Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-707314-p0001-2

Diese Aufl. = Dr. 8 35 22/1
vh. 3. Aufl. 742 1.
Tod. = 466

Bibliothek

der

ehemaligen Klöster der Dominicaner

zu Halberstadt

—

1818.

IX, 62.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-707314-p0002-8

Rechenbuch

für

das gemeine Leben

besonders

zum Gebrauch derer

die sich

über die Gründe der Rechenkunst selbst zu belehren wünschen

von

Ernst Gottfried Fischer

Professor an dem Berlinisch-Köllnischen Gymnasium zu Berlin.

PHIL-BIBLIOTHEK der K. DOMGYMN. zu HALBERSTADT.

Erster Theil

welcher die einfachen Rechnungsarten in unbenannten, benannten und gebrochnen Zahlen enthält.

Berlin 1797,

bei Wilhelm Oehmigke dem Jüngern.

(Pränumerations-Preis 18 Gr.)

(Laden-Preis 1 Thl.)

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-707314-p0003-3

L 57.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-707314-p0004-9

Vorrede.

Der Vorsatz, ein Rechenbuch, wie das gegenwärtige zu schreiben, ist schon ziemlich alt, da ich seit mehr als zwanzig Jahren jungen Leuten von sehr verschiedenem Alter, Fähigkeiten, und Anzahl, fast ununterbrochen auch im Rechnen Unterricht gegeben habe. Als mir daher der Herr Verleger vor einigen Monaten den Vorschlag that, ein Rechenbuch für das gemeine Leben, d. h. ein solches Rechenbuch auszuarbeiten, das nicht ausschließend für den Kaufmann, für diese oder jene Art von Künstlern, für den Feldmesser, für den Baumeister, für den Bergmann rc. bestimmt seyn, sondern dasjenige enthalten sollte, was jedem Menschen in den allgemeinern Verhältnissen des Lebens, vom Rechnen nöthig ist, und was über-

haupt bei allen besondern Anwendungen der Rechenkunst zum Grunde liegen muß, so übernahm ich die Ausführung mit Vergnügen, weil unsere beiderseitigen Ideen sehr gut zusammentrafen. Nur wegen der mir zur Ausführung vergönnten Zeit, und wegen der Bogenzahl, die der Herr Verleger wünschte, äußerte ich gleich anfänglich Bedenklichkeiten. Da ich indessen über Plan und Methode, und selbst über die besondere Art der Ausführung jeder einzelnen Materie schon lange mit mir selbst einig war, so wollte ich versuchen, wie weit ich mich in Ansehung dieser Puncte, ohne Nachtheil des Ganzen, den Wünschen des Herrn Verlegers nähern könnte. Ich fand aber bei der wirklichen Ausarbeitung bald, daß es mir durchaus unmöglich werden würde, mich in den vorläufig bestimmten Gränzen zu erhalten. Ich schlug daher dem Herrn Verleger eine Abänderung des Plans vor, er gab meinen Gründen mit rühmlicher Bereitwilligkeit nach, und ich glaube, daß ich auch auf die Zufriedenheit der Käufer rechnen darf, da ich überzeugt bin, daß das Ganze zweckmäßiger ausfallen muß.

Ich

durchaus nie etwas von dem mechanischen Verfahren der Rechnungsart, zu der sie gehören, voraussetzen. Ueberdem würde es Mißverständniß meiner Idee seyn, wenn man das, was ich über die Vorausschickung des Mechanischen vor der Entwickelung der Gründe gesagt habe, auf die Rechenkunst, oder Abschnitte derselben im Ganzen ausdehnen wollte. Nur bei dem Vortrage der einzelnen Sätze halte ich die oben angegebene Ordnung für die zweckmäßigste.

Mathematiker werden leicht bemerken, daß ich das Wort Grundsatz hier nicht ganz in der scharfbestimmten Bedeutung gebraucht habe, in der es der Mathematiker braucht, indem einige entweder bloße Zusätze zu wirklichen Grundsätzen, andere aber wahre Lehrsätze sind. Ich bin hier nicht so wohl der Schulsprache der Mathematiker, als dem gemeinen Sprachgebrauch gefolgt, wo Jedermann, auch selbst in wissenschaftlichen Dingen, unbezweifelte Sätze, die bei einer Untersuchung zum

Grun-

Grunde gelegt werden müssen, **Grundsätze** nennt. Mißbilligt dies Jemand, so will ich nicht mit ihm darüber streiten: indessen schien es mir zweckwidrig, in einem Buch, dem ich unmöglich das äußere wissenschaftliche Gewand der Mathematik geben durfte, Kunstwörter, die nur das Fachwerk der Wissenschaft betreffen, und die mich zu Erörterungen genöthigt hätten, die für meinen Zweck entbehrlich waren, zu brauchen. Dagegen giebt es andere Kunstwörter, die nicht das Fachwerk, sondern die Sachen selbst betreffen, und von diesen muß man freilich unvermeidlich, auch in der praktischen Rechenkunst, so wie dies schon von jeher geschehen ist, Gebrauch machen. In Rücksicht dieser Kunstwörter habe ich noch etwas auf dem Herzen, was ich der Aufmerksamkeit und Prüfung des Lesers empfehle. Eine Wissenschaft, die ganz und gar nicht ausschließendes Eigenthum des Gelehrten ist, sondern worin jeder Mensch, ohne Ausnahme, unterrichtet seyn sollte, sollte unstreitig lauter deutsche Kunstwörter haben. Allein ich halte

es

es für ein vergebliches Unternehmen, die ganze Kunstsprache einer Wissenschaft auf einmal in eine andere Sprache übertragen zu wollen. Man hat öfters schon diesen Versuch gemacht, er ist aber allezeit, aus leicht zu errathenden Gründen, mißlungen. Gute Kunstwörter zu machen, ist nicht leicht, und die leichteste Art, die in einer etymologischen Uebersetzung des fremden Kunstworts besteht, ist in der Regel die unvollkommenste. Der Grund ist nicht schwer einzusehen. Den hergebrachten Kunstwörtern fehlt es fast ohne Ausnahme an logischer Schärfe und Richtigkeit, weil man gewöhnlich, so wie eine Wissenschaft sich erweitert, genöthigt ist, allmählig mehr Sinn in die Kunstwörter hinein zu legen, als etymologisch in ihnen liegt, und nicht selten sind sie, weil es ganz an einem eigentlichen Worte fehlte, ein wahres quid pro quo. Aber soll man denn dergleichen Fehler auch in andere Sprachen übertragen? soll man z. B. Multiplikation und Division, durch Vervielfältigung und Theilung übersetzen? da diese Wörter schlechterdings nur für ganze

Zahlen

Zahlen passend sind, für Brüche aber allen Sinn verlieren? Ich habe gar nichts gegen den Gebrauch dieser Wörter an sich, denn sie sind in unzähligen Fällen die bestimmtesten, die man brauchen kann: nur als Kunstwörter zur Bezeichnung des allgemeinen Begriffs beider Rechnungsarten taugen sie, nach meiner Meinung, nichts. Ich habe versucht, sie anders zu verdeutschen, durch **Zusammensetzen** und **Zersetzen**. Bei der Benennung der Multipliplikation leitete mich ein sehr bekannter Sprachgebrauch der Mathematiker, den man vielleicht selbst schon in Rechenbüchern findet, nach welchen man Zahlen, die durch Multiplikation ganzer Zahlen entstehen, **zusammengesetzte** Zahlen, desgleichen Verhältnisse, die durch Multiplikationen der gleichnamigen Glieder anderer Verhältnisse entstehn, **zusammengesetzte** Verhältnisse nennt. Und die Benennung der Division ist eine Folge von jener. Dennoch wird man finden, daß ich mich im Zusammenhang des Vortrags beinahe stets der hergebrachten lateinischen Wörter bedient habe,

weil

weil nun einmal fast Jedermann an dieselben gewöhnt ist. Ich denke, wenn meine Verdeutschungen gut sind, so wird man allmälig anfangen, sie zu brauchen, wenn ich es auch nicht selbst thue; sind sie aber nicht gut, so habe ich wohl gethan, mich ihrer so selten als möglich zu bedienen.

Ich darf hier eine wichtige Unterstützung nicht unerwähnt lassen, die ich bei der Ausarbeitung dieses Buchs, durch die Gefälligkeit meines Freundes und Collegen, des Herrn Conrector Seidel's gehabt habe, indem derselbe die gewiß nicht kleine und angenehme Arbeit übernommen, die zahlreichen Uebungsbeispiele aufzusetzen und zu berechnen. Er hat diese Arbeit mit der ihm eigenen Pünktlichkeit und unermüdeten Gedult ausgeführt. Jedes Exempel ist mehr als einmal gerechnet, und alles im Drucke collationirt worden, so daß ich hoffen kann, von dieser Seite das Buch ziemlich fehlerfrei zu liefern. Braucht Jemand einen noch größern Vorrath von Uebungsbeispielen,

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-707314-p0011-7

len, als hier geliefert worden, so empfehle ich die sehr zweckmäßig eingerichteten Junkerschen Exempeltafeln, die sich sehr gut an den Plan dieses Rechenbuchs anschließen.

Erster

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-707314-p0012-3

Erster Theil.

Von den einfachen Rechnungsarten.

Erster Abschnitt.

Vom Numeriren.

§. 1.

Das Numeriren ist eine ähnliche Vorübung zum Rechnen, als das Buchstabiren zum Lesen. Und so wie bisweilen selbst erwachsene Personen bloß deswegen schlecht lesen, weil sie nicht richtig buchstabiren gelernt haben, eben so findet mancher bloß deswegen beym Rechnen Schwierigkeit, weil er das Numeriren vernachläßigt hat. Ich rathe daher jedem, der dies Rechenbuch brauchen will, sich die kleine Mühe, diesen Abschnitt mit Aufmerksamkeit durch zu lesen, nicht verdrießen zu lassen.

§. 2.

Das Numeriren *) bestehet aus einer doppelten Vorübung:

1) geschriebene Zahlen richtig zu lesen, und
2) umgekehrt, ausgesprochene Zahlen richtig zu schreiben.

Der Zweck des Numerirens ist also die Begriffe von den Zahlen und Zahlzeichen zur hellsten Deutlichkeit zu bringen, ohne welche beym Rechnen überhaupt gar keine deutlichen Begriffe statt finden. Maschinenmäßige Fertigkeit kann man indessen gar wohl ohne deutliche Begriffe erlangen, und eben dies führt sehr oft junge und erwachsene Leute irre, daß sie jene Vorübungen für unwichtig halten, ohne zu bedenken, daß ohne deutliche Begriffe nirgends Gründlichkeit statt findet.

*) Numeriren ist das lateinische Wort numerare, zählen.

Das Aussprechen geschriebener Zahlen.

§. 3.

Wer eine kleine Probe anstellen will, ob er von Zahlen **deutliche** Begriffe habe, der frage sich, ob er den Unterschied zwischen **Zahlen** und **Ziffern** bestimmt und richtig angeben könne. Die Römer, die Griechen, und fast alle alte Völker brauchten ganz andere **Ziffern** als wir, aber

wer-

wer wollte wohl sagen, daß sie **andere Zahlen** gehabt hätten, oder nur hätten haben können, als wir? **Ziffern** giebt es jederzeit nur eine kleine bestimmte Anzahl. Wer wollte hingegen behaupten, daß es auch von **Zahlen** nur eine bestimmte Anzahl gebe? **Zahlen** sind nichts als Mengen von einzeln Dingen (Einheiten), die sich der Verstand denkt. **Ziffern** sind die willkürlichen Figuren, womit man die Zahlen dem Auge sichtbar macht. Ziffern sind bloße Zeichen, Zahlen sind das, was durch sie bezeichnet wird. Die Figur 7 wird Niemand für sieben wirkliche Dinge annehmen wollen, also das Zeichen von dem Bezeichneten sehr wohl unterscheiden. Auf die Frage, wie Zahlen und Ziffern verschieden sind, geben Kinder sehr oft die unrichtige Antwort, daß die Ziffern nur bis neune gingen, von zehn aber sich die Zahlen anfingen. Die Wörter **Ziffern** *) und **Zahlzeichen** bedeuten völlig einerlei.

*) So wie wir unsere gegenwärtige Zahlzeichen, so weit wir wissen, von den Arabern erhalten haben, so stammt auch das Wort Ziffer ursprünglich aus der arabischen Sprache, hat aber durch Gebrauch und Endsylbe im Deutschen volles Bürgerrecht erhalten.

§. 4.

Wir schreiben bekanntlich gegenwärtig unsere Zahlen mit folgenden zehn Figuren.

0	Null	5	Fünf
1	Eins	6	Sechs
2	Zwei	7	Sieben
3	Drei	8	Acht
4	Vier	9	Neun

bey deren jeder wir uns eine ganz bestimmte und unveränderliche Menge von einzelnen Dingen, oder **Einheiten** denken.

Das Kunststück aber, wodurch wir in den Stand gesetzt werden, jede auch noch so große Zahl, welche die alten Völker mit ihren Ziffern entweder gar nicht, oder nicht ohne Zweideutigkeit schreiben konnten, mit unsern zehn Zahlzeichen kurz und bestimmt zu schreiben, besteht eigentlich darin, daß z. B. die fünf Einheiten, die wir bey der Figur 5 denken, verschiedene nach einem sehr einfachen Gesetz bestimmbare Werthe haben können.

Dies Gesetz ist es besonders, was jeder Leser in seinem Kopfe zur bestimmtesten Deutlichkeit zu bringen suchen muß. Dies Gesetz ist folgendes:

Wenn eine Reihe Ziffern neben einander geschrieben sind, z. B.

3 542 575 035

so zeigt zwar jede Ziffer, z. B. 5, sie stehe wo sie wolle, nichts mehr und nichts weni-

niger als fünf Einheiten an, aber diese Einheiten selbst, sind in jeder Stelle von anderem Werthe, und zwar so, daß sie in der letzten Stelle rechter Hand Einer sind, d. h. einzelne Dinge bedeuten, in jeder folgenden Stelle aber ganze Mengen von Einheiten, und zwar in jeder Stelle zehnmal mehr, als in der nächsten Stelle rechter Hand bedeuten.

§. 5.

Zur Bezeichnung dieser verschiedenen Werthe der Einheiten, hat sich in der deutschen Sprache eine sehr regelmäßige Folge von Wörtern gebildet. Wenn wir nämlich die Stellen von der rechten Seite gegen die linke zu zählen, so nennen wir

eine Einheit der		
1sten Stelle		Eins
2 —	—	Zehn
3 —	—	Hundert
4 —	—	ein Tausend
5 —	—	zehn —
6 —	—	hundert —
7 —	—	eine Million
8 —	—	zehn —
9 —	—	hundert —
10 —	—	ein tausend Millionen
11 —	—	zehn — —
12 —	—	hundert — —

kommen noch mehr Stellen vor, so sind die Benennungen völlig so, als von der 7ten bis 12ten Stelle, nur daß statt des Worts **Million**, nach und nach die Wörter **Billion**, **Trillion**, **Quadrillion**, **Quinquillion** u. s. f. nach der Reihe gebraucht werden.

Die regelmäßige Folge aller obigen Benennungen, besonders, daß nach drei Stellen immer die Wörter Eins, Zehn, Hundert, nur mit Zusätzen wiederkehren, verdient, daß der Leser einen Augenblick dabey verweile, um sie mit völliger Deutlichkeit zu übersehen.

Anmerk. Die Wörter Million, Billion, Trillion ꝛc. sind lateinischen Ursprungs, und könnten, wenn es nöthig wäre, aus den lateinischen Zahlenbenennungen ohne Ende fortgesetzt werden, so daß es uns wirklich zu keiner Zahl, wie groß sie auch immer seyn mag, an Wörtern fehlen kann, um sie ganz bestimmt auszusprechen. Allein es wird hinreichend seyn, wenn man von diesen Benennungen nur zwei, oder drei behält. Denn schon eine Billion begreift eine weit größere Menge von einzelnen Dingen in sich, als man sich gemeiniglich vorstellt. (Man vergleiche die Uebungsbeispiele zum Aussprechen großer Zahlen, am Ende des folgenden Paragraphen.) Uebrigens wird man die Regelmäßigkeit, mit der die Werthe dieser großen Einheiten zunehmen, leicht bemerken.

1 Billion, ist eine Million von Millionen.
1 Trillion, ist eine Million von Billionen.
1 Quadrillion, ist eine Million von Trillionen.
1 Quinquillion, ist eine Million von Quadrillionen u. s. f.

§. 6.

§. 6.

Um daher jede noch so große Zahl richtig lesen zu können, ist bloß nöthig, daß man sich übe, jede **drei** neben einander geschriebene Ziffern, sie mögen mit Nullen untermengt seyn, wie sie wollen, richtig zu lesen, als: 731; 906; 800; 079; 004; u. d. g. Man thut hierbei wohl, wenn man sich die kleine Mühe nicht verdrießen läßt, bei mehreren Zahlen sich selbst Rechenschaft zu geben, wieviel eigentlich der Werth jeder einzelnen Ziffer sey; z. B. daß bei der ersten der obigen Zahlen

1, **ein** einzelnes Ding,
3, **drei** Zehner, d. i. dreißig, und
7, **sieben** Hundert,

desgleichen bei der letzten,

4, **vier** einzelne Dinge
0, **keinen** Zehner
0, **kein** Hundert

bedeute, u. d. g. m.

Hat man erst diese Fertigkeit erlangt, jede dreiziffrige Zahl lesen zu können, so hat auch das lesen größerer Zahlen keine Schwierigkeit, indem man sie **von der rechten Seite an**, in Klassen von drei Ziffern theilt, die letzte Klasse rechter Hand ohne Zusatz, die vorletzte aber mit dem Zusatz Tausend lieset. z. B. 43 083

d. i. 43 Tausend
und 083.

Sind mehr als sechs Ziffern da, so wird, was über sechs Ziffern da ist, gerade so gelesen, als stände es allein da, nur mit dem Zusatz Million, z. B. 153 020 481 700
153 tausend, und 020 Millionen,
481 tausend, und 700.

Wären noch mehr als 12 Ziffern da, so werden jede sechse, die vor der 12ten Stelle vorhergehen, immer wieder gerade so gelesen, als ständen sie allein; nur wird von der 13ten bis 18ten Stelle das Wort Billion, von der 19 — 24sten Stelle das Wort Trillion u. s. f. angehängt. Bei sehr großen Zahlen kann man anfänglich Striche nach jeder sechsten Ziffer zu Hülfe nehmen; z. B.
30|005 070|689 724|308 007
d. i.
30 Trillionen
005 tausend, u. 070 Billionen
689 tausend, u. 724 Millionen
308 tausend, u. 007.

Anmerk. Es ist nicht gut, daß mehrere Verfasser neuer Rechenbücher angefangen haben, zur Erleichterung des Numerirens jede Klasse von drei Ziffern durch ein Komma von den übrigen abzusondern. Dies kann große Mißverständnisse veranlassen, und hat sie schon wirklich hin und wieder veranlaßt, weil bei den Mathematikern ein Komma, das zwischen Ziffern gesetzt wird, schon seit langer Zeit eine andere festgesetzte Bedeutung hat, die wir in dem Abschnitt von den Decimalbrüchen erklären werden. Man gewöhne sich also nicht daran, sondern lasse lieber nach jeden

jeden drei Ziffern einen etwas größeren Zwischenraum, z. B.

33 742 060 073

welches gewiß eben so leicht zu lesen ist, als ob Kommata dazwischen ständen.

Einige Beispiele zur Uebung im Lesen großer Zahlen.

1) Wer eine Billion zählen wollte, und zu dem Zweck in jeder Stunde 100 zählte, und an jedem Tage 12 Stunden anwendete, würde 38052 Jahre lang zählen müssen.

2) 1 000 000 000 000 Pfennige betragen
83 333 333 333 Gr. 4 Pf.,
oder 3 472 222 222 Thlr. 5 Gr. 4 Pf.
d. i. mehr als in irgend einem Lande Geld vorhanden ist.

3) Die Erde kommt der Gestalt einer Kugel sehr nahe, deren Durchmesser 6 544 040 Toisen, oder 39 264 240 franz. Fuß beträgt.

4) Nach den Berechnungen der Astronomen sind die mittlern Entfernungen der Planeten von der Sonne folgende:

Merkur	=	8 456 001	geogr.	Meilen
Venus	= =	15 799 890	—	—
Erde	= =	21 838 810	—	—
Mars	=	33 282 558	—	—
Jupiter	= =	113 607 258	—	—

Saturn	=	208 373 079	geogr.	Meilen
Uranus	= =	397 796 432	—	—

Das Schreiben ausgesprochener Zahlen.

§. 7.

Diese Uebung ist nicht schwieriger als die vorige, wenn man sie in eben der Ordnung vornimmt.

Man übe sich zuerst, jede dreiziffrige Zahl richtig aufzuschreiben; als: dreihundert acht und zwanzig, 328; siebenhundert und neun, 709; vierhundert, 400; u. d. g. und bemerke dabei, daß selbst jede an sich nur zwei- oder einziffrige Zahl, dreiziffrig geschrieben werden kann, wenn man ihr eine oder zwei Nullen vorsetzt; als: acht und siebenzig, 078; neun, 009; u. d. g.

Ist man hiermit ins Klare, so übe man sich, Zahlen, die Tausende aber keine Millionen enthalten, aufzuschreiben, und zwar allemal sechsziffrig, indem man sowohl die Tausende, als das Uebrige nach dem vorigen dreiziffrig schreibt, als:

3	tausend und	5	003 005
17	—	u. 800	017 800
400	—	u. 90	400 090
712	—	u. 832	712 832

Es versteht sich von selbst, daß die hier ganz zu Anfang der Zahlen zugesetzten Nullen wegbleiben können, sobald keine Million oder überhaupt höhere Einheiten vorkommen.

Kann

Kann man erst jede Zahl unter einer Million schreiben, so hat es mit den größern gar keine Schwierigkeit: denn kommen Millionen vor, so nimmt man die ausgesprochene Anzahl derselben, und schreibt solche, gerade wie im vorhergehenden, sechsziffrig hin, und füge dann die übrigen auch sechsziffrig bei. Kommen Billionen, so werden erst diese, dann die Millionen, dann die übrigen, jedes sechsziffrig hingeschrieben, nur daß man auch hier die Nullen ganz zu Anfang der Zahl immer weglassen darf. Die ausgesprochene Zahl sey z. B. 19 tausend und 37 Millionen, 614 tausend und 10; so schreibt man erst die Anzahl der Millionen, nemlich: 19 tausend und 37 sechsziffrig hin, also 019 037; dann hängt man die übrigen, nemlich 614 tausend und 10, auch sechsziffrig geschrieben an, so erhält man mit Weglassung der allerersten Null

19 037 614 010..

Beispiele zur Uebung im Zahlenschreiben.

5) Der Durchmesser der Sonne ist beinahe **hundert und dreizehnmal**, ihre Oberfläche **zwölftausend, siebenhundert und zwei und zwanzigmal**, und ihr ganzer körperlicher Inhalt **eine Million, vierhundert vier und dreißig tausend, achthundert sieben und sechzigmal** größer, als eben diese Dinge bei der Erde sind.

Der

6) Der Umkreis der Erde hält **fünftausend vierhundert** geographische Meilen, daraus läßt sich durch Hülfe der Geometrie berechnen, daß ihr Durchmesser beinahe **eintausend, siebenhundert und neunzehn** geographische Meilen, ihre ganze Oberfläche **neun Millionen, zweihundert ein und achtzig tausend, neun hundert sechs und funfzig** Quadratmeilen, und der ganze körperliche Raum, den sie füllt, **zweitausend, sechshundert und neun und funfzig Millionen, und vier und siebenzig tausend** Kubikmeilen enthält.

§. 8.

Was Anfängern bei allen dergleichen Uebungen Schwierigkeiten macht, sind die Nullen. Allein diese Schwierigkeit wird sich leicht heben, wenn man sich nur die eigentliche Bestimmung der Null recht deutlich macht. Die Nullen sind nemlich bloß bestimmt, diejenigen Stellen auszufüllen, welche von andern Ziffern unbesetzt bleiben. Dies ist nothwendig, weil sonst, wenn man eine solche Null weglassen wollte, der Werth aller auf der linken Seite dieser Stelle befindlichen Ziffern verfälscht werden würde. Denn wollte ich z. B. in der Zahl **sieben und vierzig tausend, und sechs und funfzig**, in der **keine Hunderte** vorkommen, die Stelle der Hunderte ganz unbesetzt lassen, und 4756 statt 47 056 schreiben, so sieht jeder sogleich, daß die

7,

7, welche Tausende anzeigen soll, nur so viel Hunderte, und die 4, welche zehnfache Tausende bedeuten soll, nur so viel einfache Tausende anzeigt.

Merkt man sich also nur, daß von Billion bis zu Million sechs Ziffern, und von Million bis zu Ende eben so viel Ziffern stehen müssen; ferner, daß in jeder solchen Klasse von 6 Ziffern, vor und nach der Stelle, wobei das Wort Tausend ausgesprochen wird, drei Ziffern stehen müssen, so wird man leicht wahrnehmen, wo Nullen zuzusetzen sind.

§. 9.

Zum Beschluß des Numerirens noch eine Anmerkung. Man muß sich hüten, etwas Zufälliges und Willkührliches für unveränderlich und nothwendig zu halten. Die beständige, von der ersten Kindheit anfangende Gewöhnung an unsere Zahlzeichen und Zahlwörter, veranlaßt leicht, daß man die Regeln derselben für nothwendig hält. Ich erinnere mich, von einer wilden amerikanischen Nation irgendwo gelesen zu haben, daß sie nach einem andern Gesetz zählt als wir, indem sie, statt daß wir erst bei Zehn wieder von vorne zu zählen anfangen, dies schon bei Fünf thut. Sie hat nur vier eigentliche Zahlwörter, für 1, 2, 3, 4. Fünfe nennt sie **eine Hand**, und zählt statt 6, 7, 8, 9, Hand und Eins, Hand und Zwei rc. Zehn heißt: **zwei Hände** u. s. w. Vielleicht macht einst ein großer

Kopf

Kopf bei dieser Nation die Entdeckung, daß sie, um alle Zahlen schreiben zu können, nicht mehr als fünf Ziffern (als 0, 1, 2, 3, 4) nöthig haben, wofern sie nur, so wie wir, zehn mit einer 1, aber in der zweiten Stelle schreiben, eben so eine Hand oder fünf wieder mit 1, aber in der 2ten Stelle schreiben. Bei ihnen würden dann die Einheiten, nach der Folge der Stellen, nicht zehnfach, sondern nur fünffach zunehmen, so daß

1	in der 1sten Stelle,		1	bedeutete
1	— — 2ten	—	5	—
1	— — 3ten	—	25	—
1	— — 4ten	—	125	—
1	— — 5ten	—	625	—

u. s. f.

Ganz offenbar haben bei ihnen die fünf Finger der Hand zu dieser Art zu zählen Veranlassung gegeben, so wie die zehn Finger beider Hände zu der unsrigen. Aber die Natur hat gewiß einen andern Grund, warum sie uns gerade zehn Finger giebt, als um uns dadurch auf die beste Art zu zählen hinzuleiten; und es läßt sich erweisen und begreifen, daß eine Zählungsart, wo die Einheiten zwölffach (oder wohl gar sechzigfach) stiegen, vor unserer zehntheiligen Zählungsweise Vorzüge haben würde. Wäre unsere Zählart wirklich die beste, so würde man nie auf den Einfall gekommen seyn, so viele Dinge, als Fußmaß, Geld u. d. g. 12theilig, oder andere Din-

ge,

ge, als Stunden, Grade beim Cirkel u. d. g. sechzigtheilig einzutheilen. Demohngeachtet darf sich Niemand zu rasch zu dem Gedanken verleiten lassen, eine andere Zählart einführen zu wollen, weil hierzu nicht bloß eine gänzliche Aenderung aller unserer Ziffern, sondern auch, was noch viel schwieriger ist, lauter ganz neue Zahlwörter erforderlich seyn würden. Denn von unsern jetzigen Zahlzeichen und Zahlwörtern dürfte man durchaus nichts beibehalten, weil sonst Verwechselung und Verwirrung ganz unvermeidlich seyn würde.

§. 10.

Unsere Zählungsart, so wie sie im Vorigen auseinander gesetzt worden, heißt das **zehntheilige Zahlensystem**, oder das **Decimalsystem**, oder auch die **Dekatik**. So wie die Zählungs-Art jener Amerikaner ein **fünftheiliges System** (Pentatik), und ein solches, wo die Einheiten mit den Stellen immer zwölffach stiegen, ein **zwölftheiliges System** (Dodekatik, oder Duodecimalsystem), genennt werden müßte. Man sieht übrigens leicht, daß sich eben so viele ganze Zahlensysteme, als ganze Zahlen denken lassen, weil es überhaupt denkbar ist, daß der Werth der Einheiten nach jeder Zahl stiege. Allein eine umständlichere Erklärung derselben würde hier mehr eine Curiosität, als von Nutzen seyn.

Anm.

Anmerk. Daß dieser und auch wohl der vorige §. nicht für Kinder geschrieben sey, darf wohl kaum erinnert werden. Uebrigens ist hier noch die Abstammung und Bedeutung einiger hier gebrauchten fremden Kunstwörter zu erklären. — System (vom griechischen Systema, d. i. Zusammenstellung), bedeutet einen regelmäßigen, unter einem einzigen Gesichtspunkt gebrachten Zusammenhang von Dingen. — Decimal, vom lateinischen decem, zehn. — Dekatik, vom griechischen deka, zehn. — Pentatik, vom griechischen pente, fünfe. — Dodekatik, vom griechischen dodeka, zwölfe. — Duodecimal, vom lateinischen duodecim, zwölfe.

§. 11.

