficienten sind, die aber verschieden sind, nachdem die Anzahl der Schaufeln größer oder kleiner ist. Soll also der Effekt der Maschine ein Maximum werden, so muß man

$$Adu + 2Budu + 3Cu^2 du = o \quad (*)$$

setzen; folglich

$$= u$$

(*) Ich erinnere noch einmal, daß dieser Ausdruck nicht fürs Maximum allein, sondern allemal $= o$ ist, weil alle Glieder den Faktor du $(= o)$ enthalten. Für den Fall des größten Werths aber wird der Quotient

$$\frac{Adu + 2Budu + 3Cu^2 du}{du} = o \text{ gesetzt.}$$

$$u = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 3AC)}}{3C} \quad (*)$$

(*) Aus der Erinnerung zu 377. erhellet schon, daß diese Formel für u schlechterdings unanwendbar ist. Ausserdem muß ich aber auch hier die schon mehr gemachte Erinnerung wiederholen, daß der vortheilhafteste Werth von u nicht für den allgemeinen, sondern blos für den nutzbaren Effekt gesucht werden müsse; man müßte also wie (370) P. $\beta u + p. \beta u$ statt $u'. v$ setzen. Die Form der Gleichung würde übrigens hierdurch nicht abgeändert, sondern man dürfte nur A′ statt A schreiben, da dann $A' = A p\beta$ wäre.

Zum Schluß muß ich endlich nochmal auf die Erinnerung 375. No. I. zurückverweisen, nach welcher, wenn auch alle bisher angenommenen physischen Voraussetzungen des Hrn. Bossüt ihre Richtigkeit hätten, doch die Rechnungen durchaus sehr beträchtlich abgeändert werden müßten.

Sechszehntes Kapitel.

Von den horizontalen Rädern, welche durch den Stos des Wassers betrieben werden.

380.

Wenn man in den beiden vorhergehenden Kapiteln, anstatt das Rad als vertikal zu betrachten, annähme, es sey horizontal und werde nur auf einer Seite des Mittelpunkts von einem frei gegen seine Schaufeln ströhmenden Wasser getroffen, so würden die Resultate durchaus die nämlichen seyn; man weis aber, daß eine solche Lage vielerlei üble Folgen hat, die solche nicht wohl zulassen. Gewöhnlich wird das Rad, das nun allemal horizontal angenommen wird, mit einem schief gerichteten Strohm verbunden, der von einer gewissen Höhe herabfällt, und so die Schaufeln nach einander trift; und um einen vortheilhaften Stos zu erhalten, bekommen die Schaufeln, welche zugleich nach dem Mittelpunkt des Rads gerichtet seyn müssen, eine gewisse Neigung gegen die Fläche des Rads. Von dieser Art ist das Rad BHKL (fig. 61.), dessen Fläche horizontal ist und dessen Wellbaum CD also vertikal steht. Jede Schaufel OO, die gegen den Mittelpunkt gerichtet ist, ist gegen den Horizont geneigt und empfängt den Stos des Strohms PQM in dem Augenblick, da ihre Mittellinie AB sich in dem Perpendikel CQ befindet, das vom Mittelpunkt C auf die Richtung des Strohms PQ gezogen wird. Die beiden Winkel PQe, PQf, sind die Nebenwinkel, welche die Schaufelfläche OO mit der Richtung des Strohms macht. Das am Ende einer sich um den

Well-

Wellbaum CD herumwindenden Schnure angeknüpfte Gewicht Π druckt durch die Größe ihrer steigenden Bewegung den Effekt der Maschine aus.

Ich werde zur Abkürzung der Rechnungen iede Schaufel allemal als ein kleines Rektangel ansehen, worin alle Punkte mit dem Mittelpunkt des Stoßes Q gleiche Umdrehungsgeschwindigkeit haben.

381. Man sieht leicht ein, daß es vortheilhaft ist, dieser Gattung von Rädern viele Schaufeln zu geben, damit die Stöße des Strohms ohnunterbrochen auf einander folgen. Denn die Schwere der Last Π, welche das Rad wältigen soll, wirkt unaufhörlich nach entgegengesetzter Richtung; und die Eindrücke dieser Kraft müssen durch die des Strohms aufgehoben werden. Doch muß man die Zahl der Schaufeln nicht soweit treiben, daß der Umfang damit zuviel ausgefüllt wird.

382. I. Aufg. **Den Effekt des Rads BHKL allgemein zu bestimmen, wenn solches durch den Stos des Strohms PQM gegen seine Schaufeln OO betrieben wird.**

Es sey (fig. 62.) ef die getroffene Schaufelfläche; PQM die Richtung des Strohms, QM der Ausdruck für seine Geschwindigkeit; QF der Ausdruck für die horizontale Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt Q des Rads oder der Schaufel im Augenblick des Stoßes gleichförmig herumlauft. Ich zerlege die Geschwindigkeit QM in zwo andere QF, QG, deren erstere mit der Geschwindigkeit Q des Rades einerlei ist und hier nicht in Betrachtung kommt; die andere, auf die man hier allein zu sehen hat, wirkt ebenso, als wenn die Schaufel ef ruhig wäre und der Strohm mit dieser Geschwindigkeit QG gegen sie anstieße. Nennt man

also n den Koefficient des Stoßes (*); B die getroffene Schaufelfläche; R den Halbmesser oder Sinustotus, so ergibt sich die aus dem Stos gegen Q entstehende auf ef senkrechte Wirkung =

$$\frac{n.\,B.\,QG^2.\,(\sin GQe)^2}{R^2}$$

Man drucke diese Kraft durch die auf ef senkrechte Linie QR aus, und zerlege solche in zwo andere Kräfte QS, QT, die eine horizontal, die andere vertikal: so ist klar, daß die vertikale Kraft QT durch die Fläche des Rads, die beständig horizontal ist, vernichtet wird, und daß die horizontale Kraft QS die einzige ist, welche in iedem Augenblick auf die Schaufel wirkt und das Gewicht Π zu wältigen bemüht ist. Es ist aber die Kraft QS = Kraft QR $\times \frac{\sin RQT}{R}$.

Substituirt man also für Kraft QR ihren Werth, den wir gefunden haben, und bemerkt, daß wenn man FQ gegen Z verlängert, die beiden Winkel RQT, eQZ, da die beiden Seiten des einen auf den beiden Seiten des andern senkrecht stehen, einander gleich sind; so ergibt sich das Moment der Kraft QS in Ansehung des Mittelpunkts C des Rads (fig. 61.) =

$$n.\,B.\,(QG)^2.\,\frac{(\sin GQe)^2.\,(\sin eQZ).\,CQ}{R^2}$$

und dieses muß dem Moment Π c des Gewichts Π gleich seyn, wenn c den Hebelarm dieses Gewichts bedeutet.

Man nenne a den Halbmesser CQ des Rads; u seine horizontale Geschwindigkeit QF; v die steigende Geschwindigkeit des Gewichts Π, so ergibt sich, wenn man statt c seinen Werth $\frac{av}{u}$ seßt, (A)

$$\Pi v =$$

(*) Der oben $\frac{\alpha}{4g}$ ware, wenn g den freien Fall in 1 Sek. bedeutet.

$$\Pi v = \frac{n.B.(QG)^2.(\sin GQe)^2.(\sin eQZ).u}{R^2}$$

welches die gesuchte Gleichung ist, von der wir nun noch weitern Gebrauch machen werden.

383. II. Aufg. Aus der Geschwindigkeit u des Rads und der Geschwindigkeit des Strohms die Lage zu bestimmen, welche die Schaufel e f haben muß, um den größten Effekt der Maschine zu erhalten.

Da in dem Dreieck FQM (fig. 62.) die Seiten QF, QM und der eingeschlossene Winkel FQM gegeben sind, so hat man die Geschwindigkeit FM oder QG. Man hat auch den Winkel GQZ, welchen GQ mit der Horizontallinie FQZ macht. Es ist also in dem zweeten Theil der Gleichung (A) nur $(\sin GQe)^2$ und $\sin eQZ$ unbestimmt; und man sieht, daß es drauf ankommt, einen gegebenen Winkel GQZ in zween andere GQe, eQZ zu zerlegen, so daß wenn man das Quadrat vom Sinus des einen mit dem Sinus des andern multiplicirt, das Produkt $(\sin GQe)^2 . (\sin eQZ)$ ein Maximum werde.

Es sey der Sinustotus $= 1$, der gegebene Winkel $GQZ = m$, der Winkel $eQZ = m - z$; so soll also

$$(\sin z)^2 . (\sin (m - z)) = \text{Maximum}$$

seyn, eine Foderung die gar wohl statt findet, weil dieser Ausdruck beidesmal verschwindet, man mag $z = o$ oder $z = m$ setzen, und zwischen diese beide Grenzen ein endlicher Werth von z fällt. Demnach

$$2 \sin z . \text{Cos} z . \sin (m - z) . dz - \sin z^2 . \text{Cos} (m - z) . dz = o$$

Der Werth $\sin z = o$ gibt ein Minimum. Die Gleichung für das Maximum ist

2 Cos

$$2 \operatorname{Cos} z . \sin (m - z) - \sin z . \operatorname{Cos} (m - z) = 0$$

oder

$$2 \sin m . (\operatorname{Cos} z)^2 - 2 \operatorname{Cos} m . \sin z . \operatorname{Cos} z - \operatorname{Cos} m . \sin z . \operatorname{Cos} z - \sin m . (\sin z^2) = 0$$

oder

$$\frac{\sin m}{\operatorname{Cos} m} = \frac{\sin 2z}{\frac{1}{3} + \operatorname{Cos} 2z}$$

woraus sich folgende Verzeichnung ergibt. (*) Aus

(*) Herr Bossut hat sich mit der Konstruktion dieser Gleichung begnügt; ich will daher noch zeigen, wie der Werth von z selbsten beschaffen seyn müsse.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\sin 2z = \frac{\sin m}{\operatorname{Cos} m} . \operatorname{Cos} 2z + \frac{\sin m}{3 . \operatorname{Cos} m}$$

$$= \operatorname{tang} m . \operatorname{Cos} 2z + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang} m$$

wofür ich Kürze halben

$$\sin 2z = A . \operatorname{Cos} 2z + B$$

schreiben will.

Man setze statt sin 2z seinen Werth $\sqrt{(1 - (\operatorname{Cos} 2z)^2)}$, und quadrire auf beiden Seiten, so erhält man aus dieser quadratischen Gleichung auf bekannte Art

$$\operatorname{Cos} 2z = -\frac{AB}{A^2 + 1} \pm \sqrt{\left(\frac{1 - \frac{B^2}{1 + A^2}}{1 + A^2} \right)}$$

und auf eben die Art, wenn man in der Gleichung für sin 2z statt Cos 2z seinen Werth $\sqrt{(1 - (\sin 2z)^2)}$ setzt, dann B auf die andere Seite bringt, hierauf wieder quadrirt, und nun aus dieser quadratischen Gleichung sin 2z sucht,

$$\sin 2z = \frac{B}{1 + A^2} \pm A . \sqrt{\left(\frac{1 - \frac{B^2}{1 + A^2}}{1 + A^2} \right)}$$

Q als Mittelpunkt beschreibe man mit dem willkührlichen Halbmesser QX, den man für die Einheit oder Sinustotus annimmt, den Halbkreis XYL, welcher durch den Durchmesser XL begrenzt wird und auf die Seite GQ des gegebenen Winkels GQZ fällt; man nehme $QK = \frac{QX}{3}$; mit der andern Seite QZ des Winkels GQZ oder XQY ziehe man die grade Linie KI gleichlaufend; man ziehe den Halbmesser QI und theile

---

Nun sey β der Winkel, dessen Sinus $= \frac{B}{\sqrt{(1+A^2)}}$, und α der Winkel, dessen Tangente $= A$ ist, so hat man $\sqrt{(1+A^2)} = \sec \alpha$; $\frac{1}{\sqrt{(1+A^2)}} = \cos \alpha$ und $\sqrt{\left(1 - \frac{B^2}{1+A^2}\right)} = \cos \beta$; demnach

$$\cos 2z = \pm \cos \beta . \cos \alpha - \sin \beta . \sin \alpha$$
$$\sin 2z = \sin \beta . \cos \alpha \pm \sin \alpha . \sin \beta .$$

Folglich

1) $2z = \alpha + \beta$
2) $2z = 180° + \alpha - \beta$

Nun ist aber hier $\alpha = m$, und $\frac{B}{\sqrt{(1+A^2)}} = \frac{\frac{1}{3}\tang m}{\sqrt{(1+(\tang m)^2)}} = \frac{\tang m}{3 . \sec m} = \frac{1}{3}\sin m$

Wenn also δ den Winkel bedeutet, dessen Sinus $= \frac{1}{3}\sin m$ ist, so hat man

1) $2z = m + \delta$
2) $2z = 180° + m - \delta$

Oder

1) $z = \frac{m+\delta}{2}$
2) $z = 90° + \frac{m-\delta}{2}$

theile den Winkel IQX durch den Halbmesser QN in zween gleiche Theile: so muß die Schaufel ef auf diesen Halbmesser fallen. Denn wenn man von den Punkten Y und I auf den Durchmesser XL Perpendikularlinien YE, IH fällt, so erhält man (wegen der ähnlichen Dreiecke QEY, KHI)

$$\frac{YE}{QE} = \frac{IH}{KH}$$

oder

$$\frac{\sin YQL}{\text{Cos}\, YQL} = \frac{\sin IQL}{\text{Cos}\, IQL - \frac{QL}{3}}$$

Da nun der Winkel YQL die Ergänzung des Winkels YQX oder des Winkels m ist, so hat man $\sin XQL = \sin m$; $\text{Cos}\, YQL = -\text{Cos}\, m$; $\frac{\sin YQL}{\text{Cos}\, YQL} = -\frac{\sin m}{\text{Cos}\, m}$; und da der Winkel IQL die Ergänzung des Winkels IQX ist, den ich y nenne, so hat man

$$\sin IQL = \sin y;\ \text{Cos}\, IQL = -\text{Cos}\, y;$$

$$\frac{\sin IQL}{\text{Cos}\, IQL - \frac{QL}{3}} = \frac{-\sin y}{\frac{1}{3} + \text{Cos}\, y}$$

Man hat also

$$\frac{\sin m}{\text{Cos}\, m} = \frac{\sin y}{\frac{1}{3} + \text{Cos}\, y}$$

folglich, wenn man den Winkel $z\ \frac{y}{2}$ oder $2z = y$ setzt,

$$\frac{\sin m}{\text{Cos}\, m} = \frac{\sin 2z}{\frac{1}{3} + \text{Cos}\, 2z}$$

welches der Bedingung des Maximi gemäs ist.

384. Anmerk. Wir müssen im Vorbeigehen bemerken, daß die nämliche Methode auch zu Bestimmung des vortheilhaftesten Winkels dienen kann, welchen die Windmühlenflügel mit der Axe machen müssen, indem man diese Flügel als unendlich schmale Rektangel betrachtet, welche schief und abwechselnd nach entgegengesetzter Richtung um den Wellbaum herum gesetzt werden, so daß sich der horizontale Stos des Winds in zwo Kräfte zerlegen läßt, wovon die eine mit dem Wellbaum parallel ist und aufgehoben wird, die andere aber in einer auf den Wellbaum senkrechten Ebene liegt, welche die Maschine in Umlauf bringt. Da aber diese Aufgabe ohne weitläuftige Untersuchungen nicht gehörig abgehandelt werden könnte, so verweise ich hierin auf des Hrn. Maclaurin Buch von den Fluxionen, des Hrn. d'Alembert Traité des fluides und den V. Band seiner Opuscules Mathematiques, vorzüglich aber auf eine vortrefliche Abhandlung des Hrn. Euler (Acad. Petrop. an. 1752.) (*).

385.

(*) Darin liegt doch zwischen dem Windstos und dem Stos eines Wasserstrahls ein wesentlicher Unterschied, daß bei ersterem der senkrechte Querschnitt des Luftstrohms bei einerlei Flügel desto kleiner wird, ie schiefer seine Richtung gegen den Flügel ist, bei letzterem hingegen der senkrechte Querschnitt des Wasserstrohms bei einerlei Schaufel ungeändert bleibt, wenn sich gleich die Richtung des Strohms gegen die Schaufel ändert. Man findet übrigens die ganze Theorie der Windmühlen in Herrn Hofr. Karstens Lehrbegriff *VI.* B. ziemlich weitläuftig abgehandelt. Auch verdient Herrn Geheimden Oberbergraths Mönnich Anleitung zur Anordnung und Berechnung der gebräuchlichsten Maschinen hierin eine vorzügliche Empfehlung. Von dem Windmühlenbau habe ich in der Anleitung zur Salzwerkskunde das Nöthige vorgetragen. Ich muß

385. III. Aufg. Aus der Geschwindigkeit des Wassers und der Lage des Flügels e f, die horizontale Geschwindigkeit u zu bestimmen, welche das Rad haben muß, um den größten Effekt der Maschine zu erhalten.

Man

---

muß nur noch bemerken, daß alle unsere Theorien von der Wirkung der Windmühlenflügel noch zu unvollkommen sind, als daß man sie so gradhin anwenden könnte. Wie sonsten die Theorie die Effekte der Maschinen gewöhnlich größer angibt, als die Erfahrung, so ist es hier grade umgekehrt: die Erfahrung ergibt bei den Windmühlenflügeln allemal einen weit größern Effekt als ihn die Theorie verspricht. Dieser Umstand ist wichtig genug, die bisherige Theorie etwas näher zu prüfen.

Mariotte nimmt Versuchen zufolge an, daß ein 24 Fus schneller Wind schon soviel bewirke, als Wasser mit 1 Fus Geschwindigkeit. Diesemnach wirkte der Windstos bei 24′ Geschwindigkeit so, als ob die Luft schon $\frac{1}{576}$ so schwer als Wasser wäre. Der Koefficient des Stoßes kann hier offenbar nur $= \frac{1}{4g} = \frac{1}{60}$ ($g = 15$ gesetzt) angenommen werden, und dennoch ist der erwähnte Effekt so beträchtlich.

Herr Mönnich glaubt, der Luftzug könne durch die schnelle Bewegung der Flügel befördert und dadurch die eigentliche Geschwindigkeit des Windes in der Nähe der Flügel noch beschleunigt werden. Mir ist es aber unglaublich, daß die Wirkung ihre Ursache sollte vergrößern können. Sollte die erwähnte Beschleunigung eintretten, so müßte, wie auch Herr Mönnich selbsten annimmt, zunächst hinter den Flügeln eine Verdünnung der Luft statt finden, welche dann den schnellern Strohm der vordern Luft verursachen könnte. Diese Verdünnung könnte aber nicht anders entstehen, als daß die Lufttheilgen hinter den Flügeln schneller ausweichen als die vordern auf die

Man sieht, daß hier alles im zweeten Theil der Gleichung (A) gegeben ist, nur die Größen QG, sin GQe, und u ausgenommen. Es kommt also drauf an, zu machen, daß das Produkt $(QG)^2 \cdot (\sin GQe)^2 \times u$ ein Maximum sey.

Ich

Flügelflächen anstoßen, welches offenbar nicht geschehen kann, weil die dazu nöthige Kraft fehlt. Vielleicht irre ich nicht, wenn ich den Grund der größern Wirkung der Windflügel blos darin setze, daß bei den Berechnungen der Wirkung die specifische Schwere der Luft zu gering angenommen wird. Wenn nämlich auch gleich Versuche über das Gewicht der Luft solche im Mittel auf $\frac{1}{800}$ von der Schwere des Wassers setzen, so versteht sich solches doch nur von ruhig stehender Luft. Da aber die Luft so ungemein elastisch ist und so leicht zusammengepreßt wird, so ist wohl nichts eher zu erwarten, als daß bei Entstehung der Winde die einzelen Lufttheilgen näher aneinander gestoßen und daher nicht in ihrem gewöhnlichen Zustand, sondern verdichtet fortgetrieben werden. Diese Verdichtung muß desto beträchtlicher werden, ie größer die Geschwindigkeit des Windes ist. Mariotte's wirkliche Versuche beziehen sich eigentlich auf die Geschwindigkeit von etwa 6 Fus und nach seinen Angaben läßt sich bei dieser Geschwindigkeit schon die specifische Schwere der anstoßenden Luft $= \frac{1}{810}$ von der Schwere des Wassers setzen. Nun läßt sich bei der Geschwindigkeit von 1 Fus die Verdichtung noch beiseite setzen, und wenn man bei einer so wenig bearbeiteten Untersuchung nun die Voraussetzung annähme, daß die Schwere nach den zunehmenden Geschwindigkeiten von 1 bis 6 Fus arithmetisch wachse, so hätte man

für die Geschwindigkeit von . .	1;	2;	3;	....	6 Fus
die specifische Schwere der anstoßenden Luft . .	$\frac{1}{800}$;	$\frac{1}{800}+d$;	$\frac{1}{800}+2d$;	...	$(\frac{1}{800}+5d = \frac{1}{810})$

also

Ich bemerke zu dem Ende vorerst, daß da die der Größe nach veränderliche Geschwindigkeit QF immer einerlei Richtung behält, alle Stellen der Punkte G auf die horizontale Linie Gm fallen, welche der Verlängerung der Schaufel fe in m begegnet. Es ist klar, daß

---

also $d = \frac{\frac{1}{210} - \frac{1}{800}}{5} = 0{,}00024$; demnach für die Geschwindigkeit von n Fus in 1 Sek.

die spec. Schw. d. anstoßenden Luft $= \frac{1}{800} + (n-1).0{,}00024 = 0{,}00101 + 0{,}00024.n$

Exempel. Für $n = 20$ ergibt sich hiernach die spec. Schwere der anstoßenden Luft $= 0{,}0010 + 0{,}0048 = 0{,}0058 = \frac{1}{173}$ von der Schwere des Wassers. Für $n = 100$ fände man schon die spec. Schwere $= 0{,}001 + 0{,}024 = 0{,}025$ oder $\frac{1}{40}$ von der Schwere des Wassers. Man weiß aber auch was dergleichen Stürme vermögen.

Auch andere Erscheinungen stimmen mit meiner Hypothese ganz gut überein. Würde die Luft, wenn sie sich gegen eine Fläche bewegt, nicht dichter zusammengedrängt, so daß wirklich dichtere Luft mit der bemerkten Geschwindigkeit fortströhmt, so müßten wir, wenn wir uns gegen die Luft bewegen, die nämliche Kraft von der Luft empfinden, als ob ein Wind mit eben der Geschwindigkeit sich gegen uns, wenn wir ruhig stehen, bewegte. Die Erfahrung lehrt aber das Gegentheil. Galoppiren wir z. B. mit einer Geschwindigkeit von 15 Fus in einer Sek. durch die Luft, so empfinden wir, wenn die Luft völlig ruhig ist, bei weitem den Luftstos nicht, welchen ein 15 Fus schneller Wind gegen uns ausübt. Aber in jenem Fall setzen wir nur einen sehr kleinen Theil von Luft in Bewegung, die sich gleich überall ausbreiten kann, also ohne verdichtet zu werden, in ihrem natürlichen Zustand von uns fortgestoßen wird.

daß in dem Dreieck QMm alles gegeben ist, weil man die Seite QM kennt, welche die Geschwindigkeit des Wassers ausdruckt, und die beiden Winkel MQm, QMm. Man fälle aus dem Punkt G das Perpendikel Gh auf Qm, und nenne 1 den Sinus totus, so

---

Ich will von der erwähnten Hypothese eine Anwendung auf das Exempel machen, welches Herr Mönnich a. a. O. S. 252. u. ff. beibringt.

Wenn man daselbst $\frac{800}{171}$. 817 d. i. 3778 statt 817 setzt, so ergibt sich dort S. 257.

$$X \text{ oder } \frac{1}{35} R = \frac{18}{19} \cdot \frac{0{,}627}{2{,}16} \cdot \frac{3778 - f.F}{2{,}5} = \frac{1}{48} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} R$$

Herr M. berechnet f. F = 1004 (S. 261.) allein unter Voraussetzungen, die nach seinem eignen Urtheil nicht statt haben. Die specifische Schwere des Holzes (S. 258.) muß statt 0,3 sicher 0,52 angenommen werden, so daß man sicher 6700 statt 4000 (S. 259.) setzen muß. Setzt man weiter 3778 statt 817, so ergibt sich (S. 259.) 168 statt 36,5 und nun 1750 statt 375 (S. 260.) folglich 6924 statt 4017 (S. 260.) und 1731 statt 1004 (S. 261.) Und wegen des beträchtlichen Widerstandes, welche die Luft den Windruthen entgegengesetzt, läßt sich beiläufig 1800 statt 1004 gebrauchen. Das gäbe also:

$$\frac{1}{35} R = 0{,}275 \cdot \frac{3778 - 1800}{2{,}5} - \frac{1}{360} R$$

und

$$R = \frac{0{,}275 \cdot 791}{\frac{1}{35} + \frac{1}{360}} = \frac{27{,}5 \cdot 791 \cdot 126}{395}$$

$$= 6939 \text{ ℔}$$

welches nach Herrn M. eigenem Urtheil mit der Erfahrung gut genug zusammenstimmen muß. Dahingegen findet Herr M. nach der gewöhnlichen Theorie, daß, wenn auch R = 0 genommen würde, dennoch die Windflügel nicht herumgehen könnten, da sie doch der Erfahrung zufolge einen Läufer, dessen Gewicht

so erhält man $\sin GQe = \frac{Gh}{QG}$. Wir erhalten daher, statt des Produkts $(QG)^2 \times (\sin GQe)^2 \times u$,

$$(Gh)^2 . GM = \text{Maximum};$$

und da die Linie Gh mit Gm in einer unveränderlichen Verhältnis steht, so folgt, daß $Gh^2 \times GM$ ein Maximum wird, wenn $(Gm)^2 . GM$ eines wird. Soll aber der letzte Fall eintretten, so muß MG ein Drittheil

---

Gewicht R beiläufig 7000 ℔ wirklich zu betreiben vermögend sind.

Ich gebe das von mir angenommene Gesetz, oder die Formel

spec. Schwere der anstoßenden Luft $\delta = 0{,}001 + 0{,}00024 . n$

für keine demonstrirte Theorie aus. Sie bleibt noch zur Zeit nur Hypothese, die aber doch aus der Natur der Luft hergeleitet worden ist. Und wann auch die specifische Schwere selbst nicht durch sie bestimmt wird, so kommt man doch der Erfahrung allemal bei weitem näher, wenn man so rechnet, als wäre wirklich $\delta = 0{,}001 + 0{,}00024 . n$, als wenn man schlechthin $\delta = \frac{1}{800}$ annimmt.

Bestimmt man δ aus den Reihen

Geschw. 0, 1, 2, ... 6 Fus

Schwere $\frac{1}{800}$, $\frac{1}{800} + d$, $\frac{1}{800} + 2d$ .... $(\frac{1}{800} + bd = \frac{1}{210})$

so fände man auf die vorige Art

$$\delta = \tfrac{1}{800} + 0{,}0002 . n$$

welche der Erfahrung noch näher kommt und dabei den Vorzug hat, daß auch für $n = 0$ noch richtig $\delta = \frac{1}{800}$ bleibt. Zum Schluß empfehle ich nochmals Herrn Geheimden Oberbergraths Mönnich oben angeführte treffliche Schrift, die billig ieder, der sich mit der Mechanik beschäftigt, zu seinem Handbuch machen sollte. Auf solche Männer darf Teutschland stolz seyn!

theil von Mm betragen. Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion:

Man nehme auf der gegebenen Linie Mm das Stück $MG = \frac{Mm}{3}$; man ziehe GQ und zeichne das Parallelogramm QGMF aus: die Seite QF druckt die Geschwindigkeit aus, welche der Punkt Q haben muß. Diese gefundene Geschwindigkeit substituirt man in der Gleichung (A), so erhält man den größten Effekt Πv der Maschine.

IV. Aufg. Wenn die Geschwindigkeit des Strohms gegeben bleibt, sowohl den Winkel, welchen die Schaufel ef mit dem Strohm machen muß, als die Geschwindigkeit zu bestimmen, welche der Punkt Q haben muß, wenn der Effekt der Maschine ein Maximum werden soll.

Man sieht aus der Gleichung (A) daß unter gegenwärtiger Voraussetzung das Produkt $(QG)^2 \times (\sin GQe)^2 . (\sin eQZ) . u$, welches allein veränderliche Faktoren enthält, ein Maximum seyn muß. Man muß also, nachdem man alle Faktoren dieses Produkts vermittelst des Winkels PQf und der Geschwindigkeit QF ausgedruckt hat, sein Differential so nehmen, daß man dabei diese beiden Größen sich verändern läßt, und die beiden Theile dieses Differentials besonders $= o$ setzen. Es sey

die gegebene Geschwindigkeit QM des Strohms $= V$
die Geschwindigkeit QF des Punkts Q . $= u$
der Sinustotus . . . . . $= 1$
der gegebene Winkel PQZ oder QMm, welchen die Richtung des Strohms mit dem Horizont macht . . . $= k$
der Winkel PQf oder MQe . . . $= p$

Zieht

Zieht man Gg senkrecht auf QM, so erhält man $Gg = u. \sin k$; $Mg = u. \cos k$; $Qg = V - u. \cos k$; $\sin MQG = \frac{Gg}{QG} = \frac{u. \sin k}{QG}$; $\cos MQG = \frac{Qg}{QG} = \frac{V - u. \cos k}{QG}$. Also $\sin GQe = \sin (MQm - MQG) = \sin MQm . \cos MQG - \cos MQm . \sin MQG =$

$$\frac{\sin p . (V - u. \cos k) - \cos p . u . \sin k}{QG}$$

$$= \frac{V. \sin p - u . \sin (p + k)}{QG}$$

und $(QG)^2 . (\sin GQe)^2 = (V. \sin p - u. \sin (p+k))^2$.
Ferner $\sin eQZ = \sin (PQm - PQZ)$
$= \sin (180° - p - k)$
$= \sin (p + k)$

Es verwandelt sich also das Produkt

$(QG)^2 . (\sin GQe)^2 . (\sin eQZ) . u$ in

$(V. \sin p - u. \sin (p+k))^2 . (\sin (p+k)) . u$
$=$ Maximum.

Differentiirt man also nach p und nach u, und setzt die beiden Theile des Differentials $= o$. so ergeben sich die beiden Gleichungen:

B.) $[2V. \cos p - 2u. \cos (p+k)] . [V. \sin p - u. \sin (p+k)] . [\sin (p+k)] + [V. \sin p - u. \sin (p+k)]^2 . [\cos (p+k)] = o$

C.) $-2. [V. \sin p - u. \sin (p+k)] . u. \sin (p+k) + [V. \sin p - u. \sin (p+k)]^2 = o$

Nunmehr bemerke ich, daß in der Gleichung (C) welche sich auf die Veränderung von u bezieht, der

Faktor

Faktor [V. sin p — u. sin (p + k)] weggeworfen werden muß; denn wenn man

$$V. \sin p - u. \sin (p + k) = o$$

oder $V. \sin p = u. \sin (p + k)$

oder $V : u = \sin (p + k) : \sin p$

nähme, so sieht man leicht, daß die Richtung der Geschwindigkeit Q G auf die Schaufel fe fallen würde, und daß also kein Stos erfolgte. Die Gleichung, welche die vortheilhafteste Geschwindigkeit u gibt, ist also $- 2 u. \sin (p + k) +$

$V. \sin p - u. \sin (p + k)$ (*); oder auch

$$u = \frac{V. \sin p}{3. \sin (p + k)}$$

In der Gleichung (B), die sich auf die Veränderung des Winkels p bezieht, muß gleichfalls der Faktor V. sin p — u. sin (p + k) weggeworfen werden; denn wenn man

$$V. \sin p - u. \sin (p + k) = o$$

annähme, und in dieser Gleichung für u seinen Werth $\frac{V. \sin p}{3. \sin (p + k)}$ setzte, so fände man

$$V. \sin p - \frac{V. \sin p}{3} = o$$

welches unmöglich ist. Die Gleichung für den vortheilhaftesten Winkel p ist also

$[2 V. \cos p - 2 u. \cos (p + k)] . [\sin (p + k) +$
$V. \sin p. [\cos (p + k)] - u. \sin (p + k). [\cos$
$(p + k)] = o$

In dieser Formel nun statt u seinen Werth $\frac{V. \sin p}{3. \sin (p + k)}$ substituirt, gibt ganz einfach

$$2. \cos p . \sin (p + k) = o$$

also

(*) Hier ist zu suppliren = o;

also entweder $\sin(p + k) = o$

oder $\text{Cos}\, p = o$

Bei der ersten Voraussetzung fiele die Schaufel ef in die horizontale Richtung und gäbe für u einen unendlichen Werth, welches unmöglich ist.