Was bisher gesagt worden, betrifft bloß die allgemeine bey allen zählbaren Dingen anwendbare Zählungsart. Allein man hat ohne Noth und Nutzen noch eine Menge besonderer Zählungsarten eingeführt, die nur bey besondern Arten von Dingen, besonders Münzen, Maßen und Gewichten gebraucht werden. Das schlimmste ist, daß diese besondern Zählungsarten gar nicht regelmäßig gemacht sind: so zählt man z. B. das kleinste im gewöhnlichen Handel vorkommende Gewicht, das Quentchen, nur bis 3 fort; 4 aber macht man zu einer neuern höhern Einheit, und nennt es ein Loth; aber anstatt nun wieder 4 Loth zu einer neuern höhern Einheit zu machen, zählt man fort bis 31 Loth, und macht erst 32 Loth, unter dem Namen ein Pfund, zur zwei-

ten

ten höhern Einheit; die Pfunde zählt man fort bis 109, und macht 110 Pfund zur Einheit der dritten Ordnung, unter dem Namen ein Centner; u. d. g. m. Diese besondern Zählungsarten sind überaus lästig, und es ist zu wünschen, daß man die großen Vortheile, die man von ihrer allmäligen Abschaffung haben würde, immer allgemeiner anerkennen möge. Auf ihnen beruht die ganze Rechnung mit **benannten** Zahlen von mancherlei Art, deren wir ganz überhoben seyn, und daher vielleicht eine zehnmal kürzere Rechenkunst haben würden, wenn sie abgeschafft, und alles zehntheilig, nach der allgemeinen Zählungsart, eingetheilt wäre. Die französische Republik hat, so wie manches andere halsbrechende Wagestück, auch dieses gemacht, alle besondere Zählungsarten auf einmal abschaffen zu wollen. Ob sie es durchsetzen wird, mag die Zeit lehren; mir scheint es sehr zweifelhaft, wenigstens glaube ich deutlich einzusehen, daß die beste Methode zu bessern, wo etwas zu bessern ist, nicht darin bestehe, daß man alles vorhandene umstürze, sondern darin, daß man zuerst Einsicht des Bessern oder Besten, möglichst verbreite, und dann nach dem Maße dieser Einsicht, jederzeit gerade nur so viel ändere, als die Lage der Umstände erlaubt, und ohne Unrecht geschehen kann.

§. 12.

Zum Beschluß dieses Abschnitts rathe ich jedem, der im Rechnen Unterricht ertheilt, die Kinder fleißig im Zählen nicht nur vorwärts, sondern auch rückwärts zu üben. Beim Vorwärtszählen ist es besser, sie von 0 als von 1 anfangen zu lassen; ferner ist es besser, sie die Ruhepunkte nach den Zahlen, die mit 9, nicht nach denen, die mit 0 enden, machen zu lassen; nicht 0 = = bis 10, 11 = = bis 20 ꝛc., sondern 0 = = 9; 10 = = 19; 20 = = 29 ꝛc.; endlich ist es hinreichend, wenn sie bis 100 zählen können, weiter hin giebt sichs von selbst. Das Rückwärtszählen wird anfänglich den Kindern schwer, sie lernen es aber leicht, wenn man sie nur erst übt, von 9 bis 0 zurück zu zählen. Uebungen im Zählen müssen oft, aber nie lange hinter einander getrieben werden.

Zweiter Abschnitt.

Vom Zusammenzählen unbenannter oder einfachbenannter Zahlen.

Erklärung der Addition.

§. 13.

Unter allen Rechnungsarten, die man mit zwei oder mehr Zahlen vornehmen kann, ist das **Addiren** *) oder **Zusammenzählen** die einfachste und leichteste. Das Wort Zusammenzählen erklärt schon deutlich genug, worin sie besteht; nemlich in der Vereinigung zweier oder mehrerer Zahlen in eine einzige. Die Zahlen, welche zusammen gezählet werden, wollen wir die **gegebenen Stücke**, und die Zahl, welche durch ihre Zusammenzählung herausgebracht wird, das **Ganze** oder die **Summe** **) nennen. Wenn also z. B. 8 Thl. und 4 Thl. zusammengezählt werden sollen, so sind diese beiden Zahlen die gegebenen

benen Stücke, und 12 Thl. ist das Ganze, oder die Summe.

*) Addiren vom lateinischen addere, hinzufügen.
**) Summe ist gleichfalls ursprünglich ein lat. Wort, summa, welches das Ganze oder den Inbegriff mehrerer Dinge anzeigt.

Erklärung der Zeichen + und =.

§. 14.

Man bedient sich im Rechnen sehr oft gewisser Zeichen, besonders, um die verschiedenen Rechnungsarten dadurch anzuzeigen. Es ist sehr nützlich, sich den Gebrauch dieser Zeichen geläufig zu machen. Vors erste haben wir hier nur zwei dergleichen Zeichen zu erklären.

a) Um anzuzeigen, daß zwei oder mehr Zahlen zusammengezählt werden sollen, verbindet man sie durch das Zeichen +, welches man durch **und**, oder auch durch das lateinische Wort plus ausspricht. Z. B. 8 Gr. + 4 Gr. + 3 Gr. wird gelesen 8 Gr. und 4 Gr. und 3 Gr., und bedeutet, daß 8 Gr. und 4 Gr. und 3 Gr. addirt, oder zusammengezählt werden sollen.

b) Wenn man anzeigen will, daß zwei Sachen gleich, oder von einerlei Werth sind, so verbindet man sie durch das Zeichen =, welches **gleich**, oder **ist gleich**, oder **sind gleich**, gelesen wird. Z. B. 8 Gr. + 4 Gr.

Gr. + 3 Gr. = 15 Gr., wird gelesen, 8 Gr. und 4 Gr. und 3 Gr. sind gleich mit 15 Gr.

Erster Grundsatz der Addition.

§. 15.

Vier Bäume und drei Pferde können nicht zusammengezählt werden, wofern man sie nicht unter einem einzigen gemeinschaftlichen Namen bringen kann, wäre es auch nur der allgemeine Name Dinge: denn wenn ich Bäume und Pferde als bloße Dinge betrachte, so kann ich wohl sagen, daß 4 Bäume + 3 Pferde = 7 Dinge. Es ist daher der erste Grundsatz der Addition, daß Zahlen, welche zusammengezählt werden sollen, gleiche Benennungen, oder, was auf eins hinausläuft, einerlei Einheiten haben müssen.

Zweiter Grundsatz der Addition.

§. 16.

Jedermann weiß und begreift, daß, wenn er mehrere Zahlen zusammenzählen soll, in der Summe nichts geändert wird, er mag die gegebenen Stücke in welcher Ordnung er will zusammenzählen. So sind

8 Gr. + 5 Gr. + 6 Gr. = 19 Gr.
eben so 5 Gr. + 6 Gr. + 8 Gr. = 19 Gr.
oder 6 Gr. + 8 Gr. + 5 Gr. = 19 Gr.
u. d. g. m.

Dies, daß die Ordnung im Zusammenzählen nichts ändert, ist das andere Grundgesetz der Addition.

Wie müßte man addiren, wenn wir kein regelmäßiges Zahlensystem hätten?

§. 17.

Hätten wir keine so regelmäßige Art, die Zahlen auszusprechen und zu schreiben, als wir im vorigen Abschnitt beschrieben haben, so würde das Zusammenzählen in vielen Fällen eine sehr langweilige und beschwerliche Arbeit seyn. Denn hätten wir statt unserer Zahlwörter und Ziffern, für jede Zahl ein eigenes Wort und eine eigene Figur, (fast so, wie die Chineser ihre Worte nicht aus Buchstaben zusammensetzen, sondern für jedes Wort eine besondere Figur haben sollen), so würde die Addition zweier großer Zahlen nicht anders verrichtet werden können, als dadurch, daß die kleinere eins vor eins zu der größern hinzugezählt würde. Wer daher die großen Vortheile, welche uns unsere regelmäßige Zählungsart verschafft, sich recht fühlbar machen will, der darf nur zwei etwas große Haufen von Pfennigen, oder was er sonst will, etwa 825 und 317, Stück vor Stück zusammenzählen, hernach aber, so wie es hier in Ziffern geschrieben steht, regelmäßig zusammen addiren.

Addition nach unserer zehntheiligen Zählungsart.

§. 18.

Um also mehrere gegebene Stücke, z. B. 3 713 Thl. + 31 690 Thl. + 52 Thl. + 5 211 Thl. + 329 Thl. zusammen zu zählen, schreibt man sie, wie hier auf der Seite geschehen ist, so untereinander, daß die letzten Ziffern rechter Hand sämtlich in einer Säule gerade unter einander zu stehen kommen. Dann fängt man auf der rechten Seite an und zählt alle Ziffern, die in der letzten Säule gerade über einander stehen, zusammen. Ist die Summe dieser Säule eine einziffrige Zahl, so wird sie ganz unter den Strich geschrieben; wäre sie aber eine zweiziffrige Zahl, so müßten von derselben nur die Einer unter den Strich geschrieben werden, die Ziffer der Zehner aber müßte man im Sinn behalten, um sie zu der nächsten Säule mit hinzu zu rechnen. Hierauf wird auf eben die Art erst die 2te Säule vom Ende, dann die dritte u. s. f. addirt, und alles, was von der ersten Säule eben gesagt worden, gilt Wort vor Wort auch von den übrigen. Bloß bei der allerletzten Säule linker Hand ist zu merken, daß man unter dem Strich die Summe derselben völlig ausschreibt.

3 713	Thl.
31 690	—
52	—
5 211	—
329	—
40 987	Thl.

Ehe wir den Grund dieser Regeln aus einander setzen, wird es nützlich seyn, mehrere Uebungs-Exempel zu rechnen.

7) 8 + 5 + 3 + 7 + 9 + 6 + 4.
8) 12 + 77 + 8 + 90 + 64 + 12.
9) 31 + 168 + 7 + 346 + 709.
10) 216 + 4 711 + 13 816 + 798.
11) 6 241 + 51 093 + 67 700 + 16 053 + 100 097.
12) 3 211 416 + 7 946 152 + 614 578 + 67 842.
13) 2 706 409 + 63 + 6 522 + 19 842 + 777 666.
14) 14 219 410 + 18 947 + 312 050 + 70 670 270.

Wenn Jemand die Summe des oben gerechneten Exempels, ohne Hülfe eines regelmäßigen Zahlensystems, bloß durch Abzählung aller einzelnen Einheiten, finden sollte, der würde dazu eine Zeit von wenigstens sechs bis sieben Stunden nöthig haben, da hingegen, vermittelst unserer zehntheiligen Zahlen, die Rechnung in weniger als einer Minute abgemacht werden kann. Es ist doch wohl der Mühe werth, von den Gründen einer so außerordentlichen Abkürzung sich deutliche Begriffe zu verschaffen.

Der Hauptvortheil besteht darin, daß jede mit unsern Ziffern geschriebene Zahl hierdurch von selbst in mehrere Stücke getheilt ist, indem jede Ziffer ein Stück der ganzen Zahl vorstellt.

Diese

Diese Stücke aber sind zum Theil sehr groß, und zwar um desto größer, je weiter sie gegen die linke Seite stehen. Indem man daher z. B. die 3te Säule zusammenzählt, so zählt man gleich ganze Hunderte, in der 4ten Säule ganze Tausende zusammen. Um dies aber zu können, müssen die Zahlen so unter einander gesetzt werden, daß auf der rechten Seite alle Einer unter einander stehn: denn ist dies, so stehen eben dadurch auch alle Zehner, alle Hunderte, alle Tausende rc. unter einander, d. h. in einer Säule stehen allemal lauter Ziffern, die einerlei Einheiten haben, und folglich nach den 1sten Grundsatz §. 15 addirt werden können.

Giebt nun irgend eine Säule eine einziffrige Summe (wie z. B. die erste Säule die Summe 7 gab), so muß diese Ziffer gerade unter die Säule gesetzt werden, weil ihre Einheiten von eben der Art sind, als in der Säule (z. B. in der angeführten ersten Säule, Einer).

Ist aber die Summe eine zweizifferige Zahl (wie z. B. in der 2ten Säule 18), so enthält diese Summe zwei Stücke; nämlich die letzte Ziffer (8) enthält gerade solche Einheiten, als in der addirten Säule stehn, und muß daher gerade unter die Säule geschrieben werden; die zweite Ziffer hingegen (1) enthält, wie in jeder zehntheilig geschriebenen Zahl (nach §. 4), zehnmal größere Einheiten, folglich solche, wie sie die fol-

gende Säule enthält, man muß sie folglich zu dieser addiren.

Daß man aber auf diese Art keine andere Summe erhält, als wenn man die Zahlen eins vor eins in eine Summe brächte, ist aus dem 2ten Grundsatz (§. 16) klar, weil es keine Aenderung an der Summe machen kann, ob man zwei oder mehr Zahlen stückweise, oder in welcher Ordnung man will, zusammenzählt.

Ueber die Vortheile beim Addiren.

§. 19.

Die Addition ist eine Rechnungsart, bei welcher nur wenige auffallende Vortheile und Abkürzungen angebracht werden können, und dennoch zeigt sich zwischen mehrern Rechnern beim Addiren ein auffallender Unterschied, indem einige mit der größten Leichtigkeit Säulen, die einen Bogen lang herunterlaufen, zusammenzählen, andere aber auch kurze Säulen nur mit Mühe zusammen rechnen. Die Hauptsache ist häufige und angestrengte Uebung. Indessen habe ich bemerkt, daß manche diese Uebung auf eine solche Art anstellen, bei der sie vielleicht nie zu einer besondern Fertigkeit gelangen können. Kinder können freilich anfänglich gar nicht anders addiren, als so, daß sie die hinzu zu zählende Ziffer eins vor eins zuzählen. Wer aber immer diese Gewohnheit beibehält, wird, so viel er auch rechnen mag, doch

nie

nie ein schneller Rechner werden. Der Hauptvortheil, der schnelle Rechner macht, besteht darin, daß man die Summe jeder zwei einziffrigen Zahlen im Kopfe hat (als 7 + 8 = 15; 4 + 9 = 13; 7 + 5 = 12; ꝛc. ꝛc.). Wenn man daher beim Addiren einer Reihe Ziffern in die zweiziffrigen Zahlen hineinkommt, so muß man sich gewöhnen, nie zu der vollen Zahl, sondern bloß zu ihren Einern, die nächste Ziffer zu zählen. Ich will die Regel durch ein Beispiel deutlich machen. Gesetzt es soll die hier an der Seite befindliche Säule summirt werden, so sage ich, 8 und 5 ist 13. Die folgende 4 muß ich aber nicht zu der vollen 13, sondern bloß zu 3 hinzu zählen, und also sagen, 3 und 4 ist 7; sobald ich dies weiß, so weiß ich auch, ohne mich viel besinnen zu dürfen, daß 13 und 4 = 17 ist. Zu 17 sollen 5 addirt werden; ich sage also 7 + 5 = 12; die eigentliche Summe, welche ich suche, wird sich also auf 2 enden, also 22 seyn; zu 22 kommen 6; also da 2 + 6 = 8, so ist die Summe 28: hierzu kommen 3, und da 8 + 3 = 11, so wird sich die Summe auf 1 enden, also 31 seyn; zu 31 kommen 7, also, da 1 + 7 = 8, so ist die Summe 38; hierzu 8 addirt, geben, weil 8 + 8 = 16, die Summe 46; und endlich 5 hinzu gebracht, geben 51, weil die Summe von 6 + 5 = 11 sich auf eine 1 endigt.

8
5
4
5
6
3
7
8
5
51

Uebr

Uebt man sich auf diese Art (sollte sie auch anfänglich mühsamer und schwerer scheinen, als die Art, an die man sich etwa gewöhnt hat), so wird man bald die Summen jeder zwei einziffrigen Zahlen so ins Gedächtniß bekommen, daß man, wenn z. B. 25 und 8 addirt werden sollen, augenblicklich und ohne sich zu besinnen weiß, die Summe müsse sich auf 3 enden, also 33 seyn, weil die Summe von 5 und 8 sich auf 3 endet.

Es giebt außerdem noch manche andere kleinere Vortheile, die aber nur in einzelnen Fällen anwendbar sind. (Z. B. wenn man 9 zuzählt, so werden die Zehner um 1 größer und die Einer um 1 kleiner, z. B. 47 + 9 = 56. Wenn man 8 zuzählt, werden die Zehner um 1 größer, die Einer aber um 2 kleiner, als 57 + 8 = 65 u. d. g. m. Wer sich zum eigenen Nachdenken gewöhnt, findet dergleichen Vortheile ohne Anleitung.) Es muß allgemein wahr).

Eine Probe der Addition.

§. 20.

Unter einer **Probe** versteht man jedes Mittel, wodurch man sich versichern kann, keinen Rechnungsfehler begangen zu haben. Gäbe es zu jeder Rechnung eine untrügliche und dabey leichte Probe, so wäre das freilich eine gute Sache. Eine solche untrügliche Probe giebt es aber, genau genommen, zu keiner einzigen Rechnung; denn

denn da jede Probe selbst wieder in einer Rechnung bestehen muß, so ist man bey dieser eben sowohl der Gefahr zu irren ausgesetzt, als bey dem Exempel selbst. Trifft also eine Probe nicht zu, so ist das noch kein Beweis, daß ich im Exempel falsch gerechnet habe, weil der Fehler auch in der Probe selbst gemacht seyn kann.

Die besten Rechner legen daher keinen großen Werth auf die eigentlichen Proben und sind der Meinung, die beste Probe auf ein Exempel bestehe darin, daß man sich die Mühe nicht verdrießen lasse, dasselbe zweimal, und wo möglich auf verschiedene Art durchzulaufen. So ist z. B. beim Addiren die sicherste Probe, wenn man jede Säule gleich hinter einander zweimal durchzählt, einmal von oben herab, und dann von unten herauf. Stimmen beide Summen nicht, so ist kein anderer Rath, als die Arbeit zum drittenmale wohlbedächtig zu machen, und nachzuspüren, wo man gefehlt habe.

Indessen giebt es doch außer der doppelten Rechnung einige Proben, die nicht ganz unbrauchbar sind; wenn nämlich die Probe in **einer leichteren Rechnung** als das Exempel selbst besteht. Von dieser Art sind die so genannten Neunerproben, die sich bey allen Rechnungen mit unbenannten ganzen Zahlen anwenden lassen. Ich will diese Proben kurz erklären, weil sie wirklich sinnreich sind, ob ich gleich gestehe, daß ich mich derselben in meinen eigenen Rechnungen selten

oder

oder niemals bediene. Die Gründe von diesen Proben werde ich aber erst bei der Division erklären können.

3 652	
87	
491	
2 187	0
6 417	0

Bei der Addition wird die Neunerprobe auf folgende Art gemacht. Man addirt die Ziffern der addirten Stücke, ohne Rücksicht auf ihren wahren Werth, bloß nach ihrem Namenwerth zusammen, läßt aber, so bald man über 9 kommt, 9 weg, und behält bloß den Ueberschuß, und so durch alle addirten Zahlen durch, was zu allerletzt auf diese Art bleibt, bemerkt man rechter Hand neben dem Exempel über dem Strich. (Im obigen Exempel ist 0 geblieben). Ist man auf diese Art mit den addirten Stücken fertig, so nimmt man eben die Arbeit mit der Summe vor, und wenn das Exempel richtig gerechnet ist, so müssen die Ziffern der Summe zuletzt eben den Rest als die Ziffern der addirten Zahlen lassen; dieser Rest wird unter dem Strich gerade unter den ersten Rest geschrieben.

Um die Arbeit selbst ganz deutlich zu machen, will ich bloß zeigen, wie sie an der obigen Summe 6 417 verrichtet wird. Ich sage 6 und 4 ist 10, da dies 1 über 9 ist, so behalte ich bloß diese 1, und addire dazu die in der Summe folgende 1, giebt 2, und hierzu die 7 addirt, giebt wieder 9, diese weggelassen, bleibt 0, welches unter dem Striche bemerkt ist. Eben so wird es

mit

mit den Zahlen über den Strich gemacht, indem man von einer Zeile zur andern fortgeht. Die Ordnung, in der man die Ziffern so addirt, ist ganz willkührlich, (wenn man nur keine ausläßt, oder doppelt zählt), wodurch man sich einige kleine Vortheile machen kann, die ein nachdenkender Rechner leicht selbst findet.

Außer der allgemeinen Trüglichkeit aller Proben, hat aber diese noch eine eigene; indem es wohl möglich ist, daß ein Exempel falsch seyn kann, und doch die Probe richtig eintrifft. Hätte z. B. Jemand statt der obigen Summe 6 417 herausgebracht 6 507, so wäre das Exempel falsch gewesen, und doch würde die Probe richtig zutreffen. Doch wird dieser Fall nicht oft vorkommen, weil er voraussetzt, daß man gerade zwei entgegen gesetzte Fehler gemacht, und in einer Säule gerade um so viel zu viel, als in einer andern Säule zu wenig gefehlt habe.

Addiren im Kopfe.

§. 21.

Das Rechnen im Kopfe ist eine vortreffliche Uebung der Aufmerksamkeit und des Verstandes, die Niemand vernachläßigen sollte. Doch muß auch über dem Kopfrechnen das Rechnen auf dem Papier nicht vernachläßigt werden, denn jedes hat seine ganz eigenen Vortheile, und eines muß dem andern gegenseitig zu Hülfe kommen. Auf

Schu-

Schulen rathe ich ungefähr gleich viel Zeit auf jedes zu verwenden.

Es entsteht aber hierbei die Frage, welches von beiden man zuerst üben soll? Nach meiner Einsicht und Erfahrung läßt sich auf diese Frage gar nicht im Allgemeinen antworten; sondern bei manchen Rechnungen ist es besser mit dem Kopfrechnen, bei andern mit dem Rechnen auf dem Papier anzufangen.

Beim Addiren halte ich folgende Methode für die beste. Zuerst übe man Kinder fleißig im Zusammenzählen von nicht mehr als zwei einziffrigen Zahlen, damit sie anfangen, die Summen derselben in das Gedächtniß zu fassen. Ein ordentliches **Einsundeins**, nach Art des **Einmaleins** aufzusetzen, wie es ehedem Pescheck machte, und es Kinder auswendig lernen zu lassen, halte ich nicht für rathsam, weil zwischen beiden gar zu leicht Verwechslungen entstehen. Uebrigens ist zu merken, daß dergleichen Uebungen mit Kindern zwar sehr oft, aber nie anhaltend müssen angestellt werden, weil sie durch ihre Einförmigkeit gar zu leicht ermüden.

Wenn die Kinder in der Addition von zwei Ziffern etwas geübt sind, so lehre man sie eine geschriebene einfache Säule von Ziffern nach der §. 19 beschriebenen Art zu addiren. Dann gehe man zu schriftlichen Exempeln von mehreren Säulen über.

Erst

Erst wenn sie in diesen einige Fertigkeit erlangt haben, lasse man sie längere Additionen im Kopfe machen, indem man von zwei Ziffern anfängt, und zu der Summe sie immer noch eine Ziffer, und noch eine Ziffer rc. nach und nach hinzuzählen läßt.

Um sie aber auch zu gewöhnen, daß sie zweiziffrige Zahlen leicht im Kopfe addiren, so stelle man öfters die Uebung an, sie zu irgend einer Ziffer 10, und dann wieder 10, und noch einmal 10 u. s. w. addiren zu lassen. Z. B. 7 und 10 ist 17, und noch 10 ist 27, und noch 10 ist 37 rc. Man glaube ja nicht, daß Kinder die Leichtigkeit dieses Zuzählens von selbst, und ohne Anleitung und Erklärung begreifen. Nach dieser Uebung aber werden Kinder sehr leicht begreifen, daß sie, um z. B. 54 und 37 im Kopfe zusammen zu zählen, sagen müssen, 54 und 7 ist 61, und 10 ist 71, und 10 ist 81, und noch 10 91; u. d. g. m.

Dritter Abschnitt.

Vom Abziehen unbenannter oder einfach-benannter Zahlen.

Erklärung der Subtraction.

§. 22.

Abziehen oder Subtrahiren*) heißt, eine Zahl von einer andern Zahl abnehmen. Hier heißt diejenige Zahl, von welcher abgenommen wird, das Ganze, diejenige Zahl, welche weggenommen wird, das abgezogene Stück, oder der Abzug; und diejenige Zahl, welche übrig bleibt, das übrige Stück, oder der Rest **). Wenn z. B. von 12 Pfund 5 Pfund hinweggenommen werden, so daß 7 Pfund übrig bleiben: so ist 12 Pf. das Ganze; 5 Pf. der Abzug; und 7 Pf. der Rest. Den Rest nennt man auch den Un-

Unterschied, nemlich zwischen dem Ganzen und dem Abzug.

*) Vom Lateinischen subtrahere, abziehen.

**) Rest ist entweder eine Zusammenziehung des lat. Worts residuum, welches so viel als etwas Uebrigbleibendes bedeutet; oder eine Abkürzung des Worts restat, es bleibt übrig.

Erklärung des Zeichens —.

§. 23.

Um anzuzeigen, daß eine Zahl von einer andern abgezogen werden soll, setzt man das Ganze voran, und läßt den Abzug mit dem Zeichen — nachfolgen. Z. B. 16 — 9 heißt: von 16 soll 9 abgezogen werden. Man lieset dies Zeichen, lateinisch minus, deutsch weniger, als 16 weniger 9. Was also 16 — 9 = 7 heißt, wird hieraus und aus §. 14 leicht verständlich seyn.

In ältern Rechenbüchern sieht das Abziehungszeichen so aus ÷.

Erster Grundsatz der Subtraction.

§. 24.

Zahlen von ungleichen Benennungen oder Einheiten lassen sich eben so wenig von einander abziehen, als zusammenzählen. Von 12 Meilen kann man nicht 7 Centner abziehen. Selbst 9

Gr. lassen sich nicht von einem Thaler abziehen, ehe man nicht diesen zu Groschen gemacht hat.

Zweiter Grundsatz der Subtraction.

§. 25.

Es kommt einerlei heraus, man mag den Abzug vom Ganzen auf einmal, oder stückweise wegnehmen, und im letzten Fall ist es einerlei, in welcher Ordnung man die Stücke wegnimmt. Von 12 bleibt z. B. immer 7 übrig, wenn ich 5 davon hinwegnehme; ich mag dies auf einmal, oder stückweise, und in welcher Ordnung ich will, thun, wenn ich nur wirklich zusammen nicht mehr oder weniger als 5 wegnehme.

Wie müßte man subtrahiren, wenn wir keine regelmäßige Zahlzeichen und Zahlwörter hätten?

§. 26.

Ueberhaupt kann jede Subtraction einer kleinern Zahl von einer größern, allemal auf eine doppelte Art verrichtet werden, indem man entweder von der größern bis zur kleinern Zahl rückwärts=, oder von der kleinern zur größern vorwärts zählt. So kann ich z. B., wenn 5 von 11 abgezogen werden soll, entweder von 11 rückwärts zählen, bis ich auf 5 komme, oder ich kann von 5 vorwärts zählen, bis ich zu 11 komme.

Auf

Auf beide Arten finde ich offenbar einerlei Unterschied, nemlich 6.

Hätten wir daher unsere regelmäßigen Ziffern und Zahlwörter nicht, sondern für jede Zahl eine eigene Ziffer und ein eigenes Wort, so wäre, weder bei kleinen noch bey großen Zahlen eine andere Subtraction möglich, als daß man wirklich entweder von der kleinen zur größern vorwärts, oder von der größern zur kleinen rückwärts von eins zu eins durchzählt. Welche langweilige und mühsame Arbeit dies seyn würde, wenn nur z. B. von 357 198 abgezählt werden sollten, fällt von selbst in die Augen. Die Leichtigkeit und Kürze unserer Subtraction auch bei den größten Zahlen, verdanken wir also gleichfalls der sinnreichen Erfindung unserer Ziffern.

Subtraction nach unserer zehntheiligen Zählungsart.

§. 27.

Die Subtractions-Exempel sind zwar gewöhnlich **kürzer** als die Additions-Exempel, weil hier nur immer zwei Reihen von Ziffern, aber bei der Addition sehr viele vorkommen können. Aber an sich ist die Arbeit bei der Subtraction schon etwas künstlicher und zusammengesetzter, als beim Addiren. Um alles recht deutlich zu machen, wollen wir daher die Subtractionsrechnungen unter drei verschiedene Abtheilungen bringen,

und

und jede einzeln durchgehen. Alle drei Abtheilungen aber haben den Aufsatz mit einander gemein, indem beide Zahlen so unter einander geschrieben werden müssen, daß die Einer, (folglich auch die Zehner, Hunderte, Tausende rc.) gerade unter einander zu stehen kommen. Gewöhnlich schreibt man die kleinere Zahl **unten**, aber es hindert nichts, sie auch **oben** zu schreiben; ja es ist gut, bisweilen auf diese Art zur Uebung die gewöhnliche Ordnung umzukehren. Indessen wollen wir uns hier, um Undeutlichkeit zu vermeiden, bloß an die gewöhnliche Ordnung halten.

Exempel der ersten Abtheilung.

In die erste Abtheilung bringen wir diejenigen Exempel, wo im Aufsatz jede Ziffer des Abzugs kleiner, oder doch nicht größer ist, als die gerade über ihr stehende Ziffer des Ganzen.

Es soll z. B. 573 025 von 5 678 097 abgezogen werden, so ist der Aufsatz wie hier an der Seite zu machen. Die Arbeit ist in diesem Falle äußerst leicht, denn man zieht bloß jede Ziffer der zweiten Zeile von der darüber stehenden Ziffer der ersten Zeile ab, und was übrig bleibt, schreibt man gerade herunter in den Rest. Die Arbeit wird, wie beim Addiren, von der rechten Hand gegen die linke verrichtet.

5 678 097
573 025
5 105 072

Uebungs-

Uebungsbeispiele.

15) 8 954 — 3 641
16) 2 876 — 1 523
17) 92 438 — 31 226
18) 856 743 — 642 122

Die Gründe dieser Rechnungsart sind nicht schwer einzusehn. Vermöge des Aufsatzes haben jede zwei Ziffern, die über einander stehen, einerlei Einheiten (z. B. 8 und 3 in der vierten Säule, des oben gerechneten Exempels, bedeuten beide Tausende); also stehen auf diese Art nur immer solche Ziffern übereinander, bei denen nach dem ersten Grundsatz §. 24 geradezu das Abziehen möglich ist. Uebrigens wird der Abzug stückweise weggenommen, wodurch aber nach dem zweiten Grundsatz §. 25 in dem wahren Rest kein Fehler entstehen kann.

Exempel der zweiten Abtheilung.

§. 28.

In die zweite Abtheilung gehören solche Exempel, wo der Fall einmal oder öfter vorkommt, daß eine Ziffer des Abzugs eine kleinere Ziffer im Ganzen über sich hat, doch so, daß in der obern Reihe vor dieser kleinern Ziffer keine Null linker Hand vorhergeht.

Es soll z. B. 1 477 658 von 3 523 097 abgezogen werden, so ist der Aufsatz wie hier an der Seite zu machen. Kinder sind sehr geneigt, hier die Arbeit umzukehren, und wenn sie die untere Ziffer zu groß finden, die obere von der untern abzuziehen. Allein dies geht nicht an, denn die untere Zahl ist und bleibt die, welche abgezogen werden soll, und wenn gleich unten zum Theil größere Ziffern stehn, so muß doch das Abziehen möglich seyn, weil doch die untere Zahl im ganzen kleiner ist, als die obere. Man verfährt hier so: wenn die obere Ziffer zu klein ist, so vermehrt man sie um 10, (und sagt also z. B. gleich in der ersten Säule nicht 8 von 7, sondern 8 von 17 bleibt 9), den Rest, der nun bleibt, setzt man gerade herunter: aber in der nächsten Säule rechnet man nun die obere Ziffer um eins kleiner, als sie wirklich ist (und sagt also z. B. in der 2ten Säule nicht, 5 von 9, sondern 5 von 8 bleibt 3). Eben so verfährt man so oft, als der Fall vorkommt, daß die obere Ziffer zu klein ist.

3 523 097	
1 477 658	
2 045 439	

Uebungsbeispiele.

19) 53 264 — 25 678
20) 432 651 — 289 766
21) 853 615 — 173 699
22) 5 814 239 — 2 983 785
23) 7 108 750 — 3 281 946

Auch

Auch von dieser Rechnung sind die Gründe nicht schwer einzusehen. Wenn ich im obigen Exempel, 8 von 7 abziehen soll, so kann dies nicht geschehen. Ich **borge** daher, d. h. ich nehme eine Einheit der nächsten obern Ziffer 9 zu Hülfe. Da nun nach §. 4 in unserm Zahlensystem eine Einheit in der nächsten Stelle linker Hand immer zehnmal größer ist, als die Einheit der vorhergehenden Stelle, so ist diese der 9 abgenommene Einheit allerdings **zehne** werth, wenn ich sie in Einheiten der 7 verwandle, und dies ist nothwendig, um sie mit 7 zusammen nehmen zu können (nach dem 1sten Grundsatz der Addition §. 15). Eben diese Art zu schließen läßt sich überall anwenden, wo eben der Fall vorkommt.

Exempel der dritten Abtheilung.

§. 29.

In diese Abtheilung gehören diejenigen Exempel, wo der Fall vorkommt, daß eine Ziffer des Abzugs nicht nur größer ist, als die über ihr stehende Ziffer des Ganzen, sondern diese auch eine oder mehr Nullen linker Hand vor sich hat, bey denen also nicht geborgt werden kann.

Es soll z. B. 1 978 447 von 2 006 503 abgezogen werden. Die Rechnung geschieht so: zu der kleinern obern Ziffer werden 10 zugelegt; statt der vorhergehenden Nullen denkt

2 006	503
1 978	447
28	056

man sich Neunen, und die nächste Ziffer vor der Null wird um eins kleiner. So sagt man z. B. im obigen Exempel, 7 von 13 bleibt 6; 4 von 9 bleibt 5; 4 von 4 bleibt 0; ferner 8 von 16 bleibt 8; 7 von 9 bleibt 2; 9 von 9 bleibt 0; 1 von 1 bleibt 0.

Uebungsbeispiele.

24) 5 170 021 — 456 978
25) 10 203 040 — 5 917 872
26) 2 000 100 — 91 283
27) 1 000 000 — 999
28) 3 420 018 — 970 089
29) 4 000 700 — 90 807

Diese Art zu rechnen beruhet auf folgenden Gründen. In dem obigen Beispiel kann ich 7 von 3 nicht abziehen; daher muß ich eine Einheit der nächsten geltenden Ziffer 5 zu Hülfe nehmen, oder, wie man sagt, borgen. Nun muß man nur merken, daß wenn auf diese Art über zwei oder mehr Stellen weg geborgt wird, im Grunde dies Borgen doch nur schrittweise, und nur an den nächsten Nachbar rechter Hand geschieht. Dies will sagen, die 5 verborgt die 1, welche sie abgiebt, nicht unmittelbar an die 3, sondern an ihren nächsten Nachbar 0; hier erhält diese 1, weil sie in die nächst niedrigere Stelle gekommen ist, den Werth 10. Von diesen zehnen aber bleiben nur 9 in dieser Stelle, eine 1 aber wird an die 3 geborgt, wo sie wieder den Werth 10 erhält,

erhält, weil sie in die nächste niedrigere Stelle gekommen ist. Aus 3 ist also 13, aus 0 ist 9, und aus 5 ist 4 geworden. Eben so verhält es sich in der übrigen Hälfte der Rechnung. Die 2 borgt eine Einheit an die nächste 0, wo sie den Werth 10 erhält: von dieser 10 wird wieder eine Einheit an die 2te 0 geborgt, wo auch diese den Werth 10 erhält: endlich wird von dieser 10 wieder eine Einheit an die 6 geborgt, wo sie wieder den Werth 10 erhält: also ist die 6 in 16; die nächste 0 in 9, die folgende 0 auch in 9, und die 2 in 1 verwandelt worden.

Ueber die Vortheile beim Subtrahiren, und vom Subtrahiren im Kopfe.

§. 30.

So lange jemand noch beim Abziehen von der kleinen Zahl zur größern vorwärts, oder von dieser zu jener rückwärts eins vor eins durchzählen muß, so lange wird es mit seinem Subtrahiren noch immer langsam gehen. Wer aber sich in der Addition auf die im vorigen Abschnitt beschriebene Art fleißig geübt hat, wird auch schnell und sicher abziehen. Denn wer z. B., ohne sich erst besinnen zu müssen, weiß, daß $9 + 8 = 17$, der weiß auch sogleich, daß $17 - 8 = 9$. Doch muß man nicht glauben, daß Kindern dieser Uebergang vom Addiren zum Subtrahiren von selbst einleuchtend sey. Sie müssen erst darauf aufmerksam gemacht, und darin geübt werden.

Nach

Nach meiner Einsicht kann man die zur Subtraction nöthigen Uebungen am besten in einer ähnlichen Ordnung, als bei der Addition (§. 21) anstellen. Zuerst übe man Kinder in solchen kleinen Subtractionen, bey denen sowohl die abgezogene Zahl, als der Rest, einziffrige Zahlen sind; und diese Uebung kann man unbedenklich und ohne das Wort Subtraction zu erwähnen, schon während der Additionsübungen anstellen. Haben die Kinder hierin einige Fertigkeit erlangt, so lasse man sie auf dem Papier subtrahiren, und zwar in der Ordnung, wie wir §. 27-29 die Regeln vorgetragen haben. Nachher ist es Zeit, sie auch größere Subtractionen, besonders von zweiziffrigen Zahlen, im Kopfe machen zu lassen. Eine nöthige Vorübung hierzu ist, daß man sie lehrt, von einer etwas größern Zahl, z. B. 97, 10 und wieder 10, und noch 10 u. s. w. abzuziehen, bis sie die Regelmäßigkeit dieser Arbeit gefaßt haben.

Proben der Subtraction.

§. 31.

Eine gute Proberechnung der Subtraction giebt die Addition, indem leicht einzusehn ist, daß wenn man den Abzug und den Rest addirt, die obere Zahl oder das Ganze wieder herauskommen muß. Diese Probe ist brauchbar, theils weil Addition an sich eine leichtere Rechnung ist als

Sub-

Subtraction, theils weil man, um dieselbe anzuwenden, nicht eine einzige Ziffer nieder zu schreiben hat, sondern geradezu sehen kann, ob die Addition der 2ten und 3ten Zeile die erste Zeile richtig gebe.

Man kann aber auch von der Neunerprobe beim Subtrahiren Gebrauch machen, und zwar auf folgende Art: Man zählt zuerst die Ziffern der obern Zeile oder des Ganzen zusammen, läßt aber 9, so oft als es angeht, weg. Im beistehenden Exempel bleibt auf diese Art zuletzt die rechter Hand beigeschriebene 6 übrig. Dann zählt man die Ziffern der zweiten und dritten Zeile, oder des Abzugs und Restes, auf eben die Art zusammen: so muß zuletzt dieselbe Zahl, welche bei der obersten Zeile übrig blieb, auch hier übrig bleiben, wenn die Rechnung richtig ist. Die bei der Addition §. 20 angegebenen Mängel dieser Probe finden auch hier statt.

9 704 526	6
867 438	
8 837 088	6

Vier-

Vierter Abschnitt.

Von dem Zusammensetzen oder Multipliciren unbenannter oder einfachbenannter Zahlen.

Erklärung des Multiplicirens.

§. 32.

Zwei gegebene ganze Zahlen **multipliciren** oder **zusammensetzen**, heißt die eine derselben so vielmal nehmen, als die andere einfache Einheiten enthält. Wenn z. B. 9 mit 5 multiplicirt werden soll, so heißt dies: 9 soll sovielmal genommen werden, als es Einheiten enthält, also 5 mal, welches 45 giebt.

Diejenige Zahl, an welcher die Rechnung vorgenommen werden soll (im obigen Beispiel 9), heißt die **Hauptzahl**, oder der **Multiplicandus**; die andere Zahl, welche mir sagt, was ich thun, oder wie vielmal ich die Hauptzahl zusammensetzen soll (oben 5) heißt die **Zusammensetzungs-**

Eine Größe mit einer Zahl mult. heißt, nur Größe auch finden, wenn die Größe so viel Mal multiplicirt ist, als eine in jener Zahl

setzungszahl, oder der **Multiplicator**. Endlich die Zahl, welche herausgebracht wird, heißt das **Zusammengesetzte**, oder das **Product**, oder das **Factum**.

Beide Zahlen, welche multiplicirt werden, heißen auch, ohne sie von einander zu unterscheiden, die **Bestandtheile** oder **Factoren** des Products.

Anmerk. Die bei dieser Rechnungsart gebräuchlichen Kunstwörter sind von folgendem Ursprung und eigentlicher Bedeutung. Multiplicare heißt im Lat. vervielfältigen, daher Multiplicandus, die zu vervielfältigende Zahl, und Multiplicator, gleichsam der Vervielfältiger. Factor und Factum stammen von facere, machen, daher Factor gleichsam der Macher oder Hervorbringer, und Factum, das Gemachte, oder Hervorgebrachte; von dieser letzten Bedeutung ist auch Productum, von producere, hervorbringen.

Erklärung der Multiplicationszeichen.

§. 33.

Um anzuzeigen, daß zwei Zahlen multiplicirt werden sollen, verbindet man sie entweder durch das Zeichen $\times$, oder durch ein zwischen sie gesetztes Punkt. Beide Zeichen kann man lesen durch das Wort **mal**. Z. B. 3×7, oder $3 \cdot 7 = 21$ wird gelesen, 3 mal 7 ist 21, u. d. g. m.

Erster

Erster Grundsatz der Multiplication.

§. 34.

Da die Zusammensetzungszahl (Multiplicator) bloß anzeigt, wie oft die Hauptzahl (Multiplicandus) genommen werden soll, so ist jene in jedem Exempel eigentlich immer eine unbenannte Zahl. Dagegen kann die Hauptzahl eben sowohl benannt, als unbenannt seyn; nur richtet sich in jedem Fall die Benennung des Produkts nach der Benennung der Hauptzahl. Wenn z. B. 9 **Pfund 7 mal** genommen werden sollen, so ist offenbar 7 nichts, als eine unbenannte Zahl, das Zusammengesetzte aber ist 63 **Pfund**, so daß sich seine Benennung nach der Hauptzahl richtet. Man sieht hieraus, daß bei der Multiplication nicht so, wie bei der Addition und Subtraction, die beiden gegebenen Zahlen einerlei Einheiten haben müssen.

Anmerk. Es kommen bei der Anwendung sehr häufig Fälle vor, wo auch der Multiplicator eine benannte Zahl zu seyn scheint: aber er ist es nur scheinbar. Gesetzt ich bekomme 9 Pfund von einer Waare für einen Thaler, wieviel werde ich für 7 Thl. bekommen? offenbar 7 mal mehr, also 63 Pfund, hier scheint es, als wäre der Multiplicator eine benannte Zahl, nemlich 7 Thaler. Aber wer sieht nicht leicht ein, daß die Benennung Thaler zum Product nicht das allergeringste beiträgt, und daß, wenn man in dem Exempel statt 1 Thl. und 7 Thl., eben so viele Groschen, oder Pfennige, oder Rubel, oder Ducaten, oder was man sonst will, setzt, das Product immer

ganz

ganz unverändert 63 Pfund bleibt. Wenn daher Jemand fragt, was herauskomme, wenn 9 Pfund, mit 7 Thalern multiplicirt werden; so kann das Product eben sowohl 63 Thl. als 63 Pfund seyn. Es kommt nemlich darauf an, welches von beiden die Hauptzahl seyn soll, und nach dieser richtet sich das Product. Im obigen Exempel war das Product 63 Pfund; in folgendem ist es 63 Thl.: wenn 1 Pfund 7 Thl. kostet, was kosten 9 Pfund?

Zweiter Grundsatz der Multiplication.

§. 35.

Bei jeder Multiplication steht es frei, beide Factoren zu verwechseln, d. h. die Hauptzahl zur Zusammensetzungszahl, und die Zusammensetzungszahl zur Hauptzahl zu machen. Nur muß man, wenn die Hauptzahl benannt ist, auch die Benennung vertauschen. Es kommt z. B. einerlei heraus, ob ich 8 Thaler 9 mal, oder 9 Thaler 8 mal nehme; und so mit jeden zwei andern Zahlen.

Bei kleinen Zahlen überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit dieses Satzes. Aber auch bei größern Zahlen ist der Beweis leicht. Gesetzt es bedächte sich Jemand, ob es einerlei sey, wenn er 28 Thaler 173 mal, oder wenn er 173 Thaler 28 mal nimmt: so darf er sich nur in Gedanken an die schmale Seite eines langen Tisches stellen, und lauter Reihen von 28 Thalern aufzählen, bis es 173 Reihen sind; so hat er 28 Tha-

ler 173 mal vor sich. Stellt er sich aber nun an die lange Seite des Tisches, so hat er Reihen von 173 Thalern, und solche Reihen 28, also 173 Thaler 28 mal vor sich. Also kann wohl kein Zweifel statt finden, daß beides gleichviel sey.

Dritter Grundsatz der Multiplication.

§. 36.

Wenn die Hauptzahl nicht auf einmal, sondern stückweise und in beliebiger Ordnung multiplicirt wird, so ändert dies im Producte nichts. Wenn ich z. B. 8 Thaler 4 mal nehmen soll, so erhalte ich immer 32 Thaler, ich mag nun die ganzen 8 Thaler auf einmal mit 4 multipliciren, oder ich mag sie in 2 oder 3 oder mehr Stücke theilen, z. B. 5 + 2 + 1 Thaler, und jedes einzelne Stück 4 mal nehmen, wodurch ich 20 + 8 + 4 = 32 Thaler erhalten würde.

Eben die Bewandniß hat es auch mit der Zusammensetzungszahl, welches schon aus dem vorigen §. klar ist, weil man sie allezeit, sobald man will, als die Hauptzahl ansehen, und dann nach der ersten Hälfte dieses §. in Stücke theilen kann. Wer 9 Thaler 8 mal nehmen soll, erhält das richtige Product, wenn er diese 9 Thaler erst 4 mal, dann noch 3 mal, und dann noch einmal nimmt; denn so erhält er 36 + 27 + 9 = 72 Thl.

Vierter Grundsatz der Multiplication.

§. 37.

Wird nach einer geschehenen Multiplication einer der beiden Factoren vergrößert oder verkleinert, so wird dadurch auch das Product eben so vielmal vergrößert oder verkleinert.

Man betrachte folgende 3 Multiplicationen,

4	12	36
3	3	3
12	36	108

die einerlei Zusammensetzungszahlen, aber verschiedene Hauptzahlen haben. Die mittelste, nemlich 3 mal 12 ist 36, denke man zuerst gemacht: so ist klar, daß wenn ich nun statt 12, dreimal zu nehmen, den 3ten Theil von 12, nemlich 4, wie im ersten Exempel geschieht, 3 mal nehme, auch dreimal weniger, als im 2ten Exempel, herauskommen müsse. Wenn dagegen, wie im 3ten Exempel, eine Zahl, die dreimal größer als 12 ist, nemlich 36, dreimal genommen wird, so muß auch 3 mal mehr, als im 2ten Exempel, herauskommen.

Daß es eben die Bewandniß hat, wenn man die Hauptzahl ungeändert läßt, und nur die Zusammensetzungszahl vergrößert oder verkleinert, ist schon daraus klar, weil man die Zusammensetzungszahl nach §. 35 allezeit auch als Hauptzahl

sehen, und daher die Sache wie in der ersten Hälfte des gegenwärtigen §. untersuchen kann. Doch ist die Richtigkeit der Sache auch schon an sich klar; denn da die Zusammensetzungszahl anzeigt, wie oft die Hauptzahl genommen werden soll, so ist offenbar, daß ich desto mehr herausbringe, je öfter ich sie nehme, d. h. je größer ich die Zusammensetzungszahl mache: und desto weniger, je weniger oft ich die Hauptzahl wiederhole, d. h. je kleiner ich die Zusammensetzungszahl mache. Z. B.

9	9	9
2	6	18
18	54	162

In dem mittlern Beispiel ist 9 sechsmal genommen, dies giebt 54. Im ersten Beispiel ist sie nur ein Drittel so oft, nemlich 2 mal genommen, daher kommt auch nur der 3te Theil von 54, nemlich 18 heraus. Im 3ten Exempel hingegen ist 9 achtzehnmal, d. i. 3 mal öfter als im 2ten Exempel genommen, also kommt hier auch 3 mal mehr, nemlich 162 heraus.

Würde also der eine Factor vergrößert, und der andere eben so vielmal verkleinert, so muß das Product ungeändert bleiben, z. B.

24	8
3	9
72	72

Im

Im 2ten Exempel steht 8, statt 24, d. i. 3 mal weniger; der andere Factor 9 aber ist 3 mal größer als im 1sten Exempel: also müssen beide einerlei Product geben.

Multiplication ohne ein regelmäßiges Zahlensystem.

§. 38.

Ohne unser oder irgend ein anderes regelmäßiges Zahlensystem würde die Multiplication selbst bei ganz mäßig großen Zahlen eine alle Gedult überwiegende Arbeit seyn. Denn um z. B. 926 mit 358 zu multipliciren, wäre kein anderer Rath, als 358 Reihen, jede von 926 Zahlpfennigen, oder etwas dergleichen, aufzuzählen, und dann durchzuzählen, wie viel man zusammengebracht habe. Und 1 000 000 mit sich selbst zu multipliciren, was jetzt ein Kind in weniger als einer Minute thut, würde mehr als 38 000 Jahre erfordern (Man vergleiche Uebungsbeispiel 1, §. 6.).

Dergleichen Beispiele muß man sich deutlich denken, wenn man von der erstaunenswürdigen Kunst, die in unsern Ziffern liegt, einen richtigen Begriff erhalten will.

Multiplication einziffriger Zahlen, oder das Einmaleins.

§. 39.

Die erste Uebung beim Multipliciren muß darin bestehen, daß man die Producte jeder zwei einziffrigen Zahlen nicht nur finden lernt, sondern sie auch dem Gedächtniß so fest einzuprägen sucht, daß man das Product augenblicklich in Bereitschaft habe, so bald die zwei Factoren genannt sind.

Alle diese Producte enthält nun das bekannte Einmaleins. Und ich rathe jedem Lehrer, seine Schüler dasselbe recht strenge auswendig lernen zu lassen, und nicht etwa durch allerlei Künsteleien die Kinder dieser Arbeit überheben zu wollen. Auch das Gedächtniß will und muß geübt werden. Man glaube doch ja nicht, daß Auswendiglernen und Gedankenlosigkeit zwei unzertrennliche Dinge sind. Nur muß man freilich den Kindern kein gedrucktes Einmaleins in die Hände geben, sondern sie lehren, sich dasselbe selbst zu machen, entweder auf die gleich zu beschreibende Art in Form eines Vierecks, oder auch auf die gewöhnliche bekannte Art, welches eben so leicht ist. Beobachtet man nur dies, so ist nicht zu besorgen, daß man sie durch Auswendiglernen des Einmaleins zu bloßen Multiplicirmaschinen machen werde.

Die

Die Producte von jeden zwei einziffrigen Zahlen aber lassen sich sehr leicht durch bloße Addition finden. Zu dem Ende schreibe man die Zahlen 1, 2, 3 rc. bis 9, oder wenn man will bis 10 in einer Reihe hin.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.	30
4.	8.	12.	16.	20.	24.	28.	32.	36.	40
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50
6.	12.	18.	24.	30.	36.	42.	48.	54.	60
7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70
8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	72.	80
9.	18.	27.	36.	45.	54.	63.	72.	81.	90

Unter dieser Reihe schreibe man in einer zweiten Zeile jede dieser Zahlen doppelt, nemlich 2, 4, 6 rc. Nun addire man jede zwei in diesen beiden Zeilen über einander stehende Zahlen. Diese Summen geben die 3te Zeile 3, 6, 9 rc. Die vierte Zeile 4, 8, 12 rc. erhält man durch Addition der 3ten und 1sten Zeile, (mit Auslassung der 2ten). Die 5te Zeile 5, 10, 15 rc. wird durch Addition der 4ten und 1sten Zeile, (mit Auslassung der 2ten und 3ten) gefunden. Und so fährt man immer fort, zu der zuletzt gefundenen Zeile die erste zu addiren, mit Weglassung aller dazwischen liegenden, bis man 9 Zeilen hat.

Eine solche Productentafel ist nicht schwer zu verstehen. In der ersten Zeile hat man nemlich jede einziffrige Zahl einfach. In der 2ten Zeile hat man jede dieser Zahlen 2 mal. In der 3ten hat man jede 3 mal, in der 4ten 4 mal u. s. f. Nimmt man also in der obern Zeile irgend eine Zahl, z. B. 7, so steht gleich darunter ihr doppeltes 14, in der 3ten Zeile findet man 21, das ist 3 mal 7; in der 4ten 28, d. i. 4 mal 7; in der 5ten 35, d. i. 5 mal 7; u. s. f.

Um also irgend ein Product von 2 einziffrigen Zahlen, z. B. 6 mal 8 aufzusuchen, sucht man 8 in der obern Reihe, und steigt senkrecht herab, bis man zu derjenigen Zeile kommt, die sich vorne in der ersten Säule mit 6 anfängt, wo man 48 finden wird.

Beim Auswendiglernen mag man es bei der gewöhnlichen Form des Einmaleins lassen, nur muß man beim Durchfragen öfters die Zahlen umkehren, und z. B. statt: wie viel 7 mal 8 mache, bisweilen fragen, wie viel 8 mal 7 sey? auch muß man Fragen mit 0 und 1, die im gewöhnlichen Einmaleins nicht stehen, mit einmischen; als: wieviel 0 mal 3, oder 3 mal 0; 7 mal 1, oder 1 mal 7 sey, u. d. g. m.

Sind die Kinder erst im Einmaleins etwas geübt, so rathe ich gleich zum schriftlichen Multipliciren, und zwar nach der in den folgenden § § beobachteten Ordnung fortzugehen, wobei man ihnen anfänglich wohl die Erleichterung gestatten darf,

darf, daß sie beim Rechnen eine solche kleine selbst gemachte Productentafel, wie wir oben gemacht haben, vor sich nehmen dürfen.

Multiplication einer vielziffrigen Zahl mit einer einziffrigen.

§. 40.

Man macht, ohne Rücksicht darauf zu nehmen, welche von beiden Zahlen eigentlich der Multiplicator seyn soll, die kleinere zum Multiplicator. Dann fängt man von der rechten Seite an, und multiplicirt nach der Reihe jede einzelne Ziffer der vielziffrigen Zahl mit der einziffrigen. Ist ein solches Product zweier Ziffern einziffrig, so wird es ganz hingeschrieben, und zwar in gerader Linie unter der multiplicirten Ziffer. Ist es aber zweiziffrig, so schreibt man bloß seine letzte Ziffer rechter Hand herunter, die Ziffer linker Hand aber behält man im Sinn, um sie zu dem nächst folgenden Product hinzu zu zählen. Das ganze Product bekommt eben die Benennung, welche der Multiplicandus hat.

Gesetzt es sollen 4 Thl. mit 3 947 242 multiplicirt werden, so daß also 4 Thl. eigentlich der Multiplicandus ist (§. 32); so macht man 4 zum Multiplicator, und sagt, 4 mal 2 ist 8. Diese 8 wird ganz gerade herunter unter die multiplicirte 2 geschrie-

3 947 242	
	4 Thl.
15 788 968	Thl.

schrieben. Weiter ist 4 mal 4 = 16, wovon nur die 6 herunter kommt, 1 aber im Sinn behalten wird. Ferner ist 4 mal 2 = 8 und hierzu die im Sinn behaltene 1 gezählt, giebt 9. Weiter ist 4 mal 7 = 28, wovon 8 hingeschrieben und 2 im Sinn behalten werden. Weiter ist 4 mal 4 = 16, und die im Sinn behaltene 2 zugezählt, giebt 18. 8 wird hingeschrieben und 1 im Sinn behalten. Dann ist 4 mal 9 = 36, und 1 dazu ist 37, wovon die 7 hingeschrieben und 3 im Sinn behalten werden; endlich ist 4 mal 3 = 12, und 3 dazu ist 15, welches, weil es das letzte Product ist, ganz hingeschrieben wird.

Uebungsbeispiele.

30) 2 mal 41 342 Pfund.
31) 153 406 mal 3 Thaler.
32) 580 763 × 5.
33) 7 × 825 716.
34) 758 196 . 8.
35) 9 . 9 576 038.

Die Richtigkeit der Rechnung beruhet auf folgenden Gründen. Nach §. 35 darf Multiplicator und Multiplicandus verwechselt werden, also darf ich in jedem Fall die kleinere Zahl als Multiplicator ansehen.

Ferner darf nach §. 36 die Multiplication stückweise geschehn. Indem aber irgend eine Ziffer

fer der größern Zahl, z. B. im obigen Exempel 7, welche Tausende bedeutet, mit 4 multiplicirt wird, so muß nach §. 34 das Produkt 28 mit der 7 gleiche Einheiten haben, also auch Tausende bedeuten. Da aber in der Stelle der Tausende nur eine Ziffer stehen kann, so kann nur die 8 gerade herunter in die Stelle der Tausende gesetzt werden, die 2 aber, welche nach §. 4 zehnmal größere Einheiten als 8 anzeigt, muß zu dem Product der nächsten Stelle gezählt werden. Aehnliche Schlüsse können bei jeder andern Ziffer der größern Zahl gemacht werden.

Endlich muß das ganze Product nach §. 34 eben die Benennung erhalten, welche im Exempel der eigentliche Multiplicandes (im Exempel 4 Thl.) hatte.

Multiplication einer vielziffrigen Zahl, mit einer einzelnen Ziffer, an der eine oder mehr Nullen hängen.

§. 41.

Die Zahl mit den Nullen nimmt man für den Multiplicator, und multiplicirt dann mit der ersten Ziffer derselben, völlig so, wie im vorigen, nur werden zuletzt an das Product gerade so viele Nullen angehängt, als der Multiplicator Nullen hat.

Ge-

Gesetzt es sollen 70 000 Thl. mit 14 829 multiplicirt werden, so wird der Aufsatz und die Rechnung wie hier an der Seite gemacht. Die Rechnung selbst bedarf keiner weitern Erläuterung.

```
  14 829
      70 000
---------------
1 038 030 000
```

Uebungsbeispiele.

36) 907 516 × 10.
37) 184 032 × 20.
38) 300 × 700 839.
39) 50 × 17 094.
40) 643 123 × 700.
41) 9 876 × 9000.

Ehe wir den Grund dieser Rechnung deutlich machen können, müssen wir eine Eigenschaft aller Zahlen, die mit unsern Ziffern geschrieben sind, erklären.

Wird an eine Zahl, z. B. 3 847, eine Null angehängt (38 470), so wird die Zahl dadurch 10 mal größer, oder mit 10 multiplicirt. Denn durch die angehängte Null rückt jede Ziffer um eine Stelle weiter gegen die linke Hand fort, d. h. die Ziffer (7), welche vorher die 1ste Stelle rechter Hand hatte, hat jetzt die 2te; diejenige (4), welche vorher die 2te hatte, hat jetzt die 3te u. s. w. Folglich sind nach §. 4 die Einheiten jeder Ziffer zehnmal größer geworden, und da alle Einheiten der Ziffern als Stücke anzuse-

hen

hen sind, woraus die ganze Zahl besteht, so muß nach §. 36 die ganze Zahl 10 mal größer geworden seyn.

Hängt man eine zweite Null an, (384 700), so ist die ganze Zahl 100 mal, und wenn 3 Nullen angehängt werden (3 847 000), 1000 mal, und wenn 4 Nullen angehängt werden (38 470 000), 10 000 mal größer geworden u. s. f.

Dies vorausgesetzt, so ist der Grund unserer obigen Rechnung leicht einzusehen. Man rechne folgende beide Exempel.

14 829	14 829
7	70 000
103 803	1 038 030 000

Das letztere ist mit dem oben gerechneten völlig einerlei, das erste aber hat bloß 7 zum Multiplicator. Die Richtigkeit des ersten Exempels ist aus §. 40 klar. Im 2ten Exempel aber ist der Multiplicator nach dem, was oben erklärt worden, 10 000 mal größer, als im ersten Exempel; also muß nach §. 37 auch das Product 10 000 mal größer seyn, d. h. es müssen ihm 4 Nullen angehängt werden.

Mul=

Multiplication zweier vielziffrigen Zahlen, die am Ende keine Nullen haben.

§. 42.

Man nimmt auch hier am bequemsten die kleinere Zahl für den Multiplicator an, und schreibt sie unter einander, dann macht man so viele Multiplicationen, als der Multiplicator Ziffern hat, indem man nach §. 40 die obere Zahl erst mit der rechter Hand befindlichen ersten Ziffer des Multiplicators, dann mit der 2ten, ferner mit der 3ten, dann mit der 4ten Ziffer ꝛc. multiplicirt, bis alle Ziffern des Multiplicators in Rechnung gekommen sind. Auf diese Art erhält man so viel Zeilen als Ziffern im Multiplicator sind. Nur dürfen diese Zeilen nicht so unter einander gesetzt werden, daß die letzten Ziffern auf der rechten Seite, wie beim Addiren, in einer geraden Säule unter einander zu stehen kämen; sondern man setzt während dem Rechnen die letzte Ziffer jeder Zeile (die natürlich zuerst geschrieben wird, weil man immer von der rechten Seite an rechnet) in gerader Linie unter die Ziffer, mit der man oben multiplicirt. Nullen in der Mitte des Multiplicators überspringt man ganz. Sind alle Zeilen richtig gestellt, so addirt man sie zuletzt, und ihre Summe ist das verlangte Product.