Die eigentliche Gleichung für den vortheilhaftesten Winkel p ist also

$$\text{Cos}\, p = o$$

und hieraus erhellet, daß solches ein rechter Winkel seyn muß, oder daß die Schaufel ef auf die Richtung PQ des Strohms senkrecht seyn muß. Nun substituire man in der Gleichung

$$u = \frac{V \cdot \sin p}{3 \cdot \sin(p + k)}$$

statt sin p seinen Werth 1, und statt sin (p + k) seinen Werth Cos k, so ergibt sich

$$u = \frac{V}{3 \cdot \text{Cos}\, k} \quad (*)$$

d. i.

(*) Der Winkel, welchen die Schaufelfläche mit dem Horizont macht, und den ich y nennen will, ist des Winkels k Ergänzung zu 90°, also Cos k = sin y, und daher auch

$$u = \frac{V}{3 \cdot \sin y}$$

So druckt auch Herr Hofr. Karsten (Hydraul. §. 149) diese Formel aus.

Weil aber 1 : Cos = Sec : 1, so kann man auch

$$u = \tfrac{1}{3} V \cdot \sec k$$

gebrauchen.

Herr Hofr. Karsten hat zwar nicht zugleich den vortheilhaftesten Werth von p bestimmt, sondern $p = 90°$ vorausgesetzt, und den hierzu gehörigen vortheilhaftesten Werth von u berechnet. Doch hätte

d. i. die vortheilhafteste Geschwindigkeit kommt heraus, wenn man die Geschwindigkeit V des Strohms durch den dreifachen Kosinus des Winkels dividirt, welchen die Richtung des Strohms mit dem Horizont macht.

Substi-

---

hätte er a. a. O. leicht zeigen können, daß auch $p = 90°$ zum größten Effekt erfodert werde. Denn er zeigt, daß der größte Effekt dieses Rads wie bei vertikalen unterschlächtigen Rädern herauskomme (nur daß er bei ienen den Koefficient des Wasserstoßes doppelt so groß als bei diesen annimmt, und dieserwegen also den doppelten Effekt findet), und daß auf diesen größten Effekt der Winkel y (also auch der k) gar keinen Einfluß habe. Wenn nun die Winkel y, k ganz gleichgültig sind, so kommt es nur darauf an, das Wasser so zu leiten, daß sie den stärksten Stos gegen die Schaufelflächen ausüben, und dieses erfolgt bekanntlich unter einem rechten Winkel, daß also $p = 90°$ seyn muß. Dieses hinzugesetzt scheint mir der Vortrag des Herrn Hofr. Karstens in seinem Xten Abschn. den Vorzug vor dem gegenwärtigen Kapitel zu verdienen. Herr Hofr. Karsten erinnert auch noch mit Recht, daß man nicht $k = 90$ nehmen oder das Wasser lothrecht auf die Schaufeln herabfallen lassen dürfe. Es würde alsdann u unendlich groß und die Last unendlich klein seyn müssen. Man hat aber allemal mit Lasten zu thun, die schon wegen der Reibungen weit vom unendlich Kleinen entfernt sind. Man verlangt entweder eine bestimmte Last oder eine bestimmte Geschwindigkeit, und in beiden Fällen bleibt allemal $k < 90°$ d. i. man muß das Wasser allemal schief gegen den Horizont leiten. Man muß überdas den vortheilhaftesten Werth von u wie oben nach dem größten nutzbaren Effekt bestimmen, da dann u merklich kleiner als $\frac{1}{3}$ V. sec k ausfällt. Uebrigens erhellet aus meinen obigen Anmerkungen, daß auch hier der Koefficient des Wasserstoßes nicht so grad-

hin $= \frac{2}{4g}$ oder $\frac{2}{60}$ gesetzt werden kann, und daß

es

Substituirt man nun die Werthe von p und u in der Gleichung (A), so erhält man den Ausdruck für den größten Effekt der Maschine.

---

es noch zweifelhaft bleibt, ob nicht ein vertikales in einem Gerinne laufendes Rad nicht noch mehr leistet als das von Herrn Euler so sehr empfohlene horizontale.

Siebenzehntes Kapitel.

Von den oberschlächtigen Rädern.

387.

Die durch das Gewicht des Wassers in Bewegung gesetzten Räder, wovon hier die Rede ist und die man oberschlächtige zu nennen pflegt, sind vertikale Räder AOBD (fig. 63 und 64.), welche das aus einem Kanal XZ beifließende Wasser in ihre Sockschaufeln, womit sie ringsum versehen sind, auffangen, und sich nun vermög der Kraft, welche dieses Wasser durch seine Schwere ausübt, herumdrehen. Mit dieser Kraft vereinigt sich noch die des Stoßes, wenn das Wasser mit einer Geschwindigkeit in die Schaufeln fällt, welche größer ist als die des Rads. Man sieht, daß, nachdem das Wasser aufgefangen wird, das Rad entweder nach der rechten (fig. 63) oder nach der linken Seite (fig. 64.) herumlaufen kann. Die Schaufeln füllen sich am obern Theil des Rads und fangen in ihrer Umdrehung erst dann sich zu leeren an, wann sie in eine gewisse schiefe Lage herabgekommen sind. Man muß ihnen eine solche Gestalt und solche Abmessungen zu geben suchen, wobei sie ihr Wasser so tief als möglich mit sich herabnehmen (*). Wir

(*) Bekanntlich setzt man die Schaufel aus zwo Flächen zusammen, deren eine die Riegelschaufel nach dem Mittelpunkt des Rads gerichtet ist, die andere aber, die Stosschaufel, mit iener einen stumpfen Winkel macht. Die Breite von iener kann $= \frac{1}{2}\beta$, die von dieser aber $= \frac{1}{4}\beta$ genommen werden, wenn β die Breite der Felgen bedeutet. S. meine mechan. und hydrod. Untersuchungen S. 385 – 408.

Wir schätzen allemal den Effekt der Maschine aus der steigenden Bewegung eines Gewichts Π, das am Ende einer Schnure befestigt ist, die sich über die Rolle S um den Wellbaum herumwindet.

388. Es ist klar, daß, alles andere gleich angenommen, je näher die Stelle, wo das Wasser in die Schaufeln einschießt, dem obern Ende A des vertikalen Durchmessers AB liegt, das Rad auch destomehr Wasser führen müsse, und folglich auch destomehr Kraft zum Umlaufen habe. Man hat es aber nicht allemal in seiner Gewalt, sich diesen Vortheil zu Nutz zu machen; denn es geschieht zuweilen, daß die Höhe vom Ende des Zuflußkanals über der tiefsten Stelle des Bodens zu klein ist, als daß sich ein Rad von einem Durchmesser anbringen ließe, welcher dem Effekt, den es hervorbringen soll, angemessen wäre. Man läßt alsdann das Wasser vor dem Rad einfallen wie (fig. 64.), da man in jedem Fall den Schaufeln diejenige Gestalt geben muß, wobei sie ihr Wasser am spätsten auszuschütten anfangen; man vergrößert ihren innern Raum, wenn man die Breite des Rads vergrößert; dieses hat aber zuweilen wieder den nachtheiligen Erfolg, daß dadurch das Rad zu schwer wird (*).

389.

(*) Dergleichen Räder, wie fig. 64., heißen bekanntlich auch **mittelschlächtige**. Bei geringem Gefälle, z. B. von 7, 8, 9 Fus ist man öfters genöthigt, viel höhere Räder, als dieses Gefälle erlaubt, anzulegen, um wenigere Umgänge in einer Minute zu erhalten und dabei eine größere Last zu wältigen, auch einen gleichförmigern Gang des Rads zu erhalten. Hätte man z. B. bei vielem Aufschlagwasser und 8½ Fus Gefälle eine Stangenkunst mit Pumpen zu betreiben, so könnte ein etwa 7 Fus hohes Rad vielleicht 20 Umgänge in einer Minute machen, welches der ganzen Kunst schädlich wäre. Legt man dagegen ein 16 Fus

389. Das Wasser mag oben über das Rad weg oder von der Seite in die Schaufeln geleitet werden, so entsteht die Bewegung allemal auf einerlei Art. In den ersten Augenblicken wird sie allmälig beschleunigt; bald gelangt sie zur Gleichförmigkeit, und alsdann hält die Wirkung des Wassers der des Gewichts Π beständig das Gleichgewicht. Es finden aber zween Fälle statt: entweder ist die Geschwindigkeit des Wassers da wo es einschießt, der mittlern Umdrehungsgeschwindigkeit der Einschußschaufel gleich, oder sie ist größer. Im ersten Fall wirkt das Wasser schlechthin mit seinem Gewicht auf die Umdrehung des Rads; im zweeten wirkt es sowohl durch sein Gewicht als durch den Stos. Ich sage nichts von einem dritten Fall, der darin bestünde, daß die Umdrehungsgeschwindigkeit der Schaufel größer wäre, als die des einschießenden Wassers; denn wenn dieser einträtte, so wäre die Ursache davon die Schwere des in den Schaufeln liegenden Wassers, die die Bewegung zu beschleunigen strebt; da aber dieses Wasser nur durch den beständigen Zufluß ersetzt werden kann, und seine Wirkung ihre Grenzen hat, so erhellet, daß es bei der Maschine einen desto geringern Effekt hervorbringen würde, iemehr dieser ihre Geschwindigkeit die von ienem überträfe (*).

Man

---

hohes mittelschlächtiges an, so erhält man einen gehörigen Gang der Stangenkunst mit den Pumpen und zugleich eine viel gleichförmigere Bewegung des Rads.

(*) Hier hat sich wohl Herr B. nicht deutlich genug über diesen Fall erklärt. Er gehört nothwendig zu einer allgemeinen Betrachtung über die Wirkung oberschlächtiger Räder, und es ist doch nützlich zu wissen, um wieviel der Effekt eines solchen Rads durch Vergrößerung seiner Geschwindigkeit vermindert wird.

Wenn hier von der Geschwindigkeit des einschiessenden Wassers die Rede ist, so muß darunter eigentlich die

Man wird nämlich bald sehen, daß es sich gehört, das Rad so langsam, als es sich thun läßt, laufen zu lassen. Es ist also hier nur von den beiden ersten Fällen

die Geschwindigkeit verstanden werden, mit der es den Boden der Schaufel erreicht. Diese kann nun offenbar niemalen kleiner seyn als die Geschwindigkeit des Schaufelbodens selbsten. Denn wie kann ein langsamerer Körper einen schnellern einholen? Das Wasser kann aber nicht eher auf den Schaufelboden drucken als bis es solchen eingeholt hat. Da nun zur Unterhaltung der Bewegung nothwendig ein Druck des Wassers in den Schaufeln erfodert wird, welcher den Gegendruck der Last hebt, so folgt, daß die Schaufelböden vom nachfolgenden Wasser wirklich eingeholt werden, folglich das nachfolgende Wasser eine größere Geschwindigkeit als die Schaufelböden selbst erlangen müssen. Denn nur mit größerer Geschwindigkeit kann ein vorauslaufender Körper eingeholt werden. Eigentlich findet also der erwähnte dritte Fall gar niemalen statt, so wenig als der erste aus eben dem Grund. Es muß nämlich allemal die beim Auffallen vom Wasser erlangte Geschwindigkeit größer seyn, als die Geschwindigkeit des vom Wasser eingeholten Schaufelbodens. Das Wasser kann also niemalen in der Höhe, in welcher die Einschußschaufel am Strahl vorbeilauft, schon zu drucken anfangen, sondern erst in einer tiefer liegenden, wo das Wasser durch seine beschleunigte Bewegung die Schaufelwände eingeholt hat. Es muß also das einschießende Wasser allemal durch eine gewisse Tiefe schwebend in den Schaufeln nachfolgen, ohne in solchen einige Wirkung hervorbringen zu können. Je schneller nun das Rad lauft, desto größer ist nothwendig diese Tiefe, desto mehrere Schaufeln gehen also als ganz unnütz verloren und desto geringer ist also die Wirkung. Man sieht hieraus, daß die Geschwindigkeit des oberschlächtigen Rads die Größe des Wasserdrucks auf eine ähnliche Art schwächt, wie die Geschwindigkeit des unterschlächtigen die Größe des

Fällen die Rede. Ferner kommt es ietzt nur drauf an, die Kraft zu bestimmen, womit das in den Schaufeln befindliche Wasser in iedem Augenblick durch seine Schwere

---

Wasserstoßes vermindert. Und insoweit kann man auch hier den Wasserdruck unter die relativen Kräfte zählen. In dem Versuch einer neuen Theorie ꝛc. habe ich §. 188. diese Aufgabe aufgelöst: die Tiefe, „um welche bei einem mittelschlächtigen Rad das „Aufschlagwasser herabfallen muß, bevor es auf den „Schaufelboden wirklich aufliegt, auf ein Beinahe „zu bestimmen.“ Weil bei mittelschlächtigen Rädern die Einschußschaufel eine beträchtliche vertikale Geschwindigkeit hat, hingegen bei oberschlächtigen die vertikale Geschwindigkeit der unter Z (fig. 63.) vorbeischießenden Einschußschaufel sehr klein ist, so fällt das Aufschlagwasser bei letztern offenbar eher zu Boden als bei erstern, und so verliert man also bei den oberschlächtigen Rädern weniger am Druck als bei den mittelschlächtigen. In diesem Betracht bedarf also auch der Anfang dieses §. 398. einer nähern Einschränkung. Man sieht sogar, daß bei einer großen Umlaufsgeschwindigkeit der Effekt eines mittelschlächtigen Rades geringer ausfallen kann, als der größte Effekt eines unterschlächtigen. Eine genaue Auflösung der erwähnten Aufgabe würde übrigens auf sehr schwierige Rechnungen führen, indem ich a. a. O. die Geschwindigkeit der Einschußschaufel beim mittelschlächtigen Rad als lothrecht angenommen habe, welches aber bei einem beträchtlichen Bogenstück schon merklich von der Wahrheit abweicht. Wenn nämlich die lothrechte Geschwindigkeit der Schaufel c, die Umdrehungsgeschwindigkeit C und der Winkel, den die gegen den Mittelpunkt zulaufende Riegelschaufel mit der Vertikallinie macht, z heißt, so ist nicht c = C, sondern c = C. sin z; und die Aufgabe verwandelt sich also in diese: „die Tiefe zu finden, durch die ein Körper „herabfallen muß, bis er einen mit der Geschwin„digkeit C. sin z unter ihm sinkenden Körper einholt, „wenn beide in einem Kreisbogen laufen.“

Schwere dem Gewicht Π entgegenwirkt. Der Effekt des Stoßes, wo er statt findet, ergibt sich aus den Lehren des XIII. Kapitels.

390. Man nehme also an, das Rad gehe mit gleichförmiger Geschwindigkeit herum. Diese Geschwindigkeit mag wie sie will beschaffen seyn, so wirkt die Schwere des in den Schaufeln liegenden Wassers völlig auf eben die Art, als wenn das Rad ruhig stünde (*). Ausserdem ist klar, daß sich diese Kraft des Wassers allemal als ein Stück eines Wasserrings GghH (fig. 65.) ansehen läßt, der um einen gegebenen Bogen GOH in einer gleichfalls gegebenen Dicke herumgelegt wäre. Die Abmessungen von diesem Stück des Wasserrings ergeben sich aus der Gestalt der Schaufeln und der Wassermenge, welche sie enthalten. Gewöhnlich kann die Dicke Gg als unendlich klein in Vergleichung mit dem Halbmesser des Rads CG angesehen werden, und die Umdrehungsgeschwindigkeit des Punkts G oder iedes andern Punkts im Umfang AOBD eben so wie die der Schaufel. Wenn man diese Voraussetzung für zu frei hielte, so könnte man sich der Wahrheit mehr nähern, wenn man statt des Bogens GOH den mittlern Bogen des Ringstücks nähme, und statt des Halbmessers CG den mittlern Halbmesser. Wir setzen aber diese große Schärfe hier beiseit und schreiten nun zur Beantwortung der Hauptfragen.

391. I. Aufgabe. **Das Moment der Kraft zu bestimmen, welche das Stück des Wasserrings GghH, dessen Dicke Gg in Vergleichung mit**

(*) Hier urtheilt Herr Bossût, wie ich oben Anmerk. zu 279. und bestättigt hiermit selbsten meine ihm dort gemachten Einwürfe.

mit dem Halbmesser CG unendlich klein ist, in jedem Augenblick anwendet, um die Bewegung des Rads zu beschleunigen.

Aus dem Mittelpunkt C seyen die beiden Halbmesser CMN, Cmn einander unendlich nahe gezogen, welche das Wasserelement MNnm bestimmen; und aus den Punkten G, H, M, m seyen auf den lothrechten Durchmesser AB die Perpendikel GF, HV, MP, mp gefällt. Auch sey die grade Linie Mrz, welche der Ordinate mp in r und dem horizontalen Halbmesser CO in z begegnet, vertikal herabgelassen. Die Wassermasse MNnm kann durch Mm. MN ausgedruckt werden, und ihr Moment in Ansehung des Mittelpunkts C durch Mm . MN . Cz oder Mm . MN. MP. Nun hat man wegen der ähnlichen Dreiecke Mrm, MPC,

$$Mm : CM = Mr \text{ oder } Pp : MP$$

und daher

$$Mm . MP = Pp , CM$$

Also

$$Mm . MN . MP = MN . Pp . CM$$

und

$$\int Mm . MN . MP = \int MN . Pp . CM$$
$$= MN . CM . \int Pp$$
$$= MN . CM . FV$$

welches der Ausdruck für das Moment der gesammten Wassermasse GghH ist.

Wir haben bei dieser Berechnung die Breite des Rads oder die horizontale Abmessung der Schaufel beiseit gesetzt; wenn man also diese Abmessung D nennt, so ergibt sich der eigentliche Ausdruck für das Moment des Wassers GghH

$$= D . MN . FU . CM$$

Zur

Zur Abkürzung werde ich statt des Produkts D. MN, welches eine rechtwinklichte Fläche ausdruckt, einen bloßen Buchstab B gebrauchen.

392. Zus. Es sey u die Umdrehungsgeschwindigkeit des Punkts G, a der Halbmesser CM; v die steigende Geschwindigkeit des Gewichts Π; c der Hebelarm dieses Gewichts in Ansehung des Mittelpunkts des Rads, so hat man sogleich

$$\Pi . c = B . FV . a$$

und wenn man in dieser Gleichung für c seinen Werth $\frac{av}{u}$ setzt, so erhält man

$$\Pi . v = B . FV . u$$

393. II. Aufg. **Wenn das Rad beständig gleichförmig herumlauft, und die Geschwindigkeit des Punkts G der Geschwindigkeit des Aufschlagwassers an der Stelle Gg, wo es in die Schaufeln stürzt, gleich gesetzt wird, den Effekt der Maschine Πv so groß als möglich zu machen.**

Ich setze voraus, daß der Zuflußkanal in gleichen Zeiten gleichviel Wasser auf das Rad führt. Es sey RZ die beständige Lage des Wasserspiegels, und RF die der Geschwindigkeit V des einschießenden Wassers bey Gg zugehörige Höhe. Man muß hier Gg als eine Oefnung betrachten, deren Oberfläche B ist, und durch die in einer gegebenen Zeit eine gegebene Wassermenge läuft. Man setze, es laufe durch B eine Wassermenge = Q, und es falle ein schwerer Körper in der ersten Sekunde durch 15 Fus herab. Setzt man nun die Höhe RF = H, so erhält man (201.)

$$Q = 2B\sqrt{15H} \text{ oder } B = \frac{Q}{2\sqrt{15H}}$$

und daher

$$\Pi v = \frac{Q}{2\sqrt{15H}} \times FV \times V$$

oder auch (wenn man g die Schwere und k die der Geschwindigkeit v zugehörige Höhe nennt und bemerkt, daß $V^2 = 2gH$, $v^2 = 2gk$ ist (*))

$$\Pi \sqrt{k} = \frac{Q.FV}{2\sqrt{15}}$$

Da nun in dem zweeten Theil dieser Gleichung alles, die veränderliche Linie FV ausgenommen, gegeben ist, so sieht man, daß man, um den Effekt der Maschine zu verstärken, FV vergrößern müsse. Wenn aber der Punkt V als unveränderlich angesehen wird, so nimmt FR um so viel ab, als man VF vergrößert, und es wird also auch die Geschwindigkeit des einschiessenden Wassers bei Gg oder die Umdrehungsgeschwindigkeit des Punkts G desto kleiner. Und es ist klar, daß diese Verkleinerung der Geschwindigkeit statt finden kann, so daß Q unverändert bleibt, weil man die Fläche B oder das Produkt D, MN, dessen beide Faktoren der Veränderung fähig sind, verhältnismäßig vergrößern kann. Die Abänderung von MN kann nur sehr klein seyn, dagegen darf man aber D so viel man will vergrößern, wenn man zu dem Ende das Rad breit genug macht.

Wir machen also den Schluß: **wenn der Umfang des Rads mit einer Geschwindigkeit, welche der Geschwindigkeit des einschießenden Wassers beim Eintritt in die Schaufeln gleich ist, gleichförmig herumlauft, so muß bei einem** bestimm-

(*) Man muß nämlich niemalen vergessen, daß des Herrn Verfassers Werth von g doppelt so groß als der Fall eines schweren Körpers in 1 Sek. ist.

bestimmten Aufwand von Aufschlagwasser, der Effekt der Maschine desto größer werden, ie langsamer das Rad herumlauft.

394. Zus. Wenn man den Ausdruck $\Pi \sqrt{k} = \frac{Q.FV}{2\sqrt{15}}$ für den Effekt des oberschlächtigen Rads, so groß als möglich genommen, mit den Ausdrücken, welche wir (368.) für die größten Effekte unterschlächtiger Wasserräder gefunden haben, vergleicht, so läßt sich daraus beurtheilen, welches Rad, bei einerlei Wasseraufwand, den größten Effekt leiste, das oberschlächtige oder das unterschlächtige? Denn man setze, es seyen hier und §. 368. die in einer Sekunde verwendeten Wassermengen Q gleichgroß; ferner gedenke man sich, es werde hier das Rad ADBO durch den Stos des Wassers betrieben, und daß dieser Stos zu der Stelle V gehöre, so druckt der Buchstab H, welcher §. 368. die der Geschwindigkeit des Strohms zugehörige Höhe bedeutet, hier die Höhe RV aus. Es verhält sich also der Effekt des oberschlächtigen Rads zum größten Effekt des unterschlächtigen (I. Fall.)

wie $\frac{Q.FV}{2\sqrt{15}}$ zu $\frac{2Q.RV}{27.\sqrt{15}}$

oder wie 27 FV zu 4 RV

und der Effekt des oberschlächtigen Rads zum größten Effekt des unterschlächtigen (II. Fall)

wie 27 FV zu 8 RV (*)

Wo

(*) Die Verhältnis der Effekte beider Räder in der Ausübung mit einander zu vergleichen, gehört weit mehr dazu, als hier und in allen hydrodynamischen Lehrbüchern vorgetragen wird. Wenn auch das Wasser bei G, wo es in die Schaufeln fällt, eine Geschwindigkeit hat, die der Geschwindigkeit des

Wo man uneingeschränkt ist und VF (den Punkt V als unveränderlich angenommen) vergrößern kann, um den Effekt des oberschlächtigen Rads zu vergrößern, da erhellet, daß bei gleichviel Aufschlagwasser der Effekt des oberschlächtigen Rads bei weitem beträchtlicher ist als der des unterschlächtigen. Die Räder der ersten Art müssen also allemal, wo es die Umstände leiden,

---

Schaufelbodens gleich ist, so kann doch der Druck des Wassers auf das Rad nicht von dieser Stelle an gerechnet werden, sondern es erreicht, wie ich vorhin erwähnt habe, erst in größerer Tiefe den Boden z. B. in M, da dann PV statt FV gesetzt werden müßte, und es ist so leicht nicht, FP gehörig anzugeben. Es kommt überdas in der Ausübung nicht auf die gesammten, sondern nur auf die nutzbaren Effekte an, deren Verhältnis von iener wieder sehr weit verschieden ist. Ferner ist zu bedenken, daß bei einerlei Gefälle der Mittelpunkt des Stoßes V merklich tiefer unter R fällt, als die Stelle V, welche mit der tiefsten Stelle des Rings GOH waagrecht liegt. Die Schaufeln des oberschlächtigen Rads fangen nämlich bald in der untern Hälfte des Rads an, ihr Wasser auszuschütten und verlieren es nach und nach, so daß der Ueberrest in der Stelle, wo etwa beim mittelschlächtigen Rad der Mittelpunkt des Stoßes seyn würde, für nichts mehr zu achten ist. Statt der allmäligen Ausleerung kann man nun annehmen, die Schaufeln bleiben alle bis zu einer gewissen Stelle, die z. B. mit ϕ waagrecht liege, gleichvoll angefüllt, und unter dieser Stelle seyen sie völlig ausgeleert, so erhellet, daß man bei dem oberschlächtigen Rad ϕ statt V, also Pϕ statt FV schreiben müsse.

Bei Berechnung der gesammten Last darf man auch keineswegs die Luft als einen etwa unbedeutenden Widerstand außer Acht lassen. Ich habe einstmalen diesen Widerstand bei einem mit einer Geschwindigkeit von 10 Fus umlaufenden Rad berechnet,

leiden, den letzten vorgezogen werden. In vielen Fällen aber geht solches nicht an; denn fürs Erste lassen sich in Flüssen keine andere als unterschlächtige anlegen. Ferner erfodern die oberschlächtigen Räder für die Schußgerinne ein starkes Gefälle, das man sich nicht allemal verschaffen kann; in solchem Fall bedient man sich der unterschlächtigen Räder, gegen die

---

net, und ihn, auf den Umfang des Rads gebracht, = 2,5 Kubikfus Wasser gefunden; nun betrug das wirkende Stück des Wasserrings am Umfang noch nicht völlig 6 Kubikfus, ich fand es nämlich $\frac{52}{9}$ = 5,77 Kubikfus und es raubte also der Widerstand der Luft hier schon 0,45 der ganzen Kraft. Ich konnte nämlich sämtliche der Luft ausgesetzte Flächen, auf den Umfang gebracht, zu 400 Quadratfus anschlagen, und hiernach ergibt sich der angegebene Widerstand. Es war also so gut, als ob, die Luft beiseitgesetzt, nur 0,55 der wirklich gehabten Kraft wirkte. So groß ist nun freilich in den wenigsten Fällen dieser Widerstand; ich habe aber mit Fleis dieses Beispiel gewählt, um zu zeigen, wie groß er doch werden kann, und hierdurch desto aufmerksamer darauf zu machen. Erwägt man nun überdas noch die sehr beträchtliche Friktion, so wird man sich aus Betrachtung folgender Stücke 1) der Friktion aller Theile der Maschine, 2) des Widerstands der Luft, 3) der Verminderung wegen $V\phi$, und 4) der Verminderung wegen R P, sehr leicht erklären können, warum die oberschlächtigen Räder gewöhnlich bei weitem nicht leisten, was sie dem ersten Anblick nach leisten sollten. Betrachtet man sie noch weiter in Verbindung mit andern Maschinen, z. B. mit Pumpen, und nimmt wieder besondere Erfahrungen über die Wirkung der Pumpen zu Hülfe, so darf es nicht unerwartet seyn, wenn die Erfahrung zuweilen nur ein Drittheil von dem gibt, was die gewöhnliche Theorie verspricht.

die das Wasser unten anstößt. Endlich kommt man auch in Fälle, wo ein schneller Lauf des Rads erfodert wird und wo man übrigens Wasser in Menge hat; hier erreicht man seinen Zweck mit unterschlächtigen Rädern. Da die oberschlächtigen Räder einen desto größern Effekt ausüben, ie langsamer sie gehen, so könnte man in solchem Fall kein dergleichen Rad gebrauchen, man müßte es dann in einen Trilling oder in ein anderes Rad eingreifen lassen; hierdurch würde aber die Maschine mehr zusammengesetzt und die Friktion vergrößert (*).

395. III. Aufgabe. **Der Punkt G des Rads laufe beständig gleichförmig mit einer Geschwindigkeit herum, die der Geschwindigkeit des Wassers beim Einschuß in die Schaufel gleich**

(*) Ich sehe nicht ein, wie zur Erhaltung einer schnellen Bewegung das unterschlächtige Rad vortheilhafter sey, als das oberschlächtige. Die Proportion

$$27.\ P\phi : (6 \pm 2).\ RV$$

zeigt schon, daß für ein ziemlich beträchtliches RP, also für eine ziemlich beträchtliche Geschwindigkeit dennoch der Effekt des oberschlächtigen Rads den des unterschlächtigen ansehnlich übertrifft. Noch größer aber ist offenbar die Verhältnis der nutzbaren Effekte beider Räder. Denn wenn der Widerstand außer der eigentlichen Last für beide Räder beiläufig einerlei angenommen und durch $m.\ P\phi$ ausgedruckt wird, so verwandelt sich die vorige Proportion in diese

$$(27.\ P\phi - m.\ P\phi) : ((6 \pm 2).\ RV - m.\ P\phi)$$

Wenn nun $27.\ P\phi > (6 \pm 2).\ RV$ ist, so ist offenbar

$$\frac{27.\ P\phi - m.\ P\phi}{(6 \pm 2).\ RV - m.\ P\phi} > \frac{27.\ P\phi}{(6 \pm 2).\ RV}$$

Wenn

gleich sey; der Wasserspiegel RZ des Wasserbehälters soll durch den Beitritt eines Flusses oder Bachs, welcher den Abgang des Wassers auf das Rad vollkommen ersetzt, beständig in gleicher Höhe erhalten werden können, und man sey im Stand, Q nach Willkühr zu vergrößern oder zu verkleinern, indem man das Wasser mittelst einer Röhre von gegebener Weite und veränderlicher Länge aus dem Behälter ableitet; nun sucht man die Stelle Gg, wo man das Wasser in die Schaufeln leiten muß, um den größten Effekt der Maschine zu erhalten.

Man substituire in der Gleichung

$$n\sqrt{k} = \frac{Q.FV}{2\sqrt{15}}$$

für

Wenn also RF = 3 Fus genommen wird oder die Umlaufsgeschwindigkeit der Höhe von 3 Fus zugehört, also = $2\sqrt{15.3}$ oder = 13, 4′ ist, so ist gewiß in iedem Fall, wo sich ein oberschlächtiges Rad anlegen ließe, z. B. für RV = 9′, die nutzbare Wirkung eines oberschlächtigen Rads noch größer als die eines unterschlächtigen. Sollte aber in diesem Fall ein unterschlächtiges angelegt und bei der größten Wirkung ebenso schnell betrieben werden, so ist zu bedenken, daß seine Geschwindigkeit nach meinen obigen Erinnerungen gewiß nicht über $\frac{1}{3}$ von der Geschwindigkeit des Strohms betragen dürfe; es müßte also in diesem Fall die Geschwindigkeit des Strohms wenigstens 4. 13, 4 = 53′ betragen, und hierzu gehört ein Gefälle $RV = \frac{(53')^2}{60} = 47'$, da doch das oberschlächtige schon für RV = 9′ die erwähnte Geschwindigkeit hat. Ein unterschlächtiges Rad für RV = 9′ würde noch nicht mit der Geschwindigkeit von 6 Fus herumlaufen dürfen, also noch nicht halb so schnell als das oberschlächtige.

für Q seinen Werth 2 B. $\sqrt{15}$. H oder 2 B $\times$ ($\sqrt{15}$). ($\sqrt{RF}$); so erhält man

$$\Pi \sqrt{k} = B.FV.\sqrt{RF} = \text{Maximum.}$$

Es ist also, weil B eine beständige Größe ist, die Größe FV^2. RF ein Maximum. Es kommt also drauf an, die gegebene Linie RV so in zween Theile zu theilen, daß das Produkt der einen in das Quadrat der andern ein Maximum sey. Nun wird hierzu erfodert, daß RF ein Drittheil von RV betrage. Also ist für den größten Effekt des Rads

$$\Pi \sqrt{k} = B.\tfrac{2}{3}RV.\sqrt{\frac{RV}{3}}$$

und man kann mittelst dieser Gleichung den größten Effekt dieses Rads mit dem eines unterschlächtigen vergleichen, das in V, wo das oberschlächtige sein Wasser verliert (*), den Stos erhielte.

Die Auflösung dieser Aufgabe kann ihren Nutzen haben, wenn ein Rad schon völlig erbaut ist und solches auf die vortheilhafteste Art betrieben werden soll, dafern die Höhe des Behälters gegeben und unabänderlich ist, und nach Erfodernis mehr oder weniger Wasser genommen werden kann (**).