Es

Es sollen z. B. 3 496 Pfund mit 2 048 multiplicirt werden: so wird die Zahl 3 496 erst mit 8 multiplicirt, dies ist in der ersten Zeile unter dem Striche geschehen. Dann wird sie mit 4 multiplicirt, welches in der 2ten Zeile geschehen ist; nur muß die letzte Ziffer 4 nicht unter die 8, sondern unter die 6 der ersten Zeile gesetzt werden, d. h. gerade unter die Zahl 4, mit der man multiplicirt. Die im Multiplicator folgende 0 wird übersprungen. Die dritte Zeile unter dem Strich aber, die aus der Multiplication mit 2 entspringt, muß in gerader Linie unter der 2 (also unter 9 der mittlern Reihe) angefangen werden. Zuletzt wird von der rechten Seite an alles, was gerade über einander stehet, addirt.

```
  3 496 Pfund.
  2 048
  ------
 27 968
139 84
6 992
-------
7 159 808 Pfund.
```

Uebungsbeispiele.

42) 2 598 Pfund, multiplicirt mit 13.
43) 29 Pfund, 18 017 mal.
44) 51 997 × 37.
45) 714 382 × 47.
46) 431 149 × 73.
47) 642 893 . 86.
48) 151 562 . 145.
49) 6 917 . 237.

50)

50)	5 025	.	246.
51)	13 918	×	427.
52)	29 597	×	1 416.
53)	25 755	×	1 592.
54)	3 735	×	2 137.
55)	2 845	×	3 136.

Um sich von der Richtigkeit der Rechnung zu überzeugen, schreibe man das oben berechnete Exempel noch einmal, aber so, daß man zwischen den beiden Strichen diejenigen Zeilen, welche auf der rechten Seite zu kurz sind, durch Hinzufügung von Nullen, so lang als die erste Zeile macht, welches offenbar im Product nichts ändern kann. Hier ist nun klar, daß die erste Zeile unter dem Strich 8 mal größer sey, als der Multiplicandus. Die 2te Zeile ist, wenn man die 0 am Ende wegläßt, 4 mal größer als der Multiplicandus; **mit der Null** ist sie also, nach dem was im 41sten §. in Ansehung der Nullen gezeigt worden, 40 mal größer als der Multiplicandus. Die 3te Zeile ist ohne die Nullen 2 mal größer, **mit 3 Nullen** also 2 000 mal größer als der Multiplicandus.

3 496
2 048
27 968
139 840
6 992 000
7 159 808

Da also der Multiplicandus

in der	1sten	Zeile	8	mal
— —	2 —	—	40	—
— —	3 —	—	2 000	—

ent-

enthalten ist, so ist augenscheinlich, daß in der Summe dieser 3 Zeilen der Multiplicandus 2 048 mal enthalten sey. Die gefundene Zahl ist folglich unwiedersprechlich das richtige Product.

Multiplicationen, wo an beiden Factoren Nullen hängen.

§. 43.

In diesem Fall läßt man erst von beiden Zahlen die Nullen weg, und schreibt dann diejenige, welche nun die kleinere ist, unter die größere. Dann erst hängt man wieder die Nullen an, und zwar an die obere geradezu, an die untere aber so, daß sie sämtlich hinter den Nullen der obern zu stehen kommen. Diese ganze Art des Aufsatzes ist eben nicht nothwendig, aber bequem.

Dann multiplicirt man, wie im vorigen §., als ob keine Nullen da wären. Endlich hängt man an das Product so viele Nullen an, als oben in beiden Factoren zusammen genommen stehen.

Es soll z. B. 437 000 mit 348 200 multiplicirt werden, so sieht die Rechnung so aus, wozu hoffentlich keine nähere Erläuterung nöthig seyn wird.

```
    348 200
     43 7     000
  ----------------
  2 437 4
 10 446
139 28
  ----------------
252 163 400 000
```

Uebungsbeispiele.

56)		147 350	×	140.
57)		9 650	×	2 500.
58)		71 583	×	3 700.
59)		494 800	×	51 000.
60)	11	340 700	×	730.
61)		532 690	×	79 000.
62)		61 985	×	83 000.
63)		809 600	×	95 000.

Der Grund dieses Verfahrens ist folgender: Man streiche alle Nullen aus den beiden Factoren und aus dem Producte weg, so ist die Rechnung nach dem vorigen §. richtig.

Nun hänge man an den Multiplicandus 2 Nullen, so wird er 100 mal größer (§. 41.), also muß auch das Product 100 mal größer werden (§. 37), d. h. es muß auch 2 Nullen bekommen (§. 41).

Endlich hänge man wieder an den Multiplicator seine 3 Nullen, so wird er dadurch 1000 mal größer (§. 41); also muß auch das Product noch 1000 mal größer werden (§. 37), d. h. es muß noch 3 Nullen bekommen (§. 41).

Man sieht leicht, daß in jedem ähnlichen Fall ähnliche Schlüsse statt finden, und daß also in jedem solchen Falle dem Producte gerade so viele Nullen angehängt werden müssen, als in beiden Factoren zusammen sind.

Zerfällung der Zahlen in ihre Bestandtheile oder Factore.

§. 44.

Um uns schon hier den Weg zu einigen Vortheilen beim Multipliciren zu bahnen, wollen wir hier eine Sache berühren, deren vollständige Abhandlung nicht in ein praktisches Rechenbuch gehört, wovon aber das, was wir hier brauchen können, so leicht ist, daß es jedes Kind ohne Schwierigkeit begreifen kann.

Eine Zahl in zwei Factoren zerfällen, heißt zwei Zahlen finden, die mit einander multiplicirt die gegebene Zahl hervorbringen. So kann z. B. 56 in die Factoren 7 und 8 zerfällt werden, weil $7 \cdot 8 = 56$. Eben so 35 in 5 und 7, weil $5 \times 7 = 35$. u. d. g. m.

Nicht jede Zahl läßt sich in Factore zerfällen, wie z. B. 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 u. s. w. Dergleichen Zahlen nennt man **einfache Zahlen** (auch Primzahlen), so wie alle, die sich zerfällen lassen, **zusammengesetzte Zahlen**. Bei großen Zahlen aber ist es oft schwer, die Factoren zu finden, wenn auch die Zahlen nicht einfach sind. So wird man z. B. durch bloßes Suchen und Rathen lange arbeiten müssen, die Zahl 4171 in die beiden Factoren 43 und 97 zu zerlegen.

Indessen würde doch für die Anwendung auf Rechnungen des gemeinen Lebens der Nutzen

nicht erheblich seyn, wenn man auch noch so leichte Regeln zu dergleichen Zerfällungen angeben könnte. Dagegen sind die Zerfällungen bei kleinen Zahlen, besonders unter 100 leicht, und können oft sehr gute Vortheile gewähren.

Für unsern gegenwärtigen Zweck ist es schon genug, dergleichen Zerfällungen aus dem bloßen Einmaleins zu nehmen. Wer dies gut im Gedächtniß hat, wird die meisten zusammengesetzten Zahlen unter 100 in zwei Factoren zerfällen können. Und diejenigen, welche aus dem Einmaleins nicht zerfällt werden können, würden hier auch keine beträchtlichen Vortheile gewähren. Etwas mehr hierüber werden wir indessen beim Dividiren sagen.

Vortheile beim Multipliciren.

§. 45.

Beim Multipliciren lassen sich mancherlei Vortheile anbringen, von denen wir die wichtigsten hier durchgehen wollen.

a) Erweiterung des Einmaleins.

Zuerst thut man sehr wohl, wenn man sich das Einmaleins ein wenig über die gewöhnlichen Gränzen hinaus erweitert. In einigen ältern Rechenbüchern hat man indeß diese Erweiterung unter dem Namen des **großen Einmaleins** übertrieben, indem man die Producte, welche die

Zahlen

Zahlen 1, 2, 3=9, mit 11, 12, 13, 14, 15, 16 rc. geben, und die geradezu im gewöhnlichen Einmaleins nicht stehen, hinzufügte. Wäre es einem Menschen zuzumuthen, daß er gegen tausend Producte im Gedächtniß behielte, so würde es allerdings sehr gut seyn, das Einmaleins auf diese Art bis zu dem Vielfachen von 99 zu erweitern. Denn käme nun z. B. ein 4ziffriger Multiplicator vor, etwa 3458, wo wir jetzt 4 Multiplicationen machen müssen, da würde man mit zweien ausreichen, indem man einmal die Hauptzahl mit 58 und dann mit 34 multiplicirte, wozu jedesmal nur eine Zeile erforderlich wäre. Aber ein solches Einmaleins ist schon zu weitläuftig, wenn es auch nur bis zu dem Vielfachen von 24 oder 30 fortgeführt wird. Es giebt aber unter den Zahlen über 10, einige, die in Rechnungen von allen Arten bei weitem öfter als andere vorkommen, hauptsächlich, weil nach ihnen Eintheilungen von gewöhnlichen Münzen, Maßen, Gewichten u. d. g. gemacht sind. Dergleichen sind die Zahlen 12 (die bei der Eintheilung des Geldes, des Jahres, des Fußmaßes, desgleichen bei Dutzenden u. d. g. vorkommen), 15 (bei Dingen, die nach Mandeln gezählt werden), 16 (bei der Eintheilung des Scheffels in Metzen, des Guldens in Groschen rc.), 24 (bei der Eintheilung des Thalers in Groschen), 32 (bei der Eintheilung des Pfundes im Lothe).

Man mache also zu dem §. 39 berechneten Einmaleins noch folgenden Zusatz, wo wir außer den genannten Zahlen noch 11 und 25, wegen der Leichtigkeit, mit der sich ihre Producte finden und behalten lassen, mitgenommen haben.

1	11	12	15	16	24	25	32
2	22	24	30	32	48	50	64
3	33	36	45	48	72	75	96
4	44	48	60	64	96	100	128
5	55	60	75	80	120	125	160
6	66	72	90	96	144	150	192
7	77	84	105	112	168	175	224
8	88	96	120	128	192	200	256
9	99	108	135	144	216	225	288
10	110	120	150	160	240	250	320

Meine Meinung ist nicht, daß man Kinder zwingen solle, diesen Zusatz nach der Reihe streng auswendig zu lernen, sondern man lasse sie gelegen ch eine und die andere Säule lernen, nicht nach der Reihe, wie sie da stehen, sondern nach der Ordnung, in der sie am leichtesten zu lernen sind, oder wie die Zahlen, deren Vielfache sie enthalten, fürs Rechnen am wichtigsten sind. Am leichtesten behält man, wie viel 1 mal 11, 2 mal 11, 3 mal 11 rc. sey, ja man lernt dies, so zu sagen, ohne es zu lernen, wenn man die Säule, wo oben 11 steht, nnr ein einzigesmal mit Aufmerksamkeit angesehen hat. Mit dieser Säule mache man also den Anfang, dann lasse man die Säule folgen, wo oben 12 steht, weil diese Zahl

hän-

häufiger als irgend eine andere beim Rechnen vorkommt. Statt die Kinder lernen zu lassen, 1 mal 12 ist 12; 2 mal 12 ist 24; 3 mal 12 ist 36; u. s. f. kann man sie auch lernen lassen, 1 Gr. hat 12 Pfennige; 2 Gr. haben 24 Pf.; 3 Gr. haben 36 Pf. u. s. w. Dann folge die Säule 24: wo die Kinder lernen können 1 Thl. hat 24 Gr.; 2 Thl. haben 48 Gr.; 3 Thl. haben 72 Gr. u. s. f. Läßt man es auch nur bei diesen 3 Säulen bewenden, so giebt dies doch schon fast in allen Arten von Rechnungen gute Abkürzungen, welches wir noch durch ein Paar Beispiele erläutern wollen.

3 738 (11	7 624 (12	6 356 (24
41 118	91 488	152 544

Im ersten Exempel wird so gerechnet: 11 mal 8 ist 88, also wird 8 hingeschrieben, und 8 im Sinn behalten; ferner 11 mal 3 ist 33 und 8 dazu ist 41, also wird 1 hingeschrieben und 4 im Sinn behalten u. s. f. Im 2ten Exempel sagt man: 12 mal 4 ist 48, also wird 8 hingeschrieben, und 4 im Sinn behalten; ferner 12 mal 2 ist 24 und 4 dazu ist 28, also wird 8 hingeschrieben, und 2 im Sinn behalten, u. s. f. Im 3ten Exempel sagt man: 12 mal 6 ist 144, also wird 4 hingeschrieben und 14 im Sinn behalten; ferner 24 mal 5 ist 120, und 14 dazu ist 134, also wird 4 hingeschrieben und 13 im Sinn behalten u. s. f.

Uebungsbeispiele.

64) 3 214 × 11.
65) 34 628 × 11.

66) 752 908 × 11.
67) 4 621 × 12.
68) 26 934 × 12.
69) 566 314 × 12.
70) 3 342 × 24.
71) 6 754 × 24.
72) 49 845 × 24.
73) 3 624 × 16.
74) 4 516 × 15.
75) 8 436 × 25.
76) 1 867 × 32.

Die Exempel 73 bis 76, selbst auch 70 bis 72, können auch, wenn man den dabei nöthigen Theil des erweiterten Einmaleins noch nicht im Kopfe hat, mit Anwendung des zunächst zu erklärenden Vortheils gerechnet werden.

b) Zerfällung des einen Factors.

Wenn einer von beiden Factoren eine Zahl ist, die sich bequem zerfällen läßt (§. 44), so zerfälle man sie, und multiplicire die andere gegebene Zahl erst mit dem einen Bestandtheil der zerfällten Zahl, und was herauskommt, mit dem andern, so erspart man ein Paar Zeilen und eine Addition.

Z. B. 3 649 × 54. Da 54 = 6 × 9, so multiplicire man 3 649 erst mit 6, so kommt 21 894 heraus. Diese Zahl multiplicire man mit 9, so kommt 197 046 heraus, welches das gesuchte Product ist.

3 649 (6
21 894 (9
197 046

Um

Um sich von der Richtigkeit der Regel zu überzeugen, mache man sich die Sache sinnlich, 3 649 mögen Thaler seyn. Man fülle 6 Beutel, jeden mit 3 649 Thalern; so hat man in allen sechsen 21 894 Thaler. Man fülle 6 andere Beutel auf der Art, und noch 6 andere, und noch 6 andere rc., bis man 9 mal dergleichen 6 Beutel gefüllt hat. Man nehme nun neun andere große Beutel, und fülle in jeden 6 solche kleinere Beutel; so hat man in allen zusammen 9 mal 21 894 Thaler, d. h. so viel als in der 3ten Zeile steht, nemlich 197 046 Thaler. Da aber in jedem der großen Beutel 6 kleine stecken, so hat man in allen neun großen Beuteln 9 mal 6 d. i. 54 kleine Beutel. Aber in jedem kleinen Beutel sind 3 649 Thaler enthalten. Also hat man offenbar in allem zusammen 54 mal 3 649 Thaler; und dies war, was gesucht wurde.

Durch ein ähnliches Bild wird man sich in jedem Falle eine Multiplication durch Zerfällung deutlich machen können.

Uebungsbeispiele.

77) 562 105 × 16.
78) 719 542 × 18.
79) 407 368 × 32.
80) 61 598 × 42.
81) 513 204 × 45.
82) 301 563 × 56.

83) 138 709 × 63.
84) 99 246 × 72.

c) Veränderung des einen Factors um etliche Einheiten.

Ein anderer Vortheil, dessen wir hier erwähnen wollen, läßt sich bei solchen Exempeln anwenden, wo die eine Zahl nur um wenige Einheiten kleiner ist, als irgend eine Zahl, die mit einer einzigen Ziffer und Nullen geschrieben wird. Denn alsdenn multiplicirt man mit der runden Zahl, und was man zuviel erhält, zieht man wieder ab.

Es soll z. B. 5 836 mit 399 multiplicirt werden, welches 400 — 1 ist: so multiplicire man 5 836 erst mit der runden Zahl 400 (nach §. 40). Dies ist hier in der ersten Zeile unter dem Strich geschehen. Weil ich aber auf diese Art 5 836 einmal zu oft erhalte, so setze ich es in der 2ten Zeile einmal darunter und subtrahire, so muß der Rest das richtige Product seyn.

```
  5 836 × 399
-------------
2 334 400| 400
    5 836|— 1
-------------
2 328 564
```

Oder es soll 758 mit der Zahl 7991 multiplicirt werden; da die letztere Zahl 8000 — 9 ist, so multiplicire ich 758 erst mit 8000; weil ich sie aber auf diese Art 9 mal zu oft be-

```
  758 × 7991
-------------
6 064 000|8000
    6 822|— 9
-------------
6 057 178
```

bekomme, so multiplicire ich 758 noch mit 9, welches in der 2ten Zeile unter dem Strich geschehen ist, und ziehe dies Product vom vorigen ab, so wird im Reste die Zahl 758 nur noch 7 991 mal enthalten seyn.

Uebungsbeispiele.

85) 402 317 × 99.
86) 87 025 × 298.
87) 91 406 × 397.
88) 46 389 × 496.
89) 200 413 × 598.
90) 6 987 × 699.
91) 4 269 × 798.
92) 32 198 × 896.

d) Eine Tabelle der Vielfachen von der Hauptzahl.

Es kommt bisweilen der Fall vor, daß man eine Menge von Multiplicationen machen soll, wo der eine Factor in allen Exempeln vorkommt, und nur der andere verschieden ist. In diesem Falle thut man wohl, diesen gemeinschaftlichen Factor zum Multiplicandus zu machen, und sich im Voraus eine kleine Tafel, von seinem doppelten 3 fachen, 4 fachen rc. bis zum 10 fachen zu berechnen, welches auf ähnliche Art, als wir oben §. 38 das Einmaleins berechnet haben, durch bloße Addition geschehen kann. Hat man eine solche Tafel, so besteht die Rechnung der einzelnen

Ex-

Exempel fast in einem bloßen Abschreiben, auch ist man weniger in Gefahr Rechnungsfehler zu machen.

Gesetzt es sollten 1) 3 416 Thl. 2) 592 Thl. 3) 1 786, u. s. f. sämtlich mit 769 multiplicirt werden, so sehe man 769 als den Multiplicandus an, und nehme wie folgt

1)	769
2)	1 538
3)	2 307
4)	3 076
5)	3 845
6)	4 614
7)	5 383
8)	6 152
9)	6 921
10)	7 690

1)	769
	3 416
	4 614
	7 69
	307 6
2	307
2	626 904

2)	769
	592
1	538
69	21
384	5
455	248

3)	769
1	786
4	614
61	52
538	3
769	
1373	434

Die Tafel der Vielfachen von 769 hier linker Hand, wird nemlich so gemacht: was in der 2ten Zeile steht (1538) ist das doppelte von 769 Die Addition der 2ten und 1sten Zeile, giebt die

3te.

3te. Die Addition der 3ten und 1sten, giebt die 4te. Die Addition der 4ten und 1sten Zeile, giebt die 5te u. s. w. kurz man muß immer die letzte und erste Zeile addiren, bis man 10 Zeilen hat. Die 10te könnte man weglassen; aber sie dient zu einer sehr leichten Probe der ganzen Tafel, weil sie die erste Zahl mit einer Null enthalten muß, wenn nirgends gefehlt worden.

Der Gebrauch dieser Tafel ist sehr leicht. Z. B. anstatt im ersten Exempel mit 6 zu multipliciren, schreibe ich bloß die 6te Zeile der Tafel ab. Dann folgt das einfache oder 769 selbst. Dann soll mit 4 multipliciret werden, statt dessen die 4te Zeile der Tafel abgeschrieben wird; und eben so wird endlich statt mit 3 zu multipliciren, die 3te Zeile der Tafel hingeschrieben. Nur müssen die abgeschriebenen Zahlen, nach §. 42. gehörig eingerückt werden. Die übrigen Exempel sind eben so gerechnet.

Vermittelst einer solchen Tafel kann man also multipliciren, ohne das Einmaleins zu können. Aber es wäre nicht rathsam, Kinder von Anfang an, ehe sie das Einmaleins gelernt haben, damit bekannt zu machen. Uebrigens ist eine solche Tafel auch bei einzelnen großen Exempeln brauchbar.

Uebungsbeispiele.

93) Wenn 1 Centner feiner Zucker 53 Thaler kostete, was würden folgende Quantitäten

titäten kosten? a) 17 Centner; b) 36 Cent. c) 29 Cent. d) 245 Cent. e) 83 Cent.

94) Auf einen Thaler gehen 288 Pfennige: wie viel Pfennige würde also jede von folgenden Summen betragen? a) 19 Thl. b) 34 Thl. c) 247 Thl. d) 587 Thl. e) 34 659 Thl.

Vom Multipliciren im Kopfe.

§. 46.

Größere Multiplicationen im Kopfe zu machen, ist eine Sache, die selbst Geübten schwer wird. Dagegen aber bringen es Kinder leicht dahin, eine ein- zwei- auch wohl dreiziffrige Zahl, mit einer einziffrigen im Kopfe zu multipliciren. Die leichteste und sicherste Art ist immer die, daß man sich im Kopfe die Zahlen gleichsam geschrieben vorstellt, und dann wie auf dem Papiere rechnet. Daher muß das schriftliche Multipliciren vorausgehen.

Mit einer zweiziffrigen Zahl zu multipliciren ist schon beschwerlicher, außer wenn sich die Zahl zerfällen läßt, und der Multiplicandus nicht groß ist. Soll man z. B. 47 mit 45 multipliciren, so zerfälle man 45 in 5 mal 9. Dann rechnet sich

sich ziemlich leicht im Kopfe, daß 9 mal 47 = 423, und 5 mal 423 = 2115 u. d. g. m.

Proben der Multiplication.

§. 47.

Aufmerksames und doppeltes Durchrechnen, vertritt auch bei der Multiplication am sichersten die Stelle der Proben. Indessen ist bei dieser Rechnungsart auch die Neunprobe nicht unbrauchbar. Zu dem Ende zählt man in jedem Factor die Ziffern zusammen, läßt aber 9 weg, so oft es angeht. Die Reste, welche jeder der beiden Factoren läßt, multiplicirt man, und wenn das Product über 9 ist, so läßt man 9 wieder weg, so oft es angeht. Ist nun das Exempel richtig gerechnet, so muß dieser zuletzt erwähnter Rest mit demjenigen übereinstimmen, den das Product giebt, wenn man seine Ziffern auf eben die Art zusammen zählt.

8 752	4	Hier rechnet man
685	1	8 + 7 = 15, hievon
43 760	4	9 ab bleibt 6; ferner
700 16		6 + 5 = 11, hievon
5251 2		9 ab, läßt 2; endlich
5995 120	4	2 + 2 = 4 welches der Rest der Hauptzahl ist.

Bei

Bei der Zusammensetzungszahl bleibt durch ähnliches Zusammenzählen der Rest 1.

Da nun $1 \times 4 = 4$, so muß das Zusammengesetzte den Rest 4 geben, wenn seine Ziffern mit Weglassung der Neunen zusammen gezählt werden, welches hier auch zutrifft.

Fünf-

Fünfter Abschnitt.

Vom Zersetzen oder Dividiren unbenannter oder einfachbenannter Zahlen.

Erklärung der Division.

§. 47.

Die Erklärung des **Dividirens** oder **Zersetzens** ist zwar an sich nicht schwierig, bedarf aber doch einer etwas umständlichern Entwickelung, als die Erklärungen der übrigen Rechnungsarten.

Wenn eine Zahl, z. B. 63, durch eine andere, z. B. 7, dividirt werden soll, so heißt dies: es soll 63 als ein Product von zwei Factoren angesehen werden, von denen der eine 7 ist, der andere aber (der in diesem Fall 9 seyn würde) gesucht wird.

Man sieht hieraus, daß die Division eine entgegengesetzte Arbeit von der Multiplication ist.

Ein Größe mit einer Zahl dividiren, heißt eine andere Größe finden, welche in der ersten so viel Mal enthalten ist, als diese in jener Zahl.

Beim Multipliciren werden beide Factoren gegeben, und ihr Product gesucht: beim Dividiren aber wird das Product und ein Factor gegeben, der andere Factor aber gesucht.

Anm. Diese Erklärung weicht etwas von den Erklärungen ab, die man in den gewöhnlichen Rechenbüchern findet. Ich bin aber überzeugt, daß kein Leser, die Zeit und Mühe, die er etwa aufwenden müßte, um sich alles ganz deutlich zu machen, wird bereuen dürfen. Ich will daher hier noch eine scheinbare Schwierigkeit lösen, die vielleicht einem aufmerksamen Leser einfallen könnte. Wenn ich, könnte Jemand sagen, allezeit die Zahl, die ich dividiren will, als ein Product von zwei Zahlen ansehen soll, so folgt, daß ich jede Zahl muß als ein Product von zwei andern ansehen können, und dies geht doch nicht bei allen Zahlen an. Gesetzt ich sollte 19 durch 4 dividiren, so giebt es doch keine Zahl, die mit 4 multiplicirt 19 gäbe. Alle diese Schlüsse sind vollkommen richtig, wenn der andere Factor, der gesucht wird, schlechterdings immer eine ganze Zahl seyn müßte. Darf man aber dabei einen Bruch mitnehmen, so giebt es allerdings eine Zahl, die mit 4 multiplicirt 19 giebt, nemlich 4 und drei Viertel. Wirklich ist dies auch beim Dividiren der gewöhnlichste Fall, daß die gesuchte Zahl aus Ganzen und Brüchen besteht.

Fortgesetzte Erörterung.

§. 49.

Die im vorigen § angegebene Erklärung ist ganz allgemein, und kann, wie wir in der Folge sehen werden, selbst auf Brüche angewendet werden,

den. Indessen ist es zur Deutlichkeit sehr nützlich, sie in ihrer Anwendung auf ganze Zahlen, noch besonders zu erörtern.

Bei ganzen Zahlen kommt also das Dividiren in zweierlei Bedeutung vor, die sich indessen beide aus der obigen Erklärung ableiten lassen. Es heißt nemlich Dividiren, entweder

1) untersuchen, wie vielmal eine Zahl in einer andern enthalten sey,
2) oder einen vorgeschriebenen Theil einer Zahl ausrechnen.

Wenn z. B. jemand den 3ten Theil von 12 Gr. zu wissen verlangt, so ist die Antwort, **vier Groschen.** — Will aber jemand wissen, wie vielmal 3 Gr. in 12 Gr. enthalten sind, so ist die Antwort, **viermal.** — In beiden Fällen sind dieselben Zahlen, nemlich 3 und 12 gegeben. In beiden Fällen ist auch die Antwort, was die Zahl betrift, einerlei, nemlich 4, und wird auch durch einerlei Rechnung, nemlich durch die Division, gefunden. Demohngeachtet wird jeder leicht begreifen, daß beide Fragen nicht einerlei sind, so wie auch die Antworten 4 **Groschen**, und 4 **mal** nicht einerlei sind.

Diese verschiedene Bedeutung des Wortes Dividiren hat eigentlich ihren Grund in der Multiplication, nemlich in dem Unterschied des Multipli-

tiplicandus und Multiplicators. In der Multiplication war nemlich ein Multiplicandus und Multiplicator gegeben, und daraus wurde das Product gesucht. Beim Dividiren ist umgekehrt das Product und ein Factor gegeben, und daraus wird der andere Factor gesucht.

In der Multiplication sage ich z. B.

7 Pfund
5 mal genommen
sind 35 Pfund.

Hieraus entstehen aber, wenn ich die Frage umkehre, und das Product nebst einem Factor als gegeben ansehe, zweierlei Fragen; nemlich:

1) Wie vielmal ist 7 Pfund
in 35 Pfund enthalten?
Antwort 5 mal.

2) Wie viel beträgt der 5te Theil
von 35 Pfund?
Antwort 7 Pfund.

In der ersten Frage ist der Multiplicandus der gegebene Factor, und man will wissen, **wie oft er in 35 enthalten sey.**

In der andern Frage ist der Multiplicator der gegebene Factor, und man will **den 5ten Theil von 35** wissen.

Aus

Aus den bisherigen folgt so viel:

Wenn Jemanden im gemeinen Leben ein Fall vorkommt, wo er gern wissen möchte, wie vielmal eine Zahl in einer andern enthalten sey, z. B. wenn Jemand weiß, daß 110 Pfund einen Centner mache, und er wollte gern wissen, wie viel Centner 8800 Pfund sind, d. h. wie oft 110 Pfund in dieser Summe enthalten sind; **so muß er dividiren.**

Und wenn Jemanden der Fall vorkommt, daß er gern eine Zahl in eine gewisse Zahl gleicher Theile theilen, und die Größe eines solchen Theils wissen wollte; z. B. er wollte 8800 Pfund in 110 gleiche Portionen theilen, und die Größe einer solchen Portion wissen, **so muß er gleichfalls dividiren.**

Uebrigens macht diese Verschiedenheit in der Bedeutung des Wortes **Dividiren** in den Zahlen und in der Rechnung selbst nicht den geringsten Unterschied; und ich mag nun wissen wollen wie vielmal 5 Pfund in 35 Pfund enthalten sey, oder wie viel der 5te Theil von 35 Pfund sey, so muß in beiden Fällen die Antwort mit der Zahl 7 gegeben werden, nur daß ich im ersten Fall sagen muß 7 **mal**, im andern 7 **Pfund**. Diese Uebereinstimmung in der Rechnung gründet sich nemlich darauf, daß man beim Multipliciren nach §. 35 den Multiplicator und Multiplican-

dus allezeit ohne Aenderung des Products verwechseln darf. Daher muß es auch beim Dividiren immer auf eins hinauslaufen, ich mag den gegebenen Factor als den Multiplicator oder als den Multiplicandus ansehn.

Anm. Man halte den hier aus einander gesetzten Unterschied der Bedeutung des Wortes Dividiren für keine unnütze Spitzfindigkeit. Wer bloß wie eine Maschine will dividiren lernen, kann ihn entbehren. Wer aber bei jeden Exempel, das er rechnet, deutlich einzusehen wünscht, was er thut, und was er will, dem wird dieser Unterschied nützliche Dienste leisten.

Erklärung der beim Dividiren üblichen Wörter.

§. 50.

Wir haben oben §. 48, und in der Ueberschrift dieses Abschnitts das Dividiren ein **Zersetzen** der Zahlen genannt. Das Wort Zersetzen bedeutet in der Naturlehre: einen zusammengesetzten Stoff in seine Bestandtheile zerlegen, wie wenn z. B. ein Stück Holz durch das Verbrennen in Dampf und Asche zerlegt, oder aufgelöset wird. Da nun die Multiplication als eine Zusammensetzung einer Zahl aus zwei Bestandtheilen anzusehen ist, so scheint das Wort **Zersetzen** eine passende Benennung für das Dividiren zu seyn, da wirklich durch dasselbe eine Zahl, die man sich als etwas Zusammengesetztes vor-

vorstellt, wieder in zwei Bestandtheile zerlegt werden soll.

Diejenige Zahl nun, welche zerlegt werden soll, wollen wir auch hier das **Zusammengesetzte** nennen. Ihr gewöhnlicher lateinischer Name ist **Dividendus** *).

Die Zahl **durch welche** dividirt werden soll, heißt gewöhnlich der **Divisor** **), deutsch wollen wir sie die Zersetzungszahl nennen.

Diejenige Zahl aber, welche durchs Dividiren gefunden wird, heißt gewöhnlich der **Quotient** ***); deutsch wollen wir ihn den **gesuchten Bestandtheil** nennen.

Wenn also z. B. 48 durch 4 zersetzt, oder dividirt, und hierdurch 12 gefunden wird, so heißt

48 der Dividendus, oder das Zusammengesetzte,
4 der Divisor, oder die Zersetzungszahl,
12 der Quotient, oder der gesuchte Bestandtheil.

*) Dividendus, wörtlich, die zu theilende Zahl.

**) Divisor, der Theiler.

***) Quotient, von dem lateinischen Worte quoties, wie oft? weil diese Zahl anzeigt, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten sey.

Erklärung des Divisionszeichens.

§. 51.

Man bezeichnet die Division auf zweierlei Art. Wenn 35 durch 5 dividirt werden soll, so zeigt man dies entweder durch 35 : 5 oder durch $\frac{35}{5}$ an. Bei der ersten Bezeichnung muß der Dividendus (nicht der Divisor, wie man in manchen Rechenbüchern gegen den Gebrauch der Mathematiker sieht) vorangesetzt werden. Bei der zweiten Bezeichnungsart steht der Dividendus oben. Beide Zeichen werden gelesen, 35 dividirt oder zersetzt durch 5.

Die Stelle des Dividendus und Divisors ist sorgfältig zu beobachten, weil ihre Verwechselung große Fehler nach sich ziehen würde.

Erster Grundsatz der Division.

§. 52.

Von drei Zahlen, die bei jeden Divisionsexempel vorkommen, Dividendus, Divisor und Quotient, muß allezeit, wofern nicht etwa alle drei unbenannt sind, wenigstens eine unbenannt seyn. Und diese eine ist entweder der Divisor oder der Quotient. Die andern beiden aber müssen **gleiche Benennungen** haben.

Nie-

Niemand wird die Frage aufwerfen, wie vielmal 3 Pfund in 12 Meilen enthalten seyn; aber wohl, wie oft 3 Pfund in 12 Pfund enthalten seyn? und die Antwort ist 4mal, also eine unbenannte Zahl. Hier war also Dividendus und Divisor gleichbenannt, aber der Quotient unbenannt.

Wer 12 durch 3 dividirt, um den 3ten Theil von 12 Pfund zu finden, der kann nichts anders als eine Zahl mit der Benennung Pfund herausbringen, nemlich 4 Pfund. Hier sind also Dividendus und Quotient gleichbenannt, der Divisor 3 aber, der mir bloß sagt, den wievielsten Theil ich nehmen soll, ist unbenannt.

Zweiter Grundsatz der Division.

§. 53.

Den Dividendus darf man ohne, einen Fehler im Quotienten zu besorgen, stückweise dividiren. Wer z. B. den 3ten Theil von 51 wissen will, darf diese Zahl in die beiden Stücke 30 × 21 zerlegen, und von jedem Stück den 3ten Theil besonders nehmen, von 30 ist er 10, und von 21 ist er 7. Beides zusammen 10 × 7 = 17, und dies ist ganz richtig der 3te Theil von 51.

Dagegen aber darf der Divisor nie zerstükkelt werden, wenn man nicht sehr falsch rechnen

will. Wollte z. B. Jemand den 5ten Theil von 30 wissen, nnd er schlösse so; weil $5 = 3 \times 2$, so will ich erst den 3ten Theil von 30 (der 10 ist), und dann den 2ten oder die Hälfte (die 15 ist), ausrechnen, und dann diese beide Theile zusammen nehmen, so ist sichtbar, daß er sehr falsch rechnete, denn auf diese Art bekäme er 25 heraus, anstatt 6 heraus zu bringen.

Dritter Grundsatz der Division.

§. 54.

Wenn nach einer geschehenen Division der Dividendus, so oft man will, **vergrößert** wird, der Divisor aber ungeändert bleibt, so wird dadurch auch der Quotient eben so vielmal **vergrößert.** Würde aber unter eben den Umständen der Dividendus **verkleinert**, so wird auch der Quotient eben so vielmal **kleiner.** — Man betrachte folgende drei Divisionen

$$3)\frac{120}{40} \qquad 3)\frac{60}{20} \qquad 3)\frac{30}{10}$$

die mittelste, wo 60 durch 3 dividirt den Quotienten 20 giebt, sey zuerst gemacht. Das erste Exempel hat eben den Divisor 3, aber einen doppelt so großen Dividendus 120. Es ist aber klar, daß 3 in diesen verdoppelten Dividendus auch doppelt so oft enthalten seyn müsse. Im 3ten Exempel hingegen, wo der Dividendus nur

30,

30, nemlich die Hälfte von 60 ist, kann er auch nur halb so oft enthalten seyn.

Vierter Grundsatz der Division.

§. 55.

Wenn hingegen der Dividendus ungeändert bleibt, und nur der Divisor geändert wird, so ist es gerade umgekehrt; wird nemlich der Divisor **vergrößert**, so wird der Quotient eben so vielmal **kleiner**, und wenn der Divisor **verkleinert** wird, so wird der Quotient eben so vielmal größer. — Um dies deutlich einzusehen, betrachte man folgende drei Divisionen:

$$12)\frac{48}{4} \qquad 6)\frac{48}{8} \qquad 3)\frac{48}{16}$$

Alle drei Exempel haben den Dividendus 48, aber verschiedene Divisoren. Im mittelsten Exempel giebt 48, durch 6 dividirt, den Quotienten 8. Wird nun im ersten Exempel eben der Dividendus 48 durch einen doppelt so großen Divisor dividirt, so ist klar, daß 12 in 48 nur halb so oft enthalten seyn könne, als 6 darin enthalten ist. Dagegen muß die Hälfte von 6, nemlich 3, im 3ten Exempel offenbar noch einmal so oft in 48 enthalten seyn, als 6 darin enthalten ist.

Fünf-

Fünfter Grundsatz der Division.

§. 56.

Wenn aber Dividendus und Divisor zugleich, beide gleichvielmal, entweder vergrößert oder verkleinert werden, so bleibt der Quotient ungeändert. — Man betrachte folgende drei Divisionen:

$$3)\frac{24}{8} \qquad 6)\frac{48}{8} \qquad 12)\frac{96}{8}$$

wenn 6 in 48 8mal enthalten ist, so ist klar, daß die Hälfte von 6, nemlich 3, in der Hälfte von 48, nemlich 24, auch nicht öfter enthalten seyn könne; desgleichen, daß das Doppelte von 6, nemlich 12, in dem Doppelten von 48, nemlich 96, eben so oft enthalten seyn müsse.

Division ohne regelmäßige Ziffern.

§. 57.

Ohne eine regelmäßige Art Zahlen zu schreiben, könnte man z. B. 100 durch 5 nicht anders dividiren, als so, daß man 100 Rechenpfennige nähme, und nun anfinge Reihen von fünfen aufzuzählen, so lange bis die 100 Pfennige alle wären. Dann müßte man die Reihen zählen; ihre Anzahl würde der gesuchte Quotient seyn. Wie beschwerlich diese Arbeit bei großen Zahlen seyn würde, fällt von selbst in die Augen.

Vor=

Vorübungen zum Dividiren mit unsern Ziffern.

§. 58.

Die Division muß man mit Kindern, wo möglich, nicht eher anfangen, als bis ihnen das Einmaleins völlig geläufig ist. Dann besteht die erste Vorübung, die man zum Theil schon während des Multiplicirens, und ohne das Wort Division dabei zu nennen, anstellen kann, darin, daß man sie oft solche kleine Divisionen machen läßt, die sie unmittelbar aus dem Einmaleins nehmen können. Man muß daher oft Fragen, wie folgende, an sie thun; wie oft 2 in 16, 3 in 24, 4 in 28, 5 in 35, 6 in 42 rc. enthalten sey? oder auch wie viel die Hälfte von 16, der 3te Theil von 24, der 4te Theil von 28, der 5te Theil von 35, der 6te Theil von 42 rc. sey?

Wenn sie Fragen dieser Art mit Leichtigkeit und Sicherheit beantworten können, so gehe man zu Fragen über, wo der Dividendus zwar immer noch unter 100 ist, aber doch nicht im Einmaleins vorkommt: z. B. wie oft 2 in 17, 3 in 23, 4 in 23, 5 in 28, 6 in 52 rc. enthalten sey? und bei jeder Frage lasse man sie den Ueberschuß, der im Dividendus bleibt, ausdrücklich bemerken. Z. B. die Antwort auf die letzte Frage, wie oft 6 in 52 enthalten sey, muß ungefähr so lauten: 6 ist in 52 8 mal enthalten, aber

aber 4 sind drüber, weil 8 mal 6 nur 48 macht u. d. g. m.

Um diese Vorübung angenehmer und belehrender zu machen, thue man wohl, sie öfters in kleine Aufgaben einzukleiden, z. B.

Wenn zweie 14 Thaler unter sich theilen sollen, was bekommt jeder?

Wenn 2 Ellen Leinwand 18 Gr. kosten, was kostet 1 Elle?

und so dergleichen Exempel mehr, wo der Divisor 2 ist. Ferner:

Wenn sich dreie in ein Buch Papier von 24 Bogen theilen sollen, wie viel Bogen erhält jeder?

Wie viel Personen können von 21 Gr. befriedigt werden, wenn jeder 3 Gr. erhält?

Wenn 3 Pfund Lichter 15 Gr. kosten, was kostet 1 Pfund?

und so dergleichen Exempel mehrere, wo der Divisor 3 ist. Dann mache man nach und nach ähnliche Aufgaben mit den Divisoren 4, 5, 6, 7, 8, 9. Höher gehe man nicht. Es wird übrigens wohl nicht nöthig seyn, mehr dergleichen Fragen hier aufzusetzen, da jeder gewiß selbst im Stande seyn wird, eine Menge derselben zu erfinden. Erst nach häufigen Uebungen dieser Art gehe man zu schriftlichen Divisionen über, und zwar nach der in folgender beobachteten Ordnung.

Di=

Division in unsern Ziffern, wenn der Divisor aus einer einzigen Ziffer besteht.

§. 59.

Um die Regeln der Rechnung bequemer erklären und beweisen zu können, wollen wir diesen Fall in ein Paar Unterabtheilungen spalten.

a) **Wenn sich jede Ziffer des Dividendus ohne Rest durch den Divisor theilen läßt, oder wie man sagt, aufgeht.** Der Aufsatz besteht darin, daß man unter den Dividendus einen Strich macht, und linker Hand vor diesen Strich den Divisor schreibt. Es soll z. B. 6 284 durch 2 dividirt werden, so wird der Aufsatz wie hier an der Seite gemacht. Die Rechnung ist hier sehr leicht. Man fängt von der **linken** Seite an, und fragt sich bei jeder Ziffer des Dividendus, wie oft der Divisor in ihr vorhanden sey. Was man auf diese Art findet, schreibt man unter den Strich, gerade unter der dividirten Ziffer. In dem obigen Exempel sagt man: 2 ist in 6 3mal enthalten; also wird 3 unter die 6 geschrieben. Ferner 2 in 2 1mal, also kommt 1 unter die 2. Ferner 2 in 8 4mal; also kommt 4 unter die 8. Endlich 2 in 4 2mal, also kommt 2 unter die 4.

$$2)\overline{6\ 284}$$
$$3\ 142$$

Es ist kaum nöthig, bei einer so leichten Rechnung Uebungsexempel beizufügen, indessen wollen wir doch ein Paar hersetzen.

95) 3 969 : 3.
96) 4 884 : 4.
97) 808 888 : 8.

Um den Grund der Rechnung deutlich einzusehen, bemerke man zuerst, daß der Dividendus eigentlich stückweise dividirt wird, welches nach dem 2ten Grundsaz §. 52 auch verstattet ist. Man theile also den Dividendus sowohl, als die gefundene Zahl des oben berechneten Exempels in ihre Stücke, indem man jede Ziffer nach dem wahren Werthe, der ihr in ihrer Stelle zukommt, hinschreibt.

Die Stücke des Dividendus sind	Die Stücke der gefundenen Zahl sind
6 000	3 000
200	100
80	40
4	2
6 284	3 142

In der ersten Zeile steht nemlich die erste Ziffer des Dividendus und der gefundenen Zahl; in der zweiten Zeile die zweiten Ziffern von beiden, u. s. f. Die Summe der Zahlen rechter Hand ist der ganze Dividendus, und die Summe der Zahlen linker Hand die ganze gefundene Zahl. Vergleicht man nun zwei dieser Zahlen, die in eine Zeile stehen, z. B. 6 000 und 3 000, so sieht man leicht ein, daß die Zahl rechter Hand alle-

allezeit anzeige, wie oft der Divisor in der Zahl linker Hand enthalten sey. Denn da 2 in 6 3 mal enthalten ist, so folgt aus dem 3ten Grundsatz §. 54, daß 2 in 6 000, 3 000 mal enthalten sey. Eben der Schluß findet bei jeder der folgenden Zeilen statt. Addirt man daher rechts und links, so ist klar, daß die Summe rechter Hand (3 142) anzeigt, wie oft der Divisor (2), in die Summe linker Hand (6 284) enthalten sey. Ist aber 2 in 6 284, 3 142 mal enthalten, so ist klar, daß 2 mit 3 142 multiplicirt wieder den Dividendus (6 284) geben müsse, und daß also 3 142 der richtige Quotient sey. Denn Dividiren hieß nach §. 48 nichts anders, als eine Zahl finden, die mit dem Divisor multiplicirt den Dividendus gäbe.

Daß man bei jedem andern ähnlichen Exempel eben die Schlüsse machen könne, ist von selbst klar.

b) **Wenn der Divisor nicht in den Ziffern des Dividendus gerade aufgeht, aber doch nirgends etwas zu dividiren vorkommt, was kleiner wäre wie der Divisor.** Der Aufsatz ist hier, wie unter a. Auch die **Rechnung** ist eben so, nur muß man, wenn eine Ziffer zu dividiren ist, die nicht gerade aufgeht, ihren Rest in dem Sinn behalten, und mit der nächsten Ziffer des Dividendus, in eine Zahl so zusammen nehmen, daß man den Rest als Zehner, die nächste Ziffer aber als Einer liest.

Die so entstandene Zahl wird nun eben so, wie vorher die einzelnen Ziffern, dividirt. Bleibt auch hier ein Rest, so verfährt man mit ihm gerade so, wie mit dem Rest, den eine einzelne Ziffer läßt. Es soll z. B. 8 765 durch 5 dividirt werden; so sagt man 5 ist in 8, 1 mal enthalten; also wird 1 gerade unter 8 gesetzt; da aber 8 den Rest 3 läßt, so wird dieser mit der zweiten Ziffer des Dividendus, nemlich 7, in eine Zahl verbunden, nemlich 37. Dann sagt man: 5 in 37, 5 mal, also kommt 7 unter die 7 des Dividendus, da aber 5 mal 7 = 35, so bleibt von 37 der Rest 2. Dieser Rest 2 mit der folgenden Ziffer 6 zusammen gelesen, giebt 26; und nun sagt man: 5 in 26, 5 mal, also kommt 5 unter die 6; da aber 5 mal 5 nur 25 macht, so bleibt von 26 der Rest 1 übrig. Dieser Rest mit der folgenden Ziffer 5 zusammen gelesen, giebt 15. Man sagt also endlich, 5 in 15, 3 mal; also kommt 3 unter 5, und da 3 mal 5 = 15, so bleibt kein Rest.

$$5)\frac{8\ 765}{1\ 753}$$

Uebungsbeispiele.

98)	54 852 : 3.	101)	9 594 : 6.
99)	95 068 : 4.	102)	9 992 : 8.
100)	89 131 : 7.	103)	10 935 : 9.

Der Beweis von der Richtigkeit der Regeln, nach welchen diese Exempel gerechnet werden, läßt sich auf ähnliche Art als unter a führen. Nur muß

muß der Dividendus auf andere Art als dort zerstückelt werden, indem man nur das als ein Stück ansieht, was wirklich dividirt worden ist. D. h. bei dem oben gerechneten Exempel ist das erste Stück nicht 8, sondern nur 5, denn nur 5 sind wirklich dividirt, die übrigen 3 aber wurden mit 7 verbunden, und 37 gelesen. Aber von diesen 37 sind wirklich nur 35 dividirt worden, weil 5 mal 7 nur 35 macht. Daher ist das 2te Stück des Dividendus 35. Der Rest 2 machte mit 6 zusammen, 26. Aber von diesen 26 sind wirklich nur 25 dividirt, welches also das 3te Stück ist, und der Rest 1 macht mit 5 zusammen das 4te Stück. Sieht man aber nicht, wie bisher, bloß auf den Namenwerth, sondern auf den wahren Werth der Ziffern, so sind

die Stücke des Dividendus	und die Stücke der gefundenen Zahl sind
5 000	1 000
3 500	700
250	50
15	3
8 765	1 753

Vergleicht man hier zwei Zahlen, die in eine Zeile stehen, z. B. 3 500 und 700 in der 2ten Zeile, so ist klar, daß die letzte Zahl anzeigt, wie vielmal der Dividendus in der ersten enthalten sey. Denn da 5 in 35, 7 mal enthalten ist, so muß nach dem 3ten Grundsatz §. 54, 5 in 3500, 700 mal

enthalten seyn. Eben so in jeder andern Zeile. Folglich wird die Summe der Zahlen rechter Hand (1 753) d. h. die gefundene Zahl anzeigen, wie vielmal der Divisor (5), in der Summe linker Hand (8 765), welche der Dividendus ist, enthalten seyn. Würde also 5 mit 1 753 multiplicirt, so würde der Dividendus herauskommen müssen. Also ist 1 753 der richtige Quotient, nach §. 48.

c) **Wenn der Fall vorkommt, daß etwas, was kleiner als der Divisor, oder gar Null ist, durch den Divisor dividirt werden soll.** Kommt dieser Fall vor, so muß man sagen, der Divisor steckt in dieser kleinern Zahl, oder in Null, 0 mal, und dann wird 0 in den Quotienten geschrieben, die ganze zu kleine Ziffer aber wird dann, wie ein Rest mit der nächsten Ziffer zusammen gezogen. Alles übrige ist völlig, wie im vorigen Fall, und wir hätten ihn ganz weglassen können, wenn nicht Kinder geneigt wären, in diesem Fall dergleichen Ziffern oder Nullen im Quotienten ganz zu überspringen, daher sie besonders darauf müssen aufmerksam gemacht werden. Nur in einem Fall ist es erlaubt, im Quotienten keine 0 zu schreiben, wenn gleich die Ziffer des Dividendus zu klein ist, nemlich wenn diese Ziffer die allererste im Exempel ist, wo zwar die Rechnung nicht falsch wird, wenn man eine Null in dem Quotienten schreibt, diese Null aber zu nichts helfen kann. Dagegen verfälscht

fälscht die Weglassung einer Null in der Mitte, allezeit den Werth der übrigen Ziffern.

Es sey z. B. 1 963 507 durch 7 zu dividiren, so rechnet man, wie folgt. Ich sollte anfangen 7 in 1, 0 mal, und daher im Quotienten 0 schreiben. Allein da diese 0 vorne zu nichts hilft, so ziehe ich gleich 1 mit der folgenden 9 zusammen, und sage 7 in 19, 2 mal, da aber 2 mal 7 nur 14 ist, so bleiben 5 übrig. Ich sage also weiter 7 in 56, 8 mal, und setze 8 herunter; und da 7 mal 8 = 56, so bleibt kein Rest. Nun soll 3 durch 7 dividirt werden, also sage ich 7 in 3, 0 mal; und nun ziehe ich 3 mit der folgenden 5 zusammen, und sage 7 in 35, 5 mal. Da nun 5 mal 7 = 35, so bleibt kein Rest. Ich gehe also weiter und sage 7 in 0, 0 mal, und endlich 7 in 7, 1 mal. Wer hier die Nullen im Quotienten wegließe, würde statt 280 501 nur 2 851 herausbringen. Man präge also Kindern ein, daß sie jeder Stelle, es stehe da was da wolle, die Ehre anthun sollen, sie zu dividiren, und wenn keine wirkliche Division statt hat, allemal Null schreiben sollen, wovon nur die allererste Null eine Ausnahme macht.

7) 1 963 507
280 501

Uebungsbeispiele.

104) 20 409 : 3.	108) 90 054 : 6.
105) 9 236 : 4.	109) 35 420 : 7.
106) 16 028 : 4.	110) 72 328 : 8.
107) 15 305 : 5.	111) 9 278 199 : 9.

Der Beweis der Regeln, nach denen diese Exempel gerechnet werden, ist ganz wie unter b; daher wollen wir ihn übergehn und bloß die Zergliederung des Dividendus und Quotienten hersetzen, wie man sie machen müßte, wenn der Beweis an dem oben gerechneten Exempel geführt werden sollte.

Stücke des Dividendus.	Stücke der gefundenen Zahl.
1 400 000	200 000
560 000	80 000
0 000	0 000
3 500	500
00	00
7	1

Ehe wir weiter gehen, setzen wir noch einige vermischte Uebungsbeispiele her.

Uebungsbeispiele.

112) 8 793 486 : 2.
113) 5 103 754 : 2.
114) 1 978 431 : 3.
115) 6 018 900 : 3.
116) 2 480 024 : 4.
117) 9 025 672 : 4.
118) 3 738 510 : 5.
119) 6 410 035 : 5.
120) 1 234 500 : 5.

121)

121)	3	180	984	:	6.
122)	4	819	500	:	7.
123)	2	036	936	:	8.
124)	1	740	240	:	8.
125)	7	089	561	:	9.
126)	5	917	437	:	9
127)	2	805	633	:	9.

Kann eine kleinere Zahl durch eine größere wirklich dividirt werden? und wie?

§. 60.

Wenn in den bisherigen Exempeln der Fall vorkam, daß eine kleinere Zahl durch eine größere dividirt werden sollte, so dividirten wir sie im Grunde gar nicht, sondern zogen sie mit der folgenden Ziffer zusammen, damit sie in Verbindung mit dieser dividirt werden könnte. Aber wenn nun am Ende der Rechnung ein Rest bleibt, welcher Fall bisher absichtlich ist vermieden worden, was soll man mit diesem machen? Einerseits ist klar, daß dieser Rest kleiner seyn muß als der Divisor, denn wäre ers nicht, so müßte die letzte Ziffer des Quotienten zu klein gewesen seyn. Anderseits aber ist es nicht minder klar, daß dieser Rest auch dividirt werden sollte: denn wenn mir Jemand eine Zahl zu dividiren aufgiebt, so ist doch seine Meinung, daß diese Zahl ganz, und nicht bloß ein Stück derselben dividirt wer-

den soll. Es soll z. B. 925 durch 8 dividirt werden, so kommt 115 heraus, aber vom Dividendus bleiben zuletzt 5 übrig, die durch die beigesetzte — 5 angedeutet sind. Es sollte aber nicht bloß 920, sondern 925 dividirt werden; also muß auch dieser letzte Rest noch dividirt werden, und es frägt sich nur wie?

$$8)\frac{925}{115} - 5$$

Wer die Division sich bloß als eine Rechnung vorstellt, durch welche gefunden werden soll, wie vielmal eine Zahl in einer andern Zahl enthalten sey, dem wird es schwer werden zu begreifen. daß der Rest 5 durch 8 dividirt werden könne. Allein wir haben im 49sten H. gesehen, daß man sich die Division auch als eine Theilung vorstellen könne. Darf man aber dies, so begreift man leicht, daß auch eine kleinere Zahl durch eine größere dividirt werden könne. Denn warum sollte es denn unmöglich seyn, 5 Pfund, oder 5 Centner, oder 5 Ellen, u. d. g. m. in 9 gleiche Theile zu theilen?

Die Art von Division, welche hierzu nöthig ist, gehört zwar eigentlich erst in denjenigen Theil des Rechenbuchs, der von den Brüchen handelt: da indessen bei der Division ganzer Zahlen der Fall, daß eine Rest bleibt, weit öfter vorkommt, als der Fall, wo die Rechnung aufgeht, dasjenige aber, was wir hier von den Brüchen brauchen, sehr leicht ist, so wird es am bequemsten seyn, von

den

den Brüchen, so viel als wir hier brauchen werden, kürzlich zu erklären.

Man zeichne sich eine Linie, ungefähr von der Länge eines Zolles (oder wenn man eine große Tafel vor sich hat, von der Länge einer Elle). Dies sey in der beigefügten Zeichnung die Linie A. Man theile diese in zwei gleiche Theile, so weiß jedes Kind, daß man jedes der beiden Stücke von A bis 1, oder von 1 bis 2, einen **halben** Zoll nennt. Mit Zahlen wird ein Halb so geschrieben $\frac{1}{2}$; d. h. 1 und 2 wird durch das Divisionszeichen (§. 51.) verbunden; denn **ein Halb** kommt heraus, wenn man 1 in 2 gleiche Theile theilt, d. h. wenn man 1 durch 2 dividirt. Es ist also einerlei, ob ich sage: **1 dividirt durch 2**; oder ob ich sage: **ein Halb** ($\frac{1}{2}$).

Unter die vorige Linie A zeichne man eine zweite B, von eben der Länge, und theile sie in **drei gleiche Theile**, so nennt man jedes dieser drei Theile, (nemlich von B bis 1 oder von 1 bis 2, oder von 2 bis 3), einen **Drittel-Zoll**. In Zahlen schreibt man aber **ein Drittel** so: $\frac{1}{3}$. Denn ein Drittel kommt heraus, wenn man 1

durch 3 dividirt. Es ist also einerlei, ob ich sage: 1 **dividirt durch** 3; oder ob ich sage: **ein Drittel** ($\frac{1}{3}$).

Unter die Linie B zeichne man eine dritte C, von eben der Länge, und theile sie in vier gleiche Theile, so heißt jeder solche Theil (nemlich von C bis 1, oder von 1 bis 2, oder von 2 bis 3, oder 3 bis 4), ein **Viertel Zoll.** Mit Ziffern wird aber **ein Viertel** so geschrieben $\frac{1}{4}$; weil es wieder einerlei ist, ob ich sage: 1 **dividirt durch** 4, oder **ein Viertel** ($\frac{1}{4}$).

Unter die Linie C zeichne man eine vierte D, und theile sie in **fünf gleiche Theile**, so heißt jeder einzelne Theil **ein Fünftel = Zoll.** In Ziffern schreibt man **ein Fünftel** so: $\frac{1}{5}$; weil 1 **dividirt durch** 5, und **ein Fünftel** ($\frac{1}{5}$) einerlei sagt.

Man sieht leicht, wie diese Erklärungen weiter fortzusetzen sind, und man thut wohl, wenn man Kindern noch mehrere dergleichen Theilungen eines Zolls (oder einer Elle) vorzeichnet, und sie belehrt, daß der

6te	Theil	eines Zolls	genannt wird	ein Sechs-	tel =	Zoll.	gebrochen heißt $\frac{1}{6}$
7te	=	=	=	ein Siebentel	=	=	$\frac{1}{7}$
8te	=	=	=	Achtel	=	=	$\frac{1}{8}$
9te	=	=	=	Neuntel	=	=	$\frac{1}{9}$
10te	=	=	=	Zehntel	=	=	$\frac{1}{10}$
11te	=	=	=	Elftel	=	=	$\frac{1}{11}$

u. s. w.

Haben

Haben Anfänger den Sinn dieser Benennungen deutlich gefaßt, so mache man sie darauf aufmerksam, daß Zoll (oder Elle) hierbei nur Nebensachen waren, und daß man Centner, Pfunde, Lothe, Thaler, Groschen, Pfennige und was man sonst will, eben so theilen, und die Theile eben so benennen könne. Sie werden leicht begreifen, daß, wenn ein Centner Kaffe in 3 gleiche Theile getheilt würde, jeder dieser Theile **ein Drittel Centner** heißen, und $\frac{1}{3}$ Centner geschrieben werden müßte. Oder wenn ein **Pfund** Reis in 7 gleiche Portionen getheilt würde, jede Portion **ein Siebentel-Pfund** genannt, und $\frac{1}{7}$ Pfund geschrieben werden müßte. Auch wird man ihm leicht begreiflich machen, daß ein Groschen, wenn es nöthig ist, auch in so viel Theile als man will getheilt werden könnte. Denn ließe sich auch die Theilung mit dem **Groschen selbst** nicht machen, (wie, wenn z. B. ein Groschen in **fünf** gleiche Theile getheilt werden sollte), so könnte man sie doch mit einer Waare (z. B. Papier) machen, die gerade einen Groschen werth wäre. Auf alle Fälle läßt sich wenigstens eine solche Theilung in Gedanken machen oder denken, und das ist hier genug.

Nach diesen Erklärungen ist nichts leichter, als einen Rest, der bei einem Divisionsexempel bleibt, wirklich zu dividiren. Gesetzt der Divisor wäre 8, und es bliebe zuletzt der Rest 1, so

sage

$8)\frac{921}{115\frac{1}{8}}$ sage ich: 1 dividirt durch 8, giebt $\frac{1}{8}$ (d. i. in Worten ein Achtel). Bliebe zuletzt der Rest 2, so sage ich: da der Rest aus zwei Einheiten besteht, so will ich jede einzeln dividiren (man vergleiche den 2ten Grundsatz §. 53). Die erste giebt mir ein Achtel, die zweite auch ein Achtel, also beide zusammen zwei Achtel, und dies schreibt man $\frac{2}{8}$. Bliebe ferner der Rest 3; so mache ich es eben so, ich dividire jede der drei übrig gebliebenen Einheiten besonders, da nun jede ein Achtel giebt, so geben alle drei drei Achtel, d. i. $\frac{3}{8}$. Man sieht hieraus schon, daß wenn der Rest 4 bleibt, $\frac{4}{8}$, wenn der Rest 5 bleibt, $\frac{5}{8}$, wenn der Rest 6 bleibt, $\frac{6}{8}$, und wenn der Rest 7 bleibt, $\frac{7}{8}$ ꝛc. an dem Quotienten angehängt werden müssen. Mit einem Worte, bleibt ein Rest, so besteht seine Division darin, daß man ihm mit dem Divisor durch das 2te Divisionszeichen §. 49 verbindet, indem man den Rest über, den Divisor aber unter den Strich schreibt, und beides zusammen als einen Bruch liest.