396.

(*) Ich habe mich über die Verschiedenheit der Lage dieses Punkts bei oberschlächtigen und mittelschlächtigen Rädern schon erklärt.

(**) Wie die Aufgabe hier vorgetragen ist, sehe ich ihren Nutzen nicht ein. Wenn das Rad ganz in der Nähe des Behälters steht, und die **Weite der Röhre als unabänderlich angenommen wird**, so ist es freilich eine interessante Frage, wie tief man das Wasser in der Röhre herableiten müsse, um den größten Effekt zu erhalten? denn ie tiefer die Röhre herabgeht, desto mehr Wasser gibt sie und desto mehr wird also der Effekt vergrößert, hingegen wird durch solche Verlän-

396. IV. Aufg. Man setze, der Zufluß-kanal führe allemal in gleichen Zeiten gleichviel Wasser auf das Rad, und das Rad laufe gleichförmig herum, aber mit einer Umdrehungsgeschwindigkeit des Punkts G, die kleiner sey als die Geschwindigkeit des Wassers beim Einsturz in die Schaufel: man sucht den allgemeinen Ausdruck für den Effekt der Maschine.

Dem Gewicht Π wirkt hier in iedem Augenblick sowohl die Schwere des in den Schaufeln liegenden Wassers, als der Stos des Wassers, welches unaufhörlich in die Schaufeln einschießt, entgegen. Es sey V die Geschwindigkeit dieses Strohms, u die Umdrehungsgeschwindigkeit des Punkts G, a der Halbmesser CG, c der Hebelarm des Gewichts Π, B der Querschnitt

---

Verlängerung der Röhre auch die Höhe des Wasserrings F V vermindert, folglich der Effekt von dieser Seite wieder verschwächt. Des Herrn B. Auflösung ist aber doch für diesen Fall nicht hinreichend, weil darin auf die sich alsdann noch vergrößernde Anzahl der nur mit schwebendem Wasser fortlaufenden Schaufeln keine Rücksicht genommen wird. Ich könnte mir aber auch keinen Umstand gedenken, der da verhindern sollte, aus dem Behälter auf das gleich dabei befindliche Rad eine oder mehrere weitere Röhren zu leiten, und hierdurch den Vortheil der größern Wassermenge zu erhalten, ohne daß man den Nachtheil hätte, eine geringere Höhe des drukkenden Wasserbogens zu erhalten. Die Aufgabe ist also ganz und gar nicht praktisch. Weit interessanter wird die Frage, wenn das Rad in beträchtlicher Entfernung von dem Behälter steht, und man es also mit einer beträchtlichen Röhrenfahrt zu thun hat. Alsdann ist aber die gegenwärtige Auflösung in iedem Betracht unanwendbar. Siehe meinen Versuch einer neuen Theorie hydrodynam. ꝛc. S. 95, u. f.

schnitt einer Schaufel, den eine auf das Rad senkrechte und gegen den Mittelpunkt gerichtete Ebene macht, C die Fläche, gegen die der senkrechte Stos der Wassermasse ausgeübt wird, n der Koefficient des Stoßes; so sieht man (339 und 392.) daß man diese Gleichung erhält

$$\Pi c = B . FV . a + n . C . (V - u)^2 . a$$

oder auch (wenn v die steigende Geschwindigkeit des Gewichts Π bedeutet und $c = \frac{a v}{u}$ hier gebraucht wird)

A.)

$$\Pi . v = B . FV . u + nC (V - u)^2 . u$$

Nun sey Q die unveränderliche Wassermenge, welche der Kanal in ieder Sekunde dem Rad zuführt; H die der Geschwindigkeit dieses Wassers zugehörige Höhe FR; K die Fläche der Oefnung, durch welche das Wasser aus dem Kanal gegen die Schaufeln hinströhmt; h die der Geschwindigkeit u zugehörige Höhe; k die der Geschwindigkeit v zugehörige Höhe.

Da die Geschwindigkeit u kleiner als V ist, so muß K kleiner als B seyn; da aber das Rad gleichförmig herumlauft, und daher das Wasser von dem Behälter an bis zu der Stelle, wo es das Rad verläßt, wie eine zusammenhängende Masse angesehen werden kann, die an einerlei Stellen beständig einerlei Abmessungen behält; so folgt (193), daß die Geschwindigkeiten der verschiedenen senkrechten Querschnitte dieses Strohms sich umgekehrt wie die Größe dieser Querschnitte verhalten. Man hat also

$$B : K = V : u$$

oder

$$B . u = K . V$$

oder

$$B . \sqrt{h} = K . \sqrt{H}$$

Aber $Q = 2 K . \sqrt{15 H}$, oder $K \sqrt{H} = \frac{Q}{2\sqrt{15}}$

Dem-

Demnach

$$B\sqrt{h} = \frac{Q}{2\sqrt{15}}$$

Um nun aber auch den Koefficient des Stoßes n oder $\frac{F}{A\,U^2}$ zu bestimmen, setze man $A = C = K$, $U = V$, und daher die der Geschwindigkeit U zugehörige Höhe $= H$; man nehme $F = m.K.H$, wo m ein beständiger Koefficient ist, der beinahe $= 2$ genommen werden kann (367). Setzt man nun für K seinen Werth $\frac{Q}{2\sqrt{15}.\sqrt{H}}$ so erhält man $F = \frac{m.H.Q}{2.\sqrt{15}.\sqrt{H}}$ und $n = \frac{m}{2g.C} \cdot \frac{Q}{2\sqrt{15}.\sqrt{H}}$

Es verwandelt sich also die Gleichung (A) in diese

$$\Pi.\sqrt{k} = \frac{Q}{2\sqrt{15}} \cdot \left(FV + \frac{m(\sqrt{H}-\sqrt{h})^2.\sqrt{h}}{\sqrt{H}}\right) \quad B.)$$

welches die verlangte Formel ist.

397. V. Aufg. **Es sey alles in der Formel (B) gegeben, nur die Höhe h ausgenommen, welche der Geschwindigkeit u des Punkts G zugehört; man sucht denjenigen Werth dieser Geschwindigkeit, für welchen der Effekt der Maschine ein Maximum wird.**

Unter dieser Voraussetzung muß

$$(\sqrt{H} - \sqrt{h})^2.\sqrt{h}$$

ein Maximum seyn, dies gibt

$$\sqrt{h} = \frac{\sqrt{H}}{3}$$

oder $$u = \frac{V}{3}$$

Diesen Werth von $\sqrt{h}$ in die Formel (B) gesetzt, und $m = 2$ genommen, gibt

$$\text{II. } \sqrt{k} = \frac{Q}{2\sqrt{15}} \cdot \left(RV - \frac{19 \cdot RF}{27}\right)$$

für den größten Effekt des Rads.

398. Zus. Aus diesem Ausdruck erhellet,

1) daß das Rad einen Effekt leistet, der desto größer ist, ie kleiner FR wird, wenn RV gegeben ist, und ie langsamer also das Rad herumgeht. Man würde eben das Resultat erhalten, wenn man den zweeten Theil der Gleichung (B) differentiirte, indem man h und H als veränderlich betrachtete, und die beiden Differentialien abgesondert $= o$ setzte. Denn die sich ergebende erste Gleichung gibt

$$\sqrt{h} = \frac{\sqrt{H}}{3}$$

Diesen Werth von $\sqrt{h}$ in die zwote gesetzt, gibt $H = o$, folglich auch $h = o$, und da solches physisch unmöglich ist, so erhellet wenigstens, daß das Rad einen desto größern Effekt leistet, ie langsamer es herumlauft.

2) Daß der größte Effekt des oberschlächtigen Rads sich zum größten Effekt, welchen ein unterschlächtiges bei dem Gefälle RV leisten würde, verhält,

$$\text{wie } 27. \left(RV - \frac{19 \cdot RF}{27}\right) \text{ zu } 8. RV \text{ (*)}$$

wenn

(*) Nur ist auch von 396 bis 398 in Rücksicht auf das Bogenstück, durch welches das Wasser in den Schaufeln nur schwebend nachfolgt, ingleichem wegen der beim oberschlächtigen Rad erforderlichen Verwechslung des Punkts V mit dem φ die mehr erwähnte

wenn in beiden Fällen gleichviel Aufschlagwasser auf die Betreibung des Rads verwendet wird.

---

erwähnte Korrektion nöthig, da dann auch fürs Maximum ein ganz anderer Ausdruck herauskommen würde.

Achtzehntes Kapitel.

Von den Maschinen, welche durch die Rückwirkung des Wassers betrieben werden.

399.

Wenn ein Gefäs mit Wasser nach einer durch seinen Schwerpunkt gehenden lothrechten Linie aufgehängt wird, so übt das Wasser gegen alle Punkte, die in eben derselben Zone liegen, oder gegen alle Punkte eines horizontalen Querschnitts dieses Gefäßes, das, so lang die flüßige Masse in Ruhe bleibt, beständig einerlei Lage behält, gleich große senkrechte Druckungen aus. Macht man aber irgendwo in den Wänden eine Oefnung, wodurch das Wasser seinen Ausweg findet, so muß, so wie ein solches Stück Wand wegfällt, auch der Druck gegen solches Wandstück wegfallen; die grade entgegen gesetzte Stelle im Gefäs aber leidet einen Druck, der nun durch keine Gegenwirkung mehr aufgehoben wird, und daher das Gefäs rückwärts zu gehen nöthigt. Diese Kraft, welche auf solche Art das Gefäs zurücktreibt, nenne ich die **Rückwirkung des Wassers**; und ich habe hier die Absicht zu zeigen, wie solche als eine Bewegungskraft bei Maschinen dienen kann.

400. Es sey ABCDEF (fig. 66.) ein horizontales Rad, das sich um eine Axe O herumdrehen läßt. Mit diesem Rad und seinem Wellbaum sind eine Reihe von Röhren, wie AH, EG, FH (fig. 67.) in einer festen Verbindung. Diese Röhren kommuniciren oben mit einer ausgehöhlten Tromme HIHI, die sich mit denselben um den Wellbaum herumdrehen; das Wasser

wird

wird zuerst durch die Leitungen NG, welche es aus dem unbeweglichen Behältnis IMIM abführen, in diese Tromme geleitet, von da tritt es in die Röhren und fließt unten durch die Oefnungen a, b, c u. s. f. in horizontalen oder einerlei Richtungen gegen den Horizont ab; hieraus entsteht gegen die Röhren eine Rückwirkung, welche das Rad nach der Richtung ABCDEF herumdreht. Die Bewegung wird nach und nach beschleunigt, wird aber bald gleichförmig. Ich betrachte sie in diesem letztern Zustand, und drucke den Effekt der Maschine allemal durch die steigende Bewegung eines an eine Schnure befestigten Gewichts π aus, so daß sich diese Schnure um den Wellbaum OZ herumwindet.

401. I. Aufg. **Eine Röhre CDFE (fig. 68.), die wie man will gestaltet seyn mag, werde bis zur waagrechten Linie AD beständig voll Wasser erhalten und drehe sich um die lothrechte Axe AB gleichförmig herum, indeß sie das Wasser durch die kleine Seitenöffnung l herauslaufen läßt; man sucht die der Geschwindigkeit dieses Ausflusses zugehörige Höhe.**

Es sey die krumme Linie hMl die Axe (*) der Röhre; und man stelle sich vor, es sey die flüßige Masse in unendlich viele gleiche Schichten nach einer auf die Elementen Mm senkrechten Richtung getheilt, die für iedes Element ihre parallele Lage behalten und von einem Element zum andern ihre Richtung abändern. Jeder Punkt M irgend eines solchen Querschnitts ist unaufhörlich der Wirkung zwoer Kräften ausgesetzt, nämlich der Schwere und der Centrifugalkraft. Man ziehe auf die Axe AB die Horizontallinie MP;

(*) Eigentlicher gesprochen: die centrische Linie.

MP; durch diese beide Linien gedenke man sich eine Ebene, in der wir die lothrechte Mr nehmen, um die Schwere auszudrücken, und die waagrechte Mq, um die Centrifugalkraft vorzustellen. Aus diesen beiden Kräften entsteht die zusammengesetzte Mr, welche durch die Diagonale des Rektangels Mtrq vorgestellt wird. Ich gedenke mir nach dem Element Mm der krummen Linie hMl eine Ebene Mmn senkrecht auf die Ebene APM, so daß Mn die senkrechte Projektion von Mm auf diese letztere Ebene ist; und nun ziehe ich np der MP gleichlaufend. Die Kraft Mr kann in zwo andere Mi, Mg, zerlegt werden, wovon die eine nach Mn, die andere aber senkrecht auf Mn gerichtet ist. Da nun die Fläche Mgrt auf die Fläche Mmn senkrecht ist, so ist die Kraft Mg senkrecht auf das Element Mm, welches in dieser letztern Fläche liegt, und trägt nichts zur Geschwindigkeit nach Mm bei. Die Kraft Mi zerlege ich in die beiden Mf, Mu, da die erstere nach Mm gerichtet ist, welche allein die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre zu beschleunigen strebt; die zwote, welche auf Mm senkrecht ist, kommt hier nicht in Betracht.

Es sey nun

die gegebene Horizontallinie Bl .	=	b
die gegebene Horizontallinie Ah .	=	c
die gegebene Höhe AB . .	=	h
AP	=	x
PM	=	y
pn	=	y + dy
Mm	=	ds
die Fläche der Oefnung l . .	=	K
die Fläche des obern senkrechten Querschnitts der Röhre CD .	=	M
die Fläche des auf Mm senkrechten Querschnitts sMz . .	=	X

die

die Geschwindigkeit, womit das Wasser aus der Oefnung l herausschießt . = u
die dieser Geschwindigkeit zugehörige Höhe = r
die Geschwindigkeit des Wassers nach Mm = v
die absolute gleichförmige Umdrehungsgeschwindigkeit des Punkts l . . . = V
die dieser Geschwindigkeit zugehörige Höhe = f
der Sinustotus . . . . . = 1
der Winkel mMn . . . . . = λ
die Schwere . . . . . = g(*)

So hat man vorerst Kraft Mt = g. Da bekanntlich die Schwungkraft des Punkts l durch das Quadrat der Geschwindigkeit V mit dem Halbmesser Bl dividirt ausgedruckt wird, d. i. durch $\frac{V^2}{b}$ oder $\frac{2gf}{b}$, und die Schwungkräfte zweener Punkten, die in einerlei Zeit herumlaufen, sich wie die Halbmesser der zu durchlaufenden Kreise verhalten, so erhält man

$$\text{Kraft } Mq = \frac{2gf}{b} \cdot \frac{y}{b} = \frac{2gfy}{b^2}$$

also $$\text{Kraft } Mr = \sqrt{\left(g^2 + \frac{4g^2f^2y^2}{b^4}\right)}$$

die ich zur Abkürzung ϕ nennen will;

$$\text{Kraft } Mi = \phi . \text{ Cos } rMi$$
$$= \phi . \text{ Cos}(rMt - iMt)$$
$$= \phi . \text{ Cos } rMt \times \text{Cos } iMt + \phi . \text{ sin } rMt \times \text{sin } iMt$$

Aber $$\text{Cos } rMt = \frac{g}{\phi}$$

$$\text{sin } rMt = \frac{2gfy}{b^2\phi}$$

Cos

(*) Wo sich nämlich g auf die von einem schweren Körper durch den Fall in der ersten Sekunde erlangte Geschwindigkeit bezieht.

$$\text{Cos}\, i\,Mt = \frac{dx}{Mn} = \frac{dx}{ds \cdot \text{Cos}\,\lambda}$$

$$\text{sin}\, i\,Mt = \frac{dy}{ds \cdot \text{Cos}\,\lambda}$$

demnach

$$\text{Kraft } Mi = \frac{g}{\text{Cos}\,\lambda}\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right)$$

$$\text{Kraft } Mf = \text{Kraft } Mi \times \text{Cos}\,\lambda$$

$$= g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right)$$

Wenn nun die Geschwindigkeit des Querschnitts sMz nach der verflossenen Zeit t durch v ausgedruckt wird, so wäre sie nach dem folgenden Augenblick dt

$$v + g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right) dt$$

wenn die Querschnitte nicht auf einander wirkten; da sie aber v + dv wird, so erhellet nach der Methode 230, daß wenn die Querschnitte mit der Geschwindigkeit $g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right) dt - dv$ getrieben würden, sie einander gegenseitig im Gleichgewicht erhalten müßten (*). Hieraus folgt, daß man für die ganze Länge

(*) Der Ausdruck $g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right) dt$ bezeichnet nämlich die Geschwindigkeit, welche der Querschnitt sMz in der Zeit dt hätte, wenn solcher der beschleunigenden Kraft ganz frei folgen könnte; dv aber ist die Geschwindigkeit, welche er in diesem Zeittheilgen wegen der Gestalt des Gefäßes und derer daher rührenden gegenseitigen Druckungen der Querschnitte noch wirklich behält. Die Geschwindigkeit also, welche in iedem Querschnitt verloren geht, ist = g (dx

Länge der krummen Linie hMl diese Gleichung erhält.

$$\int ds \left[g \left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds} \right) dt - dv \right] = o$$

oder auch

$$g\,dt. \int dx + \frac{gfdt}{b^2} \int 2ydy - \int ds\,dv = o$$

Nimmt man nun alle Integralien für die ganze Höhe h, so ist das Integral von $dx = h$, das von $2ydy$ ist $b^2 - c^2$, das von $dsdv$ oder von $ds.d\left(\frac{Ku}{X}\right)$ oder von $\frac{Kds(Xdu - udX)}{X^2}$ ist

$$Kduf\frac{ds}{X} - Ku.Xds\left(\frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2K^2}\right)$$

oder $Kduf\frac{ds}{X} - K^2u^2.dt\left(\frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2K^2}\right)$ weil

---

$g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right)dt - dv$; was aber in manchen Querschnitten von der Geschwindigkeit, welche aus der beschleunigenden Kraft erfolgen müßte, verloren geht, wird in andern wieder gewonnen, so daß der Querschnitt in der Oefnung K doch die ganze der beschleunigenden Kraft angemessene Geschwindigkeit behält, oder der verlorne Theil der Geschwindigkeit in $K = o$ ist. Wenn man nun die zu iedem auf h M l genommenen Stück $hM = s$ gehörige Ordinate $=$

$$g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right)dt$$

setzt, so ist die Summe aller von h bis M verlornen Theile der Geschwindigkeit dem Flächeninhalt der sich ergebenden Figur gleich also $= \int [ds. \left(g\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right)dt - dv]$, und dieses Integral muß also, für $s = hMl, = o$ gesetzt werden.

weil $dt = \frac{ds}{v} = \frac{Xds}{Ku}$ (*). Man hat also, wenn man die gegebene Größe $\int \frac{ds}{X} = N$ setzt,

$$g\,dt$$

(*) Es ist nämlich $\int 2ydy = y^2 +$ Const; es ist aber für $x = o$, $y^2 = c^2$, also für diesen Fall $c^2 +$ Const $= o$ und Const $= -c^2$; demnach $\int 2ydy = y^2 - c^2$, folglich für $x = h$, $\int 2ydy = b^2 - c^2$;

Um ferner $\frac{Kds.(Xdu - udX)}{X^2}$ zu integriren, muß man bedenken, daß für jeden bestimmten Augenblick dt die Ausdrücke Kdu, Ku, $X.ds$ als beständige Größen anzusehen sind, wenn gleich für die ganze Höhe h die Größe X verschiedene Werthe hat, welche von der Gestalt des Gefäßes abhängen.

Nun ist $\frac{Kds.(Xdu - udX)}{X^2} = \frac{Kduds}{X} - \frac{KuX.dsdX}{X^3}$ also das Integral $=$

$$Kdu.\int \frac{ds}{X} - KuXds.\int \frac{dX}{X^3}$$

Es ist aber $\int \frac{dX}{X^3} = -\frac{1}{2.X^2} +$ Const

also für $x = o$, $= -\frac{1}{2M^2} +$ Const $= o$

und Const $= \frac{1}{2M^2}$

folglich $\int \frac{dX}{X^3} = -\frac{1}{2X^2} + \frac{1}{2M^2}$

und daher für die ganze Höhe $x = h$

$$\int \frac{dX}{X^3} = -\frac{1}{2K^2} + \frac{1}{2M^2}$$

$$g\,dt\left(h+\frac{f(b^2-c^2)}{b^2}\right)-N.K.\,du$$
$$-\left(\frac{M^2-K^2}{2M^2}\right).u^2\,dt=0.$$

eine Gleichung, die sich absondern läßt, und woraus sich die Vergleichung zwischen der Zeit t und der iedesmaligen Geschwindigkeit u, mit der das Wasser aus der Oefnung l abschießt, leicht finden läßt, oder die Vergleichung zwischen der Zeit t und der Höhe r, weil $u^2=2gr$ ist.

402. I. Zus. Man sieht überhaupt, daß sich die Geschwindigkeit u von Augenblick zu Augenblick ändert, und daß nur das Glied allein, welches diese Veränderung du enthält, von der Gestalt der Röhre abhängt. Aber durch Integrirung der vorhergehenden Gleichung findet man, daß, wenn die Oefnung K viel kleiner als der obere Querschnitt der Röhre M ist, die Geschwindigkeit u nach den 2 oder 3 ersten Sekunden des Ausflusses nicht mehr merklich von der gleichförmigen verschieden ist, das ist, daß nach dem Anfang der Bewegung, der keiner Betrachtung werth ist, sehr nahe in gleichen Zeiten gleich viel Wasser ablauft. Wir wollen daher in der Folge du (*) $=0$ setzen; und hierdurch erhält man (**) schlechthin

$$g\,dt$$

(*) Oder richtiger gesprochen $\frac{du}{dt}$, denn du ist allemal $=0$.

(**) Nun sollte folgen

$$\frac{g\,dt}{dt}\left(h+\frac{f(b^2-c^2)}{b^2}\right)-N.K.\frac{du}{dt}$$
$$-\left(\frac{M^2-K^2}{2M^2}\right).u^2.\frac{dt}{dt}=0$$

welches

$$g\,dt\left[h+f\left(\frac{b^2-c^2}{b^2}\right)\right]-\left(\frac{M^2-K^2}{2M^2}\right).u^2\,dt=0$$

oder

$$h+f\left(\frac{b^2-c^2}{b^2}\right)-\left(\frac{M^2-K^2}{M^2}\right).r=0$$

und dieses gibt

$$r=\left(h+f\left(\frac{b^2-c^2}{b^2}\right)\right).\frac{M^2}{M^2-K^2}\ (*).$$

Man

welches sich, weil $\frac{du}{dt}=0$ ist, in

$$g\left(h+\frac{f.(b^2-c^2)}{b^2}\right)-\left(\frac{M^2-K^2}{2M^2}\right).u^2=0$$

verwandelt; und weil $u^2=2gr$, so erhält man diesen Werth von u^2 gesetzt, und hiernächst die ganze Gleichung mit g dividirt,

$$h+\frac{f(b^2-c^2)}{b^2}-\left(\frac{M^2-K^2}{M^2}\right).r=0.$$

(*) Es läßt sich diese Formel auch aus der Natur der Sache unmittelbar erläutern. Die Geschwindigkeit des Ausflusses durch l wird von zwoen Kräften bewirkt, nämlich I) wie in iedem unbeweglichen Gefäs von der gegebenen Wasserhöhe h; II) Von der Höhe des Wasserdrucks, welcher wegen des Kreisumlaufs der Röhre durch die Schwungkraft entsteht. Die der Umdrehungsgeschwindigkeit V des Punkts l zugehörige Höhe ist aber f, und die Umdrehungsgeschwindigkeit des Punkts h $=\frac{c}{b}.V$, also die dieser Geschwindigkeit zugehörige Höhe $=\frac{c^2}{b^2}.f$; wenn nun letztere der erstern entgegengesetzt ist, oder auf das Wasser nach entgegengesetzter Richtung wirkt, so ist die Höhe, welche wegen der Schwungbewegung noch

Man darf aber nicht vergessen, daß dieser Ausdruck voraussetzt, es sey M beträchtlich größer als K (*). Der

---

noch in Anschlag kommt $= f - \frac{c^2}{b^2} \cdot f = f \cdot \left(\frac{b^2 - c^2}{b^2}\right)$ das heißt, wenn keine Schwungkraft wirkte und doch eben die Bewegung erfolgen sollte, so müßte noch eine Wassersäule von der Höhe $f \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2}$ zu der von der Höhe h kommen, welche die Umdrehungsgeschwindigkeit bewirkte, und es müßte also das Gefäs auf die Höhe $h + f \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2}$ voll erhalten werden. Bei einem Gefäs aber, das auf die Höhe $h + f \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2}$ voll erhalten wird, ist die zur Geschwindigkeit des Ausflußes gehörige Höhe $= \left(h + f \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2}\right) \cdot \frac{M^2}{M^2 - K^2}$. Man muß sich nämlich vorstellen, die Schwungkraft wirkt auf das Wasser in der Röhre etwa so, als wenn die Röhre zusammengepreßt würde; das Wasser wird dadurch überhaupt genöthigt, nach allen Seiten Auswege zu suchen, folglich sowohl oberwärts als unterwärts auszuweichen, so daß der Trieb der Masse nach unten zu durch f, der nach obenzu aber durch $\frac{c^2}{b^2} \cdot f$ und daher beider Unterschied oder die übrigbleibende Wirkung von oben herab durch $f \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2}$ ausgedruckt werden kann.

(*) Diese Formel stimmt nämlich desto genauer mit der Wahrheit überein, ie richtiger die Voraussetzung ist, worauf sie sich gründet, daß nämlich $\frac{du}{dt} = o$ sey, und diese Voraussetzung läßt sich in dem Fall ohne merklichen Fehler annehmen, wann $\frac{M}{K}$ eine beträchtl-

Der Werth von r hängt, bei dieser Voraussetzung, wie man sieht, gar nicht von der Gestalt des Gefäßes ab; nur muß man Röhren mit starken Wendungen, worinn das Wasser wegen der Reibung nicht frei durchfließt, vermeiden.

403. II. Zus. Wenn die Oberfläche des Wassers beim Eingang der Röhre CD horizontal angenommen wird, so ist die erste Richtung der krummen Linie hMl vertikal. Nun ist die Geschwindigkeit nach dieser Richtung $\frac{Ku}{M}$, indeß die gleichförmige horizontale Umdrehungsgeschwindigkeit des Punkts $h = \frac{c}{b} \cdot V$ ist.

Es ist also die wahre Geschwindigkeit des Wassers in $h =$

$$\sqrt{\left(\frac{K^2 u^2}{M^2} + \frac{c^2 V^2}{b^2}\right)}$$

oder $= \sqrt{\left[\frac{2grK^2}{M^2} + \frac{2gfc^2}{b^2}\right]}$

und die Leitung NG (fig. 67.), die sich nach der Richtung dieser Geschwindigkeit richten muß, soll also unter einem Winkel gegen den Horizont geneigt seyn, dessen Tangente $= \frac{bKu}{cM.V} = \frac{bK\sqrt{r}}{cM\sqrt{f}}$ (*)

Da

---

beträchtliche ganze Zahl ist. In eben diesem Fall ist aber auch $\frac{M^2}{M^2 - K^2}$ nicht merklich von 1 verschieden, und eben darum läßt sich die Formel noch einfacher so ausdrücken

$$r = h + f\left(\frac{b^2 - c^2}{b^2}\right)$$

(*) Man muß sich nämlich die Richtung der Geschwindigkeit oder der Leitung als die Hypothenuse eines recht-

Da übrigens der Druck des in dem unbeweglichen Behälter IM l M enthaltenen Wassers die Geschwindigkeit $\sqrt{\left(\frac{2g r K^2}{M^2} + \frac{2gfc^2}{b^2}\right)}$ an der untern Oefnung der Leitung NG bewirken muß, so folgt, daß die Höhe ZR dieses Wassers $= \frac{rK^2}{M^2} + \frac{fc^2}{b^2}$ seyn müsse.

404. III. Zus. Da der Druck an der Stelle M der Röhre CDFE (fig. 68.) die Summe der verlohrnen Kräfte $g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right) - \frac{dv}{dt}$ ist, so erhält man, diesen Druck $= P$ gesetzt,

$$dP = ds\left[g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right) - \frac{dv}{dt}\right] (*)$$

oder

---

rechtwinklichten Dreiecks gedenken, dessen vertikale Seite $= \frac{Ku}{M}$, und die horizontale $\frac{cV}{b}$; nun ist erstere die Tangente vom Neigungswinkel der Hypothenuse gegen die horizontale Seite, wenn diese als der Sinustotus oder als 1 angenommen wird; demnach ist des gedachten Neigungswinkels Tangente $=$

$$\frac{\left(\frac{Ku}{M}\right)}{\left(\frac{cV}{b}\right)} = \frac{bKu}{cMV}.$$

(*) Wenn man sich nämlich die zentrische Linie h M l als Abscissenare gedenkt, worauf die Kräfte $g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right) - \frac{dv}{dt}$ als Ordinate genommen werden, so stellt die Summe aller Ordinaten, welche zu einer gewissen Abscisse h M gehören, zugleich die Summe aller Kräfte vor; man erhält sie also durch

oder

$$dP = g\,dx + \frac{2gfydy}{b^2} - \frac{ds\,dv}{dt}$$

oder

---

durch Quadrirung einer krummen Linie, in welcher zu ieder Abseisse die Ordinate $g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right) - \frac{dv}{dt}$ gehört, folglich

$$P = \int ds\left[g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right) - \frac{dv}{dt}\right]$$

Es ist dieses also die Summe aller derer von h bis M angewendeten Kräfte, von welchen keine Geschwindigkeit, sondern nur Druck entsteht, und so ist also P der ganze Druck, den die Wassermasse DC sz auf den Querschnitt sz ausübt, ohne Geschwindigkeit hervorzubringen, oder derienige Theil der gesammten von h bis M angewendeten Kraft, welcher nicht Geschwindigkeit, sondern blos Druck hervorbringt. Setzt man nach geschehener Integrirung $x = h$, $y = b$ und $X = K$, so ergibt sich der gesammte Druck gegen die Oefnung $K =$

$$gh + \frac{gf(b^2 - c^2)}{b^2} + \frac{u^2}{2}\cdot\left(\frac{K^2}{M^2} - 1\right)$$

$$= gh + \frac{gf.(b^2 - c^2)}{b^2} - \frac{M^2 - K^2}{2M^2}\cdot u^2$$

Wäre also $c = o$ und K^2 gegen M^2 unbeträchtlich, so wäre dieser Druck $=$

$$\left((h+f) - \frac{u^2}{2g}\right)\cdot g = (h+f-r)\cdot g$$

oder er wäre so groß als der natürliche Druck einer Wassersäule von der Höhe $h + f - r$, also in diesem Fall $= h + f - (h + f)$ (§. 402) $= o$, wie auch für sich klar ist, weil alle Kräfte in K blos zur Geschwindigkeit angewendet werden und kein Gegendruck mehr in K vorhanden ist.

oder

$$dP = gdx + \frac{2gfydy}{b^2} - vdv$$

und

$$P = gx + \frac{gf(y^2 - c^2)}{b^2} + \frac{K^2 u^2}{2} \times \left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{X^2}\right)$$

405. II. Aufg. Für ieden Augenblick das Moment der Kraft zu bestimmen, welche die Röhre herumtreibt, vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeit des bei l auslaufenden Wassers so wie die Umdrehungsgeschwindigkeit der Röhre gleichförmig ist.

BS sey eine unbewegliche horizontale Linie; durch diese und die Horizontallinie Bl, die sich um den Punkt B im Kreis herumdreht, gedenke man sich eine Ebene, die, wie in die Augen fällt, horizontal ist; aus dem Punkt M fälle man auf diese Ebene die Vertikallinie MQ, und aus Q die QS auf BS senkrecht, auch ziehe man QB, die der MP gleich und parallel ist. Ich behalte die vorigen Benennungen bei, und setze ausserdem BS = p, SQ = q, den Winkel QBl = z, den Winkel der gleichförmigen Umdrehung lBS = ξ, welcher $dd\xi = 0$ gibt.