$8)\frac{922}{115\frac{2}{8}}$

$8)\frac{923}{115\frac{3}{8}}$

Uebungsbeispiele.

128) 50 113 729 : 2.
129) 68 700 104 : 3.
130) 1 122 089 : 4.
131) 38 702 561 : 5.

132)

132) 82 390 782 : 6.
133) 4 718 500 : 7.
134) 3 500 975 : 7.
135) 9 318 591 : 8.
136) 12 970 083 : 9.
137) 58 109 619 : 9.

Kleine Divisionen im Kopfe.

§. 61.

Ehe man zu größern Divisionen auf dem Papiere fortgeht, rathe ich vorher Anfänger kleinere Divisionen von der vorigen Art im Kopfe machen zu lassen. Die beste und kürzeste Art im Kopfe zu dividiren aber besteht darin, daß man es im Kopfe gerade so macht, als man es auf dem Papier machen würde. Ich rathe aber zu diesen Uebungen mehr Beispiele in benannten Zahlen, und als wirkliche Rechnungsfälle aus dem gemeinen Leben eingekleidet, als in unbenannten Zahlen, zu wählen, damit den Anfängern die Fälle, wo eine Division nöthig ist, bekannt werden, und das Nachdenken mehr Stoff finde. Folgende Beispiele mögen als Muster dienen.

138) Wenn 4 Erben 9 500 Thaler zu gleichen Theilen unter sich theilen sollen, wie viel bekommt jeder?

139) Wenn von einer Erbschaft, die 516 Thl. beträgt, ein Erbe ein Drittel, und der andere

dere das Uebrige erhalten soll, was bekommt jeder?

140) 1 000 Quentchen sind wie viel Loth? Auf jedes Loth gehen 4 Quentchen.

141) Wie viel Thaler machen 138 Achtgroschen-Stücke? da immer 3 auf einen Thaler gehn.

142) Wenn 5 Pfund Seife einen Thaler kosten, was kosten 110 Pfund, oder 1 Centner

143) Wenn 9 Pfund Reis einen Thaler kosten, was werden 135 Pfund kosten?

144) Wie viel Wochen betragen 245 Tage?

145) Wie viel ist a) das Viertel, b) die Hälfte, c) drei Viertel von 100?

146) Wie viel Pfund beträgt a) ein Halber- und b) ein Viertel-Centner?

Division durch einen zwei- drei- oder mehrziffrigen Divisor.

§. 62.

Wenn der Divisor aus mehreren Ziffern besteht, so muß Aufsatz und Rechnung etwas anders als bisher gemacht werden. Es sey 215 349

durch

durch 417 zu dividiren. Unter den Dividendus

```
215 349|516 177/417
(41 7)
208 5
  6 84
  4 17
  2 679
  2 502
    177
```

macht man hier keinen Strich, sondern hinter denselben, und hinter diesen Strich ist die Stelle, wo der Quotient hingeschrieben wird. Den Divisor kann man schreiben, wo man will. Einige setzen ihn über den eben erwähnten Strich; andere vor den Dividendus. Das bequemste ist, ihn unter die ersten Ziffern des Dividendus, und zwar so zu setzen, daß seine höchste Ziffer (im obigen Exempel 4) entweder unter die erste, oder zweite Ziffer des Dividendus zu stehen kommt. Welches von beiden geschehen soll, beurtheilt man so: der Divisor darf gerade über sich nicht weniger haben, als er selbst beträgt. Findet man nun, daß er weniger über sich haben würde, wenn seine höchste Ziffer unter der höchsten Ziffer des Dividendus stände, so muß man ihn, um dies zu vermeiden, so stellen, daß seine höchste Ziffer unter der zweiten des Dividendus zu stehen kommt. So im obigen Exempel. Wollte man den Divisor unter die 3 ersten Ziffern des Dividendus stellen, so würde er weniger als er selbst beträgt, nemlich 215 über sich haben. Man muß ihn also so stellen, daß seine höchste Ziffer unter 1 steht. Der Divisor wird in Klammern geschlossen. So viel vom Aufsatz.

Die

Die Rechnung wird gemacht, wie folgt. Man fragt sich, wie vielmal die höchste Ziffer des Divisors in dem enthalten ist, was vom Dividendus über ihr steht. Die so gefundene Zahl wird, als die erste des Quotienten, hinter den Strich geschrieben. Mit dieser Ziffer multiplicirt man den Divisor, und was herauskommt, schreibt man, ohne einen Strich zu machen, gerade unter den Divisor. Jetzt wird ein Strich gezogen, und das eben zusammengesetzte Product von dem Theil des Dividendus abgezogen, der gerade über ihm steht. Ist dies geschehen, so hängt man an diesen Rest die nächst folgende Ziffer des Dividendus; und nun geht gleichsam die Rechnung wieder von vorne an. Denn was unter dem Striche nunmehr steht, wird gerade so, wie vorher die ersten Ziffern des Dividendus, dividirt; nur mit dem Unterschied, daß man den Divisor nicht wirklich, sondern bloß in Gedanken untersetzt, und zwar so, daß seine letzte Ziffer, auch unter der letzten Ziffer, die unter dem Striche steht, zu stehen kommt.

Die Anwendung dieser Regeln auf das obige Exempel, wird alles deutlicher machen. Zuerst sagt man 4 in 21, 5 mal. Also ist 5 die erste Ziffer des Quotienten, und wird hinter den Strich geschrieben. Hierauf multiplicirt man den ganzen Divisor 417 mit 5, indem man sagt, 5 mal 7 ist 35, also 5 unter die 7, und 3 im Sinn; ferner 5 mal 1 ist 5, und 3 dazu ist 8;

also

also 8 unter 1; endlich 5 mal 4 ist 20, welches ganz hingeschrieben wird, so daß 0 unter 4 kommt. Dies Produkt 2085 wird von dem Theil des Dividendus, der gerade darüber steht, (2153) abgezogen; so bleibt der Rest 68, zu diesen wird die im Dividendus folgende Ziffer 4 herunter gezogen, und nun geht die Arbeit von vorne an.

Nemlich unter 684 setzt man in Gedanken den Divisor 417, so daß 7 unter 4 zu stehen kommt. Dann fragt man, wie vielmal seine höchste Ziffer in dem, was darüber steht, enthalten sey; also 4 in 6, 1 mal. Diese 1 ist die zweite Ziffer des Quotienten, und wird hinter die erste Ziffer desselben (5) geschrieben. Mit dieser 1 muß nun der Divisor multiplicirt werden, wodurch er aber unverändert 417 bleibt; dies kommt also unter 684 zu stehen, und wird davon subtrahirt, der Rest ist 267, zu welchem nun die folgende Ziffer des Dividendus (9) herab gezogen wird. Nun geht die Arbeit wieder von vorne an.

Unter 2679 setzt man in Gedanken den Divisor so, daß seine letzte Ziffer (7) unter der 9 zu stehen kommt. Seine höchste Ziffer erhält daher ihre Stelle unter 6, und ich sage daher: 4 in 26, 6 mal; also ist 6 die 3te Ziffer des Quotienten, und wird hinter die zweite (1) geschrieben. Jetzt multiplicirt man den Divisor mit 6, dies giebt 2502, und wird unter 2679 geschrie-

ben, und darauf subtrahirt, wobei der Rest 177 bleibt.

Da jetzt keine Ziffer mehr herunter zu setzen übrig ist, so ist die Rechnung, so weit sie in ganzen Zahlen geschehen kann, zu Ende. Allein auch der Rest ist noch zu dividiren, und dies geschieht nach §. 60 dadurch, daß man Rest und Divisor durch das Divisionszeichen (den Rest oben, den Divisor unten) verbindet, und diesen Bruch an den Quotienten anhängt. Der Bruch im obigen Exempel heißt $\frac{177}{417}$, oder mit Worten: einhundertsiebenundsiebzig, Vierhundertsiebzehntel.

Uebungsbeispiele.

147) 87 968 : 32.
148) 368 989 : 719.
149) 1 988 385 : 6443.

Fortsetzung des Vorigen.

§. 63.

Einige Fälle, welche bei diesen Divisionen vorkommen, müssen wir noch besonders erwähnen.

Zuerst kommt leicht der Fall vor, daß man in dem Quotienten eine zu große Ziffer schreibt.

1391|3
(487)
1461

Man sollte nemlich eigentlich nicht bloß mit der **ersten Ziffer** des Divisors in das, was über ihr steht, dividiren, sondern mit dem ganzen Divisor. Man sollte z. B. im beigefügten Exempel nicht sagen, 4 in 13, sondern 487 in 1391; da es aber bei

zwei

zwei etwas großen Zahlen nicht leicht ist, gleich auf die Stelle, und ohne Rechnung zu bestimmen, wie vielmal eine in der andern enthalten sey, so erleichtert man sich die Arbeit dadurch, daß man von beiden Zahlen (487 und 1391) nur die höchsten Ziffern (4 und 13) nimmt, und fragt, wie oft eines im andern enthalten sey. Dabei kann man aber leicht 1 zu viel bekommen. Denn so wahr als es ist, daß 4 in 13, 3 mal enthalten ist, so folgt doch daraus nicht nothwendig, daß 487 in 1391 auch dreimal enthalten sey. Ob man diesen Fehler begangen habe, zeigt sich gleich bei der Multiplication; denn wenn ich im obigen Exempel 487 mit 3 multiplicire, so kommt mehr als 1391, nemlich 1461 heraus. Findet man dies, so muß 3 und 1461 durchstrichen, und die Rechnung noch einmal gemacht werden, indem man in den Quotienten nur 1 weniger, also 2 schreibt. Ueberhaupt kann man allezeit in der Rechnung selbst leicht wahrnehmen, ob man eine Ziffer im Quotienten zu groß, oder zu klein genommen habe. Ist sie zu groß genommen, so giebt, wie im obigen Exempel, die Multiplication zu viel, so daß man nicht subtrahiren kann. Nimmt man aber im Quotienten 1 zu wenig; wie wenn man in dem hier beigefügten Exempel aus Furcht, daß 5 zu groß seyn möchte, gleich 4 schriebe: so zeigt sich der Fehler nach geschehener Subtraction, denn

```
23 57|4
(4 71)
18 84
------
 4 73
```

nun bleibt mehr übrig (473), als der Divisor (471) beträgt; ein Beweis, daß er in der dividirten Zahl einmal öfter, also wirklich 5 mal enthalten ist.

Anfänger fehlen auf beide Arten oft, und man muß ja nicht versäumen, sie darauf aufmerksam zu machen. Besonders kommen diese Fehler leicht vor, wenn die zweite Ziffer des Divisors etwas groß ist, in diesem Fall muß man also besonders auf seiner Hut seyn.

Uebungsbeispiele.

150) 36 984 : 597.
151) 37 284 : 39.
152) 189 662 : 37.

Fortsetzung des Vorigen.

§. 64.

Ein anderer Fall, bei dem Anfänger leicht Fehler machen, ist der, wenn Nullen in dem Quotienten vorkommen.

Findet sich nemlich, daß nach geschehener Subtraction und Anhängung einer neuen Ziffer, das was unter dem Strich steht, kleiner als der Divisor, oder gar 0 ist, so schreibt man gleich im Quotienten 0, und rückt aus dem Dividendus die folgende Ziffer herunter. Sollte die so vergrößerte Zahl doch noch zum Dividiren zu klein seyn, so wird wieder 0 im Quotienten gesetzt, und eine dritte Ziffer heruntergezogen; und dies muß immer

immer geschehen, so oft eben derselbe Fall vorkommt.

```
1 356 360 801|5080003
 (267)=== ===
1 335 === ===
-----------
   21 36= ===
   21 36= ===
   ---------
       00 801
          801
          ---
            0
```

In diesem Exempel kommt der Fall mehr als einmal vor. Er kommt erstlich vor, gleich nach der ersten Subtraction, denn da bleibt 21, und wenn daran 3 gehängt wird, so ist doch 213 kleiner als der Divisor (267); ich sage also 267 in 213, Nullmal, und schreibe eine 0 in den Quotienten. Ich rücke nun sogleich die folgende Ziffer des Dividendus (6) herunter, und erhalte also 2136, worin der Divisor gerade 8 mal enthalten ist. Bei der zweiten Subtraction bleibt also gar nichts übrig, und auch die nächste Ziffer im Dividendus ist 0, daher habe ich unter dem Strich nichts als 00. Ich sage daher 267 in 00, Nullmal, und setze 0 im Quotienten. Hierauf rücke ich die folgende 8 herunter, und sage 267 in 008 (d. i. in 8), wieder 0 mal, und setze noch eine 0 in den Quotienten. Hierauf rücke ich die im Dividendus folgende 0 herab, und sage 267 in 80,

wieder 0 mal, und schreibe wieder 0 im Quotienten. Endlich rücke ich die letzte Ziffer des Dividendus 1 herab, wodurch ich 801 erhalte, welches größer als der Divisor ist, und daher ordentlich dividirt werden kann.

Uebungsbeispiele.

153) 2 978 488 : 97.
154) 2 221 536 : 317.
155) 237 309 : 791.

Fortsetzung des Vorigen.

§. 65.

Wenn der Divisor am Ende Nullen hat, so giebt dies Gelegenheit zu einer Abkürzung, die wir schon hier erwähnen wollen, weil der Fall häufig vorkommt. Man setzt nemlich die Nullen des Divisors nicht mit unter die ersten Ziffern des Dividendus, sondern unter die letztern. Darauf dividirt man, als hätte der Divisor keine Nullen, und als hätte der Dividendus die Ziffern nicht, unter denen die Nullen des Divisors stehen. Bloß wenn die Rechnung zu Ende ist, hängt man an den Rest die Ziffern des Dividendus an, die bis dahin durch die untergesetzten Nullen von der Rechnung ausgeschlossen waren. Z. B. 233 428 soll durch 1 700 dividirt werden.

233

```
233 428 | 137 528/1700
(17)  00
17    =
---
 63   =
 51   =
---
 12 4
 11 9
-----
    528
```

Hier wird unter die beyden ersten Ziffern des Dividendus bloß 17 gesetzt: die beiden Nullen aber kommen unter die letzten Ziffern des Dividendus (28). Dann dividirt man, völlig so, als wäre bloß 2334 durch 17 zu dividiren. Nach der 3ten Subtraction ist diese Division zu Ende, und es bleibt der Rest 5. An diesen Rest werden nun die beiden Ziffern 28 angehängt, die über den Nullen stehn, und dieser so vermehrte Rest (528) wird mit dem Divisor in einen Bruch $\frac{528}{1700}$ gesetzt. Wer sich die Mühe nimmt, eben dies Exempel völlig so, wie in den vorigen §§ gezeigt worden, mit Beibehaltung der Nullen zu dividiren, wird bei der Vergleichung beider Rechnungen leicht wahrnehmen, daß diese Abkürzung im Quotienten nichts ändern kann.

Besteht der Divisor aus einer einzigen bedeutenden Ziffer und Nullen, so dividirt man wie §. 59 und 60. Z. B. 368 457 dividirt durch 700. Nemlich man dividirt bloß 3684 durch 7. Bei der letzten Ziffer 4 bleibt der Rest 2, an diesen wird 57 angehängt, und mit dem Divisor 700 in einen Bruch gesetzt.

```
368 457
    00
7)------
 52 6 57/700
```

Besteht der Divisor bloß aus 1 und Nullen, so ist die Division noch leichter, und erfordert weiter nichts, als daß man vom Dividendus so viele Ziffern auf der rechten Seite abschneidet, als der Divisor Nullen hat. Die übrigen Ziffern sind geradezu der Quotient, und die abgeschnittenen Ziffern sind der Rest, den man mit dem Divisor in einen Bruch setzt. Z. B. 3748 : 10 = $374\frac{8}{10}$. Ferner 3748 : 100 = $37\frac{48}{100}$. Ferner 3748 : 1000 = $3\frac{748}{1000}$ u. d. g. m.

Uebungsbeispiele.

156) 3 256 962 : 90.
157) 5 276 497 : 8300.
158) 864 293 : 7430.

Vermischte Uebungsbeispiele zu §. 62-65.

159) 4 037 651 : 17.
160) 1 780 523 : 39.
161) 50 176 924 : 71.
162) 80 223 781 : 93.
163) 12 698 510 : 127.
164) 9 802 437 : 203.
165) 20 891 436 : 518.
166) 66 200 348 : 892.
167) 91 387 602 : 1 025.
168) 41 287 543 : 4 807.
169) 10 874 297 : 38 761.
170) 43 562 190 : 89 065.

Be-

Beweis der Divisionsregeln.

§. 66.

Da Dividiren nach §. 48 so viel heißt, als eine Zahl finden, die mit dem Divisor multiplicirt den Dividendus giebt, so wird der Beweis, den wir hier zu führen haben, darauf hinauslaufen, zu zeigen, daß durch richtige Anwendung der vorgetragenen und erklärten Regeln, eine solche Zahl gefunden werde, die mit dem Divisor multiplicirt, den Dividendus giebt. Nun wollen wir zuerst ein Exempel wählen, wo die Rechnung aufgeht. Man richte hier seine Aufmerksamkeit hauptsächlich auf die während der Rechnung vom Dividendus, und den Resten abgezogenen Stücke, die wir im beigefügten Exempel, um mehrerer Deutlichkeit willen, mit C, B und A bezeichnet haben.

```
  2 762 972|634
    (435 8)
C 2 614 8 ==
  ---------
    148 17 =
B == 130 74 =
  ---------
     17 432
A ===17 432
  ---------
          0
```

Man fange die Betrachtung dieser Stücke von unten an, und bemerke, auf welche Art jedes derselben entstanden ist. Das Stück A ist entstanden aus der Multiplication des Divisors (4358) mit der letzten Ziffer (4) der gefundenen Zahl. Das Stück B ist das Product des Divisors mit der vorletzten Ziffer (3): aber es ist um eine Stelle weiter als A gegen die linke Hand gerückt.

Endlich ist das Stück C das um 2 Stellen eingerückte Product des Divisors mit der ersten Ziffer (6) des Quotienten. Hieraus aber ist klar, daß in diesen drei Abzügen das vollständige Product des Divisors und der gefundenen Zahl enthalten ist. Denn wenn man 4358 wirklich mit 634 multiplicirt, so ist klar, daß er eben dieselben Zahlen A, B, C nur in umgekehrter Ordnung, aber B und C jedes um eben so viel Ziffern eingerückt erhält, als diese Stücke in der Divisionsrechnung erschienen. Es ist folglich in diesen drei abgezogenen Zahlen das vollständige Product des Divisors und der gefundenen Zahlen enthalten. Aber eben diese 3 Abzüge A, B, C müssen zusammen genommen, auch dem Dividendus gleich seyn. Dies ist daraus klar, weil nach allen 3 Subtractionen nichts übrig geblieben ist. Es ist also unleugbar, daß durch Anwendung der gegebenen Divisionsregeln eine Zahl gefunden werde, die mit dem Divisor multiplicirt den Dividendus giebt, d. h. daß die gefundene Zahl der richtige Quotient sey.

4358	
634	
17432	A
13074	= B
26148	= C
2762972	

Vielleicht wird manchem Leser die Sache noch deutlicher, wenn er an den ersten Abzug 2 Nullen, und an den 2ten eine Null anhängt, so daß nun ihre letzten Ziffern bis unter die letzte Ziffer des Dividendus reichen, denn nun sieht man leicht ein, daß in dem Abzug C der Divisor 600 mal,

in

in dem Abzug B, 30 mal, in dem Abzug A, 4 mal enthalten sey: daß also in allen zusammen der Divisor 634 mal enthalten sey, d. h. daß der Divisor im Dividendus 634mal enthalten sey, weil die 3 Abzüge zusammen dem Dividendus gleich sind.

Bleibt bei dem Dividiren zuletzt ein Rest, wie wenn z. B. 8347 durch 89 dividirt wird; wo zuletzt der Rest 70 bleibt und der Quotient $93\frac{70}{89}$ wird; so theilt man den Dividendus in Gedanken in zwei ungleiche Stücke, das kleinere sey der Rest 70, das andere sey das, was vom Dividendus übrig bleibt, wenn 70 abgezogen wird, nemlich 8 277, so daß der Dividendus 8277 + 70 ist. Da nun nach dem 2ten Grundsatz §. 53 der Dividendus stückweise dividirt werden darf, so dividire man erst 8277, welches keine andere Rechnung als die obige giebt, nur mit dem Unterschied, daß hier die Rechnung aufgeht, folglich die Richtigkeit der Rechnung, wie oben bewiesen werden kann. Daß aber das andere Stück 70, durch 89 dividirt, den Quotienten $\frac{70}{89}$ gebe, ist schon oben §. 60 bewiesen worden. Nemlich wenn 1 in 89 Theile getheilt wird, so heißt ein solcher Theil **ein Neunundachtzigtel**, und wird geschrieben $\frac{1}{89}$. Wenn ich nun von den 70 Einheiten, die der Rest enthält, von jeder in Gedanken einzeln den 89sten Theil nehme, so giebt jede

```
8 347|93 70/89
 (89)
8 01
------
  337
  267
------
   70
```

$\frac{1}{89}$, also alle 70 zusammen geben $\frac{70}{89}$. Dies ist nun der wahre Quotient; denn wenn ich den 89sten Theil von 70 wieder 89 mal nehme, so ist klar, daß wieder 70 herauskommen müsse.

Anm. Ob es gleich in der Hauptsache keine andere Art zu dividiren geben kann, als die hier erklärte und bewiesene, so finden doch in Ansehung der äußern Anordnung der Rechnung allerlei Abänderungen statt. Die hier erklärte Art pflegt man das **Unterwärtsdividiren** zu nennen, weil die ganze Rechnung unterwärts unter dem Dividendus geschieht. Man hat aber, besonders in ältern Rechenbüchern, noch eine andere Art, die man das **Aufwärtsdividiren** nennt. Sie unterscheidet sich von jener eigentlich darin, daß man die Producte des Divisors mit den einzelnen Ziffern des Quotienten (im 1sten Exempel des §. die Zahlen A, B, C), nicht hinschreibt, sondern stückweise im Kopf macht, und ohne sie hinzuschreiben gleich abzieht, wobei man aber die Multiplication des Divisors mit jeder Ziffer des Quotienten, nicht von der rechten gegen die linke, sondern von dieser gegen jene verrichtet, und um Verwirrung zu vermeiden, jede Ziffer, die in Rechnung gewesen ist, gleich ausstreicht, die bleibenden Reste aber über dem Divisor aufthürmt.

Wir wollen dies nur an einem kleinen Beispiel erläutern. Wenn 3954 durch 267 dividirt werden soll, so setzt man 267 unter 395 und sagt 2 in 3, 1 mal. Nun wird 367 von der linken Seite an mit 1 multiplicirt, und was bei jeder Ziffer herauskommt, gleich von dem, was gerade darüber steht, abgezogen. Man sagt also 1 mal 2 ist 2, und dies von 3 abgezogen bleibt 1, welches über 3 geschrieben, 3 und 2 aber durchstrichen wird. Weiter ist 1 mal 6 = 6, und 6 von 9 bleibt 3. 3 wird über 9 geschrieben,

```
2
41
24
1386
3954|14
2677
26
```

ben, 6 und 9 oben geschrieben. Weiter 1 mal 7 ist 7, und 7 von 35 bleibt 28. 8 wird über 5, und 2 wird über 3 geschrieben; 3, 5 und 7 aber gestrichen. Nun wird der Divisor zum zweitenmal untergesetzt, aber eine Ziffer weiter gegen die rechte Hand, nemlich 2 und 6 unter der gestrichnen 6 und 7, und 7 unter die 4. Dann gehe ich mit der 2 von unten gerade in die Höhe, und finde oben eine ungestrichene 2, aber vor ihr noch eine ungestrichene 1, also sage ich 2 in 12, 4 mal. Dann multiplicire ich wieder mit 4 den Divisor von der linken Seite an, und sage 2 mal 4 ist 8, und 8 von 12 bleibt 4. Diese 4 kommt über die oberste 2, 12 und 2 unten gestrichen. Ferner 4 mal 6 ist 24, und 24 von 48 bleibt 24. 4 kommt über 8, und 2 über 4; 48 und 6 gestrichen. Endlich 4 mal 7 ist 28, und 28 von 44 bleibt 16; 16 kommt über 44; aber 44 und 7 werden gestrichen. So ist nun der Quotient 14, und der ungestrichene Rest 216.

Diese Art zu dividiren verdient nicht beibehalten zu werden, denn das Unbequeme und Nachtheilige, was sie hat, ist weit größer, als der Vortheil, den sie gewährt. Der Vortheil derselben besteht nemlich darin, daß man weniger Ziffern aufs Papier schreibt, und die ganze Rechnung einen kleinern Raum einnimmt, wodurch aber dennoch die ganze Rechnung nicht kürzer wird, d. h. wenn ihrer zwei ein und dasselbe Exempel, einer nach dieser Art, der andere nach der vorigen rechnet, und sie sind beide jeder in seiner Art gleich geübt, so wird der, welcher nach dieser letzten Art rechnet, nicht eher fertig als jener; denn was jener auf dem Papier rechnet, muß dieser im Kopfe rechnen. Der ganze Vortheil besteht also bloß in einer ganz unbedeutenden Ersparung von ein Bißchen Papier. Dagegen aber hat die

letztere

letztere Art einen doppelten erheblichern Nachtheil, den die erste nicht hat. 1) Da hier die Producte des Divisors mit den einzelnen Ziffern des Quotienten nicht niedergeschrieben werden, so ist es bei dieser Art fast gar nicht möglich, einem Anfänger die Gründe dieser Rechnung begreiflich zu machen, weil es beim Beweise, wie wir gesehen haben, hauptsächlich auf eine aufmerksame Betrachtung dieser Producte ankommt. 2) Wenn in einer solchen Rechnung einmal ein Rechnungsfehler begangen ist, so ist es fast gar nicht möglich, ihn in dem Exempel aufzusuchen, weil man sich gar zu leicht in den ausgestrichenen Ziffern verirrt. Selbst wenn man während der Rechnung einmal im Quotienten eine zu große, oder zu kleine Ziffer gesetzt hat, so ist die Verbesserung eine sehr verdrießliche Arbeit, bei der man äußerst leicht in neue Fehler fällt, und bloß deshalb öfters die ganze Rechnung noch einmal von vorne machen muß.

Noch unbequemer und sonderbarer ist es, wenn in einigen ältern Rechenbüchern die Untersetzung des Divisors erspart, oder die Reste nicht über, sondern unter dem Dividendus aufgethürmet werden. Kurz alle dergleichen Künsteleien sind unnütz und nachtheilig, und die oben vorgetragene und in den meisten neuern Rechenbüchern aufgenommene Art ist in aller Absicht die bequemste und sicherste; da man die ganze Rechnung deutlich vor Augen hat, und das ganze Exempel, nach vollendeter Rechnung, vom Anfang bis zu Ende bequem durchsehen kann. Ich rathe daher Jedem, der etwa die alte Art noch braucht, sich die kleine Mühe, die ihm die Erlernung der neuern machen wird, nicht verdrießen zu lassen.

Kenn-

Kennzeichen, an welchen sich erkennen läßt, ob eine aufgegebene Zahl mit einem Divisor, der 12 nicht übersteigt, aufgehe.

§. 67.

Es würde für viele Rechnungen sehr vortheilhaft seyn, wenn man jeder Zahl gleich ansehen könnte, mit was für Zahlen sie sich ohne Rest dividiren läßt, d. h. mit andern Worten, in was für ganze Factoren sie sich zerfällen läßt. Denn weiß man z. B., daß 91 sich mit 7 ohne Rest dividiren läßt, so ist auch 91 in zwei ganze Factoren zerfällt. Denn wenn man 91 wirklich mit 7 dividirt, so kommt 13 heraus; also muß 91 = 7 mal 13 seyn, d. h. 91 ist in die Factoren 7 und 13 zerfällt.

Hier ist nun der Ort, wo wir versprochenermaßen (m. s. §. 44), etwas mehr von der Zerfällung der Zahlen sagen können. Schwierig ist diese Arbeit nur bei solchen Zahlen, die bloß große Factoren haben. Läßt sich hingegen eine Zahl durch eine kleine Zahl, die 12 nicht übersteigt, ohne Rest dividiren, so giebt es gewisse Kennzeichen, durch welche man dies einer Zahl fast augenblicklich ansehen kann. Dies gewährt in allen Arten von Rechnungen wichtige Vortheile, und wir wollen daher diese Kennzeichen hier erklären, und ihre Gründe auseinander setzen. Wir schränken uns aber bloß auf die Kennzeichen ein,

nach

nach denen sich beurtheilen läßt, ob eine Zahl durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, oder 12, zersetzbar sey. Denn ohngeachtet sich für mehrere größere Zahlen leichte Kennzeichen angeben lassen, so sind doch diese von wenigem Gebrauch, und ergeben sich zum Theil auch von selbst aus jenen.

Wir wollen aber diese Kennzeichen nicht nach der natürlichen Ordnung der Zahlen, sondern nach einer Ordnung durchgehen, welche die Aehnlichkeit dieser Kennzeichen an die Hand giebt, nemlich 2, 4, 8, . . 5, 10, . . 3, 9, . . 6. 12 . . 11, . . 7. Wo ein Strich steht, fängt immer eine neue Art von Kennzeichen an.

Kennzeichen der Divisoren 2, 4, 8.

Mit zweie geht jede Zahl auf, deren Einer mit zweie aufgehen. Z. B. 7 396 geht mit 2 auf, weil 6 mit 2 aufgeht; auch 19 730 geht mit 2 auf, weil 0 durch 2 dividiret auch keinen Rest läßt. Hingegen geht 6 843 geht nicht mit 2 auf, weil 3 nicht mit 2 aufgeht.