Nun mag die beschleunigende Kraft, welche die kleine zum Element Mm gehörige Wassermasse X ds treibt, wie man will beschaffen seyn, so läßt sie sich in drei andere Kräfte zerlegen, die den Koordinaten BS, SQ, QM gleichlaufend sind. Letztere setze ich beiseite, da sie in Ansehung der Axe AB, mit der sie parallel ist, keine Bewegung hervorbringen kann. Von den beiden ersten, deren beiderseitige Werthe $X ds. \frac{ddp}{dt^2}$

und $Xds \cdot \frac{ddq}{dt^2}$ sind (*), kann iede in zwo andere zerlegt werden, wovon die eine nach der Richtung MP lauft, die andere auf MP senkrecht ist. Die beiden nach PM gerichteten müssen beiseit gesetzt werden; die auf PM senkrechten bewirken die

Xds

(*) Hier kann $BS = p$ den Raum vorstellen, durch welchen die beschleunigende Kraft den Querschnitt oder die Wasserschichte $X.ds$ in 1 Sek. mit dieser Richtung parallel durchtreiben würde; in der Zeit dt würde also die Wasserschichte nach dieser Richtung durch den Raum dp getrieben, und wenn ihre Geschwindigkeit durch diesen Raum v heißt, so hat man $v = \frac{dp}{dt}$; die zugehörige beschleunigende Kraft heiße nun k, so ist $k = \frac{dv}{dt} = d\left(\frac{dp}{dt}\right) : dt = \frac{ddp}{dt^2}$; also der Wasserschichte bewegende Kraft $= k, Xds = Xds \cdot \frac{ddp}{dt^2}$ nach der mit BS parallelen Richtung, und ebenso gibt sich ihre bewegende Kraft nach der mit SQ parallelen Richtung $= Xds \cdot \frac{ddq}{dt^2}$. Letztere druckt senkrecht von BQ nach S als eine Kraft $Xds \times \frac{ddq}{dt^2} \cdot \cos(\xi + z)$ und erstere senkrecht von S nach BQ zu als eine Kraft $Xds \times \frac{ddp}{dt^2} \cdot \sin(\xi + z)$; also ist die von der bewegenden Kraft der Schichte Xds von S senkrecht auf BQ oder in horizontaler auf MP senkrechter Richtung entstehende Wirkung $=$

$$Xds\left[\frac{ddq}{dt^2}\cos(\xi + z) - \frac{ddp}{dt^2}(\sin\xi + z)\right]$$

vermög der sich also das Gefäs hMl nach der Richtung kl um die Axe AB herumdrehen muß.

$$X\,ds\left[\frac{ddq}{dt^2}\cdot \mathrm{Cof}(\xi+z)-\frac{ddp}{dt^2}\sin(\xi+z)\right]$$

welche man als eine Kraft ansieht, die das Wasser horizontal nach der Richtung lk treibt, und die eine gleiche und entgegengesetzte Rückwirkung verursacht, welche die Röhre nach der Richtung kl herumtreibt. Es ist also das Moment von diesem Rückwirkungselement

$$y\,X\,ds.\left[\frac{ddp}{dt^2}\sin(\xi+z)-\frac{ddq}{dt^2}\,\mathrm{Cof}(\xi+z)\right]$$

und das Integral dieser Größe muß also das gesuchte Moment seyn. Nun ist aber $p = y.\,\mathrm{Cof}(\xi+z)$; $q = y.\sin(\xi+z)$, und hieraus entsteht

$$ddp.\sin(\xi+z)-ddq.\,\mathrm{Cof}(\xi+z) = -2dy \times (d\xi+dz)-y\,ddz.$$

Ferner hat man die Gleichungen

$$dt = \frac{b.d\xi}{V} \text{ oder } \frac{d\xi}{dt} = \frac{V}{b}$$

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{X\,ds}{Ku}$$

$$ds = \frac{Kudt}{X}$$

$$y\,dz = -mn = -ds.\sin\lambda = -\frac{Kudt}{X}\cdot\sin\lambda$$

$$\text{Oder } \frac{dz}{dt} = \frac{Ku.\sin\lambda}{y.X}$$

Folglich wird das Element vom Moment der Rückwirkung des Wassers

$$-Ku\left[\frac{2V\,ydy}{b}-Ku\left(\frac{2ydy.\sin\lambda}{yX}+y^2\,d\left(\frac{\sin\lambda}{yX}\right)\right)\right]$$

wovon das Integral =

$$-Ku\left(\frac{Vy^2}{b}-\frac{Kuy^2\sin\lambda}{yX}\right)+C$$

Dieses Integral muß verschwinden, wann $y=c$, $X=M$ und $\sin\lambda=o$, weil die erste Richtung der krummen Linie hMl vertikal angenommen wird; hingegen muß es seinen vollständigen Werth erhalten, wann $y=b$, $X=K$ und $\sin\lambda=1$, weil angenommen wird, daß das Wasser nach horizontaler Richtung aus der Oefnung l herausschieße. Es ist demnach das gesuchte Moment

$$Ku\left[\frac{Vc^2}{b}-Vb+ub\right]$$

oder

$$2gK\left[br-\left(\frac{b^2-c^2}{b}\right).\sqrt{fr}\right] \text{ (*)}$$

406.

(*) Die ziemlich mühsame Erfindung dieser Formel schadet der deutlichen Uebersicht des Zusammenhangs dieser Formel mit der Größe, die sie ausdrucken soll, und dieses ist überhaupt ein Erfolg von der Anwendung der höhern Analysis, der in der That für die Fortschritte der Mathematik eben nicht vortheilhaft ist. Um soviel nützlicher ist es in solchen Fällen, auf die gemeinsten Grundbegriffe zurückzugehen, und zu zeigen, wie sich dergleichen Formeln aus solchen ganz leicht herleiten lassen. Dieses will ich bei dieser wichtigen Formel versuchen.

Der Druck einer Wassermasse in einem Gefäs ist allemal aus dem hydrostatischen und dem hydraulischen zusammengesetzt, d. i. aus dem, welcher von dem im Gefäs auf die Höhe h ruhig stehenden Wasser entsteht, und dem, welcher von der Bewegung herrührt. Heißt z. B. der Querschnitt eines prismatischen Gefäßes M, die Bodenöfnung K, so ist der hydrostatische Druck = h. (M — K) und der hydrau-

406. I. Zusatz. Man findet die Zeit eines ganzen Umlaufs der Maschine, wenn man die Gleichung $dt = \frac{b\,d\xi}{V}$ so integrirt, daß das Integral für

hydraulische $= \frac{K^2}{M^2 - K^2} \cdot h. (M - K)$, und daher der gesammte Druck auf den Boden $\left(1 + \frac{K^2}{M^2 - K^2}\right) \times h. (M - K) = \frac{M^2}{M^2 - K^2} \cdot h. (M - K)$, oder der Druck auf das vorhandene Bodenstück gleicht einer Wassersäule von der Höhe $\frac{M^2}{M^2 - K^2} \cdot h.$

Ebenso muß nun auch bei gegenwärtiger Maschine der Druck auf die der Auslaufsöfnung gegenüberliegende Stelle aus beiden Drücken zusammengesetzt seyn: 1) dem Druck, welchen sie von dem Wasser litte, wann auch die Oefnung verschlossen wäre; 2) dem Druck, welcher von der Bewegung des Wassers herrührt. Um letztern zu bestimmen, hat man zu bedenken, daß der herausschießende Strahl vermög seines Stoßes als eine Wassersäule von der Höhe r zurückwirken muß, da aber die angestoßene Stelle selbst mit der Geschwindigkeit, welche zur Höhe f gehört, zurückweicht, so kommt hier nur noch die der relativen Geschwindigkeit zugehörige Höhe $(\sqrt{r} - \sqrt{f})^2$ in Anschlag; und weil hiervon die Wirkung, welche die Höhe f dem Werth von c gemäs oberwärts ausübt, wieder abgezogen werden muß, so sieht man leicht, daß $\frac{c^2}{b^2}(\sqrt{r} - \sqrt{f})^2 - \frac{c^2}{b^2} r$ von voriger Höhe abgerechnet werden müsse, daß also der von der Bewegung herrührende Druck, wobei ich $\frac{K}{M} = o$ annehme, $=$

$$(\sqrt{r} - \sqrt{f})^2 - \left(\frac{c^2}{b^2}(\sqrt{r} - \sqrt{f})^2 - \frac{c^2}{b^2} r\right) = b^2$$

für $\xi = o$ verschwindet, und seinen vollständigen Werth für $\xi = 360°$ erhält. Diese Zeit ist daher

$$\frac{2bm}{V} \text{ oder } \frac{2bm}{\sqrt{2gf}} \text{ (*)}$$

wo

$$= \frac{b^2 - c^2}{b^2} (\sqrt{r} - \sqrt{f})^2 + \frac{c^2}{b^2} r.$$

Es ist demnach der gesammte Druck einer (No. 1 und 2) dem Druck einer Wassersäule gleich, deren Höhe =

$$h + \frac{b^2 - c^2}{b^2} (\sqrt{r} - \sqrt{f})^2 + \frac{c^2}{b^2} r$$

$$= h + \frac{b^2 - c^2}{b^2} f + \left(\frac{b^2 - c^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2}\right). r - 2 \left(\frac{b^2 - c^2}{b^2} \sqrt{fr}\right) = h + \frac{b^2 - c^2}{b^2} f + r - 2. \frac{b^2 - c^2}{b^2} \sqrt{fr}$$

Und wenn man noch auf die von der Bewegung gleichfalls entstehende Vergrößerung dieser Wasserhöhe Rücksicht nimmt, so ergibt sich die wahre Höhe des Drucks

$$= \frac{M^2}{M^2 - K^2} \left(h + \frac{b^2 - c^2}{b^2} f\right) + \frac{M^2}{M^2 - K^2} \times$$

$$\left(h + \frac{b^2 - c^2}{b^2}. f\right) - 2. \frac{b^2 - c^2}{b^2} \sqrt{f}. \frac{M^2}{M^2 - K^2}$$

$$\left(h + \frac{b^2 - c^2}{b^2}. f\right) = r + r - 2 \frac{b^2 - c^2}{b^2} \sqrt{fr}$$

$$= 2 \left(r - \frac{b^2 - c^2}{b^2} \sqrt{fr}\right)$$

Man sieht gleich, daß für $f = o$ sich diese Höhe des Drucks in $\frac{M^2}{M^2 - K^2}. 2h$ verwandelt.

(*) Hier sucht Herr B. durch einen Umweg, was sich gradezu ganz leicht ergibt. Denn der ganze Weg ist 2 b m, der also durch die gleichförmige Geschwindigkeit V dividirt die Zeit geben muß.

wo m die Verhältnis des Umkreises zum Durchmesser bedeutet.

407. II. Zusatz. Wenn alle Röhren CDFE gleich und ähnlich und ringsum die Axe der Maschine herum auf einerlei Art vertheilt sind, so muß der Ausdruck für das Moment der Rückwirkung des Wassers bei einer Röhre das Moment der Rückwirkung des Wassers für alle Röhren geben, wenn der Buchstab K, anstatt wie bisher die Oefnung l einer Röhre auszudrucken, nunmehr die Summe von den Oefnungen aller Röhren bedeutet. Wir wollen von nun an allemal diesen Werth von K verstanden haben. Eben so soll nun M allemal die Summe aller obern Querschnitte CD der Röhren bedeuten.

408. III. Zusatz. Q sey die unveränderliche Wassermenge, welche das feste Behältnis IMIM (fig. 67.) in ieder Sekunde allen Röhren zusammengenommen, welche solche durch die Oefnungen a, b, c u. s. f. abführen, liefert; den Fall eines schweren Körpers in der ersten Sekunde setze man = 15 Fus, und alle Längenmaase, die in unsern Formeln vorkommen, drücke man in Fusen aus; so erhalten wir (201.)

$$Q = 2K\sqrt{15}\,.\,r \text{ oder } K = \frac{Q}{2\sqrt{15}\,.\,r}$$

Diesen Werth nun in den Ausdruck für das gesammte Moment von der Rückwirkung des Wassers gesetzt, gibt

$$\text{das Moment} = \frac{gQ}{\sqrt{15}}\left(b\sqrt{r} - \frac{b^2 - c^2}{b}\cdot\sqrt{f}\right)$$

409. III. Aufg. Den allgemeinen Ausdruck für den Effekt der Maschine zu finden.

Es sey Π die steigende Masse, deren Bewegung den Effekt der Maschine ausdruckt. Das Produkt dieser Masse in die Schwere g und in ihren Hebelarm, den ich R nennen will, gibt das Moment $g\Pi . R$, das sich in $g\Pi . \frac{b\sqrt{k}}{\sqrt{f}}$ verwandelt, wenn man die der Geschwindigkeit von Π zugehörige Höhe k nennt, und nun bemerkt, daß $b : R = \sqrt{f} : \sqrt{k}$ oder $R = \frac{b\sqrt{k}}{\sqrt{f}}$. Dieses Moment setze man dem von der Rückwirkung des Wassers, welches wir eben gefunden haben, gleich, so ergibt sich die verlangte Formel

$$\text{A.)}\ \Pi\sqrt{k} = \frac{Q}{\sqrt{15}}\left(\sqrt{fr} - \frac{b^2 - c^2}{b^2} . f\right)$$

410. VI. Aufgabe. Die der gleichförmigen Umdrehungsgeschwindigkeit der Maschine zugehörige Höhe zu bestimmen, für welche der Effekt der Maschine ein Maximum wird.

Es sey ausser den vorigen Benennungen, die wir allemal beibehalten, l die beständige Wasserhöhe in dem unbeweglichen Behälter IMHM über den untern Oefnungen G der Leitungen NG, G die Summe von den Flächen aller Oefnungen, H die ganze Höhe ZO der Maschine oder die Summe der Höhen des unbeweglichen Behälters und der herumlaufenden Röhren, μ der Winkel einer jeden Leitung NG mit dem Horizont; so erhält man nachstehende verschiedene Gleichungen (402, 403, 201.)

$$\text{I.}\ r = \left(h + f\left(\frac{b^2 - c^2}{b^2}\right)\right). \frac{M^2}{M^2 - K^2}$$

$$\text{II.}\ l = \frac{rK^2}{M^2} + \frac{fc^2}{b^2}$$

$$\text{III.}\ \text{Tang}\,\mu = \frac{bK\sqrt{r}}{cM\sqrt{f}}$$

IV. Q

IV. $Q = 2K\sqrt{15r}$.

V. $Q = 2G.\sqrt{15l}$

VI. $H = h + l$

Zu einiger Abkürzung setze man $1 - \frac{c^2}{b^2} = n$, so findet man nach einiger Umänderung der Gleichung II.

$$\frac{M^2}{M^2 - K^2} = \frac{r}{r - l + f - nf}$$

Diesen Werth in die Gleichung I gesetzt, gibt

$$r - l + f - nf = h + nf$$

oder weil $H = h + l$ ist,

$$r = H - f + 2nf$$

Diesen Werth von r setze man in die Gleichung (A), so erhalten wir

B.)

$$n\sqrt{k} = \frac{Q}{\sqrt{15}}\left(\sqrt{(Hf - f^2 + 2nf^2)} - nf\right)$$

Um nun das verlangte Maximum zu erhalten, muß man diese Gleichung so differenziiren, daß man nur f dabei als veränderlich behandelt, und sodann das Differential $= o$ setzen.

Hierdurch findet man

$$\frac{\frac{1}{2}H - f(1 - 2n)}{\sqrt{(Hf - f^2(1 - 2n))}} - n = o.$$

oder

$$\tfrac{1}{2}H - f(1 - 2n))^2 = n^2(Hf - f^2(1 - 2n))$$

Nun sieht man leicht, daß sich alle Glieder dieser Gleichung einander aufheben, wenn man $H = 2f - 2nf$ setzt. Demnach $f = \frac{H}{2(1-n)}$, und weil $r = H - f + 2nf$, so hat man auch $r = \frac{H}{2(1-n)}$.

Hieraus folgt, daß die gleichförmige Umdrehungsgeschwindigkeit der Maschine und die, mit welcher das Wasser beständig aus den Oefnungen a, b, c u. s. f. auslauft, einander gleich sind. Und da diese beiden Geschwindigkeiten einander entgegengesetzt sind, so erhellet überdas, daß die Geschwindigkeit (*) des Wassers unmittelbar beim Ausfluß aus den Oefnungen a, b, c u. s. f. in dem absoluten Raum = o ist (**), und daß also das Wasser alsdann lothrecht herabfällt (***). Substituirt man für f eben diesen Werth $\frac{H}{2(1-n)}$ in der

(*) Nämlich die horizontale.

(**) Wenn man sich nämlich von der im Kreis herumlaufenden Oefnung eine Tangente an ihrer Bahn gedenkt und in dieser Richtungslinie sich einen Punkt, in gewisser Entfernung von der Oefnung gedenkt, so kann sich, für f = r, der herausschießende Strahl diesem Punkt nicht nähern, wie z. B. ein Mensch, der in einem Schiffe von Osten nach Westen mit der Geschwindigkeit c sich bewegt, einem nach Westen vor ihm liegenden Gegenstand während dieser Bewegung nicht näher kommt, wenn das Schiff mit eben der Geschwindigkeit c von Westen nach Osten lauft; da dann die relative Geschwindigkeit des Menschen in Ansehung unbeweglicher Gegenstände (d. i. im absoluten Raume) = o ist; oder wie auch bei einem Trittrad die Geschwindigkeit des am innern Umfang des Rads hinauf gehenden Thieres in Ansehung aller ruhig liegenden Gegenstände = o ist.

(***) Eben diesen Schluß macht Herr Hofr. Karsten Hydraulik (§. 475.). Aber sowohl Herr B. als Herr Hofr. Karsten irren sich in diesem Punkt. Die Gestalt des Strahls ist allemal eine Parabel, nur um einen Zilinder gewunden, weil sich die Mündung im Kreise herumdreht. Jede Wasserschichte schießt nämlich nach einer Tangente des durchloffenen Kreises mit einer horizontalen Geschwindigkeit $\sqrt{2gr} - \sqrt{2gf}$ heraus, also mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gr} - \sqrt{2gf} + \sqrt{2gf} = \sqrt{2gr}$ verläßt

der Gleichung (B), so erhält man für den größten Effekt der Maschine

$$\Pi . \sqrt{k} = \frac{Q\,H}{2\sqrt{15}}$$

411. So wie die Zahl n kleiner wird, nimmt die Höhe f oder r ab.

Es sey $n = o$, das ist $1 - \frac{c^2}{b^2} = o$ oder $c = b$, so wird der Werth von f oder $r = \frac{H}{2}$. Unter dieser Vor-

läßt die Mündung iede Wasserschichte; nach der vertikalen Richtung aber wird iede Schichte von der natürlichen Schwere getrieben, und so muß sich also iede Schichte von der Mündung in einer paraboliſchen Bahn entfernen, so daß der Strahl das Ansehen gewinnt, als ob er in allen Fällen ebenso wie aus dem ruhig stehenden Gefäs mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gr}$ gegen einen vorwärts liegenden Punkt ströhmte. Letzteres ist aber nicht, sondern diese anscheinende Geschwindigkeit bezieht sich nur auf die rückwärts gehende Ausflusöfnung, welches aber das Auge nicht unterscheiden kann. Nur soviel ist richtig, daß für $r = f$ aus ieder Stelle, worin sich die Ausflusöfnung in ihrer Bahn befindet, die in dieser Stelle hervorschießende Schichte vertikal unter dieser Stelle den Boden erreiche, nicht aber daß der ganze Strahl vertikal sey; im nächstfolgenden Augenblick ist nämlich schon die Mündung weiter in ihrer Bahn zurück, die nächstfolgende Wasserschichte fällt also fürs erste schon weiter zurück und ist fürs andere auch noch höher über dem horizontalen Boden; die nunmehr folgende Schichte fällt aus eben der Ursache wieder weiter zurück als die zwote, und ist zu gleicher Zeit auch noch höher über dem Boden als die zwote u. s. f. Daher entsteht auf solche Art vom Boden rückwärts bis zur Ausflusmündung ein um einen Zilinder gewundener paraboliſcher Strahl, der dann auch beständig unterhalten wird. Versuche, die ich im Großen angestellt habe, bestätigen diese Schlüsse vollkommen.

Voraussetzung sind die graden Linien A h, B l (fig. 68.) gleich groß, und es lassen sich die obern Oefnungen der Röhren C D leicht größer als die Oefnungen l machen, wie sich solches gehört (402.)

412. II. Zusatz. Wenn man für r und f ihren gemeinschaftlichen Werth $\frac{H}{2(1-n)}$ in die Gleichungen

$$Q = 2K\sqrt{15r}$$

$$\frac{M^2}{M^2-K^2} = \frac{r}{r-l+f(1-n)}$$

setzt, und K und M absondert, so erhält man

$$K = \frac{Q\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{30}.\sqrt{H}}; \quad M = \frac{Q}{\sqrt{30}.\sqrt{(2l-H)}}, \text{ daher}$$

$$K : M = \sqrt{(1-n)}.\sqrt{(2l-H)} : \sqrt{H}$$

Hieraus sieht man, daß die Höhe l des unbeweglichen Gefäßes I M I M (fig. 67.) nicht kleiner als die Hälfte von H seyn kann.

Nähme man 2 l = H, so wäre die Oefnung K unendlich klein, welches nicht nach der Strenge statt haben kann. Es sey daher $l = \theta H$, wo θ ein eigentlicher Bruch ist, so erhält man

$$K : M = \sqrt{(1-n)}.\sqrt{(2\theta-1)} : 1$$

wobei man sich noch erinnern muß, daß der Bruch θ allemal einen Werth haben muß, für welchen K merklich kleiner als M wird.

Nunmehr gibt die Gleichung III.

$$\text{tang } \mu = \frac{b.\sqrt{(1-n)}.\sqrt{(2\theta-1)}}{c}$$

Die Gleichung V gibt

$$G = \frac{Q}{2\sqrt{15}.\sqrt{\theta H}}$$

und

und endlich die Gleichung VI.

$$h = H.(1 - \theta)$$

Man hat also alle erfoderliche Stücke, um die Maschine zu erbauen, wenn man bemerkt:

1) daß die Breiten Bl, Ah (fig. 68.) so beschaffen seyn müssen, daß man den Größen M und K die gehörigen Abmessungen geben kann, welche von der Höhe H der Maschine und der zu ihrer Betreibung vorhandenen Wassermenge Q abhängen.

2) Daß der Unterschied der Halbmesser AC, AD nicht gar groß sey, damit der Unterschied der Schwungkräfte der Wassertheilgen wegen der Weite der umlaufenden Röhren die bisherigen Resultate nicht merklich abändere, indem man darin die Schwungkräfte nach der centrischen Linie hMl berechnet hat.

3) Daß die Summe der Oefnungen G merklich kleiner als die Summe der Oefnungen M seyn müsse, weil man bei der Berechnung angenommen hat, daß die Bewegung des Wassers in ieder Röhre CDFE in CD anfange.

413. Vergleicht man den größten Effekt dieser Art von Rädern (410.) mit dem größten Effekt der oberschlächtigen (393.), so sieht man, daß wenn die Höhe OZ (H) des durch die Rückwirkung des Wassers betriebenen Rads (fig. 67.) der Höhe FV des auf das oberschlächtige Rad wirkenden Wassers (fig. 65.) gleich ist, alsdann diese beiden Effekte für einerlei Aufwand von Aufschlagwasser gleich groß seyn müssen. Da aber die durch die Rückwirkung des Wassers betriebenen Räder, wenn sie ihren vollen Effekt leisten sollen, in allen ihren Theilen mit einer ganz vorzüglichen Genauigkeit erbaut werden müssen, und überdas das ganze Gewicht des in iedem Augenblick in den umlaufenden

Röhren

Röhren enthaltenen Wassers auf der Grundfläche des untern Wellbaumzapfens ruht, welches eine Reibung von eben der Art verursacht, wie die Reibung einer auf einer andern Ebene sich kreisförmig bewegenden Fläche (*), so ergibt sich, daß unter einerlei Umständen die

(*) Hier erwähnt Herr B. grade einen Umstand, welcher dem Rückwirkungsrad einen Vorzug gibt. Der Halbmesser von der Grundfläche des stehenden Zapfens dieser Maschine ist zuverläßig groß genug, wenn er die Hälfte vom Halbmesser des liegenden Zapfens eines oberschlächtigen Rads beträgt; und das Moment seiner Friktion ist also zuverläßig, auch bei gleichem Druck, merklich geringer als beim oberschlächtigen. Es läßt sich aber auch außerdem das Rückwirkungsrad so bauen, daß sein Druck auf den untern Zapfen weit geringer ausfällt, als der Druck eines oberschlächtigen auf seine Zapfen, und umsomehr muß also die von jenem entstehende Friktion geringer seyn als die von diesem.

Und da überdas bei gegenwärtiger Maschine beinahe die ganze Höhe RV (fig. 65.), bei dem oberschlächtigen aber nur die $P\Phi$, nach meinen obigen Anmerkungen, in Anschlag kommt, so ist offenbar bei einerlei Gefälle der Effekt von jener merklich größer als von diesem. Hierzu kommt auch noch der bei einer schnellen Umdrehung ganz beträchtliche Widerstand der Luft, welcher bei gegenwärtiger Maschine soviel man will, vermindert werden kann.

Bringt man inzwischen viele Ausflußöfnungen an, so müssen solche deſto kleiner ausfallen, je mehrere ihrer sind, wenn Q ungeändert bleibt, und wegen der großen Geschwindigkeit, womit das Wasser herausschießt, müssen sie bei einiger Menge schon so klein werden, daß sie sich gar zu leicht von dem mitgeführten Unrath verstopfen. Es wird daher in der Ausübung am dienlichsten seyn, nur eine einzige Ausflußöfnung zu gebrauchen.

Noch ein besonderer Nachtheil, den diese Maschine hat, ist die sehr große Geschwindigkeit, mit der bei dem

die oberschlächtigen Räder vorgezogen werden müssen. Es gibt aber Fälle, wo die durch die Rückwirkung des

---

dem größten Effekt die Ausflusöfnung herumlaufen muß, indem solche $= 24\sqrt{15.r}$ also z. B. für $r = 15$ schon $= 30$ Fus ist. Eine so große Geschwindigkeit ist der Maschine nicht zuträglich. Um also die zu große Umdrehungsgeschwindigkeit zu vermindern, müßte man die Röhre, z. B. Aa (fig. 66.) lang genug, zugleich aber auch (um den aus dieser Länge entstehenden Abgang der Wassergeschwindigkeit wieder zu ersetzen oder zu machen, daß in dieser Röhre beständig soviel Wasser fortfließen könne, als durch die Ausflußöfnung a der Höhe gemäs ausfließen kann) weit genug und weiter als a machen. Hieraus entstehen aber wieder andere nachtheilige Folgen für die Maschine, und besonders für die Festigkeit ihres Baues. Doch würde sie bei nicht zu hohem Gefälle immer einen vorzüglichen Nutzen haben, und wo das Gefälle sehr hoch wäre, ließe sich die allzugroße Geschwindigkeit durch einen um die Maschine herumgelegten Trilling, der in ein größeres Stirnrad eingriffe oder durch eine andere Vorlage vermindern.

Ich bemerke noch zum Schluß. daß diese Maschine in ihrer Wirkungsart durchaus mit dem oberschlächtigen Rad ungemein viel ähnliches hat.

Bliebe der Umfang des Rads, während dem es noch in seiner Bewegung beschleunigt wird, immer mit gleichviel Wasser beschwert, so müßte seine Beschleunigung ewig fortdauern, es müßte aber auch zu gleicher Zeit nothwendig immer mehr Wasser nachfolgen, wenn die immer schneller am Einschußgerinne vorbeischießenden Schaufeln beständig gleichviel Wasser auffangen sollten. Weil aber nur eine bestimmte Wassermenge nachfolgen kann, so ist auch keine ewige Beschleunigung nöthig, sondern solche kann nur so lange fortdauern, bis das Moment der von den Schaufeln aufgefangenen Wassermenge dem Moment der Last gleich wird. Und da während der Beschleu-

des Wassers betriebenen Räder mit Vortheil statt der unterschlächtigen gebraucht werden könnten.

Beschleunigung nicht nur die Schaufeln immer weniger Wasser auffangen, sondern auch, wie ich oben gezeigt habe, immer weniger Schaufeln damit beschwert werden, so erhellet, daß die beschleunigende Kraft sehr schnell abnehmen und gar bald = o werden müsse. Die größte Geschwindigkeit, deren ein oberschlächtiges Rad, das ohne allen Widerstand wäre, fähig ist, wäre die der ganzen Fallhöhe zugehörige, wobei nämlich das Moment der in den Schaufeln druckenden Wassermenge = o wäre. In diesem Fall wäre also die Höhe des oben erwähnten Wasserrings = o.

Ebenso verhält es sich mit der Rückwirkungsmaschine. Wenn H die ganze Wasserhöhe und K die Ausflusöfnung bedeutet, so ist anfangs, wo die Tromme noch nicht in Bewegung ist, die in einer Sek. ausfließende Wassermenge = K. $2\sqrt{15}$. H, und soviel muß oben zufließen, wenn sie beständig gleichvoll bleiben soll. Wenn H die Höhe des Wassers in der Tromme über der Ausflusöfnung bedeutet, so wäre diese Wassermenge eigentlich = $\frac{M^2}{M^2 - K^2}$ · K. $2\sqrt{15}$. H, wo M die Weite der Tromme ist. Ich nehme aber K^2 gegen M^2 als unbedeutend an, und setze daher $\frac{M^2}{M^2 - K^2} = 1$. Sobald nun die Last, auf die Entfernung b von der Axe zusammengebracht, geringer als der Druck der Wassersäule H. K ist, erfolgt nothwendig eine Umdrehungsbewegung des Gußrohrs oder der Ausflußöfnung, die sich mit o anfängt und von Augenblick zu Augenblick vermög der vorhandenen Ueberwucht beschleunigt wird.

Aber so wie beim schnellern Umlauf des oberschlächtigen Rads die Schaufeln immer weniger Wasser schöpfen und hierdurch der Wasserdruck immer geringer wird, so schöpft auch die Tromme immer weniger Wasser (indem die Höhe des Drucks (H — f) mit dem

dem wachsenden f immer kleiner wird) und der Druck π wird auch immer kleiner, bis er für f = H völlig verschwindet. Wofern also gar keine Last oder gar kein Widerstand vorhanden wäre, so dauerte die Beschleunigung fort, bis f = H wäre, in diesem Augenblick würde der Druck des Wassers = 0, also wäre keine Ueberwucht mehr vorhanden und die Maschine könnte daher nicht ferner beschleunigt werden. Es ist nämlich bei dieser Maschine $\pi = \frac{Q}{\sqrt{15}.k} \sqrt{f}.(H-f)$, also, wenn man sich Kraft und Last in gleichen Entfernungen von der Axe gedenkt, da dann k = f ist, $\pi = \frac{Q}{\sqrt{15}} \sqrt{(H-f)}$; aber $Q = 2K.\sqrt{15}.r = 2K\sqrt{15}(H-f)$, also

$$\pi = \frac{2K\sqrt{15}.(H-f)}{\sqrt{15}} . \sqrt{(H-f)}$$

Oder $\pi = 2K.(H-f)$

welches mit Herrn Hofr. Karsten (Hydraulik XXXIII Abschn. S. 10.) übereinstimmt.

Die Geschwindigkeit der Ausflußöfnung kann also allemal nur solange beschleunigt werden, bis $f = H - \frac{\pi}{2K}$ geworden ist.

Weil hier H — f die der Auslaufsgeschwindigkeit zugehörige Höhe ist, und K die Größe der Oefnung, so folgt aus dieser Formel dieser Satz:

Die Zurückwirkung sey dem Gewicht einer Wassersäule gleich, deren Grundfläche die Oefnung des Ausflusses, die Höhe aber doppelt so groß sey, als die der Auslaufsgeschwindigkeit zugehörige Höhe.

Auch wenn die Maschine ganz ruhig steht, erhält man $\pi = 2KH$, weil nun f = 0 ist; daß also die der Oefnung gegenüber liegende Fläche K, wenn das Gefäs auf die Höhe H angefüllt ist, von dem auslaufenden Wasser so stark gedrückt wird, als ob auf dieser Fläche eine Wassersäule von der Höhe 2H ruhte, wie auch schon aus der letzten Anmerk. zu 405 erhellet.

Der Effekt ist dabei allemal $= \pi . 2\sqrt{15} . f = \frac{Q . \sqrt{(H-f)}}{\sqrt{15}} \times 2 . 15 . f = 2Q . \sqrt{f} . (H-f)$, der offenbar für $f . (H-f) = \text{Max}$ d. i. für $f = \frac{1}{2} H$ am größten wird, nämlich $= 2Q . \sqrt{(\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{4}H^2)} = QH$.