Der Grund dieses Kennzeichens liegt darin, daß alle höhere Ziffern von den Zehnern an, wenn man sie nach ihrem rechten Werthe nimmt, allezeit eine Zahl vorstellen, die mit zwei aufgeht, die Ziffer selbst mag nach ihren Namenwerth gerade oder ungerade seyn. Denn man wähle die erste beste Zahl, z. B. 5 698, so

sind

sind 5000 und 600, und 90 gerade Zahlen, wenn gleich die Ziffern 5 und 9 an sich ungerade sind. Weil nemlich 10 sich in 2 gleiche Theile (5 + 5) theilen läßt, so wird sich auch jede Menge von Zehnern (als oben 9 Zehner, d. i. 90) in 2 gleiche Theile theilen lassen. Da nun jedes Hundert aus 10 Zehnern, und jedes Tausend aus 10 Hunderten u. s. w. besteht, so ist klar, daß sich auch jede Menge von Hunderten, Tausenden u. s. w. in 2 gleiche Theile theilen läßt. Die **Einer** sind es also ganz allein, wodurch eine Zahl ungerade oder gerade wird, auf diese darf man daher auch ganz allein sehen, wenn man wissen will, ob eine Zahl durch 2 theilbar sey.

Durch vier läßt sich eine Zahl ohne Rest dividiren, wenn ihre Einer und Zehner mit 4 aufgehn. Z. B. 3 728 geht mit 4 auf, weil 28 mit 4 aufgeht; eben so 17 996, desgleichen 4 280, 13 700 rc.

Wer den Grund des vorigen Kennzeichens deutlich gefaßt hat, für den kann der Grund von diesem kürzer gesagt werden. Nemlich eine Zahl bestehe aus so vielen Ziffern sie wolle, so zeigen die höhern Ziffern von den Hunderten an, jede eine Zahl an, die mit 4 theilbar ist. Denn ein Hundert ist mit 4 theilbar (der 4te Theil ist 25), also auch jede Menge von Hunderten, Tausenden rc. Bloß die Einer und Zehner sind es daher, welche verhindern können, daß eine Zahl nicht mit 4 aufgeht. Denn wenn ich z. B. die

Zahl 17 934 in die beiden Stücke 17 900 + 34 theile, so geht das erste Stück gewiß mit 4 auf, und nur das letzte Stück 34 verursacht, daß ein Rest bleibt.

Anm. Dies Kennzeichen ist noch einer Abkürzung fähig; doch möchte ich Anfängern rathen, diese Abkürzung anfänglich zu übergehen, und sie sich bloß gelegentlich bekannt zu machen. Weil nemlich alle Zehner, die mit einer geraden Ziffer geschrieben werden (nemlich 20, 40, 60 und 80) durch 4 theilbar sind, so darf man, wenn die Ziffern der Zehner gerade sind, nur auf die Einer sehen; ist aber die Ziffer der Zehner ungerade, so darf man von ihr bloß einen einzigen Zehner mit den Einern zusammenziehen und sehen, ob diese Zahl mit 4 aufgeht. Z. B. 3 768 geht mit 4 auf, weil die Ziffer der Zehner (6) gerade ist, und die Einer (8) mit 4 aufgehn. 7 592 geht auf, weil die Ziffer der Zehner (9) ungrade ist, aber 1 Zehner mit den 2 Einern zusammen genommen (d. i. 12) mit 4 aufgeht.

Mit achte läßt sich eine Zahl ohne Rest dividiren, wenn ihre Einer, Zehner und Hunderte mit 8 aufgehen. Z. B. 3 729 864 geht mit 8 auf, weil 864 mit 8 aufgeht. Eben so 13 792; 135 360; 752 600; 25 080; 317 400; 219 000; rc.

Denn weil ein Tausend durch 8 theilbar ist (der 8te Theil ist 225), so ist auch jede Menge von Tausenden, Zehntausenden rc. durch 8 theilbar. Bloß die Einer, Zehner und Hunderte verursachen, daß viele Zahlen bei der Division mit

mit 8 einen Rest lassen. Denn wenn ich von einer Zahl, z. B. 2 719 578 die drei letzten Ziffern absondere, und sie so in 2 Stücke theile, 2 719 000 + 578, so geht das erste Stück gewiß mit 8 auf, und nur das letzte Stück kann verursachen, daß ein Rest bleibt.

Anm. Auch hier findet eine ähnliche Abkürzung als bei der 4 statt. Die geraden Hunderte (nemlich 200, 400, 600, 800) gehen sämtlich mit 8 auf. Ist also die Ziffer der Hunderte gerade, so kann man diese ganz außer Acht lassen. Ist die Ziffer der Hunderte ungerade, so braucht man nur 1 Hundert in Rechnung zu bringen. 3 496 geht mit 8 auf, weil die Ziffer der Hunderte (4) gerade ist, und 96 mit 8 aufgeht. Und 5 728 geht mit 8 auf, weil die Ziffer der Hunderte (7) ungerade ist, aber 128 mit 8 aufgeht.

Kennzeichen der Divisoren 5 und 10.

Mit fünfe geht eine Zahl nur alsdann auf, wenn in der Stelle der Einer 0 oder 5 steht. Z. B. 7680; 3575; 730; 695; 3 718 400 rc. gehn mit 5 auf, weil sie sich entweder auf 0, oder auf 5 endigen.

Denn weil ein Zehner mit 5 aufgeht, so geht auch jede Menge von Zehnern, Hunderten, Tausenden rc. mit 5 auf. Wenn daher eine Zahl mit 5 nicht aufgeht, so liegt der Grund ganz allein in den Einern. Unter allen unsern zehn Ziffern abre sind bloß zweie, nemlich 0 und 5, die mit

5 dividirt keinen Rest lassen. Soll daher eine Zahl mit 5 aufgehen, so muß sie entweder 0 Einer, oder 5 Einer haben.

Mit zehne geht eine Zahl nur alsdann auf, wenn in der Stelle der Einer 0 steht. Z. B. 7 680; 5 970; 178 0 rc. gehen mit 10 auf.

Denn weil 1 Zehner mit 10 aufgeht, so gehen auch alle Hunderte, Tausende rc. mit 10 auf. Wenn also eine Zahl mit 10 nicht aufgeht, so liegt die Schuld bloß an den Einern. Unter unsern 10 einfachen Ziffern ist die 0 die einzige, die mit 10 dividirt keinen Rest läßt; also müssen 0 Einer da seyn, wenn eine Zahl aufgehen soll.

Kennzeichen der Divisoren 3 und 9.

Mit dreie geht eine Zahl nur alsdann auf, wenn die Summe ihrer Ziffern mit 3 aufgeht. Z. B. 4137 geht mit 3 auf, weil 4 + 1 + 3 + 7, welches 15 beträgt, mit 3 aufgeht, 7 958 hingegen geht nicht mit 3 auf, weil die Summe der Ziffern 7 + 9 + 5 + 8, welches 29 beträgt, nicht mit 3 aufgeht. Einige Zahlen, die mit 3 aufgehen: 33; 39; 51; 57; 63; 66; 69; 75; 78; 84 87; 93; 99; 102; 105; 111; 129; 723; 5 627 rc.

Den

Den Grund dieses Kennzeichens wollen wir erst bei den folgenden Kennzeichen auseinander setzen.

Mit neune geht eine Zahl nur alsdenn auf, wenn die Summe ihrer Ziffern mit 9 aufgeht. Z. B. 378 geht mit 9 auf, weil 3 + 7 + 8 = 18 mit 9 aufgeht. 5 834 geht mit 9 nicht auf, weil die Summe der Ziffern 5 + 8 + 3 + 4 = 20 mit 9 nicht aufgeht. Einige Zahlen, die mit 9 aufgehen: 108, 117, 126, 135, 144, 225, 387, 981, 7 641, 13 527 ꝛc.

Der Grund dieser beiden Kennzeichen liegt etwas versteckter, als bei den vorhergehenden. Durch ähnliche Schlüsse als dort käme man hier gar nicht zum Ziele: denn wenn man 1, 10, 100, 1000, 10 000 ꝛc. durch 9 dividirt, so wird man nie auf Zahlen (höhere Einheiten §. 4 und 5) kommen, die mit 9 aufgingen.

Es beruhen aber diese Kennzeichen auf einer besondern Eigenschaft aller mit unsern Ziffern geschriebenen Zahlen, die jedem sonderbar vorkommen muß, der ihren Grund nicht kennt. Man schreibe die erste die beste Zahl hin, z. B. 37 568, addire ihre Ziffern (3 + 7 + 5 + 6 + 8 = 29), und ziehe diese Summe (29) von der ganzen Zahl (37 568) ab, so behält man zuverlässig eine Zahl übrig, die mit 9 aufgeht, wie man

37 568	aus der hier beigefügten Rechnung
9) 29	sieht. Man kann den Versuch mit
37 539	jeder andern Zahl machen, und man
4 171	wird es bei jeder andern eben so
	finden.

Jeder, der zählen kann, weiß, daß die nächsten Zahlen, die vor 10, 100, 1000, 10 000 ꝛc. vorausgehen, mit lauter Neunen geschrieben werden. Die nächste Zahl vor 10 ist 9, vor 100 ist sie 99, vor 1000 ist sie 999, vor 10000 ist sie 9999 u. s. w. und daß jede Zahl, die mit lauter Neunen geschrieben wird, sich durch 9 ohne Rest dividiren läßt, bedarf wohl keines Beweises. Nun zerlege man die gewählte Zahl (37 568) in diejenigen Stücke, in welche sie von selbst sich theilt, wenn man jede Ziffer nach ihrem wahren Werthe liest. Die obige Zahl ist also

30 000 + 7 000 + 500 + 60 + 8.

Jedes dieser Stücke zerlege man wieder in so viele gleiche Theile, als die Ziffer anzeigt, womit es geschrieben wird.

10 000	+ 1 000	+ 100	+ 10	+ 1	A
+ 10 000	+ 1 000	+ 100	+ 10	+ 1	
+ 10 000	+ 1 000	+ 100	+ 10	+ 1	
	+ 1 000	+ 100	+ 10	+ 1	
	+ 1 000	+ 100	+ 10	+ 1	
	+ 1 000		+ 10	+ 1	
	+ 1 000			+ 1	
				+ 1	

Nem-

Nemlich in der ersten Säule steht dreimal 10000, d. i. 30 000, in der 2ten Säule steht siebenmal 1 000, d. i. 7 000 u. s. f. Und es ist klar, daß sich jede Zahl auf diese Art in lauter solche Stücke zerlegen läßt, die mit 1 und Nullen geschrieben sind.

Nun nehme man von jedem dieser Stücke 1 (d. i. eine einzelne Einheit) ab, so werden lauter Stücke übrig bleiben, die mit 9 aufgehen; nemlich

9 999	+ 999	+ 99	+ 9	+ 0	B
+ 9 999	+ 999	+ 99	+ 9	+ 0	
+ 9 999	+ 999	+ 99	+ 9	+ 0	
	+ 999	+ 99	+ 9	+ 0	
	+ 999	+ 99	+ 9	+ 0	
	+ 999		+ 9	+ 0	
	+ 999			+ 0	
				+ 0	

Nun frage man sich, 1) wieviel die bei A aufgezählten Stücke zusammen betragen? 2) wieviel man im Ganzen von diesen Stücken abgenommen hat? und 3) wieviel daher die bei B aufgezählten Zahlen zusammen betragen müssen? so ist auf einmal das ganze Räthsel vollständig aufgelöset.

Denn 1) die Zahlen bei A betragen unstreitig zusammen 37 568. 2) Die abgezogenen Einsen betragen unstreitig zusammen 3 + 5 + 7 + 6 + 8, d. i. 29. 3) Folglich können die bei B aufgezählten Stücke offenbar in der Summe nichts anders seyn, als was oben übrig blieb,

als wie 29 von 37 568 auf einmal abgezogen, nemlich 37 539. Zugleich fällt aber aus ihrer Zerstückelung bei B in die Augen, daß sie aus lauter Stücken besteht, die mit 9 aufgehen, und daß sie selbst daher nothwendiger Weise mit 9 aufgehen müsse.

Auch wird man leicht im Stande seyn, mit jeder andern Zahl eben die Arbeit vorzunehmen.

Hat man nun diese Eigenschaft der Zahlen begriffen, so hat der Beweis von den obigen beiden Kennzeichen der Divisoren 3 und 9 keine Schwierigkeit.

Grund von den Kennzeichen des Divisors 9. Jede Zahl, z. B. 765, kann man in Gedanken in zwei Stücke theilen, wovon das eine so groß ist als die Summe der Ziffern (bei der obigen Zahl also 18); das andere Stück ist, was von der Zahl übrig bleibt, wenn ich jene Summe (18) davon abziehe (also hier 765 — 18, d. i. 747).

Von diesem letzten Stück weiß ich nun ein für allemal, daß es mit 9 aufgeht. Ich habe daher bloß nöthig zu untersuchen, ob auch das erste Stück (18 oder die Summe der Ziffern) mit 9 aufgeht. Findet sichs so, so geht gewiß die ganze Zahl mit 9 auf. Geht aber die Summe der Ziffern nicht mit 9 auf, so wird eben so gewiß auch bei der Division der ganzen Zahl ein Rest bleiben.

Grund

Grund von dem Kennzeichen des Divisors 3. Da 9 mit 3 aufgeht, so wird auch jede Zahl, die mit 9 aufgeht, gewiß mit 3 aufgehen. Man theile also wieder wie vorher irgend eine Zahl, z. B. 582 in zwei Stücke, wovon das eine der Summe der Ziffern (5 + 8 + 2 = 15) gleich ist. Vom andern Stück weiß ich ein für allemal, daß es mit 9, also auch mit 3 aufgeht; es kommt also bloß darauf an, ob jenes Stück, nemlich die Summe der Ziffern, mit 3 aufgeht.

Anm. Auch diese beiden Kennzeichen lassen Abkürzungen zu.

Will man wissen, ob eine Zahl mit 9 aufgeht, so kann beim Zusammenzählen, wie bei der Neunerprobe, 9 weggelassen werden, so oft als man über 9 kommt. Um z. B. zu wissen, ob die Zahl 5 271 819 mit 9 aufgeht, lasse ich, wenn ich rechter Hand anfange, erst 9 weg, dann auch 8 und 1; ferner unter den folgenden Ziffern 2 und 7, und habe also bloß noch 5 und 1 zu addiren, welches 6 macht. Da dies nicht mit 9 aufgeht, so wird auch die ganze Zahl nicht mit 9 aufgehen.

Will man aber wissen, ob eine Zahl mit 3 aufgeht, so kann man beim Zusammenzählen, 3, 6, 9, und jede Summe, die mit 3 aufgeht, wegwerfen, z. B. 7 813 594. Von der rechten Seite an lasse ich weg, 9, desgleichen 5 und 4, ferner 3, weiter 8 und 1, und so bleibt bloß 7 übrig, welches nicht mit 3 aufgeht. Daher auch die ganze Zahl nicht mit 3 aufgehen kann.

Uebrigens ist aus dem Beweise, den wir von diesen beiden Kennzeichen gegeben haben, klar, daß wenn eine Zahl mit 3 oder 9 nicht aufgeht, als

beim Zusammenzählen der Ziffern ein Rest bleibt, dieser Rest kein anderer sey, als den man bei wirklicher Division der Zahlen mit 3 oder 9 finden würde. Dies ist darum zu merken, weil sich darauf die Neunerproben gründen.

Kennzeichen der Divisoren 6 und 12.

Mit sechse geht eine Zahl nur alsdann auf, wenn sich bei ihr die obigen Kennzeichen der Divisoren zwei und drei zugleich finden. Z. B. die Zahl 3516 wird mit 6 aufgehen, denn die Einer (6) sind gerade (Kennzeichen der 2), und die Summe der Ziffern ($3 + 5 + 1 + 6 = 15$) geht mit 3 auf (Kennzeichen der 3). Hingegen die Zahl 5163 geht nicht mit 6 auf, denn ihr fehlt das Kennzeichen der 2, ob sie gleich das Kennzeichen der 3 hat. Einige Zahlen, die mit 6 aufgehen: 798; 522; 8436; 15024; 11280 rc.

Da $6 = 2 \times 3$, so ist klar, daß eine Zahl, die mit 6 aufgehen soll, auch nothwendig sowohl mit 2 als mit 3 aufgehen muß. Denn wenn ich eine Sache in 6 Theile theile, so ist sie von selbst dadurch eben sowohl in 2 als in 3 Theile getheilt. Und hierin liegt der Grund des obigen Kennzeichens.

Mit zwölfe geht eine Zahl nur alsdann auf, wenn sich bei ihr die obigen Kennzeichen sowohl von dreie, als

von

von viere finden. Z. B. die Zahl 41 316 geht mit 12 auf, denn 16 geht mit 4 auf (Kennzeichen der 4) und die Summe der Ziffern (15) geht mit 3 auf (Kennzeichen der 3). Hingegen geht 45 400 nicht auf, weil sie zwar das Kennzeichen der 4, aber nicht der 3 hat. Einige Zahlen, die mit 12 aufgehn: 132, 144, 168, 288, 576, 1 728, 14 760 rc.

Der Beweis ist wie bei dem vorigen Kennzeichen, weil $12 = 3 \times 4$, so muß jede Zahl, die mit 12 aufgehen soll, auch mit 3 und 4 aufgehen.

Hier ist nur noch dies zu bemerken, wenn Jemand sagen wollte, weil 12 auch 2 mal 6 ist, so muß eine Zahl auch mit 12 aufgehn, welche das Kennzeichen der 2 und 6 hat, so würde er falsch schließen. Die sechse schließt nemlich das Kennzeichen der 2 schon mit in sich. Wenn ich daher z. B. die Zahl 138 untersuche, so kann ich wohl sagen, sie geht mit 6 auf, weil sie das Kennzeichen der 2 und 3 hat; aber nun kann ich das Kennzeichen der 2 nicht noch zum 2ten mal in Anschlag bringen, und sagen, sie geht auch mit 12 auf, weil sie das Kennzeichen der 2 hat. Ueberhaupt, wenn zwei Kennzeichen zugleich bei einer Zahl angewendet werden sollen, so müssen sie gänzlich verschieden, und nicht eines schon im andern enthalten seyn.

Anm. Ein nachdenkender Leser wird vielleicht von selbst hierbei wahrnehmen, daß er auf ähnliche Art für

für mehrere Zahlen über 12, Kennzeichen machen könne. Z. B. was mit 3 und 5 aufgeht, geht auch mit 15 auf; was mit 2 und 9 aufgeht, geht auch mit 18 auf; was mit 4 und 5 aufgeht, geht auch mit 20 auf; was mit 3 und 8 aufgeht, geht auch mit 24 auf, u. d. g. m.

Kennzeichen des Divisors 11.

Man theile die gegebene Zahl von der rechten Seite an, in Klassen von 2 Ziffern; lese jede solche Klasse als eine zweiziffrige Zahl, lasse aber von jeder so viel weg, als mit 11 aufgeht, die Ueberreste aller Klassen addire man. Geht diese Summe der Ueberreste mit 11 auf, so geht auch die ganze Zahl mit 11 auf. Die gegebene Zahl sey 36 993, so verfährt man mit ihr, wie folgt:

	3	69	93
Nächst niedr. Zahl die mit 11 aufgeht	0	66	88
Ueberreste über diese Zahl	3	3	5

Nemlich in der ersten Klasse rechter Hand steht 93; von diesen gehen 88 mit 11 auf, und 5 bleiben übrig. In der 2ten Klasse stehen 69, von diesen gehen 66 mit 11 auf, und 3 bleiben übrig. In der 3ten Klasse stehen 3, diese bleiben ganz übrig, da sie weniger als 11 betragen. Nun addirt man die Ueberreste aller Klassen, $3 + 3 + 5 = 11$, und da diese Summe mit 11 aufgeht,

so

so geht die ganze Zahl 36 993 mit 11 auf; wie sich bei wirklicher Division zeigt. Daß übrigens die ganze Arbeit leicht und im Kopfe verrichtet werden kann, fällt von selbst in die Augen. — Einige Zahlen, die mit 11 aufgehen: 121, 143, 198, 209, 264, 847, 968, 4081, 7898, 233 816 rc.

Auch von diesem Kennzeichen liegt, wie bei der 9, der Grund etwas tiefer, als bei den übrigen Kennzeichen, doch wird man ihn, auf folgendem Wege, ohne Schwierigkeit fassen. Zuerst suche man sich folgende drei Sätze ganz deutlich zu machen: 1) Jede Zahl, die mit einer **geraden** Anzahl von Neunen geschrieben wird, geht mit 11 auf, z. B. 99, 9 999, 999 999 u. s. w. (Ist hingegen die Anzahl der Neunen ungerade, so bleibt allezeit die letzte 9 als Rest). 2) Daher muß auch jede Zahl mit 11 aufgehen, die aus lauter dergleichen Zahlen, wie Nr. 1. beschrieben sind, zusammengesetzt ist. D. h. 2 mal 99, oder 3 mal 99, oder 4 mal 99 rc., desgleichen 2 mal 9 999, oder 7 mal 9 999, oder 75 mal 9 999 u. d. g. m. müssen mit 11 aufgehen. 3) Jede Zahl, die aus 1 und einer **geraden** Anzahl von Nullen besteht, wird den Rest 1 lassen. Z. B. 100, 10 000, 100 0 000 rc. Denn vor jeder dieser Zahlen geht zunächst eine Zahl voraus, die mit einer geraden Anzahl von Neunen geschrieben wird, z. B. die nächsten Zahlen

vor

vor den obigen drei Zahlen sind 99, 9'999, 999 999.

Nun nehme man die erste die beste Zahl, als 37 582 und theile sie, von der rechten Seite an, in Klassen von zwei Ziffern 3|75|82. Ferner schreibe man jede Klasse einzeln, nach ihrem wahren Werthe, hin, nemlich

30 000 + 7 500 + 82.

Nun bemerke man, daß 30 000 eben so viel ist, als 3 mal 10 000; und daß 7 500 eben so viel ist, als 75 mal 100. Dies deutlich gedacht, so wird man folgendes verstehen:

30 000 ist so viel als, 3 mal 9 999, und noch 3.
7 500 = = 75 mal 99, und noch 75.
82 = = = = = 82.

Nemlich die erste Zeile sagt, wenn ich 9 999 dreimal nehme, und noch 3 hinzulege, (nemlich zu jedem 9 999, eins), so habe ich eben so viel als 3 mal 10 000. Die zweite Zeile sagt, wenn ich 99 fünf und siebenzig mal nehme, und dann noch 75 zulege (nemlich zu jedem 99, eins), so habe ich 75 mal 100, oder 7 500. Die 3te Zeile sagt nichts weiter, als 82 ist 82.

Auf der rechten Seite der obigen drei Zeilen ist nun unsere Zahl 37 582 im Grunde in 5 Stücke zerstückelt, neml. 1) 3 mal 9999; 2) 75 mal 99; 3) 3; 4) 75; 5) 82.

Die beiden ersten Stücke gehen für sich mit 11 auf. Es kommt also nur auf die 3 letzten 3 + 75 + 82 an. Aber in 75 und 82 stecken auch

auch noch Zahlen, die mit 11 aufgehen, nemlich in 75 steckt 66, und in 82 steckt 77. Ich lasse also aus 75 diese 66, und aus 82 diese 77 weg, und nun wirds ganz allein auf die Ueberreste ankommen. In der ersten Zeile auf den Ueberrest 3, in der 2ten auf den Ueberrest 9, in der 3ten Zeile auf den Ueberrest 5. Diese 3 Ueberreste 3 + 9 + 5 aber betragen zusammen 17. Und nun ist klar, daß wenn auch dieser Ueberrest mit 11 aufginge, die ganze Zahl 37582 mit 11 aufgehen müßte, weil alles, was wir nach und nach weggeworfen haben, für sich mit 11 aufging. Geht aber dieser letzte Rest (17), wie es hier der Fall ist, nicht mit 11 auf, so kann auch die ganze Zahl nicht mit 11 aufgehen.

Anm. Aus dem geführten Beweise ist zugleich klar, daß man aus dem letzten Ueberrest (im obigen Exempel 17), zugleich finden könne, wieviel die gegebene Zahl, wenn sie nicht mit 11 aufgeht, bei der wirklichen Division Rest lasse. Denn wenn der letzte Ueberrest (oben 17) kleiner als 11 wäre, so wäre er selbst dieser gesuchte Rest. Ist er aber über 11, so wirft man noch 11 weg, so oft es angeht. In dem obigen Beispiel muß also die Zahl 37582 bei der Division mit 11 den Rest 6 lassen; denn wenn ich von 17 elfe wegnehme, so bleibt 6 übrig.

Ueber den Divisor 7.

Für die Zahl sieben läßt sich kein bequemes Kennzeichen angeben. Ich sage kein

kein bequemes Kennzeichen: denn ein Kennzeichen ließe sich wohl angeben, aber es würde unbequemer seyn, als wenn man geradezu eine vorgelegte Zahl mit 7 wirklich dividirt, und könnte daher von keinem Nutzen seyn. Da übrigens die Division durch 7, wie durch jede einziffrige Zahl, sehr leicht ist, so thut man am besten, wenn man eine vorgelegte Zahl geradezu mit 7 durchdividirt, wenn man wissen will, ob sie mit 7 aufgeht.

Uebungsbeispiele.

171) Durch was für Zahlen unter 13 lassen sich folgende Zahlen ohne Rest dividiren? a) 786. b) 16 860. c) 1 728. d) 37 488. e) 27 720. f) 17 416. g) 308. h) 225.

Vortheile beim Dividiren.

§. 68.

Die erheblichsten Vortheile beim Dividiren, welche sich schon hier erklären lassen, sind von ähnlicher Art, als bei der Multiplication §. 45.

a) Mit jeder Zahl, deren Vielfache bis zum Neunfachen man im Kopfe hat, kann man wie mit einer einzelnen Ziffer dividiren. Zum wenigsten sollte man sich gewöhnen, mit 11, 12 und

11) 37 159 / 3 378 $\frac{1}{11}$

12) 41 739 / 3 478 $\frac{3}{12}$

24) 59 725 / 2 488 $\frac{13}{24}$

und 24 nie anders zu dividiren. Es wird genug seyn, von den hier beigefugten drei Beispielen bloß das letzte durchzugehen. Man rechnet so: 24 in 59, 2 mal. Da aber 2 mal 24 = 48, so bleiben von 59, 11 übrig. Hierzu die folgende 7 gezogen, giebt 117; und 24 in 117, 4 mal. Da aber 4 mal 24 = 96, so bleiben von 117, 21 übrig. Hierzu 2 gezogen, giebt 212; und 24 in 212, 8 mal; aber 8 mal 24 = 192; es bleiben also von 212, 20 übrig. Hierzu 5 gezogen giebt 205, und 24 in 205, auch 8 mal; also, da 8 mal 24 = 192, so bleibt von 205, 13 übrig. Diese 13 durch 24 dividirt geben den Bruch $\frac{13}{24}$.

Uebungsbeispiele.

172) Es soll der 11te Theil von 99 024 057 ausgerechnet werden.

173) Es soll ausgerechnet werden, wie vielmal 12 Pfennige in 10 758 020 Pf. enthalten sind.

174) a) Wie viel Groschen sind 31 802 640 Pfennige? und b) wie viel Thaler sind die herausgebrachten Groschen?

175) Wie viel beträgt der 12te Theil von 47.615 933 Pfennigen?

176) Wie viel Wispel sind 18 063 864 Scheffel?

177) Wie viel Thaler sind 63 021 789 Groschen?

b) So wie beim Multipliciren nach §. 45 der Multiplicator zerfällt werden konnte, so darf dies bei der Division mit dem Divisor geschehen. Gesetzt es sollte die Zahl 32 508 mit 36 dividirt werden, so kann ich 36 in 4 mal 9 zerfällen; und nun die gegebene Zahl erst mit 4 dividiren, welches 8 127 giebt; und diese Zahl wird nun noch mit 9 dividirt, so kommt 903 heraus, welches der gesuchte Quotient ist. Denn man stelle sich die Division als eine Theilung vor (welches nach §. 49 allezeit geschehen darf); so enthält die 2te Zeile unsers Exempels den **vierten** Theil der ersten Zeile. Von diesem vierten Theil der ersten Zeile ist in der dritten Zeile wieder der **neunte** Theil ausgerechnet worden. Nun fragt sich, wenn ich eine Sache erst in 4 Theile, das Viertel aber in 9 Theile theile, was diese letzten Theile, für Theile in Vergleichung mit der ganzen Sache seyn werden. Man mache Kindern die Sache sinnlich: man zeichne ungefähr die Länge einer Elle an die Tafel, theile sie in 4 gleiche Theile, und eines dieser Viertel wieder in 9 Theile, und frage sie, wie viele von den letztern Theilen wohl auf die ganze Elle gehen? und sie werden sehr bald begreifen, daß solcher Theile 4 mal

4) 32 508
9) 8 127
903

mal 9, d. i. 36 auf die ganze Elle gehen. Es ist also klar, daß wenn ich von einer Zahl erst den 4ten Theil ausrechne, vom 4ten aber wieder den 9ten, daß ich so den 36sten Theil der gegebenen Zahl finde. Auf eben die Art könnte ich statt mit 45 zu dividiren, zweimal hinter einander, mit 5 und 9 dividiren: statt mit 63 zu dividiren, kann ich mit 7 und mit 9 dividiren, u. d. g. m.

Auch begreift man leicht, daß hierbei die Ordnung willkührlich ist: denn wenn ich in dem oben gerechneten Exempel erst den 9ten Theil ausrechne, und diesen wieder in 4 Theile theile, so kann auch nichts anders als der 36ste Theil der gegebenen Zahl herauskommen.

9) 32 508
4) 3 612
903

Wir sind indessen hier bei der Anwendung dieses Vortheils einer Einschränkung unterworfen, die beim Multipliciren nicht statt fand, und die erst im folgenden, durch die Lehre von den Brüchen, gänzlich gehoben werden kann.

Es kann nemlich sehr leicht der Fall eintreten, daß die erste Division nicht aufgeht, also der Quotient einen Bruch bekommt. Und nun kämen wir bei der zweiten Division in den Fall, einen Bruch dividiren zu müssen, welches wir hier noch nicht können. Hier leisten nun die im vorigen §. erklärten Kennzeichen der Divisoren nützliche Dienste, indem sie uns zeigen, ob der Dividendus mit einer der Zahlen, oder mit bei-

den, in die sich der Divisor zerfällen läßt aufgeht. Es schadet nichts, wenn er mit einer der beiden Zahlen nicht aufgeht, denn mit dieser muß man nur nicht die erste Division machen.