Hätte man anfangs K so groß gemacht, daß bei der Anfüllung der Tromme auf die Höhe H in ihrer ruhigen Stellung alles Wasser, d. i. Q für iede Sek. abfließen könnte, und man hätte eine Last $2K(H-f)$, wo man f nach Belieben $< H$ annehmen kann, in der Entfernung b von der Axe angebracht, so müßte die Ablaufsgeschwindigkeit des Wassers, welche der Höhe H zugehört, immer geringer werden, so wie sich die Umdrehungsgeschwindigkeit dem Werth $2\sqrt{15} . f$ nähert, und wenn die Umlaufsgeschwindigkeit $= 2\sqrt{15} . f$ geworden, so würde die Ablaufsgeschwindigkeit, welche anfangs $= 2\sqrt{15} . H$ war, bei ungeändertem H nur noch $= 2\sqrt{15} . (H-f)$ seyn. Wofern also das Gefäs oder die Tromme während dem Ablaufen bei ruhiger Stellung ganz voll gewesen wäre, so könnte nunmehr, im Beharrungsstand der herumlaufenden Maschine, nicht mehr alles Wasser Q benutzt werden, sondern nur soviel, als beständig zur Ausflußöfnung ablaufen könnte, das ist nur $K . 2\sqrt{15} . (H-f)$; man hat aber $Q = K . 2\sqrt{15} . H$, und so könnte also nur $\frac{K . 2\sqrt{15} . (H-f)}{K . 2\sqrt{15} . H} . Q$ oder $Q . \sqrt{\frac{H-f}{H}}$ benutzt werden, und der übrige Theil müßte oben überlaufen.

Wäre aber noch Raum im Gefäs, so daß das Wasser darin noch, ohne überzulaufen, steigen könnte, so müßte es zu einer Höhe H' steigen, so daß $2\sqrt{15} . H = 2\sqrt{15} . (H'-f)$ wäre; wenn die Maschine die vorige Umlaufsgeschwindigkeit behalten sollte; man hätte also $H = H' - f$ oder $H' = H + f$, die Last müßte aber nun verändert, und $= 2K(H'-f)$ genommen werden; wegen der gleichen Umdrehungsgeschwindigkeit verhielte sich also der ietzige Effekt zum vorigen wie $2K .$

(H'

$(H'-f)$ zu $2K(H-f)$ oder wie $H'-f$ zu $H-f$ oder wie H zu $H-f$; es verhielten sich aber die ietzt und vorhin benutzten Wassermengen wie $\sqrt{H}$ zu $\sqrt{(H-f)}$, also verhalten sich auch die Effekte ietzt und vorhin wie die Quadrate der benutzten Wassermengen. Für $f=\frac{1}{2}H$ wäre vorhin die Last $=2K.\frac{1}{2}H=KH$ gewesen, wo nämlich H die Höhe ist, auf welche das Zuflußwasser die Tromme angefüllt zu erhalten vermag, ietzt wäre sie $=2K(H'-f)=2KH$, und die ietzige Wasserhöhe wäre $H+f=1,5.H$. Man hätte aber nunmehr nicht die vortheilhafteste Einrichtung; für solche müßte $2\sqrt{15}.H=2\sqrt{(15(H'-f'))}$ seyn, wenn die der ietzigen Umlaufsgeschwindigkeit zugehörige Höhe f' heißt, also, wenn man $f'=\frac{1}{2}H'$ setzt, $H=H'-\frac{1}{2}H'=\frac{1}{2}H'$ oder $H'=2H$ und $f=H$, also die ietzige Last $=2K(H'-f')=2KH$, und der ietzige Effekt zu dem vortheilhaftesten im ersten Fall wie $2KH.\sqrt{H}$ zu $KH\sqrt{\frac{1}{2}H}=2:\sqrt{\frac{1}{2}}=20:7$. Dieses zeigt, wie sehr man dadurch verlieren kann, wenn man die Auslaufsöffnung zu eng macht, oder sie auf das stillstehende Gefäs einrichtet. Man muß nämlich die Weite des Ausgußrohrs nur nach der Hälfte der zu benutzenden ganzen Höhe H' berechnen, also $K=\frac{Q}{2\sqrt{15}.\frac{1}{2}H'}=\frac{Q}{\sqrt{30}.H'}$ nehmen. Am besten sucht man diese Weite durch Versuche; man steckt nämlich nach und nach Gußröhren von verschiedenen Weiten ein, und beobachtet, bei welchem Gußrohr das Zuflußwasser die stillstehende Tromme voll erhält; weil nun bei der vortheilhaftesten Einrichtung die Ausflußgeschwindigkeit nur der halben Höhe zugehört, so nimmt man zum Betrieb der Maschine alsdann ein Gußrohr, dessen Weite $\sqrt{2}$ so weit als die des zuvor beobachteten ist; wenn also des vorigen Durchmesser D heißt, so muß des ietzigen $=D\sqrt[4]{2}$ seyn oder $=1,19.D$.

Ist diese Einrichtung einmal getroffen, so muß man sich hüten, der Maschine keine zu geringe Last zu geben, denn dieses heißt $2K(H-f)$ verkleinern, oder $(H-f)$ also die Auslaufsgeschwindigkeit vermindern. Nun verhält sich aber der Effekt wie

$2Q.\sqrt{(H-f).f}$; wenn nun die Last statt $KH = \frac{m}{n} KH$ genommen würde, so hätte man $2K.(H-f) = \frac{m}{n} KH$, also $2(H-f) = \frac{m}{n} H$ und $H-f = \frac{m}{2n} H$, also $f = \left(1 - \frac{m}{2n}\right).H$, folglich die Höhe der Auslaufsgeschwindigkeit $= H - f = \frac{m}{2n} H$ und es könnte also von dem Aufschlagwasser nur $\sqrt{\frac{m}{2n}}.H$ das ist nur $Q.\sqrt{\frac{m}{n}}$ benutzt werden, das übrige müßte überlaufen. Es verhielte sich also der ietzige Effekt zum größten wie $\left(Q.\sqrt{\frac{m}{n}}\right).2.\sqrt{\left(\frac{m}{2n}H.\left(1-\frac{m}{2n}\right).H\right)}$ zu $Q.H$ das ist wie $QH.\frac{m}{n^2}\sqrt{(2n^2-mn)}$ zu QH oder wie $\frac{m}{n^2}\sqrt{(2n^2-mn)}$ zu 1.

Nähme man z. B. statt KH nur $\frac{4}{5} KH$, so wäre der Effekt nur $= \frac{4}{25}\sqrt{(2.25-20)}.Q.H = \frac{21{,}92}{25}.QH = 0{,}877.QH$ oder sehr nahe $\frac{7}{8} QH$ Man verliert also $\frac{1}{8}$ des größten Effekts.

Eben so darf man aber auch die Last nicht größer als KH nehmen; die Umlaufsgeschwindigkeit wird dadurch vermindert, also die Auslaufsgeschwindigkeit $2\sqrt{15(H-f)}$ nothwendig vergrößert, und weil nicht mehr Aufschlagwasser als bei der Last KH vorhanden ist, so muß nun nothwendig der Wasserspiegel sinken oder H abnehmen. Es sey nämlich nunmehr wieder die Last $\frac{m}{n} KH$, so daß $m > n$ ist, so hat man nunmehro zwo unbekannte Größen, nämlich

lich die ietzige Umlaufsgeschwindigkeit, die der Höhe f zugehören soll, und die ietzige Wasserhöhe in der Tromme, welche H' heißen soll. Man hat aber auch zu ihrer Bestimmung zwo Gleichungen

$$2K.(H'-f) = \frac{m}{n} KH$$

und $2\sqrt{15}.\frac{1}{2}H = 2\sqrt{15}.(H'-f')$

oder $\sqrt{\frac{1}{2}H} = \sqrt{(H'-f')}$

Aus ersterer ergibt sich 1) $f' = H' - \frac{m}{2n}.H$, aus letzterer 2) $f' = H' - \frac{1}{2}H$, demnach $H' - \frac{m}{2n}.H = H' - \frac{1}{2}H$; Hierdurch wird nun offenbar H' nicht bestimmt, sondern man erhält $\frac{m}{2n} = \frac{1}{2}$ also $m = 1$.

Dieses ist merkwürdig; man sieht hieraus, daß, wofern einmal die Oefnung K dem größten Effekt gemäs $= 1,19\,D$ genommen worden ist, die Last alsdann nur solange $= \frac{m}{n} KH$ genommen werden könne, als m nicht $> n$ ist; solang nämlich nicht $m > n$ ist, ist der Effekt allemal $= \frac{m}{n^2}(\sqrt{(2n^2 - mn)}).HQ$, welches bis zu $m = n$ statt findet, wo sich dieser Ausdruck in HQ verwandelt. Für $m > n$ aber wird die Bewegung der Maschine unmöglich, weil für $m > n$ die Gleichung $\frac{m}{2n} = \frac{1}{2}$, auf welche diese Voraussetzung führt, eine Unmöglichkeit enthält.

Wenn also K für den vortheilhaftesten Fall genommen worden ist, so geht es schlechterdings nicht an, mit der Maschine eine Last die $> H.K$ wäre, bewältigen zu wollen, sondern die Maschine kommt dabei ins Stocken. Dieses ist überhaupt zu merken, wenn K nur für eine bestimmte Last oder für einen bestimmten Werth von f eingerichtet worden ist, denn in

einem solchen Fall kommt die Maschine allemal ins Stocken, wenn man sie mit einer größern Last beschwert, und die geringste Geschwindigkeit, die bei solcher Maschine erhalten werden kann, gehört der Höhe $\frac{1}{2}$ H zu.

Ehe ich diese schon so lang gewordene Anmerkung schließe, muß ich noch auf einen Hauptpunkt zurückgehen, nämlich auf die Bestimmung des vortheilhaftesten Werths von f. Ich muß nämlich auch hier die Bemerkung wiederholen, daß man die vortheilhaftesten Abmessungen bei Maschinen nicht nach dem größten nutzbaren Effekt bestimmen müsse.

Wenn nun die Nebenhindernisse, nämlich Friktion und andere Hindernisse, deren Wältigung eigentlich nicht zur Absicht der Maschine gehört, in der Entfernung b von der Umdrehungsaxe so groß ist als das Gewicht einer Wassermasse ϕ, so ist die nutzbare Last nur $= 2K.(H-f)-\phi$, und der nutzbare Effekt $= (2K(H-f)-\phi).2\sqrt{15}.f$, der sich in $(Q(H-f)-\frac{1}{2}\phi).2\sqrt{\frac{f}{H-f}}$ verwandelt, wenn man K durch Q ausdruckt. Es kommt also drauf an, f so zu bestimmen, daß $(Q.(H-f)-\frac{1}{2}\phi).2\times\sqrt{\frac{f}{H-f}}$ ein Maximum werde. Die hierzu dienliche Methode gibt nach einigen Rechnungen

$$QH\sqrt{f}-2Qf\sqrt{f}-\tfrac{1}{2}\phi\sqrt{(H-f)}=0$$

oder $$QH-2Qf=\tfrac{1}{2}\phi\sqrt{f}+\tfrac{1}{2}\phi\sqrt{\frac{H-f}{f}}$$

also quadrirt $$Q^2H^2-4Q^2H.f+4Q^2f^2=\tfrac{1}{4}\phi^2f+\tfrac{1}{2}\phi^2\sqrt{(H-f)}+\tfrac{1}{4}\phi^2.\frac{H-f}{f}$$

und $$Q^2H^2-4Q^2H.f+4Q^2f^2-\tfrac{1}{4}\phi^2f-\tfrac{1}{4}\phi^2.\frac{H-f}{f}=\tfrac{1}{2}\phi^2.\sqrt{(H-f)}$$

oder $$4Q^2.f^3-(4Q^2H+\tfrac{1}{4}\phi^2).f^2+\tfrac{1}{4}\phi^2f+Q^2H^2f-\tfrac{1}{4}\phi^2H=\tfrac{1}{2}\phi^2f\sqrt{(H-f)}$$

Dieses

Dieses aufs Neue quadrirt, gibt fürs Maximum eine Gleichung vom 6ten Grad.

Ich will die Koefficienten auf der linken Seite von f^3, f^2, f, durch α, β, γ, wo nämlich $\gamma = \frac{1}{4}\phi^2 + Q^2H^2$ ist, ausdrucken, und $\frac{1}{4}\phi^2 H = \delta$ setzen, so ist

$$\alpha f^3 - \beta f^2 + \gamma f - \delta = \tfrac{1}{2}\phi^2 f\sqrt{(H-f)}$$

und hieraus ergibt sich durchs Quadriren

$$f^6 - A.f^5 + B.f^4 - C.f^3 + D.f^2 - E.f + F = 0$$

wo nämlich $A = \frac{2\beta}{\alpha}$; $B = \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{2\gamma}{\alpha}$; $C = \frac{2\delta\alpha + 2\beta\gamma - \frac{1}{4}\phi^4}{\alpha^2}$; $D = \frac{\gamma^2 + 2\beta\delta - \frac{1}{4}H\phi^4}{\alpha^2}$; $E = \frac{2\gamma\delta}{\alpha^2}$ und $F = \frac{\delta^2}{\alpha^2}$ ist. Nun weiß man schon, weil für $\phi = 0$, $f = \frac{1}{2}$ ist, wenn man $H = 1$ setzt, daß, wegen $\phi > 0$, $f < \frac{1}{2}$ werden müsse; man kann also $\mu . H$ statt f schreiben, wo dann $\mu < \frac{1}{2}$ ist, dieß gibt

$$\mu^6 H^6 - A\mu^5 H^5 + B.\mu^4 H^4 - C\mu^3 H^3 + D.\mu^2 H^2 - E.\mu . H + F = 0$$

oder $$\mu^6 - \frac{A}{H}\mu^5 + \frac{B}{H^2}.\mu^4 - \frac{C}{H^3}\mu^3 + \frac{D}{H^4}\mu^2 - \frac{E}{H^5}.\mu + \frac{F}{H^6} = 0$$

Wo man, wenn ϕ beträchtlich ist, die Summe der Glieder, welche höhere Potenzen von μ als die zwote enthalten, also die Summe der vier ersten umsomehr als unbeträchtlich weglassen kann, da sie paarweis mit entgegengesetzten Zeichen stehen; auf solche Art erhält man beiläufig

$$\frac{D}{H^4}.\mu^2 - \frac{E}{H^5}.\mu + \frac{F}{H^6} = 0$$

also $$\mu^2 - \frac{EH^4}{DH^5}.\mu + \frac{FH^4}{DH^6} = 0$$

oder $$\mu^2 - \frac{E}{DH}.\mu = -\frac{F}{DH^2}$$

demnach $\mu = \frac{E}{2DH} \pm \sqrt{\left(\frac{E^2 - 4DF}{4D^2H^2}\right)} = \frac{E \pm \sqrt{(E^2 - 4DF)}}{2DH}$

Es ist aber $D = \frac{\gamma^2 + 2\beta\delta - \frac{1}{4}H\phi^4}{\alpha^2} = \frac{(\frac{1}{4}\phi^2 + Q^2H^2)^2 + (8Q^2H + \frac{1}{2}\phi^2)\frac{1}{4}\phi^2H - \frac{1}{4}\phi^4H}{16Q^4}$;

$E = \frac{2\gamma\delta}{\alpha^2} = \frac{(\frac{1}{4}\phi^2 + Q^2H^2)\frac{1}{2}\phi^2H}{16Q^4}$ und

$F = \frac{\delta^2}{\alpha^2} = \frac{(\frac{1}{4}\phi^2H)^2}{16Q^4} = \left(\frac{\phi}{4Q}\right)^4 . H^2$

Woraus sich also, wenn ϕ beträchtlich und $\frac{\phi}{Q}$ größer oder doch nicht kleiner als 1 ist, μ berechnen läßt.

Am sichersten aber ist es, μ unmittelbar aus obiger Gleichung vom 6ten Grad erst einigermaßen durch Versuche zu bestimmen, welches so mühsam nicht ist, weil man schon weiß, daß es ein Bruch seyn muß; hiernächst läßt es sich durch die bekannte Näherungsmethode so nahe man will, finden. Und diese Berechnung ist hier sehr nothwendig, weil sich die Oefnung K nach der Höhe f oder μ. H richtet.

Neunzehntes Kapitel.

Theorie von der Bewegung des Wassers bei Pumpen.

414.

Wir haben (Hydrostatik im VIIten und VIIIten Kap.) die mechanische Einrichtung der Pumpen erklärt, und zugleich die Lage und Höhe des Raums bestimmt, worin der Kolben spielen muß, dafern der in Wirksamkeit gesetzte atmosphärische Druck seinen Effekt thue. Hier kommt es nun drauf an, die Bewegung des Wassers in den Pumpenröhren zu untersuchen. Ueber diesen wichtigen Gegenstand sind schon mehrere Schriften erschienen. Auch hat er unter einigen Schriftstellern zu verschiedenen Meinungen über die Wahl der Grundsätze Anlaß gegeben, welche man bei gegenwärtiger Untersuchung zum Grund legen müsse; denn die Menge von Elementarsätzen, welche diese Aufgabe umfaßt, die Unmöglichkeit, solche alle einer strengen Berechnung zu unterwerfen, und der stärkere oder schwächere Einfluß, den ieder auf das Resultat haben kann, verstattet den Geometern die Freiheit, auf solche Voraussetzungen zu bauen, die ihnen zur Erklärung der Bewegungen bei diesen Maschinen am natürlichsten vorkommen. Ich begnüge mich hier, blos meine Methode vorzulegen, ohne damit Anderer Verfahren bei Untersuchung dieses Gegenstandes zu verwerfen. Ich werde auch nur allein die bloßen Saugwerke betrachten; was ich aber davon sagen werde, wird sich leicht auch auf andere Arten von Pumpen anwenden lassen.

415. Man gehe vorerst auf einige Augenblicke zu der 37ten fig. der Hydrostatik zurück, welche eine gemeine Saugpumpe vorstellt. Der Druck der Atmosphäre auf die Oberfläche MN des Behälters nöthigt das Wasser, durch die Saugröhre in die Höhe zu steigen und dem Kolben nachzufolgen, wann solcher aus GH in KI steigt. Ist die Geschwindigkeit des Kolbens größer, als die des nachfolgenden Wassers, so muß zwischen dem Kolben und dem Wasser eine Leere entstehen; ist im Gegentheil die Geschwindigkeit des Kolbens geringer als die des Wassers, so muß dieses Wasser den Kolben aufwärts drucken und dieser Druck kann nur dann aufhören, wann die beiden Geschwindigkeiten einander gleich werden. Wenn nun aber 1) zwischen dem Wasser und dem Kolben eine Leere entsteht, so ist die zum Durchlaufen der Höhe, welche diese Leere einnimmt, verwendete Zeit für den Effekt der Maschine verloren. (*)

2) Wenn die Geschwindigkeit des Wassers in der Stelle KI des höchsten Kolbenstands größer ist, als die Geschwindigkeit des in dieser Stelle angekommenen Kolbens, so treibt der Kolben, indem er wieder niedergehen will, das Wasser zurück, wenigstens seine ringförmige Grundfläche, welche die Klappenöfnung umgibt, und dieses verursacht gleichfalls einen Verlust an der Kraft (**). Hieraus folgt, daß die Abmessungen der

(*) Eigentlich ist es nicht Zeit, sondern Wasser, was zunächst verlohren geht, denn der Kolben kann auf solche Art offenbar nicht vollen Hub Wasser geben. Außer diesem sichtbaren Verlust tritt noch ein anderer ein, der nicht so unmittelbar in die Augen fällt, nämlich die Erschwerung der Last, weil in diesem Fall der Kolben allemal die ganze Atmosphäre zu heben hat.

(**) Es ist so ganz gewöhnlich, daß theoretische Schriftsteller alles aufsuchen, um die Nothwendigkeit theoretischer

der Pumpe, die Geschwindigkeit des Kolbens und die des Wassers so angeordnet seyn müssen, daß diese nachtheilige Folgen, wenigstens soviel als möglich verhütet werden.

416.

---

retischer Bestimmungen beweisen zu wollen. Und so wird auch gewöhnlich die zu große Geschwindigkeit des steigenden Wassers gewöhnlich als ein Fehler der Maschine angegeben, um daraus den Schluß zu machen, daß eine genaue Berechnung derjenigen Geschwindigkeit und damit verbundenen Einrichtungen nöthig sey, wobei die Maschine keinen Nachtheil im Effekt leide. Allein die nachtheilige Folge von der zu großen Geschwindigkeit des steigenden Wassers ist eine bloße Erdichtung. Wenn das nachsteigende schnellere Wasser den Kolben einholt, so ist solcher noch nicht im Niedergehen begriffen, und der Druck des ihn einholenden Wassers ist ihm also in seinem Steigen noch behülflich; die Last, welche er zu heben hat, wird dadurch vermindert. Sobald der Kolben seine höchste Stelle erreicht hat, fällt das Ventil auf der Saugröhre zu und die Geschwindigkeit des Wassers unter dem Kolben verschwindet in dem Augenblick, da der Kolben zurückzugehen anfängt, so daß der Widerstand, den des Kolbens ringförmige Grundfläche im Niedergehen leidet, von der Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser den Kolben eingeholt hat, gar nicht abhängt. Also zieht die große Geschwindigkeit wohl eine Verminderung der Last, auf keine Art aber eine Vergrößerung eines Widerstandes nach sich, und muß daher allemal vortheilhaft seyn. Man hat daher gar nicht nöthig, wegen der zu großen Geschwindigkeit des Wassers in Sorgen zu seyn, wohl aber muß man zu berechnen wissen, wieviel der Effekt bei einer zu langsamen Bewegung leidet, und aus diesem Grund dennoch um allgemeine Formeln bemüht seyn, aus welchen sich die Verhältnis zwischen Kraft, Last und allen Abmessungen der Maschine erkennen läßt.

416. I. Aufg. **Die Geschwindigkeit zu bestimmen, mit welcher das Wasser im Pumpenstiefel frei in die Höhe steigt, wenn man darin eine Leere bewirkt hat; nämlich unter der Voraussetzung, daß die Geschwindigkeit des Kolbens größer ist, als die Geschwindigkeit des in dem leeren Raum nachfolgenden Wassers.**

Der Druck der Atmosphäre auf den Wasserspiegel im Behälter, woraus das Wasser in die Höhe gehoben wird, kann als das Gewicht einer 32 Fus hohen Wassersäule angesehen werden (*); das Gewicht der stille liegenden Klappe E setze ich beiseite, oder ziehe es vom Gewicht der druckenden Säule ab, und ist die vorgelegte Aufgabe so beschaffen, als wenn die Geschwindigkeit bestimmt werden sollte, womit das Wasser in einem Zilinder steigt, welcher lothrecht unter dasselbe auf eine gegebene Tiefe eingetaucht, und oben offen, unten aber mit einer Querwand verschlossen ist, in der sich eine Oefnung befindet, wodurch das Wasser in den Zilinder treten kann.

Es sey also VMNT (fig. 69.) ein Gefäs, das in MN eine Oefnung pq hat, und das lothrecht unter die flüßige Masse BKDF, die durch die Oefnung pq eindringen kann, eingetaucht ist. Nun nehme ich an, in dem Augenblick, wo die Oefnung pq eröfnet wird, wirken die beiden Stücke der flüßigen Masse ABPM, CFQN auf den untern flüßigen Theil PKDQ ebenso, wie zween Kolben thun würden, welche über den Oefnungen PM, QN eines Gefäßes PKDQ angebracht wären und das Wasser durch die Oefnung pq seinen Ausweg zu nehmen nöthigten. Vermög dieser Drukkungen steigt das Wasser in dem Gefäs VMNT in die

(*) Ich wollte rathen, in der Ausübung auf nicht mehr als 30 Pariser Fus zu rechnen.

die Höhe, ohne dadurch aufzuhören, mit der zurückbleibenden Masse ein einziges Ganzes auszumachen. Der untere Theil des Wassers PKDQ kann als stille stehend angesehen werden und als das blose Mittel, wodurch die Gewalt der Druckungen auf PM und QN angewendet wird, das Wasser in dem Gefäs VMNT zum Steigen zu bringen. Ich betrachte daher bei dem Wasser nur zwo Bewegungen: die eine in den Theilen ABPM, CFQN, welche niederwärts geht; die andere in dem Theil MNIG, welche aufwärts geht; und nun will ich eine Gleichung suchen, welche die Bedingungen des Gleichgewichts ausdruckt, zwischen den verlohrnen und den gewonnenen Bewegungen.

Man stelle sich vor, die äußere flüßige Masse ABPM + NCFQ und die innere GMNI seyen in unendlich viele gleiche horizontale Querschnitte getheilt, die durch Hufh + Xzcx und durch OLlo vorgestellt werden, und man nehme an, daß alle diese Querschnitte, sowohl im Sinken als im Steigen ihre parallele Lage behalten. Es sey

die Schwere	=	g
die Vertikallinie Sp	=	p
Rp	=	z
Ep	=	q
Yp	=	x
die durch die Linie GI ausgedruckte Fläche	=	M
die durch OL ausgedruckte Fläche . .	=	y
die Fläche der Oefnung pq . .	=	K
die durch BA + CF ausgedruckte Fläche	=	P
die durch PM + NQ ausgedruckte .	=	Q
die durch Hu + zX ausgedruckte .	=	s
die Geschwindigkeit von OL . .	=	v
die Geschwind. des Querschnitts Hu + zX	=	V
das Zeitelement	=	dt
die der Geschwindigkeit u zugehörige Höhe	=	r

So

So ist klar, daß die sinkende Masse, welche in iedem Querschnitt von der Geschwindigkeit $gdt - dV$ getrieben wird, in iedem Augenblick mit der innern steigenden Masse, die in iedem Augenblick von der Geschwindigkeit $gdt + dv$ getrieben wird, im Gleichgewicht seyn muß. Man erhält also die Gleichung

$$\int dz\,(gdt - dV) = \int dx\,(gdt + dv)$$

oder auch

A.) $\int dz\,(gdt - dV) - \int dx\,(gdt + dv) = o$

Aber $v = \frac{Ku}{y}$, $dv = \frac{K(ydu - udy)}{y^2}$

$$V = \frac{Ku}{s},\quad dV = \frac{K(sdu - uds)}{s^2}$$

$$dt = \frac{dx}{v} = \frac{dz}{V} = \frac{ydx}{Ku} = \frac{sdz}{Ku}$$

Die obige Gleichung verwandelt sich also in

$$\frac{gsdz}{Ku}\int dz - Kdu\int\frac{dz}{s} + Kusdz.$$

$$\int\frac{ds}{s^3} - \frac{gydx}{Ku}\int dx - Kdu\int\frac{dx}{y} +$$

$$Kuydx\int\frac{dy}{y^3} = o$$

Die angezeigten Integrationen müssen für die ganzen Höhen p und q angestellt werden; also $\int dz = p$, $\int dx = q$. Es sey für die nämlichen Höhen $\int\frac{dx}{y} = N$ $\int\frac{dz}{s} = N'$; ferner erwäge man, daß das Integral $\int\frac{dy}{y^3}$ für $y = M$ verschwinden und für $y = K$ seinen vollständigen Werth erhalten müsse, und daß ebenso das Integral $\int\frac{ds}{s^3}$ für $s = P$ verschwinden

und

und für $s = Q$ seinen vollständigen Werth annehmen müsse. Ueberdas bemerke man, daß, da Ee (dq) die Höhe der Schichte Glig ist, $ydx = sdz = M.dq$ wird. Nach allen diesen Betrachtungen verwandelt sich unsere Gleichung in diese

B.) $$\frac{M(p-q)\,dq}{K} - K(N+N')\,dr$$

$$+ MK.rdq\left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{K^2} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{Q^2}\right) = 0$$

Diese Gleichung enthält drei unbestimmte Größen, nämlich p, q, r; da aber offenbar

$$Mdq = -Pdp$$

und die Gestalt der Gefäße gegeben ist, so ist klar, daß p durch q gegeben ist. Es ergibt sich also aus der Gleichung (B) eine andere, wo keine andere veränderliche Größen mehr vorkommen, als r und q und ihre Differenzen, und woraus sich also der Werth von r durch q und der Werth von q durch r ergibt.

417. I. Zusatz. Man setze, es sey VMNT ein lothrechter Zilinder und BKDF gleichfalls ein prismatisches Gefäs, worin die Höhe des Wassers unveränderlich bleibt, welche in der Natur der Fall ist, weil der Druck der Atmosphäre auf den Wasserspiegel im Behälter ohne merklichen Irthum immer für einerlei angenommen werden kann (*); so sind in der Gleichung (B)

(*) Aus der Unveränderlichkeit des atmosphärischen Drucks allein folgt doch noch nicht die Unveränderlichkeit der druckenden Wassersäule, sondern es muß überdem vorausgesetzt werden, daß der Wasserspiegel des im Behälter wirklich vorhandenen Wassers während dem Steigen des Wassers im Zilinder nicht merklich falle, daß also der Behälter entweder beständigen Zufluß erhalte, der das in den Zilinder tretende

(B) die Größen M und p unveränderlich, $N = \frac{q}{M}$; $N' = \frac{p}{p}$, das Glied $M.K.r.dq\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{Q^2}\right) = 0$, und daher

C) $$\frac{M(p-q).dq}{K} - \frac{Kqdr}{M} - \frac{Kpdr}{P} + M.K.rdq\left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{K^2}\right) = 0.$$

und da diese Gleichung von eben der Art ist wie die in 230, so ist auch ihre Integration die nämliche.

418. II. Zusatz. Wenn in dieser Gleichung C die Oefnung K merklich geringer als M und P ist, so hat man sehr nahe $r = p - q$. Es ist also die Geschwindigkeit des Wassers bei seinem Durchgang durch die Oefnung mn (*) $= \sqrt{2g(p-q)}$ (**), und seine Geschwindigkeit in $GI = \frac{K}{M}\sqrt{(2g(p-q))}$

Man muß sich erinnern, daß unter K allemal die nach der Verhältnis der Zusammenziehung des Strahls (190.) verminderte Oefnung verstanden werden muß (***).

419.

---

tretende Wasser wieder ersetzt, oder daß die Weite des zilindrischen Gefäßes zu unbeträchtlich gegen der Weite des Behälters sey, als daß die in jenes tretende Wassermasse in diesem einen beträchtlichen Abgang verursachen könnte, welches auch der ganz gewöhnliche Fall ist.

(*) Sollte pq heißen.

(**) Ich erinnere auch hier wieder, daß Hr. V. unter g die durch den freien Fall eines schweren Körpers in der ersten Sek. erlangte Geschwindigkeit versteht.

(***) Auch auf die Verzögerung, welche die Bewegung des Wassers in Röhren leidet, muß Rücksicht genommen werden.

419. Anmerk. Wenn man in vorstehender Aufgabe, anstatt anzunehmen, daß der Ausfluß aus dem Gefäß BKDF in das VMNT erfolge, im Gegentheil setzt, das Gefäs VMNT enthalte Wasser bis oberhalb den Wasserspiegel BF und leere sich in das Gefäs BKDF aus, so ändert solches die Natur der Aufgabe nicht ab. Aber statt der Gleichung (A) erhält man diese

$$D) \int dx\,(g\,dt - dv) - \int dz\,(g\,dt + dV) = o$$

Wobei man eben dergleichen Bemerkungen und Behandlungen anbringen kann, wie man bei der Gleichung (A) vorgenommen hat. Man sieht, daß hier $p < q$ wird anstatt daß vorhin $p > q$ war.

420. Es sey VZYT (fig. 70.) ein Saugwerk, dessen Kolben (*) von GH bis in KI mit einer geringern Geschwindigkeit steigt, als die des nachfolgenden Wassers seyn würde, wenn solches ungehindert stiege; man sucht den Druck, den dieses Wasser gegen den Kolben aufwärts ausübt, vorausgesetzt, daß die Ventilöfnung pq merklich geringer als der horizontale Querschnitt des Stiefels MN ist.

Es sey OL eine unbestimmte Lage des Kolbens, ZY die Oberfläche des Wassers, in welches die Pumpe eingesetzt ist, AZ die unveränderliche Höhe der Wassersäule, deren Druck dem Druck der Atmosphäre auf ZY gleich ist. Man setze wie zuvor die Schwere $= g$, die Fläche des Querschnitts $MN = M$; die Fläche der Oefnung $pq = K$; überdas $AK = c$. $AG = f$, $AO = x$, die der steigenden Geschwindigkeit des Kolbens zugehörige Höhe $= r$.

Wenn

(*) In manchen Gegenden sagt man Stempel.

Wenn nun der Kolben dem Aufsteigen des nachfolgenden Wassers keine Hindernis entgegensetzte, so wäre die der Geschwindigkeit des Wassers in p q zugehörige Höhe $= x$ (*) (418.); und es wäre also die der Geschwindigkeit der Wasserschichte O L zugehörige Höhe $\frac{K^2 x}{M^2}$, indem die Geschwindigkeiten der Querschnitte sich umgekehrt wie die Größe ihrer Flächen verhalten. Weil also das Wasser in O L genöthigt ist, die Geschwindigkeit des Kolbens anzunehmen, das ist, eine der Höhe r zugehörige Geschwindigkeit, und da außerdem der Druck des Wassers gegen iede dem Wasser entgegengesetzte Stelle des Kolbens offenbar dem Produkt der Schwere in die Differenz der Höhen $\frac{K^2 x}{M^2}$, r gleich ist, so ist klar, daß die Drukkungen gegen die ganze gegen das Wasser gekehrte Kolbenfläche in O L, G H, K I durch die Ausdrücke

$$g\left(\frac{K^2 x}{M^2} - r\right) M;$$

$g\left(\frac{K^2 f}{M^2} - r\right) . M$; $g\left(\frac{K^2 . c}{M^2} - r\right) . M$ ausgedruckt werden (**).

421.

(*) Nämlich angenommen, daß das Wasser schon bis zur Kolbenklappe F nachgefolgt sey.

(**) Die Kolbenfläche weicht dem steigenden Wasser mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2g . r}$, das Wasser folgt aber mit der Geschwindigkeit $\frac{K}{M} . \sqrt{2gx}$ nach, und stößt also noch mit der Geschwindigkeit $\frac{K}{M} . \sqrt{2gx} - \sqrt{2gr}$ gegen den Kolben, folglich ist der Druck gegen den Kolben dem Gewicht einer Wassersäule von

421. Zus. Wenn der Druck in KI verschwinden soll, so erhält man $g\left(\frac{K^2 c}{M^2} - r\right) . M = o$ oder $\frac{K^2}{M^2} = \frac{r}{c}$, und wenn der Druck in KI einer gegebenen Größe g h M gleich seyn soll, so hat man $\frac{K^2}{M^2} = \frac{r+h}{c}$ (*).

422.

---

von der zur Geschwindigkeit $\frac{K}{M} . \sqrt{2gx} - \sqrt{2gr}$ gehörigen Höhe auf die Grundfläche M gleich, das ist einer Wassersäule $\frac{\left(\frac{K}{M} . \sqrt{2gx} - \sqrt{2gr}\right)^2}{2g} . M$

$= \frac{\frac{K^2}{M^2} . 2gx - \frac{2K}{M} . 2g\sqrt{rx} + 2gr}{2g} . M =$

$\left(\frac{K^2 x}{M^2} - \frac{2K\sqrt{rx}}{M} + r\right) . M.$ und so müßten auch die beiden andern Ausdrücke in

$$\left(\frac{K^2 f}{M^2} - \frac{2K\sqrt{fr}}{M} + r\right) M$$

und $\left(\frac{K^2 c}{M^2} - \frac{2K\sqrt{cr}}{M} + r\right) . M$

verändert werden.

(*) Auch diese Formeln müßten nach der vorigen Anmerkung abgeändert werden. Es müßte nämlich im ersten Fall

$$\frac{K^2 c}{M^2} - \frac{2K\sqrt{cr}}{M} + r = o$$

seyn, also

$$K^2 c - 2KM\sqrt{cr} + M^2 r = o$$

und hieraus folgt

422. III. Zusatz. Es sey alles wie in der vorigen Aufgabe, nur nimmt man an, die Wassersäule VOLT, welche der Kolben hebt, laufe oben an der unveränderlichen Stelle VT beständig über; man sucht eine Gleichung für die aufsteigende Bewegung des Kolbens.

Man setze, außer dem Druck des Wassers, welcher den Kolben aufwärts druckt, bringe man noch eine Kraft

---

$K = (M \pm \sqrt{(M^2 - M^2)}) \cdot \sqrt{\frac{r}{c}}$ oder $K = M\sqrt{\frac{r}{c}}$

In diesem Fall ist also des Herrn B. Formel $\frac{K^2}{M^2} = \frac{r}{c}$ ganz richtig.

Im andern Fall wäre

$$\frac{K^2 . c}{M^2} - \frac{2K\sqrt{cr}}{M} + r = hK$$

oder $$\frac{K^2 . c}{M^2} - \left(\frac{2\sqrt{cr}}{M} + h\right) . K + r = 0$$

oder $$K^2 c - (M . 2\sqrt{cr} + M^2 h) . K + M^2 r = 0$$

also $$K = -\left(\frac{M\sqrt{cr} + \frac{1}{2}hM^2}{c}\right) \pm \sqrt{\left(\left(\frac{M\sqrt{cr} + \frac{1}{2}hM^2}{c}\right)^2 - \frac{M^2 r}{c}\right)}$$

wo offenbar das beiahte Zeichen genommen werden muß.

Dieser Werth für K ist von dem $K = M\sqrt{\frac{r+h}{c}}$, wie ihn Herr B. findet, gar sehr verschieden. Herr B. hätte nämlich nicht den Unterschied der Höhen, sondern die dem Unterschied der Geschwindigkeiten zugehörige Höhe nehmen sollen, wie er auch oben bei Berechnung der Gewalt des Wassers gegen die ausweichenden Schaufeln selbsten gethan hat.

Kraft in eben der Richtung an, die ich durch das Gewicht einer Wassersäule ausdrucke, deren Grundfläche = M und Höhe = z ist; so wird der Kolben von einer Kraft aufwärts getrieben, die $= gMz + gM\left(\frac{K^2 x}{M^2} - r\right)$; dagegen wird er aber niederwärts getrieben 1) durch sein eigenes Gewicht, welches ich durch das Gewicht einer Wassersäule ausdrucke, deren Grundfläche = M und deren gegebene Höhe = a ist; 2) durch das Gewicht der Wassersäule OLTV, das = gM (x + k) ist, wenn ich die gegebene Höhe VA = k setze; 3) durch den Druck der Atmosphäre auf die Oberfläche VT, der = g M. H ist, wenn ich die gegebene Höhe AZ = H setze.

Es ist also die absolute Kraft, vermög der der Kolben steigt, nur noch =

$$gMz + gM\left(\frac{k^2 x}{M^2} - r\right) - gMa - gM(x+k) - g.M.H$$

Diese Kraft bewegt die Masse M a + M (x + k); man erhält also aus der Formel für die beschleunigenden Kräfte

$$(a + x + k)\,dr = -dx\left(z + \frac{K^2 x}{M^2} - r - a - x - k - H\right)$$

Diese Gleichung enthält drei veränderliche Grössen r, x, z; wenn man also Eine davon kennt, die Verhältnis zwoer von ihnen, so ergibt sich daraus die Verhältnis zwischen allen dreien (*).

423.

(*) Auch diese Formel würde eine andere Gestalt bekommen, wenn statt $gM.\left(\frac{K^2 x}{M^2} - r\right)$ der nach meinen Erinnerungen gehörige Ausdruck gebraucht würde.

423. Zus. Man setze, der Kolben steige mit gleichförmiger Bewegung, so erhält man $dr = o$, und unsere Gleichung gibt

$$z = H + k + a + r + \frac{x(M^2 - K^2)}{M^2}$$

Man setze nun ferner, die Geschwindigkeit des Kolbens sey von der Art, daß der Druck des Wassers verschwinde, wann derselbe in KI ankomme, so hat man (421)

$$r = \frac{K^2 c}{M^2}$$

also

$$z = H + k + a + \frac{K^2 c + x(M^2 - K^2)}{M^2}$$

Man sieht, daß die Höhe z veränderlich ist. Setzt man nach einander $x = c$, $x = f$ und nennt die zugehörigen Werthe von z, Z, Z' so erhält man

$$Z = H + k + a + c$$

$$Z' = H + k + a + f - \frac{(f-c).K^2}{M^2}$$

In der Ausübung nimmt man für z den mittlern Werth zwischen Z und Z'.

Exempel. Es sey AZ oder H = 32 Fus, AV oder K = 4 Fus, a = 2 Fus, AO oder c = 7 Fus, AG oder f = 9 Fus, der Durchmesser des Stiefels = 6 Zoll, der Durchmesser der Oefnung pq = $2\frac{1}{2}$ Zoll; so erhält man $\frac{K}{M} = \frac{25}{144}$; $\frac{K^2}{M^2} = \frac{625}{20736}$; r = 2 Zoll $6\frac{1}{3}$ Linien, Z = 45 Fus, Z' = 46 Fus 11 Zoll 4 Linien. Nun gibt aber 1) der Werth von r für den Kolben eine gleichförmige Geschwin-

Geschwindigkeit aufwärts von 3 Fus 6⅔ Zoll in einer Sekunde; es muß also der Kolben seinen ganzen Hub, welcher 2 Fus beträgt, in 33⅓ Terzien vollenden, und während dieser Zeit muß bei VT ein Wasserzilinder ablaufen, welcher 6 Zoll im Durchmesser und 2 Fus zur Höhe hat; dieses beträgt 679 Kubikzolle. Wenn man also voraussetzt, daß der Kolben zum Niedergang eben so viel Zeit brauche wie zum Aufgang, so sieht man, daß der Kolben in einer Minute 53⅓ mal heben und daher bei VT 36213⅓ Kubikzoll Wasser ausgießen müsse, welches ein Gewicht von ohngefähr 1467 Pfunden ausmacht, den Kubikfus zu 70 Pfund angenommen. Dieses Gewicht wird auf die Höhe ZV von 36 Fus erhoben; der Effekt ist also der nämliche, als wenn ein Gewicht von 52812 ℔. auf die Höhe von 1 Fus in einer Minute erhoben würde.

2) Wenn man 45 Fus 11 Zoll 8 Linien für die mittlere Höhe der Wassersäule annimmt, deren Gewicht der Kraft gleich ist, welche den Kolben oberwärts treiben soll, so findet sich, daß diese Säule, die ein Zilinder von 6 Zoll im Durchmesser und zu 45 Fus 11 Zoll 8 Linien hoch ist, ein Gewicht von ohngefähr 632 ℔. ausmacht; dieses Gewicht durchlauft 53⅓ mal 2 Fus in einer Minute; dieses Resultat ist völlig eben so, als wenn ein Gewicht von 67412 ℔ auf die Höhe von 1 Fus in einer Minute erhoben würde. Dieses Gewicht enthält zwei Stücke, das eine, welches sich auf die Erhebung des Wassers, das andere, welches sich auf die Erhebung der Masse des Kolbens bezieht. Hierzu muß man noch die zur Ueberwindung der Friktion erfoderliche Kraft hinzuthun.

Wenn es nur drauf ankäme, den Kolben blos im Stand des Gleichgewichts zu erhalten, so hätte die der erfoderlichen Kraft gleiche Wassersäule nur die Höhe von 38 Fus (75) statt 45 Fus 11 Zoll 8 Linien.

424. IV. Aufgabe. **Wenn der Kolben seinen höchsten Stand KI erreicht hat und nun wieder niederwärts gehen will; die Geschwindigkeit zu bestimmen, mit der er niedergeht.**

Wenn der Kolben seinen Niedergang anfängt, so fällt die Klappe E zu und die bei F geht auf. Die Wassersäule VMNT kann nunmehr wie stillstehendes Wasser angesehen werden, worin der Kolben vermög einer Kraft niedersinkt, welche dem Ueberschuß seines absoluten Gewichts über das Gewicht einer Wassermasse, die mit ihm gleichen Raum einnimmt, und dem Ueberschuß über den Widerstand gleich ist, den er leidet, indem er mit seiner um die Oefnung F herumliegenden ringförmigen Fläche gegen das Wasser stößt. Hierzu kann man noch eine äußere Kraft rechnen, welche den Kolben noch von oben herab treibt, wenn man seine Geschwindigkeit beschleunigen will. Unter ieder dieser Voraussetzungen ist die Bestimmung der Geschwindigkeit eine Aufgabe von eben der Art, wie die in 352. Unsere Leser werden daher die Auflösung leicht selbsten vollführen (*).

Da

(*) Herr B. hat es hier übersehen, daß die gegenwärtige Aufgabe von der 352. ganz und gar verschieden ist. Dort wurde vorausgesetzt, daß das Wasser, worin der Körper sinkt, nach allen Seiten frei ausweichen konnte, hier aber ist dem Wasser unter dem Kolben der Weg vorgeschrieben; es muß sich blos durch die Kolbenöfnung durchdrängen, und die Gewalt, die hierzu erfodert wird, ist desto beträchtlicher, ie kleiner die Verhältnis der Kolbenöfnung zur Weite des Stiefels und ie höher der Kolben ist. Wenn diese Höhe = z, die Weite des Stiefels = W, die der Kolbenöfnung ϕ, die Höhe des Kolbenhubs = b und die Zeit, worin der Kolben einmal auf- und niedergeht (bei der Einrichtung eines doppelten Saugwerks ist die Zeit des Aufgangs der des Niedergangs gleich), und diese Voraussetzung wird hier ange-

Da die Höhe, von welcher der Kolben herabsinkt, niemalen sehr groß, so kann der Widerstand, den er bei seiner erlangten Geschwindigkeit durch den Anstos des Wassers leidet, mehrentheils außer Acht gelassen werden, und alsdann ist der Ausdruck für die Geschwindigkeit sehr einfach (*). Wenn man übrigens die Ventilöfnung mehr und mehr vergrößert, so wird hierdurch der Widerstand noch vermindert: allein dieses kann den nachtheiligen Erfolg haben, daß das Ventil die

---

angenommen) = t ist, so ist, wenn ich die zum Niedergang des Kolbens verwendete Kraft P nenne,

$$P = \frac{0{,}256 . b . z \, (W - \varphi)^2}{\varphi . t^2}$$

wie ich in meinem **Versuch einer neuen Theorie** ꝛc. S. 152. gewiesen habe. Hierbei ist die Kolbenfriktion nicht mit begriffen: wenn also diese f heißt, so ist

$$P = \frac{0{,}256 . b . z . (W - \varphi)^2}{\varphi . t^2} + f$$

wo nämlich P und f Höhen von Wassersäulen über der Fläche W bedeuten.

wo φ so genommen werden muß, wie es der Zusammenziehung des Wasserstrahls gemäs ist. Weitere Folgerungen hieraus s. a. a. O.

(*) Aus der beigebrachten Formel erhellet, daß der Widerstand nicht blos von der Höhe des Hubs, die ich b genennt habe, abhängt, sondern von mehrern andern und am meisten von der Verhältnis $\frac{W}{\varphi}$.

Setzt man die Zeit des Niedergangs, also $\frac{1}{2} t = \tau$, so ist $t^2 = 4\tau^2$ und $P = \frac{0{,}064 . b . z . (W - \varphi)^2}{\varphi \tau^2} + f$

woraus sich, wenn alles übrige gegeben ist, der Werth von τ für ein einfaches Saugwerk ergibt.

die Oefnung nicht hinlänglich verschließt, auch zu plump und in seiner Bewegung zu langsam wird (*).

(*) Wie der Widerstand durch Erweiterung der Kolbenöfnung, die ich ϕ genennt habe, vermindert wird, ergibt die Formel für P. Es erhellet aber auch aus eben dieser Formel, daß man ϕ nicht gar groß zu nehmen braucht, um den Widerstand dem Werth von f, welchen P für $\phi = W$ erhält, schon so nahe zu bringen, daß als fernerer Vergrößerung keine beträchtliche Verminderung des Widerstandes mehr zu erwarten ist.

Wenn die dem stägenden Kolben entgegendruckende Last einer Wassersäule von der Höhe h über der Kolbenfläche gleich ist, und des Stiefels Durchmesser d heißt, so läßt sich in der Ausübung $f = h.d.0{,}075$ (wo h und d in Fußen ausgedruckt seyn müssen) setzen. Hernach wäre also

$$P = \frac{0{,}064.b.z.(W-\phi)^2}{b\tau^2} + h.d.0{,}075$$

oder $$P = \frac{0{,}064.b.z.(W-\phi)^2}{\phi.\tau^2} + 0{,}075.h.\sqrt{\frac{1000.W}{785}}$$

Es sey nun z. B. $b = 3$; $z = \frac{1}{2}$; $W = 1$; $\phi = 0{,}1$; $h = 36$, alles in Fußen und $\tau = 2$ Sek, so wäre hiernach

$$P = \frac{0{,}064.3.\frac{1}{2}.0{,}9^2}{0{,}1.4} + 0{,}075.36.\sqrt{\frac{1000}{785}}$$

$$= 0{,}1944 + 3{,}05 \text{ Fus.}$$

Es ist also die Kraft, welche zum Niedergang des Kolbens, wenn solcher in 2 Sek. geschehen soll, erfodert wird, einer auf den Kolben druckenden Wassersäule von der Höhe $0{,}194 + 3{,}05 = 3{,}244$ Fus gleich. Wenn nun auch ϕ 5 mal so groß genommen oder $= 0{,}5$ gesetzt würde, so erhielte man doch

$$P = \frac{0{,}064.3.\frac{1}{2}0{,}5^2}{0{,}5.4} + 3{,}05 = 0{,}048 + 3{,}05$$

$$= 3{,}098 \text{ Fus.}$$

Es

Es verhält sich also das vorige P zum ietzigen wie 3,244 zu 3,098 oder wie 1 zu 0,953 oder die erfoderliche Kraft zur Niedertreibung des Kolbens beträgt bei der 5 fachen Vergrößerung der Kolbenöfnung kaum $\frac{1}{21}$ weniger als bei der einfachen.

Nun erwäge man, daß die zum Hub des Kolbens verwendete Kraft nothwendig größer als 36 + 3,05 seyn müsse; setze ich sie inzwischen nur = 36 + 3,05 = 39,05 Fus, so ist die beim Auf- und Niedergang verwendete Kraft einer Wassersäule über dem Kolben gleich, deren Höhe bei der einfachen Kolbenöfnung = 39,05 + 3,244 = 42,294 Fus ist, und hiervon beträgt der wegen der Gewalt durch die Kolbenöfnung erfoderliche Theil, nur 0,1944 Fus also nur $\frac{1}{218}$ der ganzen Kraft; man sieht also, daß hier bei der Oefnung $\phi = 0{,}1$ W im Ganzen noch nicht $\frac{1}{218}$ der ganzen Kraft dazu nöthig ist, daß Wasser durch die Kolbenöfnung zu zwängen, und daß also der Gewinn der Kraft, welcher aus der Erweiterung dieser Oefnung erfolgte, selbst dann noch gar nicht in Betracht käme, wann auch ϕ = W genommen werden könnte. Es ist also natürlich weit vortheilhafter, $\phi = 0{,}1$ W zu lassen, da die Vortheile eines kleinen Ventils, die Herr B. genennt hat, in der Ausübung nicht unbeträchtlich sind.

Ich habe übrigens bisher schon angemerkt, wie wenig ich in diesem Kapitel des Herrn B. Theorie beipflichten kann. Den Druck des im leeren Raum steigenden Wassers gegen den Kolben, wenn die Geschwindigkeit des steigenden Wassers auch nach seinen Angaben berechnet wird, kann ich, wie ich oben geäußert habe, nach seiner Berechnung nicht für richtig erkennen: außerdem muß ich aber hier noch eine Hauptbemerkung nachholen, daß ich nämlich auch seine Art, die Geschwindigkeit des steigenden Wassers zu bestimmen, für fehlerhaft halte. Seine Hypothese ist diese: „wenn das Wasser im „luftleeren prismatischen Raum auf die Höhe h „gestiegen sey, und die Atmosphäre dem Druck einer „Wassersäule von der Höhe H das Gleichgewicht zu „halten vermöge, so gehöre die Geschwindigkeit des „Wassers im prismatischen Gefäs (dessen Oefnung

„nämlich

„nämlich der ganzen Weite des Gefäßes gleich sey)
„der Höhe H — h zu."

Es ist wahr, wenn zwei prismatische Gefäße mit einander kommuniciren, wovon das eine wie die Atmosphäre als unendlich weit angesehen werden kann und auf die Höhe H angefüllt ist, das andere aber in der Höhe h überlauft, so setzt man die Höhe, welche der Geschwindigkeit des auslaufenden Wassers zugehört, = H — h. Und eben auf die Sätze, welche diese Folge ergeben, gründet auch hier Herr B. seinen Vortrag.

Aber offenbar hat Herr B. diesen Satz ganz am unrechten Ort angewendet. Wenn z. B. h = o oder die Ausflußöfnung ganz unten angebracht wäre, so wäre im Augenblick der Eröfnung die der Geschwindigkeit des Ausflusses zugehörige Höhe nicht sogleich = H, sondern würde es erst nach und nach, desto später, je länger die Abflußröhre horizontal fortgeführt würde. Erst nach einer bestimmten Zeit, während welcher der Abfluß beschleunigt wird, käme die Bewegung in den Beharrungsstand, und **nur für den Beharrungsstand** leidet jener Satz seine Anwendung. Das nämliche gilt auch, wenn die Abflußröhre nicht horizontal oder h nicht = o ist. Steht sie nämlich z. B. vertikal und hat ihre Ausflußmündung in der Höhe, so ist nur im Beharrungsstand der Bewegung die der Ausflußgeschwindigkeit zugehörige Höhe = H — h; wäre aber die auf die Höhe h angefüllte Röhre oben verschlossen, also alles in Ruhe, und nun die Platte oder der Zapfen, welcher den Ausfluß verhinderte, plötzlich vernichtet, so wäre die Ausflußgeschwindigkeit anfänglich unendlich klein, und nun durch die Schwere, welche ich g nennen will, nach und nach beschleunigt, bis die Geschwindigkeit der Höhe h zugehörte. Eben dieses ist der Fall bei den Pumpen; sobald der Kolben seinen tiefsten Stand erreicht hat, für welchen ich die Wasserhöhe unter ihm h nennen will, so ist alles in Ruhe; so wie nun der Kolben in die Höhe gezogen wird, also zwischen ihm und dem Wasser eine Leere entstehen will, fängt das Wasser mit einer unendlich kleinen Geschwindigkeit seine Bewegung

an

an und wird durch die dabei wirkende Schwerkraft nach und nach beschleunigt.

Hierbei wirkt nun die natürliche Schwere nicht ganz frei, oder die Bewegung wird nicht so beschleunigt, wie die eines frei fallenden Körpers, sondern es muß ihre Beschleunigung nach der Lehre von der Ueberwucht bestimmt werden. Dabei zeigt sich, daß die Geschwindigkeit des Wassers unter dem Kolben während dem Kolbenhub gar nicht in den Beharrungsstand tritt, sondern durchaus als eine beschleunigte Bewegung betrachtet werden muß. So habe ich diese Theorie in dem oft angeführten Versuch ꝛc. vorgetragen, wo ich überhaupt die Lehre von den Pumpen ausführlicher, als hier geschehen ist, behandelt habe.

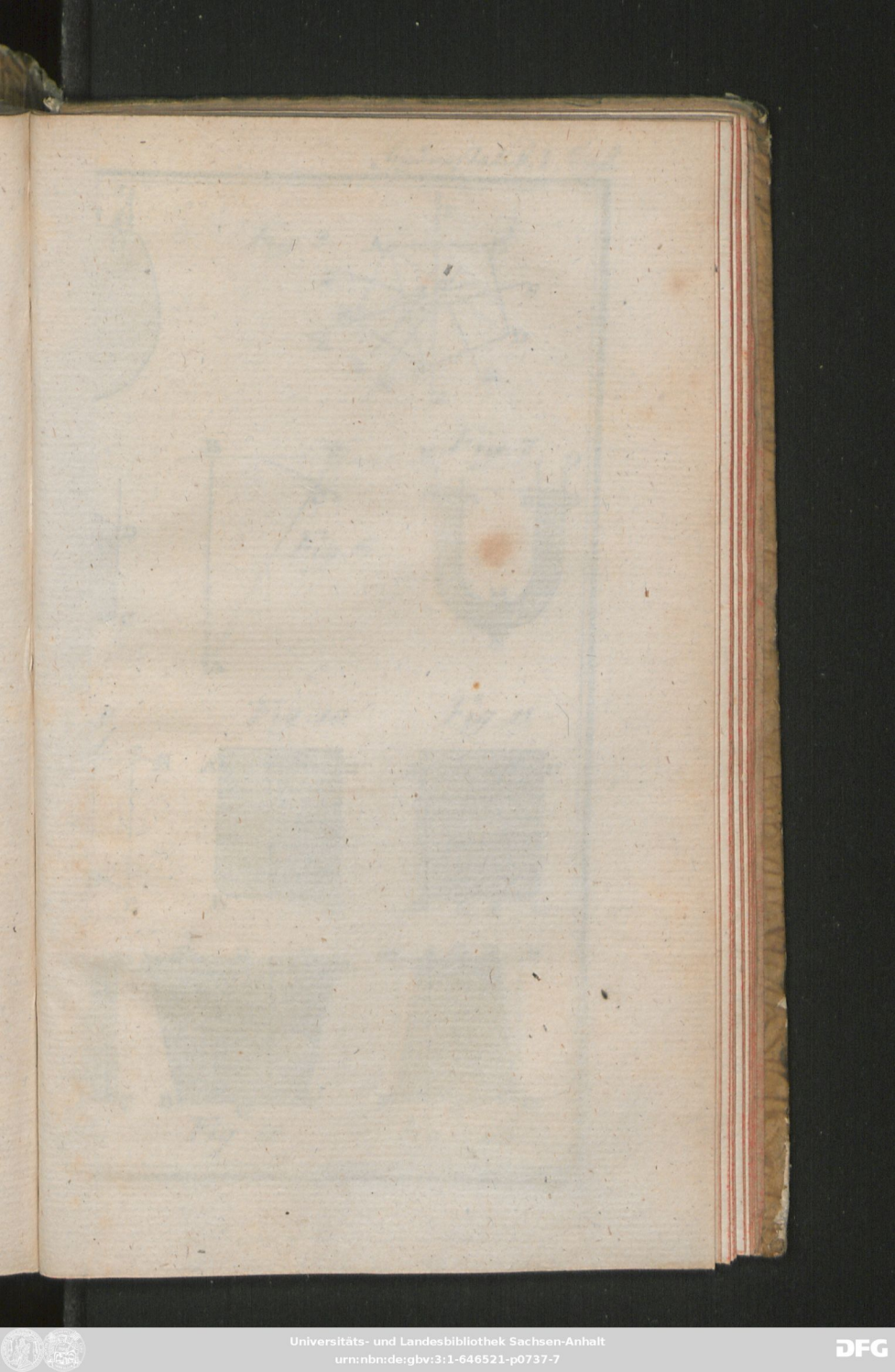
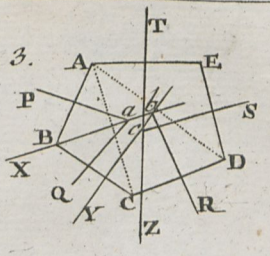




Fig. 3.





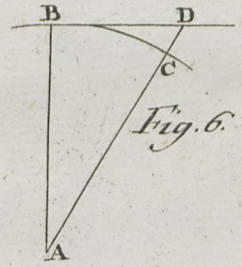


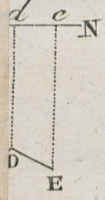
Fig. 6.

Fig. 7



g

Fig. 10



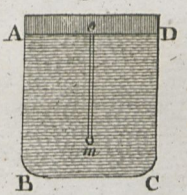
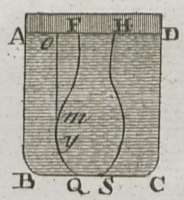


Fig. 11





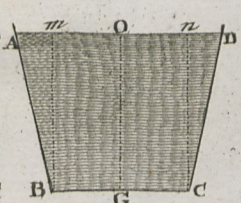


Fig. 15

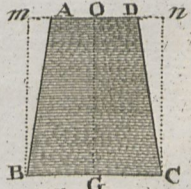
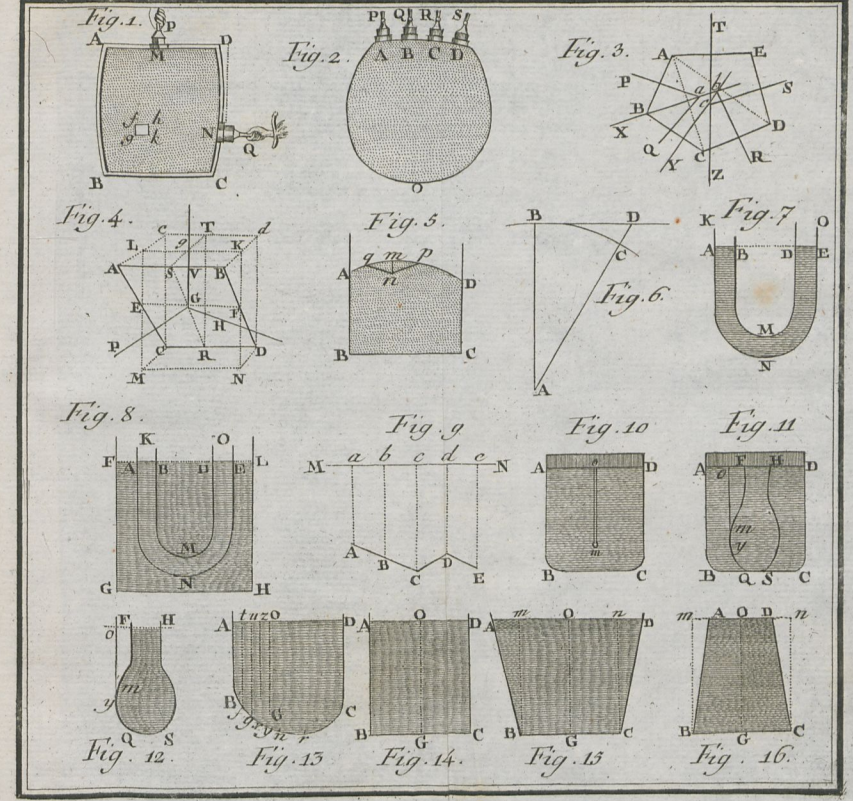
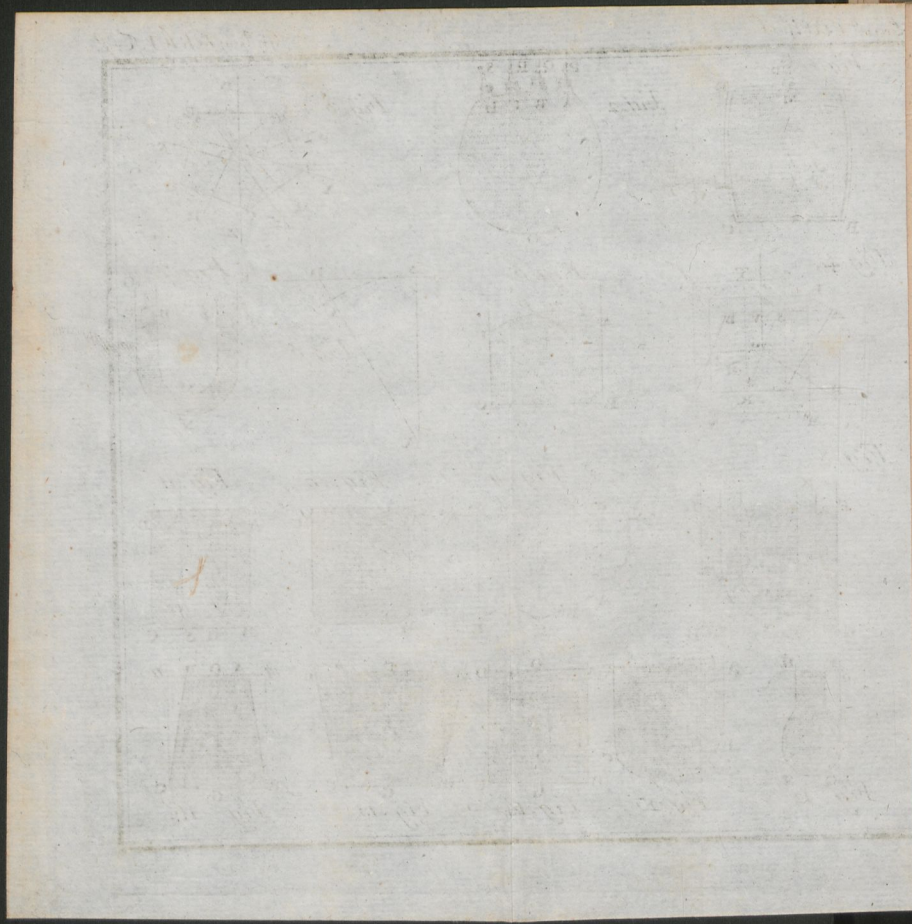


Fig. 16.



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0740-3



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0741-9

Fig. 19.

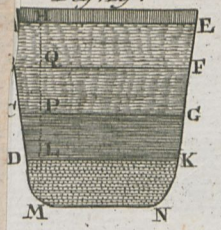


Fig. 20.





Fig. 23.

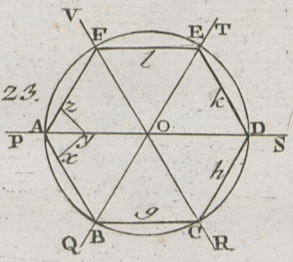


Fig. 26



Fig. 27.



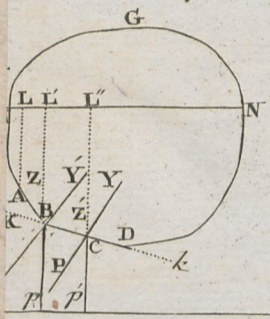
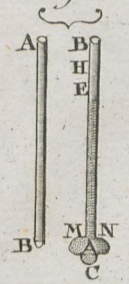
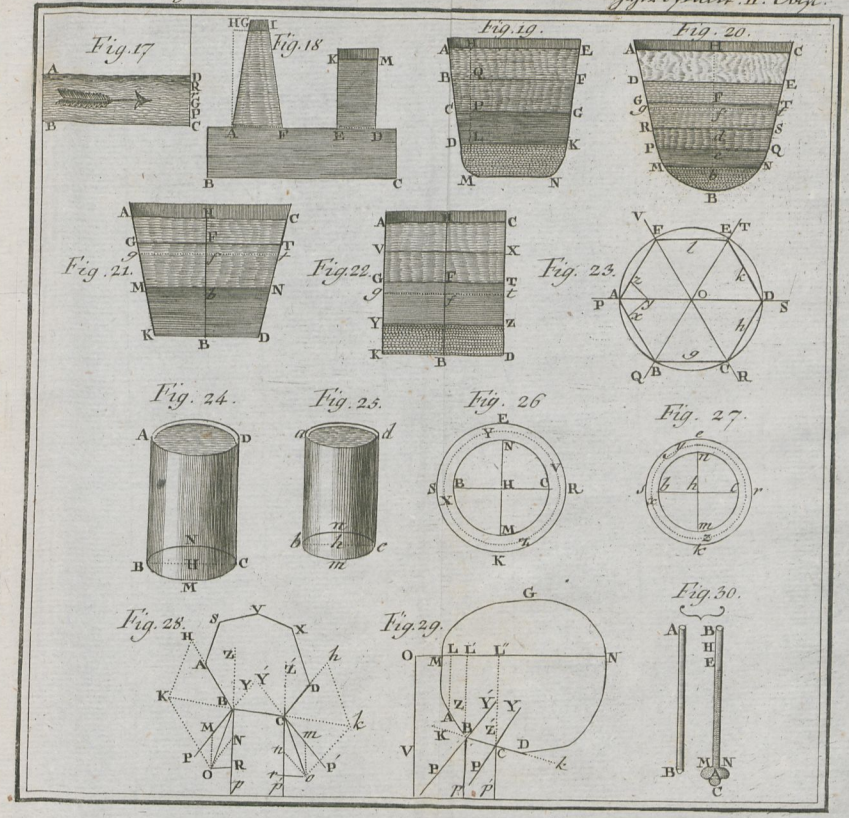
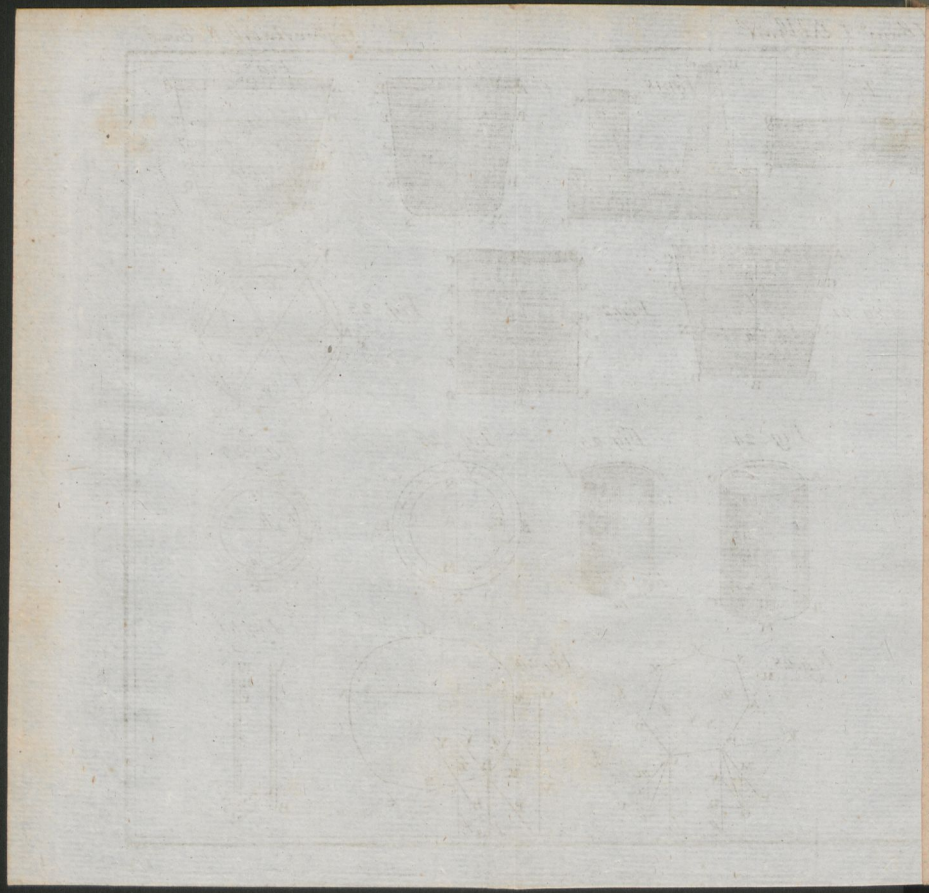


Fig. 30.





Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0744-6



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0745-1

Fig. 33.



Fig. 38.

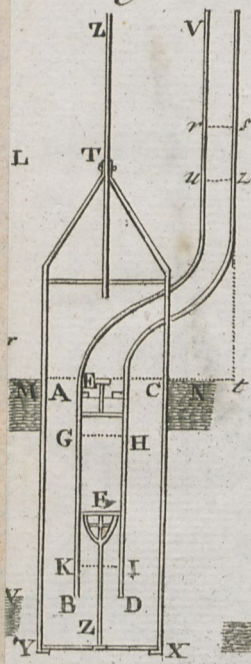
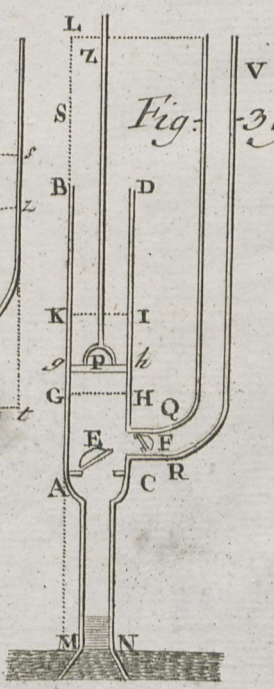
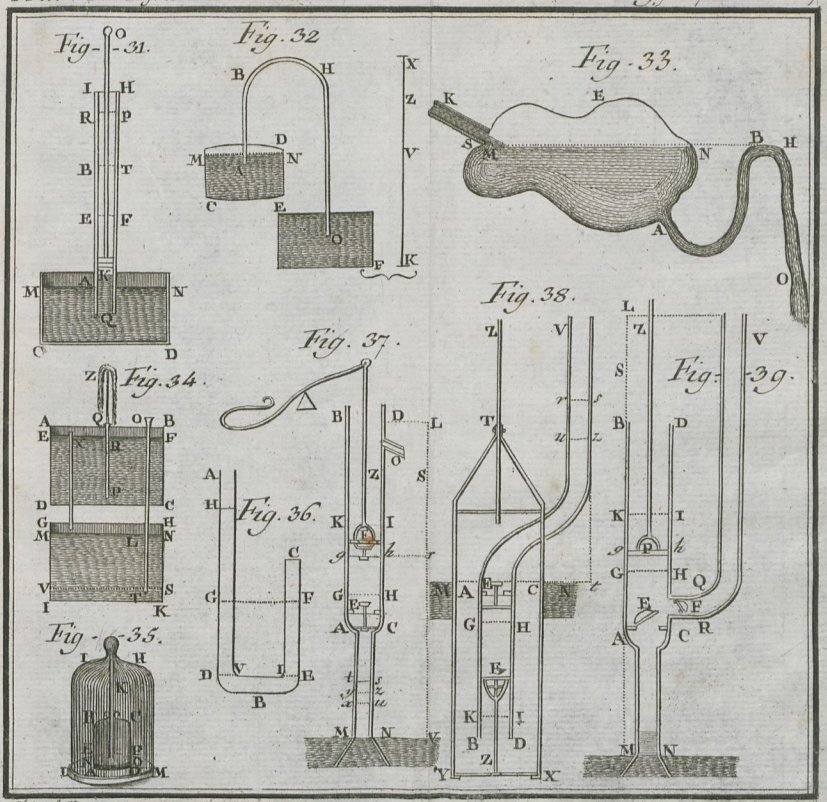


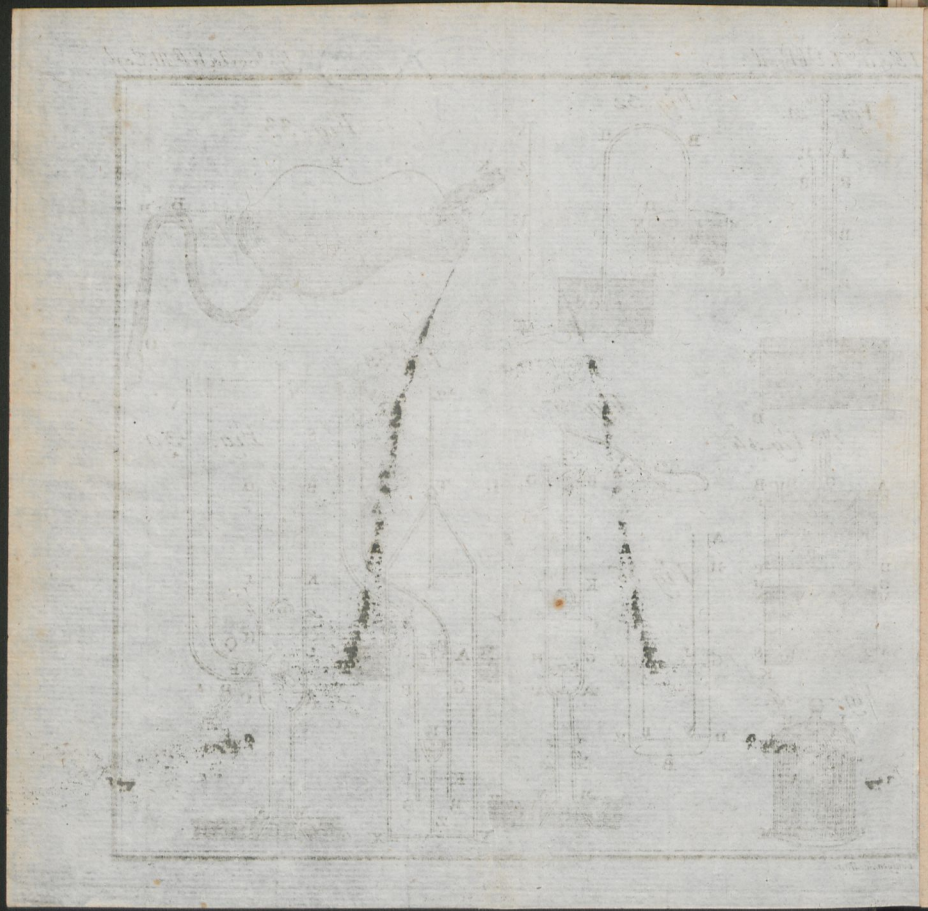
Fig. 39.





Göntgen Sc. Mog.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0748-8



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0749-7

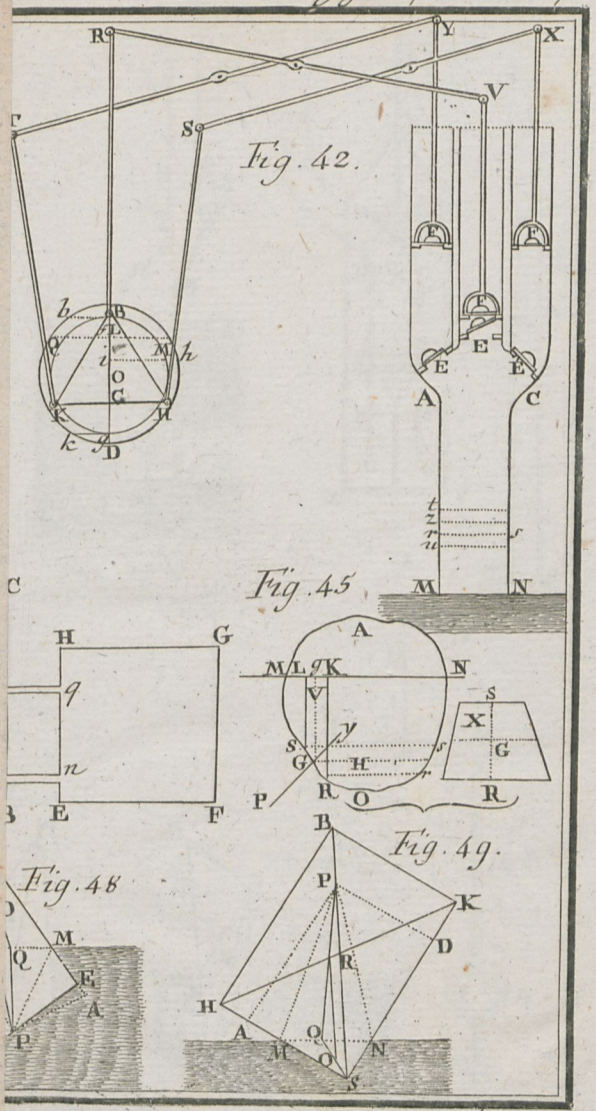


Fig. 42.
Fig. 45
Fig. 48
Fig. 49.

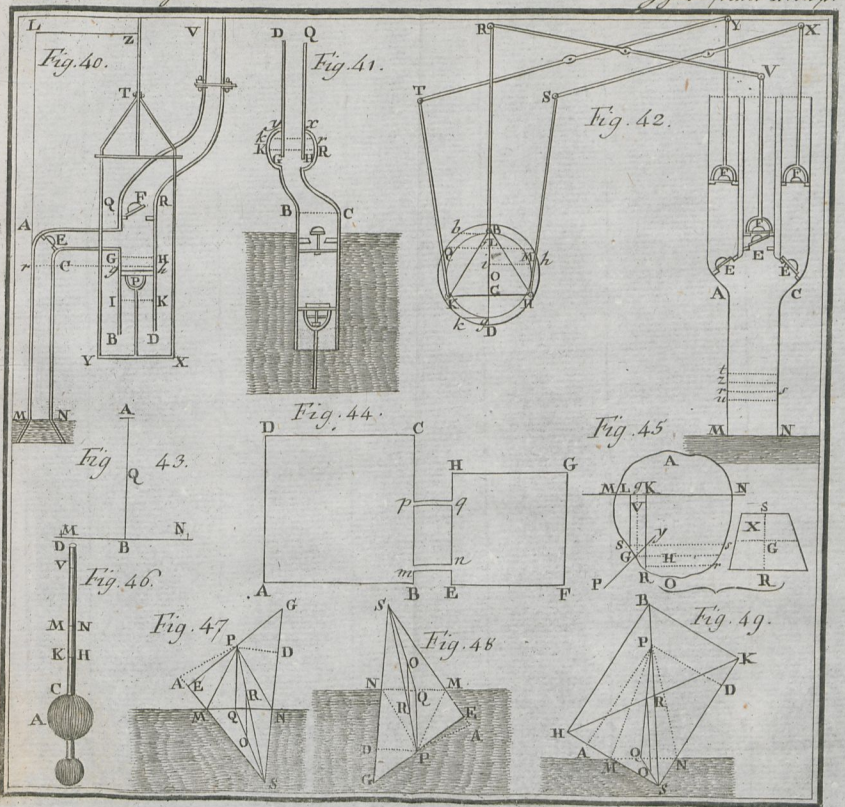
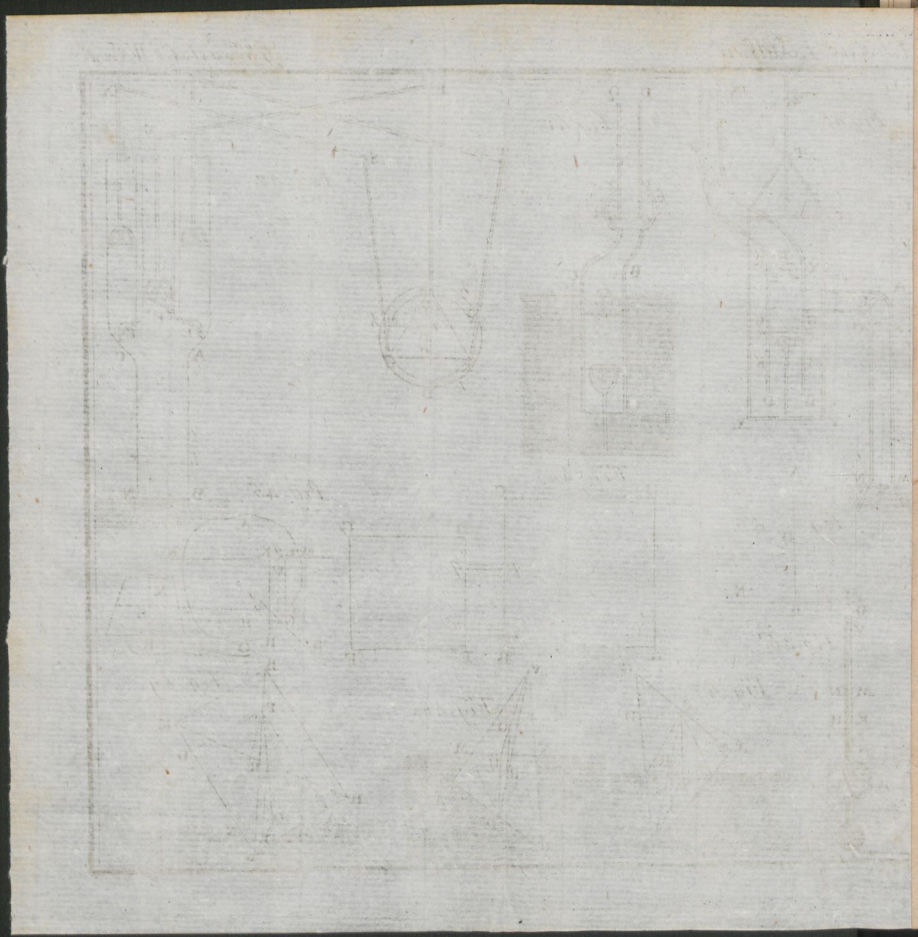


Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45
Fig. 46.
Fig. 47
Fig. 48
Fig. 49.



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0753-6

Fig. 51.

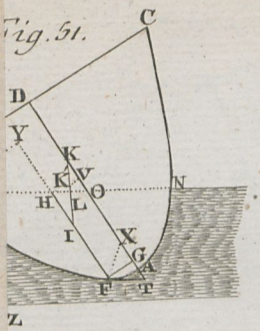
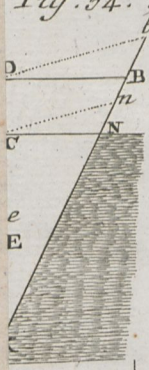


Fig. 54.



F

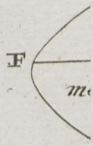
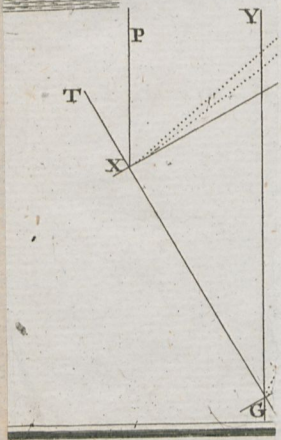
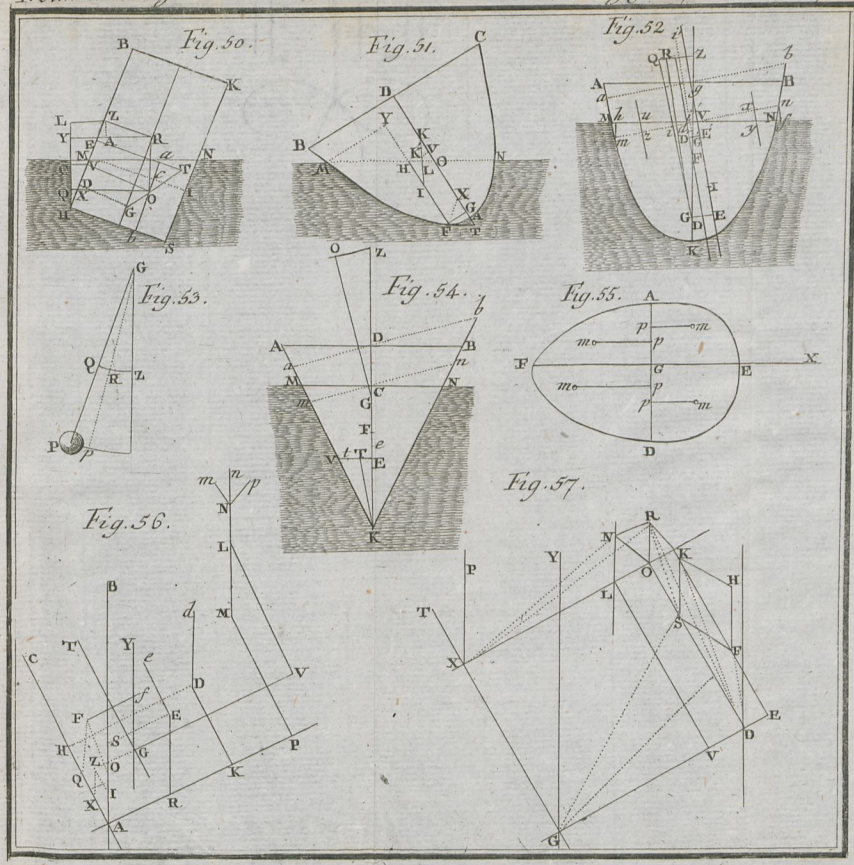


Fig. 57





Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0756-2

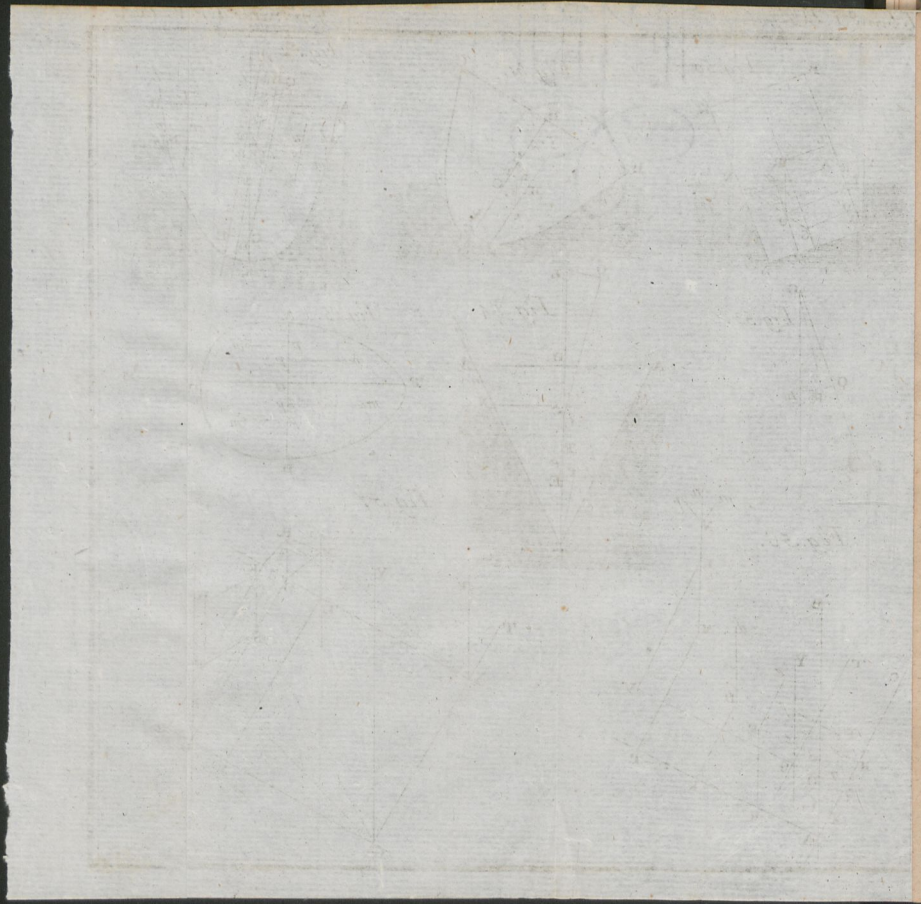
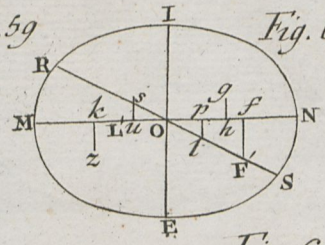


Fig. 59.



Fig. 60.



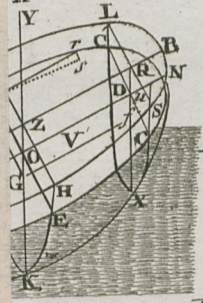


Fig. 63.

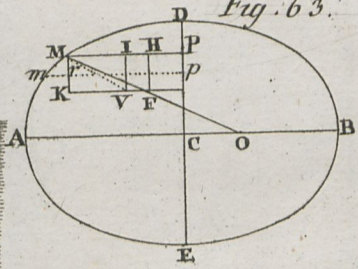


Fig. 66

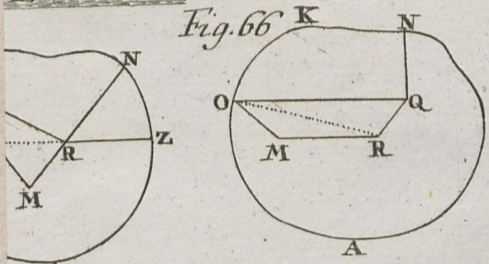
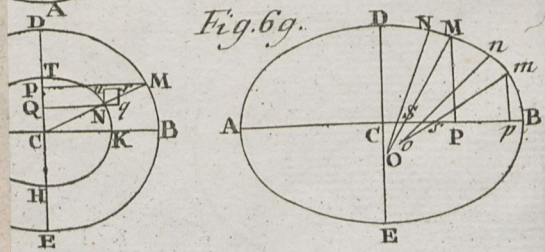
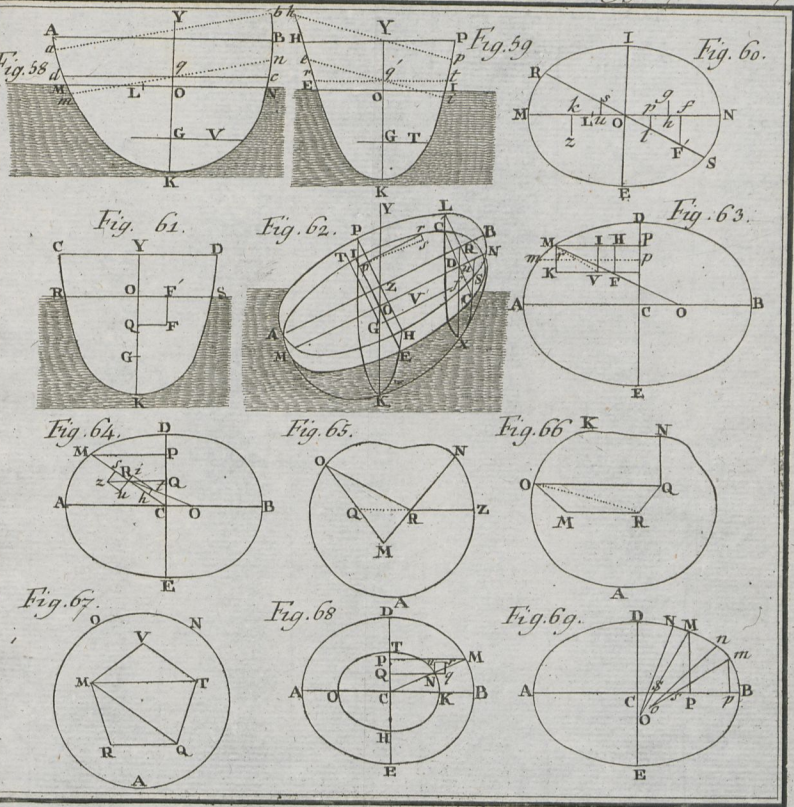
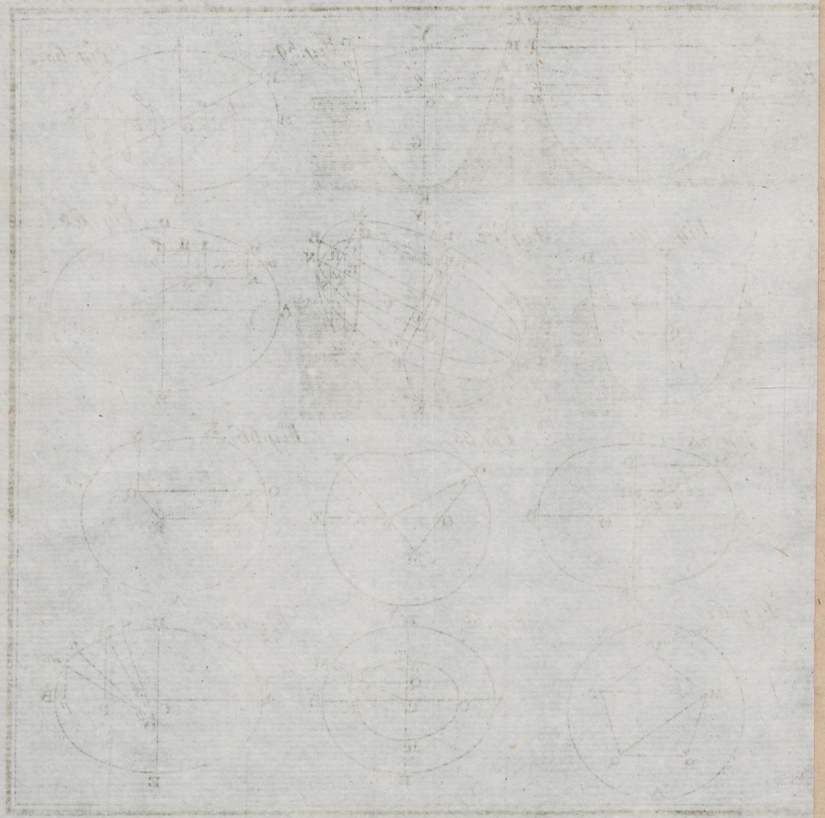


Fig. 69.





Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0760-4



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0761-0

Fig. 3.

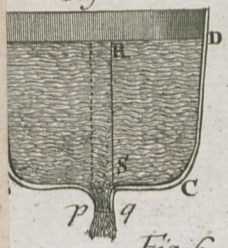


Fig. 4.

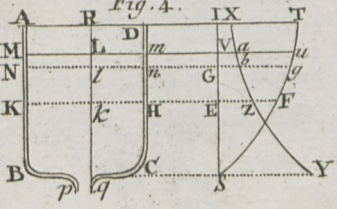


Fig. 6.

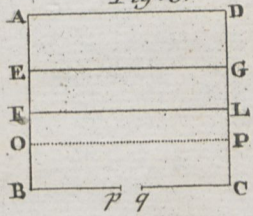


Fig. 7.

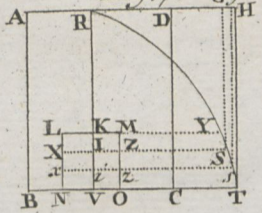


Fig. 10.

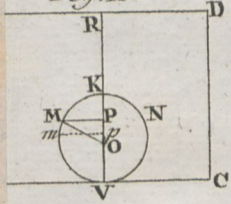


Fig. 11.

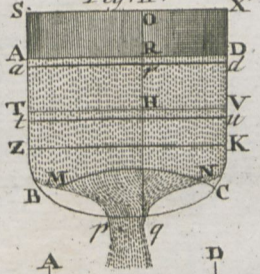


Fig. 14.

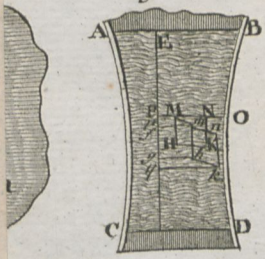


Fig. 15.



Fig. 1.

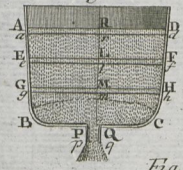


Fig. 2.

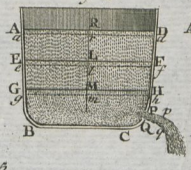


Fig. 3.

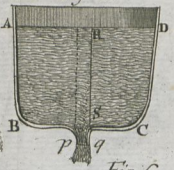


Fig. 4.

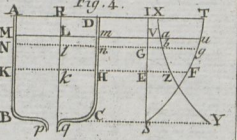


Fig. 5.

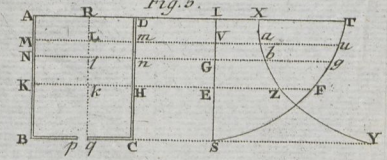


Fig. 6.

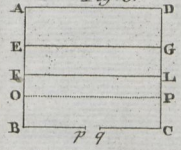


Fig. 7.

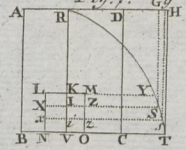


Fig. 8.

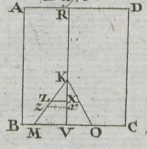


Fig. 9.

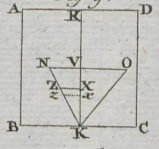


Fig. 10.

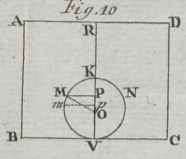


Fig. 11.

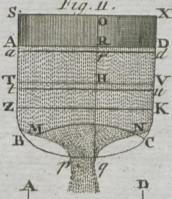


Fig. 12.

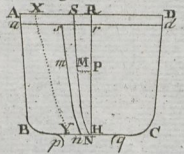


Fig. 13.

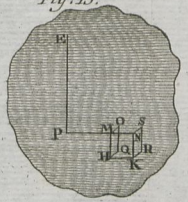


Fig. 14.

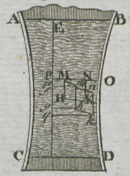
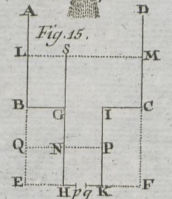
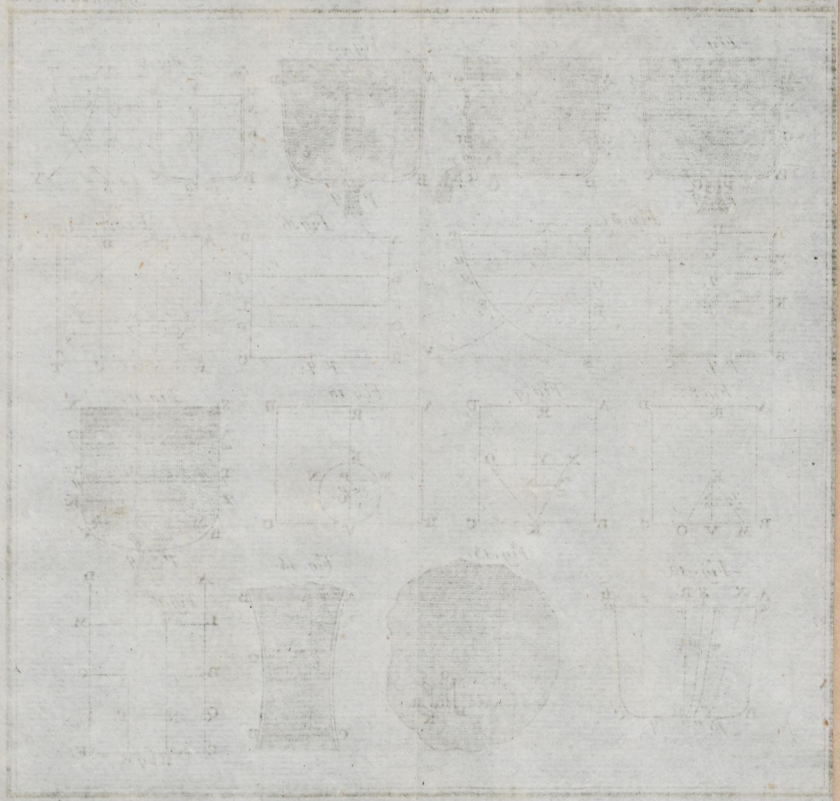


Fig. 15.





Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0765-2

Fig. 18.

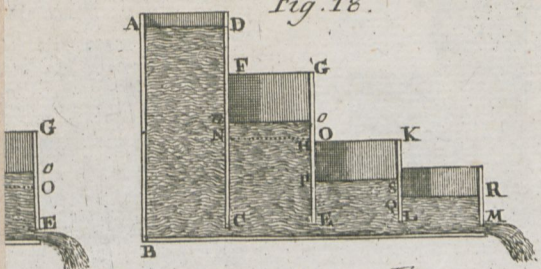


Fig. 21.

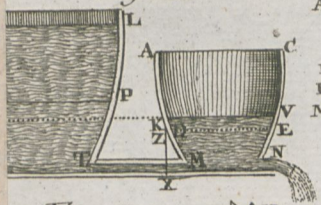


Fig. 22.

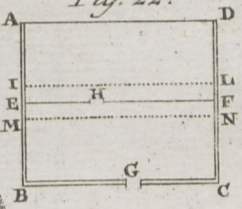


Fig. 25

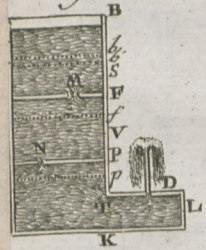


Fig. 27.

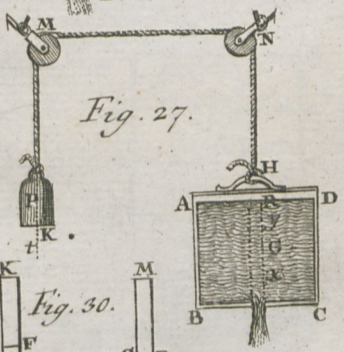


Fig. 29.

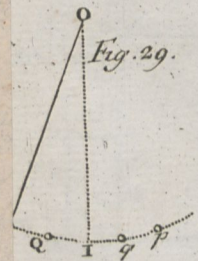
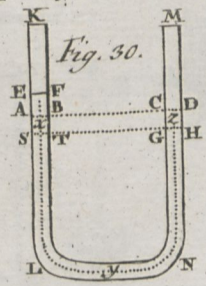
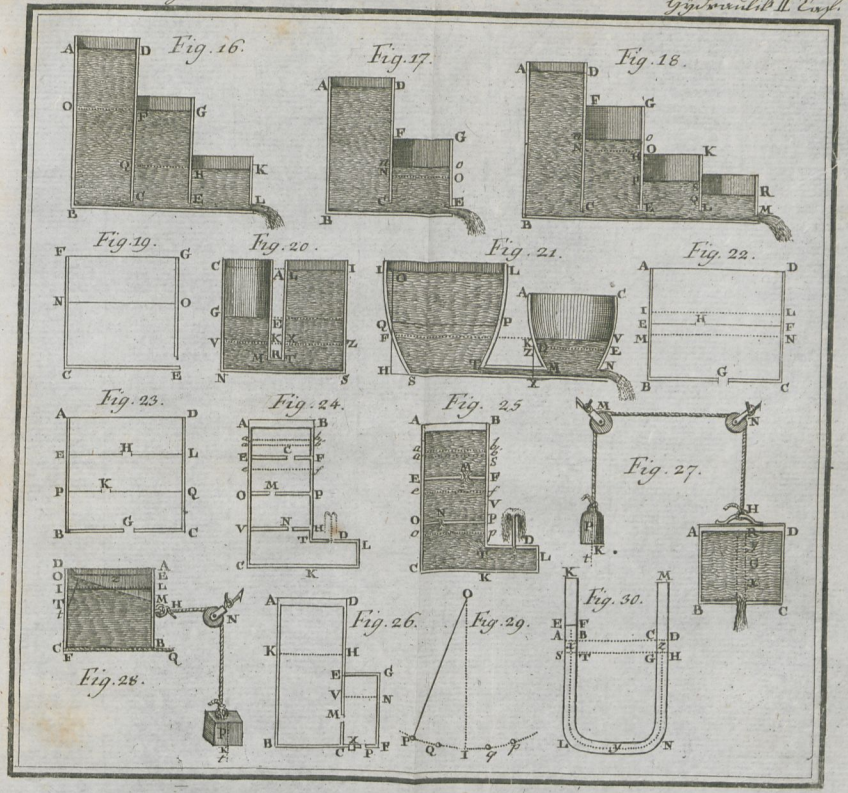


Fig. 30.



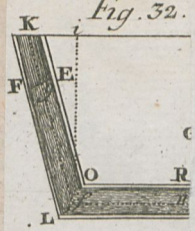


Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0768-9



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0769-8

Fig. 32.



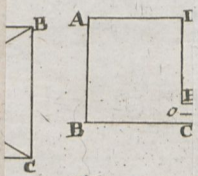


Fig. 39.



Fig. 43

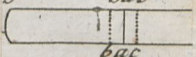
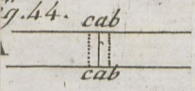
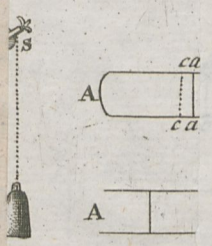
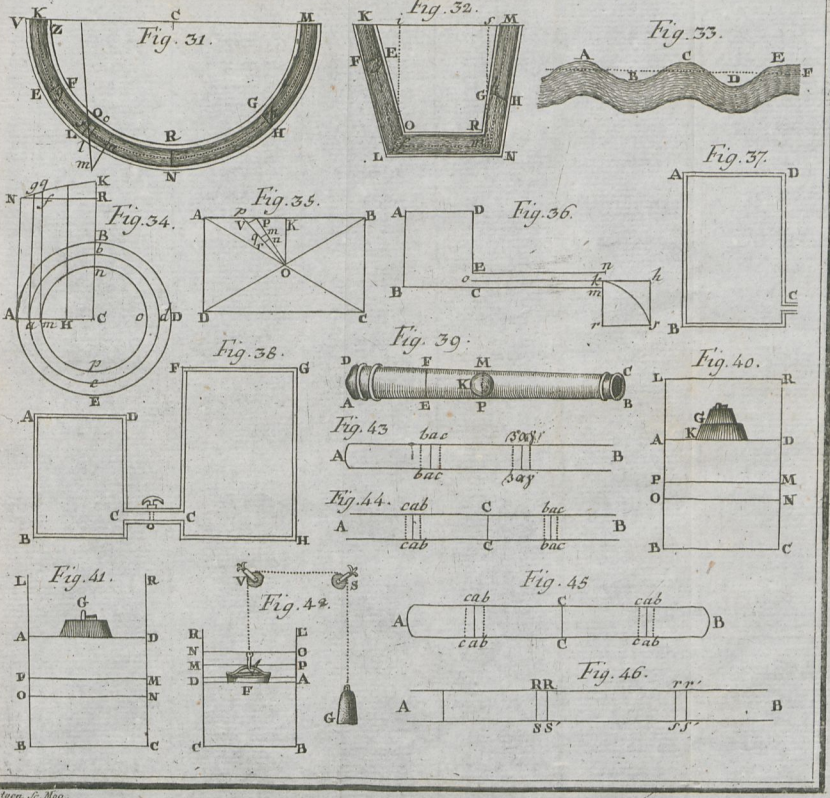


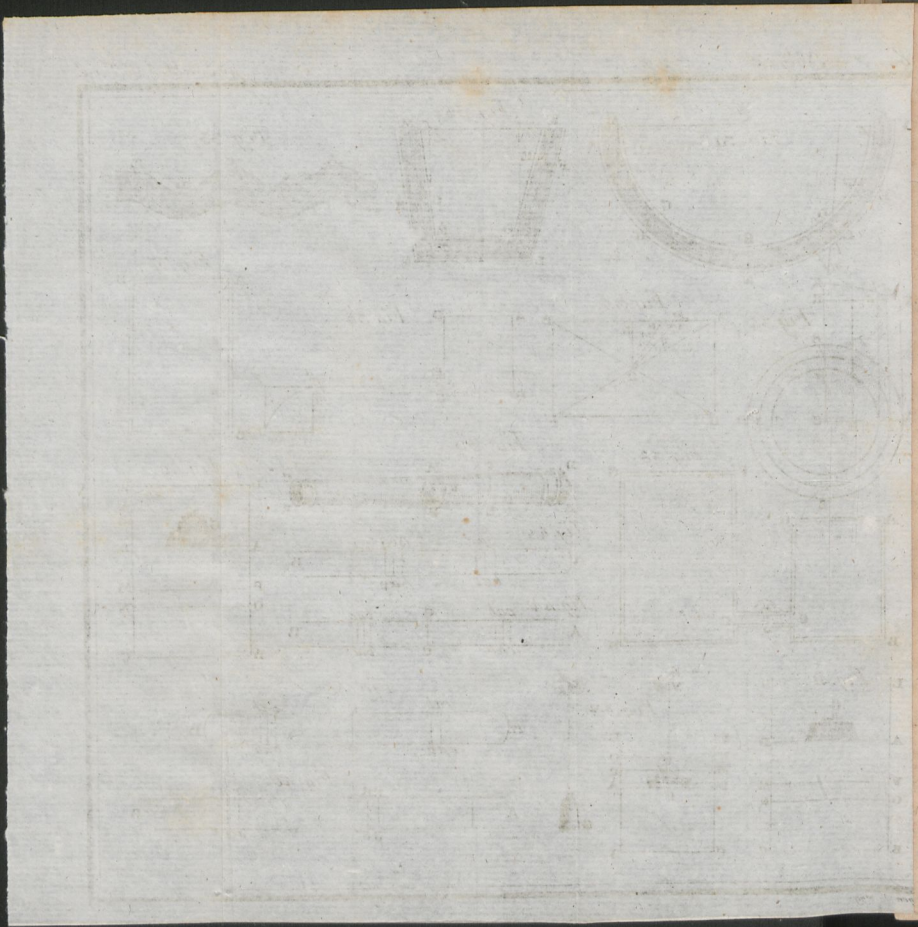
Fig. 44.







Contgen Sc. Mog.



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0773-6

Fig.



Fig



Fig. 5

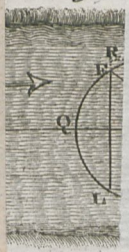


Fig. 47.

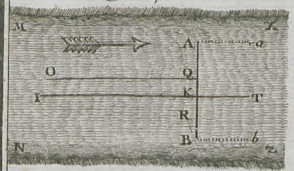


Fig. 48.

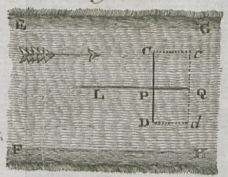


Fig. 49.

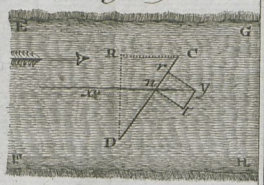


Fig. 50.

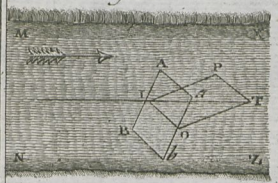


Fig. 51.

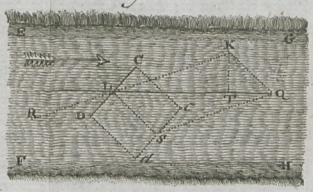


Fig. 52.

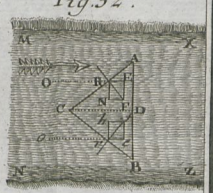


Fig. 53.

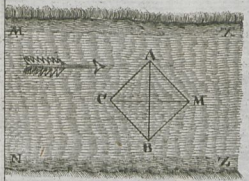


Fig. 54.

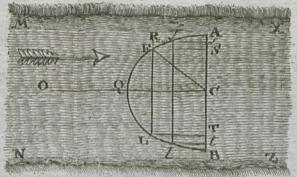
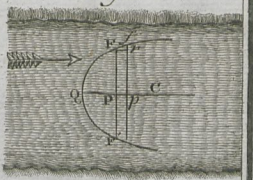
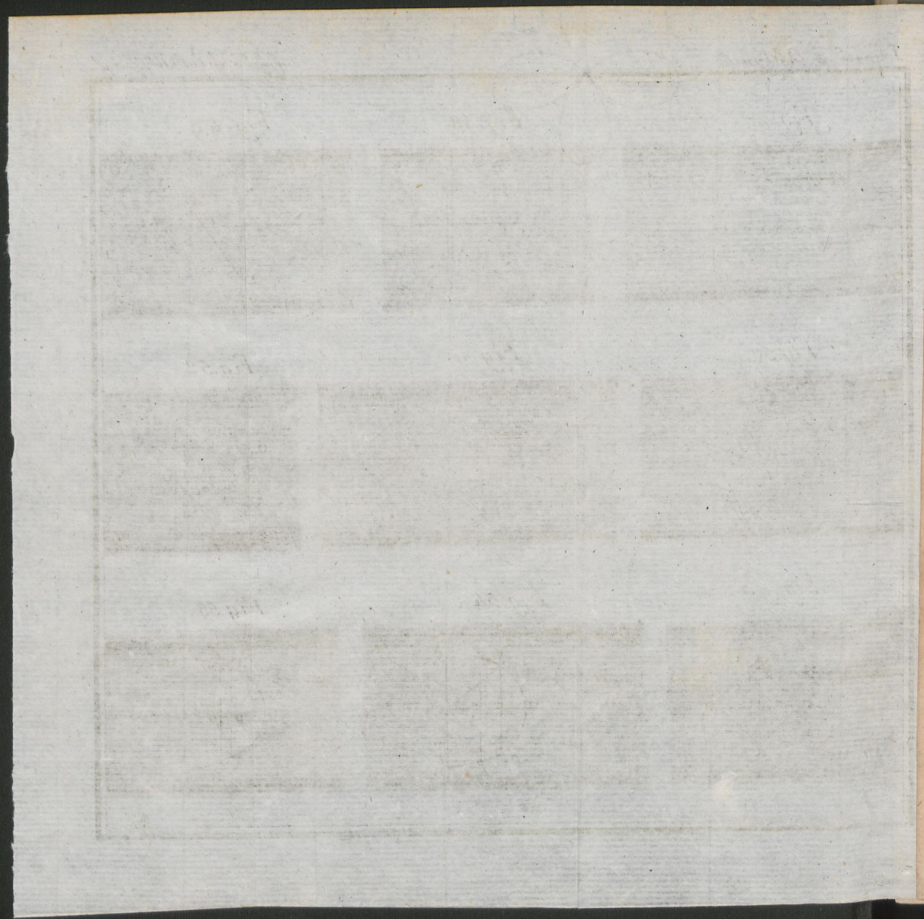


Fig. 55.





Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0777-9

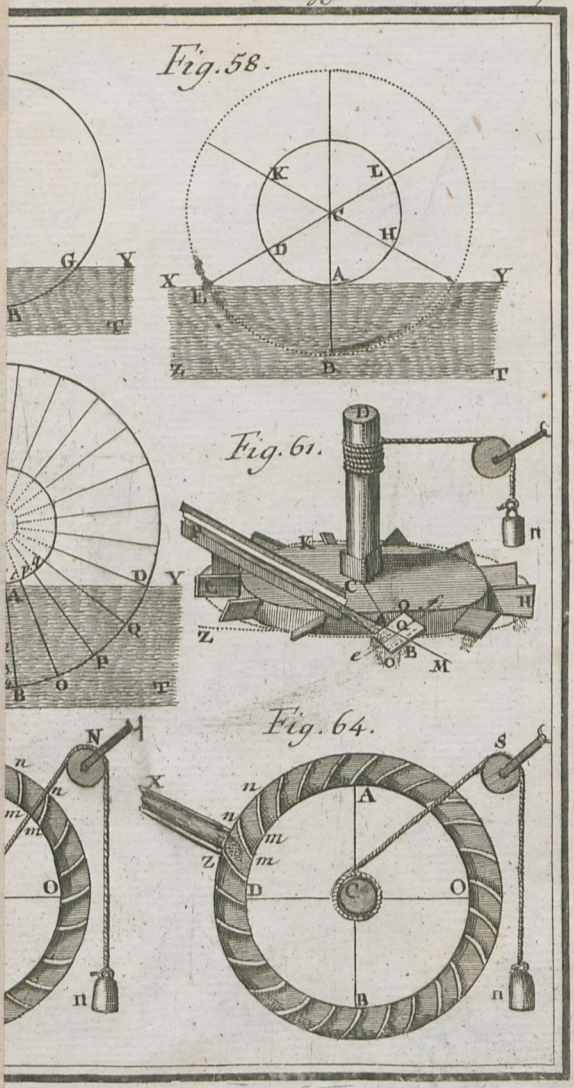
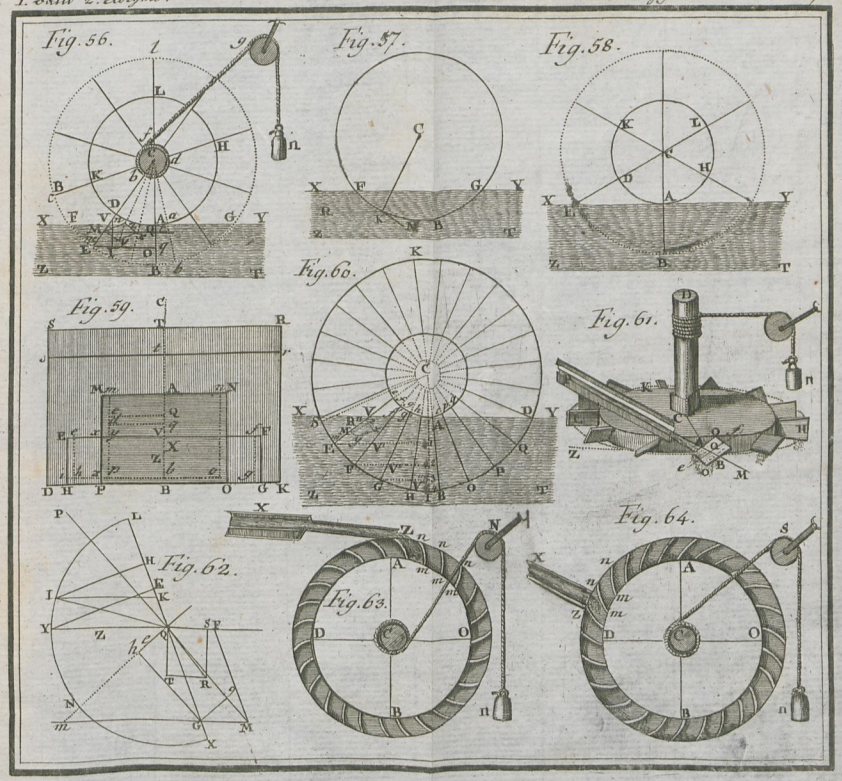
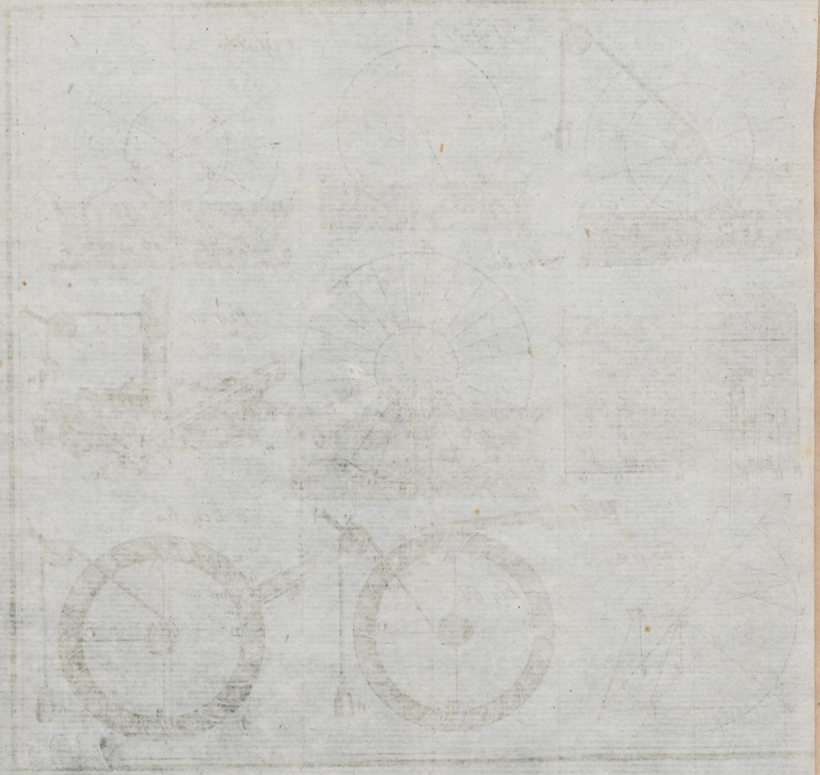


Fig. 58.
K
L
C
H
D
A
X
Y
E
Z
B
T
G
Y
B
T
Fig. 61.
D
n
K
C
H
Z
e
B
M
D
Y
A
Q
P
B
O
T
Fig. 64.
N
n
n
m
m
O
n
X
n
n
m
m
Z
A
S
D
C
O
B
n



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0780-5



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0781-1



Fig. 66.

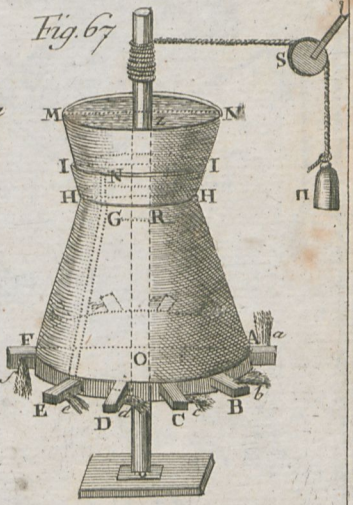


Fig. 67

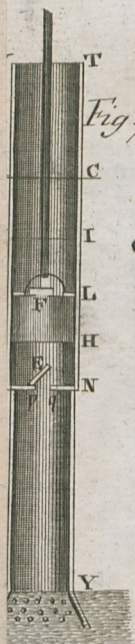


Fig. 70.

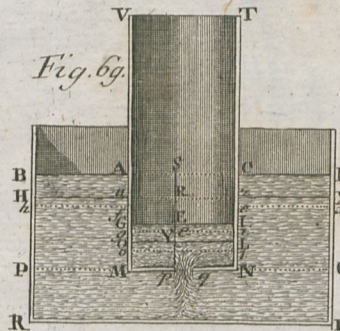
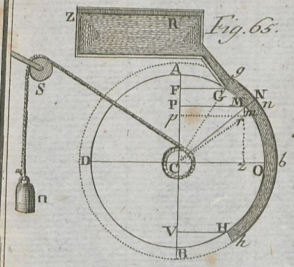
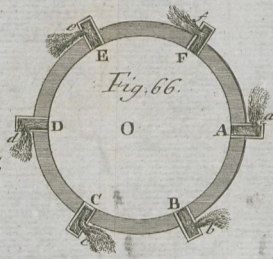
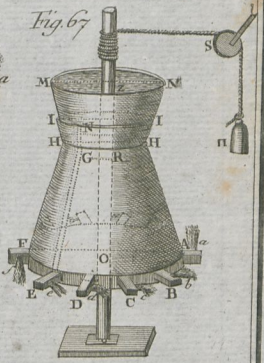
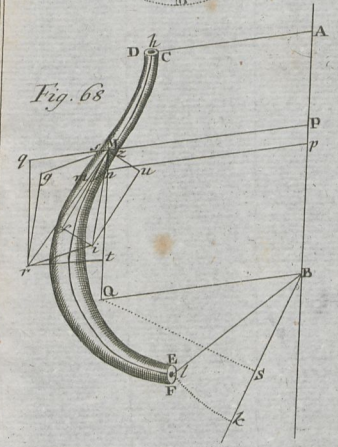


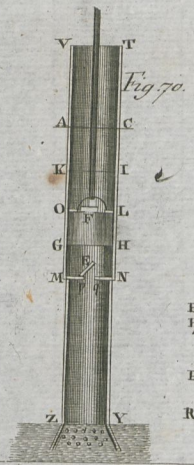
Fig. 69.

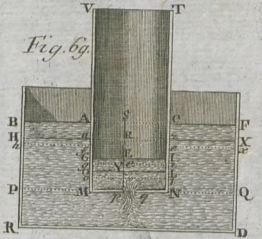




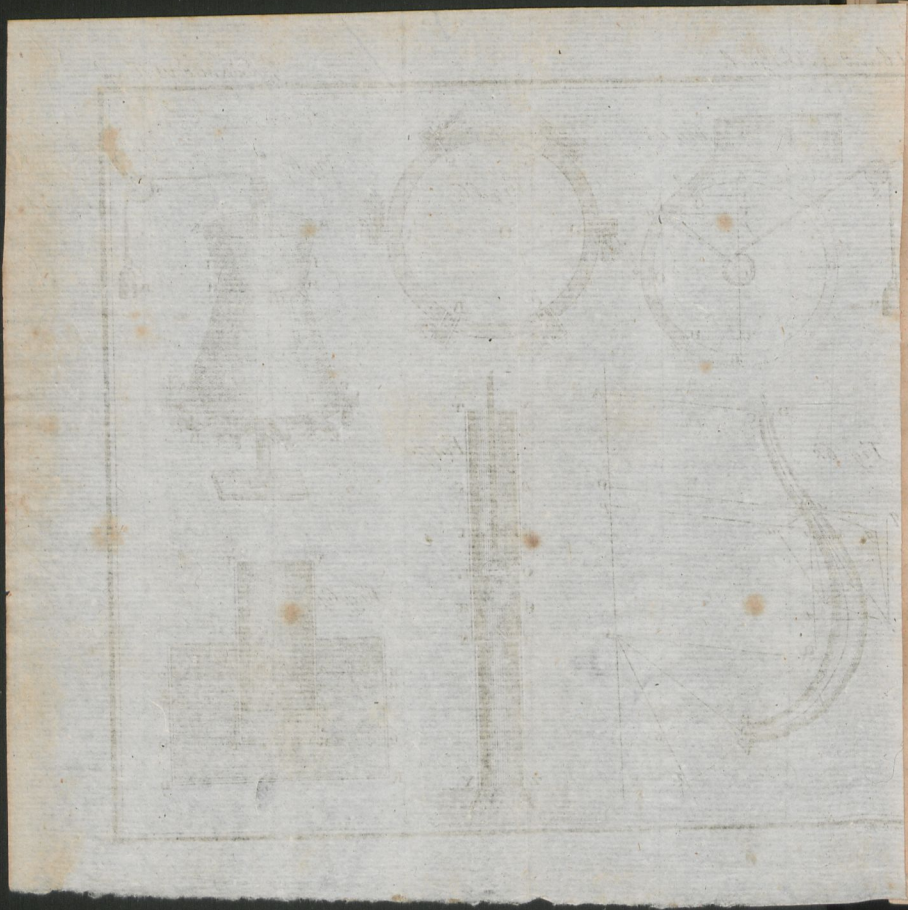








Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0784-7



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0785-3

Qa 1345
5
ULB Halle 3
006 210 163
U. C.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0787-4

t Bossüts

, der königl. Akademie der Architektur,
demie zu Petersburg, der königl. Akademie
ellschaft zu Utrecht Mitglied; Examinator
und Generalinspektor über die Maschinen
ke der königl. Gebäude.

e g r i f f

e r

y n a m i k

a ch

Erfahrung

ur Ausübung dieser Wissenschaft
mt sind

nd mit Anmerkungen und Zusätzen
gegeben

o n

an Langsdorf

und Salineninspektor zu Gerabronn,
wedischen und hochfürstl. hessischen patriot.
Akademie der Wissenschaften zu Erfurt,
n Gesellschaft zu Heidelberg und der
u Lausanne Mitglied

Band

er die

ydrodynamik

hält

pfertafeln

t am Main

hen Buchhandlung

92

Farbkarte #13
B.I.G.
Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black
Centimetres Inches
Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-646521-p0789-9
DFG