9) 5 157
5) 573
114 3/5

Wenn z. B. 5 157 mit 45 dividirt werden soll, und 45, in 5mal 9 zerfällt wird, so sieht man gleich, daß der Dividendus wohl mit 9, aber nicht mit 5 aufgeht. Man dividire also mit 9 zuerst, so erhält man 573, und dies mit 5 dividirt, giebt 114 3/5 welches, der richtige Quotient ist.

Uebungsbeispiele.

178) 22 828 624 : 56.
179) 78 678 720 : 72.
180) 38 900 736 : 81.

c) Der vorige Vortheil kann vermittelst unserer Kennzeichen der Divisoren noch viel weiter ausgedehnt, und oft auf ziemlich große Divisionen angewendet werden. Gesetzt es soll 210 348 durch 324 dividirt werden; so vergleiche man Divisor und Dividendus. Findet sich, daß sie nach dem Kennzeichen irgend einen gemeinschaftlichen Divisor haben, so mache man den Aufsatz, wie hier an der Seite. In unserm Exempel fällt leicht in

4) 324	210 348
9) 81	52 587
9) 9	5 843
	649 2/9

die

die Augen, daß sowohl Divisor als Dividendus, mit 4 aufgehen. Man dividire also beide mit 4: so verwandelt sich der Divisor in 81 und der Dividendus in 52 587. Man vergleiche nun wieder diese beiden letzteren Zahlen. Beide gehen mit 9 auf; also dividire man beide mit 9: so verwandelt sich der Divisor in 9, und der Dividendus in 5843. Hätten diese beiden Zahlen noch einen Divisor gemein, so verführe man damit wie vorher. Da dies aber hier nicht der Fall ist, so dividirt man gerade zu 5843 durch 9, und was herauskommt, nemlich $649\frac{2}{9}$ ist der Quotient, welcher gesucht wurde.

Wenn der letzte Divisor (im obigen Exempel, 9), auch keine einziffrige Zahl ist, so hindert dies nichts; nur muß dann die letzte Division

```
 222 | 21 138 |
6)---------------
 37  |  3 523 | 95 8/37
        (37)
        333
        ----
         193
         185
         ---
           8
```

begreiflich nach §. 62 = 65 gemacht werden. Im beigefügten Exempel haben, der Divisor 222, und der Dividendus 21 138 den Divisor 6 gemein; also werden beide dadurch dividirt. So verwandelt sich der Divisor in 37 und der Dividendus in 3523. Da diese beiden Zahlen weiter keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, so dividirt man 3523 durch 37 und findet den Quotienten

tienten $95\frac{8}{37}$. Man hat hierbei immer Vortheil: denn die Division kleinerer Zahlen (37 und 3523) ist immer leichter und kürzer, als wenn man geradezu die beiden größern Zahlen (222 und 21 138) hätte dividiren wollen.

Der Grund dieses Vortheils liegt übrigens in den 5ten Grundsatz der Division §. 56. Denn dort haben wir gesehen, daß es in dem Quotienten gar nichts ändert, wenn man den Divisor und Dividendus zugleich, gleich vielmal vergrößert oder verkleinert; daß also in dem ersten der beiden gerechneten Exempel, die Zahlen 81 und 52587, desgleichen die Zahlen 9 und 5843 keinen andern Quotienten geben könne, als 324 und 210 348. Eben so können im zweiten Exempel die Zahlen 37 und 3523 keinen andern Quotienten geben, als 222 und 21 138.

Noch ist folgendes zu bemerken. Wenn sich Jemand die Mühe nimmt, die beiden obigen Exempel gerade zu, und ohne Anwendung des erklärten Vortheils zu rechnen, so wird er zwar die ganzen Zahlen des Quotienten völlig so finden, wie sie unsere Rechnung gegeben hat; aber der Bruch wird anders heraus zu kommen scheinen. Im ersten Exempel wird nemlich $\frac{72}{324}$ statt $\frac{2}{9}$; und im zweiten Exempel $\frac{48}{222}$ statt $\frac{8}{37}$ herauskommen. Allein dieser Unterschied ist nur scheinbar. Denn daß $\frac{72}{324}$ und $\frac{2}{9}$ im Grunde einerlei ist, sieht man ein, wenn man sich nur

recht

recht deutlich vorstellt, was eigentlich beide Brüche sagen wollen, und zugleich auf den Umstand Achtung giebt, daß in dem einen Bruch die obere und untere Zahl gerade 36mal größer ist, als in dem andern. Man mache sich die Sache sinnlich:

Unter der Linie A B stelle man sich etwa die Länge einer Elle vor, und theile sie in 9 gleiche Theile. Jeder solche Theil heißt nach §. 60 ein **Neuntel**. Folglich sind von A bis C zwei **Neuntel** ($\frac{2}{9}$). Wäre nun Jemand im Stande jedes Neuntel noch in 36 Theile zu theilen, so würden von A bis B, d. h. in der ganzen Elle, 9mal 36 Theile d. i. 324 Theile kommen; jeder solcher kleine Theil müßte also ein **dreihundertvierundzwanzigstel** ($\frac{1}{324}$) heißen. Von A bis C aber würden nur 2mal 36, d. i. 72 solcher Theile liegen: folglich müßte das Stück von A bis C, $\frac{72}{324}$ genennt werden. Es ist also ganz klar, daß eben die Länge A C, die voher $\frac{2}{9}$ hieß, jezt $\frac{72}{324}$ heißt, und daß beides einerlei sey. Auf eine ähnliche Art wird man sich in jedem Fall, die Gleichheit zwei solcher scheinbar verschiedenen Brüchen anschaulich machen können. Sollte indessen dennoch Jemanden hierbei einige Dunkelheit übrig bleiben, so wird sich die

Sache bei der Lehre von den Brüchen vollständiger aufklären.

Uebungsbeispiele.

181)	12	720	736	:	224
182)	117	053	829	:	243
183)	44	444	160	:	360
184)	14	809	536	:	504
185)	294	325	056	:	576
186)	54	815	712	:	672
187)	2	817	696	:	1568

Anm. Der dritte Vortheil beim Multipliciren (§ 45, c) wo nemlich z. B. statt des Multiplicators 298, gesetzt werden durfte 300 — 3, läßt sich beim Dividiren gar nicht anbringen. Denn wenn 297 ein Divisor wäre, und ich wollte es damit eben so machen, so hieße das so viel: anstatt den 297sten Theil des Dividendus wollte ich den 300sten ausmachen! das wäre schon zu wenig: aber von diesem 300sten wollte ich nun noch den 3ten Theil des Dividendus abziehen, was gar nicht einmal angeht, weil der 3te Theil viel größer ist, als der 300ste.

d) Wenn man mehrere Divisionen mit einem und demselben Divisor zu machen hat, so erleichtert man sich die Arbeit gar sehr, und schützt sich gegen Rechenfehler, wenn man sich im voraus eine Tafel seiner Vielfachen, bis zum Zehnfachen, völlig so wie §. 45., d. ausrechnet. Z. B. wenn auf einen Friedrichsdor 129 Groschen gerechnet werden, die

wie viel betragen folgende Summen von Groschen a) 4902; b) 5547; c) 27864; d) 25000.

1)	129
2)	258
3)	387
4)	516
5)	645
6)	774
7)	903
8)	1032
9)	1161
10)	1290

a) 4902|38 Fr. d'or.
387
1032
1032
0

b) 5547|43 Fr. d'or
516
387
387
0

c) 27864|216
258
206
129
774
774
0

d) 25000|193 $\frac{103}{129}$ Fr. d'or
129
1210
1161
490
387
103

Wie die Tabelle der Vielfachen gemacht ist, sehe man §. 45, d. Was die Rechnung betrift, so wird es hinreichend seyn, sie an einem einzigen Beispiele zu erläutern. Wir wählen dazu die Rechnung d. Vergleicht man die 3 ersten Ziffern des Dividendus (250) mit der Tabelle, so fällt in den Augen, daß der Divisor nicht mehr als 1 mal darin enthalten sey.

Es wird also 1 in den Quotienten geschrieben, und 129 von 230 abgezogen. Es bleibt 121 übrig. Rückt man also die im Dividendus folgende 0 herunter, und vergleicht die Zahl 1210 mit der Tabelle, so sieht man sogleich, daß der Divisor 9mal darin enthalten sey. Es wird also 9 in dem Quotienten geschrieben, und das 9fache des Divisors nemlich 1161 von 1210 abgezogen. Es bleibt 49, und nach Herunterrückung der letzten 0 des Dividendus, 490 übrig. Diese Zahl mit der Tabelle verglichen, zeigt, daß der Dividendus noch 3mal darin enthalten sey. 3 ist also die letzte Ziffer des Quotienten, und von 490 wird das 3fache des Dividendus, nemlich 387 abgezogen. Der Rest ist 103, und dieser durch 129 dividirt, giebt den Bruch $\frac{103}{129}$.

Die Bequemlichkeit dieser Rechnung fällt in die Augen, besonders, daß, wenn man nicht im halben Schlafe rechnet, man nie in Gefahr kommt, eine zu große oder zu kleine Ziffer in den Quotienten zu schreiben, und daß sonst die ganze Arbeit aus lauter leichten Additionen und Subtrationen besteht. Auch bei einer einzelnen Division, die aber etwas groß ist, kann eine solche Tabelle mit Nutzen gebraucht werden. Es ist übrigens hier die §. 45, d. über dergleichen Tabellen gemachte Anmerkung auch hier zu merken.

Uebungs-

Uebungsbeispiele.

188) Wenn Jemanden der 29ste Theil von folgenden 5 Geldsummen zukommt, wie viel muß er von jeder einzelnen bekommen? a) 1015 Thl. b) 7 743 Thl. c) 26 013 Thl. d) 23983 Thl. e) 36 192 Thl.

189) Wie vielmal sind 917 Thl. in folgenden Summen enthalten? a) 419 069 Thl. b) 685 916 Thl. c) 2 227 393 Thl. d) 7717 472 Thl.

Proben der Division.

§. 69.

Multiplication und Division können einander gegenseitig zur Probe dienen. Denn wenn man bei einem Multiplicationsexempel das Produkt, durch einen der beiden Factoren dividirt, so muß der andere herauskommen. Und wenn man bei einem Divisionsexempel Divisor und Quotient mit einander multiplicirt, so muß der Dividendus herauskommen. Indessen ist es immer rathsamer statt dieser Proben, jedes Exempel doppelt durchzurechnen. Denn findet sich durch jene Proben, daß ein Fehler vorgefallen ist, so hat man in der That zwei Exempel zum zweitenmal durchzurechnen; da man hingegen ohne diese Probe nur ein Exempel nachzurechnen hat.

Auch

Auch bei den Divisionsexempeln kann von der Neunerprobe Gebrauch gemacht werden. Um mich kürzer ausdrücken zu können, will ich den Rest, welcher übrig bleibt, wenn man die Ziffern irgend einer Zahl zusammenzählt, und im Zusammenzählen 9 wegwirft, so oft es angeht, den **Neunerrest** nennen.

Ist nun ein Divisionsexempel ohne Rest aufgegangen, so multiplicirt man die Neunerreste des Divisors, und Quotienten mit einander, und wirft von diesem Produkt wieder, wenn es über 9 ist, 9 weg, so oft es angeht. Was nun bleibt muß dem Neunerrest des Dividendus gleich seyn.

3402 | 14	Probe
(243)	243 (0)
972	14 (5)
972	3402 (0)
0	

Im beigefügten Exempel hat man im Divisor $2 + 4 + 3 = 9$, und wenn diese 9 weggeworfen wird, den Neunerroste 0. Der Quotient giebt $1 + 4 = 5$, also da nichts wegzuwerfen ist, den Neunerrest 5. Da nun 0 mal $5 = 0$, so muß der Dividendus auch den Rest 0 geben; welches auch zutrift, da $3 + 4 + 0 + 2 = 9$, und diese 9 weggeworfen, 0 bleibt.

Ist aber bei der Division ein Rest geblieben; so nimmt man erst den Neunerrest des Divi-

den

dendus; dann den Neunerrest des letzten Divisionsrestes. Den letzten zieht man vom ersten ab, und wenn dieser zu klein, so legt man ihm 9 zu, um subtrahiren zu können. Was nun übrig bleibt, muß eben so groß seyn, als wenn man den Neunerrest des Divisors, mit dem Neunerrest des ganzen Theils vom Quotienten multiplicirt, und aus diesem Produkt wieder 9 wegläßt, so oft es angeht.

14323|$34\frac{179}{416}$		
(416)	Probe	
1248	14323(4) (13)	416(2)
1843	179 . . (8)	34(7)
1664	(5)	(14) (5)
179		

Im beigefügten Exempel geben die Ziffern des Dividendus (14323), den Neunerrest 4. Der Rest (179) aber giebt den Rest 8. Da sich nun 8 von 4 nicht abziehen läßt, so lege ich ich zu 4, noch 9 hinzu, und sage 8 von 13 bleiben 5. Eben so viel (5) müssen nun auch die Neunerreste des Divi~~dendus~~sors (416) und der ganzen Zahl des Quotienten (34) geben. Im Divisor ist $4 + 1 + 6 = 11$, und wenn davon 9 weggenommen werden, bleibt 2. Im Quotienten aber ist $3 + 4 = 7$ welches weniger als 9, also der Neunerrest selbst ist. Aber 2mal 7 ist 14, und wenn ich hiervon 9 wegwerfe, so bleibt ganz richtig auch 5.

Grund

Grund der Neunerproben.

§. 70.

Es ist hier der Ort, wo sich der Grund der Neunerproben sichtbar machen läßt.

Man erinnere sich, daß wir bei den Kennzeichen des Divisors 9 (§. 67.), gezeigt haben, daß wenn man von irgend einer Zahl die Summe ihrer eigenen Ziffern abzieht, der Rest, allezeit mit 9 aufgeht. Läßt man nun auch aus der Summe der Ziffern 9 so oft weg, als es angeht, so sieht man leicht ein, daß das, was zulezt überbleibt (der Neunerrest), eigentlich nichts anders ist, als der Rest, der übrig bleiben würde, wenn man die ganze Zahl mit 9 dividirte. Z. B. In der Zahl 538 beträgt die Summe der Ziffern 16. Zieht man dies von 538 ab, so bleibt 522 welche Zahl mit 9 aufgeht. Es besteht also 538 aus 522 und 16; läßt man nun auch von 16, so oft es angeht (hier nur einmal) 9 weg, und schlägt das weggelassene mit zu 522, so besteht 538 aus den beiden Stücken 53, + 7, wovon das erste völlig mit 9 aufgehen muß. Dividirt man also 538 durch 9, so kann kein anderer Rest als 7 bleiben.

Der Neunerrest, ist also im Grunde nichts anders, als der Rest **der übrig bleibt, wenn man eine Zahl mit 9 dividirt.** Und wenn man daher den Neunerrest von der

Zahl

Zahl abzieht, so muß auf alle Fälle das übrigbleibende mit 9 aufgehen.

Grund der Neunerprobe beim Addiren.

Beim Addiren wurde nach §. 20 der Neunerrest von allen gegebenen Stücken gemacht, und dieser mußte, mit dem Neunerrest der Summe stimmen.

Da es nun, wenn die Ziffern der gegebenen Stücke zusammengezählt werden, gar nicht auf die Ordnung ankommt, in der man sie zusammenzählt, wenn nur keine übergangen, oder doppelt gezählt wird, so rechne man itzt einmal so, daß man von jedem einzelnen gegebenen Stück den Neunerrest besonders macht; und um alles noch augenscheinlicher zu machen, jedes gegebene Stück in zwei Zahlen theilt, wovon das eine den Neunerrest, das andere aber das übrige enthält. Es sollen z. B. die Zahlen 327 + 65 + 645 addert werden, so rechne man, wie folgt:

		Der Neunerrest		Das Uebrige
327	=	3	+	324
65	=	2	+	63
(2) 645	=	6	+	639
(2) 1 037		11	+	1 026
	oder	2	+	1 035

linker

linker Hand sind die gegebenen Stücke auf die gewöhnliche Art zusammengezählt, und wenn man hier die Neunerprobe anwendet, so geben so wohl die zusammengezählten Zahlen, als die Summe, den in Klammern angezeigten Neunerrest 2. Rechter Hand aber ist jede der gegebenen Zahlen in zwei Stücke getheilt worden, wovon das eine der Neunerrest, das andere, der übrige Theil der Zahl ist; der, wie wir gesehen haben, auf alle Fälle sich mit 9 ohne Rest dividiren läßt. Es steht also rechter Hand, im Grunde eben das, was linker Hand steht; nur hier ganz, dort stückweise. Addirt man nun auf der rechten und linken Seite, so ists klar, daß beiderseits gleichviel herauskommen müsse. Auf der rechten Seite geben die Neunerreste, die Summe 11, und die übrigen Zahlen 1 026, diese letzte Zahl muß mit 9 aufgehen, weil sie aus lauter Zahlen zusammengezählt ist, die mit 9 aufgehen. Nimmt man nun von 11, weil es über 9 ist, noch 9 weg, und legt sie zu 1 026, so kommt 2 + 1 035 heraus, welches mit 11 + 1 026 in der Summe offenbar einerlei seyn muß. Nun ist aber 2 einerseits offenbar der Neunerrest, welcher übrig bleibt, wenn alle Ziffern der gegebenen Stücke mit Wegwerfung der Neunen zusammengezählt werden, und anderseits ist diese 2 wieder offenbar dem Neunerrest der Summe 1037 gleich, da diese mit 2 + 1035 völlig einerlei seyn muß.

Grund

Grund der Neunerprobe beim Subtrahiren.

Beim Subtrahiren wurde nach §. 31, vom Abzug und Reste zusammen, der Neunerrest genommen, und dieser mußte mit dem Neunerrest des Ganzen stimmen.

Wer den Grund der Neunerprobe beim Addiren begriffen hat, sieht ihn auch sogleich beim Subtrahiren ein. Den Abzug und Rest zusammengezählt, müssen das Ganze geben, so daß man jedes Subtractionsexempel sich als ein Additionsexempel vorstellen kann.

Grund der Neunerprobe beim Multipliciren.

Hier wurden die Neunerreste der beiden Factoren, nach §. 47, mit einander multiplicirt, und davon, so oft es anging, 9 weggeworfen. Was übrig blieb, mußte mit dem Neunerrest des Products stimmen. Es soll z. B. 628 mit 56 multiplicirt werden, so rechne man, wie folgt

(7)	628	=	7 +	621
(2)	56	=	2 +	54
(14)	3 768			33 534
(5)	31 40			378
(5)	35 168			1 242
				14

Die Rechnung ist so gemacht: linker Hand steht die gemeine Multiplication, und vor derselben in Klammern die Neunerprobe. Nemlich die Hauptzahl läßt den Rest (7), die zusammensetzungszahl den Rest (2). Beide multiplicirt geben (14), und hiervon 9 weggenommen bleibt (5), und eben dies ist der Neunerrest, den das Product läßt. Rechter Hand aber ist jeder Factor in zwei Stücke getheilt, wovon das erste der Neunerrest, und das andere durch 9 theilbar ist. Nemlich die Hauptzahl ist 7 + 621, die Zusammensetzungszahl 2 + 54. Wollte man nun die beiden so zerstückelten Zahlen mit einander multipliciren, (welches nach den 3ten Grundsatz der Multiplication §. 36, ohne Aenderung des Products geschehen kann), so muß erst 621 und 7 beides mit 54, und dann eben die beiden Zahlen 621 und 7 auch mit 2 multiplicirt werden. Multiplicirt man nun wirklich 621 mit 54, so giebt dies die zunächst unter dem Strich befindliche Zahl 33 534. Dann wird 7 mit 54 multiplicirt; dies giebt die zweite Zahl unter dem Strich, nemlich 378. Dann wird 621 mit 2 multiplicirt, dies giebt 1242. Endlich wird 7 mit 2 multiplicirt, welches 14 giebt. In diesen vier Zahlen unter dem Strich steckt offenbar das ganze Product. Aber die 3 ersten Stücke gehen mit 9 auf, weil sie sämmtlich aus Zahlen zusammengesetzt sind, die mit 9 aufgehen. Die 4te Zahl (14) aber, ist das

Pro-

Product der Neunerreste von den beiden Factoren, und wenn man davon 9 wegwirft, also 5 behält, so ist klar, daß dies einerseits der Neunerrest vom Product der Factoren, anderseits aber der Neunerrest auch des ganzen Products seyn müsse.

Grund der Neunerprobe beim Dividiren.

Wenn bei einem Divisionsexempel kein Rest bleibt, so besteht nach §. 69 die Probe darin, daß der Neunerrest des Quotienten, mit dem Neunerrest des Divisors multiplicirt, und aus diesem Product 9, so oft es angeht, weggenommen wird, was dann übrig bleibt, muß mit dem Neunerrest des Dividendus stimmen.

Der Grund hiervon fällt sogleich in die Augen. Denn da bei jeder Division, der Quotient, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividendus geben muß, so ist klar, daß man bei einem solchen Exempel die Multiplicationsprobe anwenden kann.

Bleibt aber bei der Division ein Rest, so wurde nach §. 69 die Probe so gemacht: Vom Neunerrest des Dividendus (der, wenn es nöthig ist, mit 9 vermehrt wird), zieht man den Neunerrest des Restes ab, und was übrig bleibt, wird angemerkt. Dann multiplicirt man den Neunerrest des Divisors mit den Neunerrest des ganzen Theils vom Quotienten, und wirft,

wenn es angeht, von dem, was herauskommt, 9 weg. Was hier übrig bleibt, muß mit dem, was bei der Subtraction übrig blieb, stimmen. Z. B.

```
38797|52 161/743
(743)
3715
 1647
 1486
  161
```

Probe.

```
38 797 (7) . . (16)      743 (5)
   161 . . . . (8)       52 (7)
               8            (35) . 8
```

Zöge man hier den Rest 161 vom Dividendus 38 797 ab, würde sich die übrigbleibende Zahl 38 636 mit 743 ohne Rest dividiren lassen, und den Quotienten 52 geben, wovon sich die Probe nie im ersten Fall machen läßt. Indem man nun die Neunerreste der Zahlen 38 797 und 161 von einander abzieht, so thut man eigentlich nichts anders, als daß man den Neunerrest der Zahl 38 636 sucht, und hieraus ist klar, warum nun dieser Neunerrest mit dem stimmen muß, den die Zahlen 743 und 52 durch Multiplication ihrer Neunerreste geben.

Die

Die Elferproben.

§. 71.

Ein nachdenkender Leser wird leicht wahrnehmen, daß die Zahl 9 an sich kein besonderes Vorrecht habe, vermöge dessen die Reste, die sie beim Dividiren läßt, allein zu einer solchen Probe dienen könnten, sondern es könnten die Reste jedes andern Divisors zu eben dem Zweck gebraucht werden. Wir wollen dies durch ein Beispiel erläutern.

	7	8	11	13
67	4	3	1	2
59	3	3	4	7
603	12	9	4	14
335	5	1		1
3953	5	1	4	1

In diesem Multiplications-Exempel steht in der Säule unter der 7 eine Probe mit den Resten, welche bei der Division mit 7 bleiben. Nemlich 67 durch 7 dividirt läßt den Rest 4, und 59 läßt durch 7 dividirt den Rest 3. Multiplicirt man nun diese beiden Siebenerreste 3 und 4, so erhält man die unter dem Strich stehenden 12, und da dies über 7 ist, so wirft man noch 7 weg, und behält bloß den Rest 5. Eben diesen Rest giebt nun das Product 3953, wenn es mit 7 dividirt wird.

Auf eben die Art sind in den folgenden Säulen die Proben mit den Resten gemacht, die bei der Division mit 8, 11, 13 bleiben, wozu keine weitere Erläuterung nöthig ist.

Der Grund, warum man aber den Neunerresten den Vorzug gegeben hat, liegt nicht sowohl darin, weil sich diese Reste so leicht und ohne wirkliche Division finden lassen (denn bei andern Zahlen, z. B. 5 und 10 kann man diese Reste noch leichter finden): sondern darin, weil bei Aufsuchung der Neunerreste alle einzelne Ziffern durchgezählt werden müssen, so daß sich ein Fehler, er stecke in welcher Ziffer er wolle, doch nicht leicht verbergen kann.

Es giebt aber unter den kleinern Zahlen noch eine, nemlich 11, deren Reste eben die Vortheile und beinahe eben so leicht gewähren. Wir haben nemlich oben §. 67 bei dem Kennzeichen des Divisors 11 (man sehe die dort befindliche Anmerkung) gesehen, daß sich die Reste, welche jede Zahl bei der Division mit 11 läßt, sehr leicht finden lassen. Man kann dennoch bei jeder der 4 Rechnungsarten, auf ganz ähnliche Art mit den Neunerproben, auch Elferproben machen. Es wird genug seyn, hiervon aus jeder Rechnungsart ein Beispiel herzusetzen, welches aber nach dem bisherigen wohl keiner weitern Erläuterung bedürfen wird.

Addi-

Addition	Elferreste.
3 782	— 9
596	— 2
1 743	— 5
6 121	— 5

Subtraction	Elferreste
32 416	— 10
9 781	— 2
22 635	— 8

Multiplication	Elferreste
237	— 6
61	— 6
237	36
1422	3
14 457	— 3

Division ohne Rest.

		Elferrest
3685	55	
(67)		
335		
335	55	0
335	67	— 1
0	3685	0

Division mit Rest.

		Elferrest		Elferrest
52789	60			
(873)		52789 . .	11	60 . . 5
5238		409 . .	2	873 . . 4
409		Subtr.	9	Mult. 20 . 9

Diese Proben sind völlig wie die Neunerproben gemacht, nur daß bei der Addition von jedem der gegebenen Stücke der Elferrest einzeln genommen ist. Sollte daher Jemanden etwas bei diesen Proben noch dunkel seyn, so wird eine genauere Vergleichung mit dem, was bei jeder Rechnungsart über die Neunerprobe gesagt worden, alles aufklären.

Wenn bei einer Rechnung beide Arten von Proben zugleich angewendet werden, und keinen Fehler zeigen, so kann man ziemlich sicher seyn, daß die Rechnung fehlerfrei sey. Nemlich die **Neunerprobe allein** beweiset nur, daß man nicht, um 9, oder 18, oder 27, oder 36, rc. oder um irgend eine Zahl gefehlt habe, die mit 9 aufgeht. Denn man sieht leicht ein, daß ein Fehler dieser Art auf die Neunerreste keinen Einfluß haben kann. Eben so zeigt die **Eilferprobe allein**, daß man nicht um 11, oder 22, oder 33, oder 44, rc. oder um irgend eine Zahl gefehlt habe, die mit 11 aufgeht: weil Fehler von dieser Größe in den Elferresten nichts ändern können. Hat man also **beide Proben zugleich** angewendet, so muß das Exempel entweder richtig seyn, oder wenn ein Fehler da wäre, so müßte er eine Zahl betragen, die mit 11 und 9 zugleich aufgeht: d. h. er müßte 99, oder 2 mal 99, d. i. 198, oder 3 mal 99, d. i. 297 u. s. w. seyn. Fehler von so genau bestimmter Größe sind aber unwahrscheinlich.

Sech-

Sechster Abschnitt.

Ueber die vier einfachen Rechnungsarten im Allgemeinen.

Erklärung einfacher Rechnungsarten.

§. 72.

Die bisher erklärten Rechnungen nennt man die **vier einfachen Rechnungsarten** (oder die vier Species *) der Rechenkunst). Sie heißen deswegen so, weil aus ihnen alle im gemeinen Leben vorkommende Rechnungen zusammengesetzt, also diese vier die einfachen Bestandtheile aller Rechnungen sind: denn die schwerste und verwickelste kaufmännische Rechnung ist im Grunde nichts anders, als eine Zusammensetzung von Additionen, Subtractionen, Multiplicationen und Divisionen.

Jede zusammengesetzte Arbeit, von welcher Art sie auch seyn mag, besteht ohne Zweifel aus einer gewissen Anzahl einfacher Arbeiten. — Der Ackerbau im Ganzen ist gewiß eine sehr vielfache und zusammengesetzte Arbeit; die einfachen Ar-

beiten, woraus er besteht, sind Pflügen, Düngen, Säen, Eggen, Aernden u. s. w. — Wenn ein Tischler ein Spind verfertigt, so ist seine Arbeit dabei ohne Zweifel vielfach und zusammengesetzt, die einfachen Arbeiten sind Sägen, Hobeln, Meißeln, Hämmern, u. s. w. — Sprechen ist etwas Vielfach-Zusammengesetztes, die Aussprache der einzelnen Buchstaben sind die einfachen Dinge, woraus es zusammengesetzt ist. — Etwas ähnliches muß bei jeder andern zusammengesetzten Arbeit statt finden, also auch beim Rechnen. Und wenn man die verwickeltenste und schwerste Rechnung zergliedert, so findet man keine andern, als die genannten vier Rechnungsarten, aus denen sie zusammengesetzt ist. Hieraus ist klar genug, daß der, welcher es im Rechnen weit bringen will, durchaus diese vier Rechnungsarten aufs sorgfältigste erlernen muß.

*) Das lat. Wort Species heißt auf deutsch Art.

Giebt es mehr als vier einfache Rechnungsarten?

§. 73.

Man kann die Frage aufwerfen, ob es nicht mehr, als diese vier einfachen Rechnungsarten geben könne? Es kann hier der Ort nicht seyn, diese Frage gründlich zu beantworten, denn dazu wird offenbar erfordert, daß man das ganze

Ge-

Gebiet der Rechen-Kunst schon vollständig kenne. Nur so viel bemerken wir hier, daß in allen Fällen, die im gemeinem Leben vorkommen, diese vier Rechnungsarten ausreichen: daß es aber eine Wissenschaft giebt, in der man weit schwerere Sachen ausrechnet, als im gemeinen Leben vorkommen. Und in dieser Wissenschaft, welche die Mathematik heißt, reicht man allerdings mit jenen vier Rechnungsarten nicht aus, sondern man braucht da noch verschiedene andere, von welche begreiflich hier keine Erklärung gegeben werden kann.

Anwendung der vier einfachen Rechnungsarten auf wirkliche Fälle.

§. 74.

Wir haben in den vorigen Abschnitten gezeigt, **wie** jede der vier Rechnungsarten zu machen sey: aber der Schüler muß noch mehr als dies können; er muß im Stande seyn, durch sein eigenes Nachdenken zu beurtheilen, **wo**, oder **in welchen Fällen** er jede der erlernten Rechnungsarten anwenden soll. Denn das ist ein schlechter Rechner, der zwar gar fertig, Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, und Dividiren kann, dem ich aber bei jeder Rechnungsfrage erst sagen muß: hier mußt du addiren, hier multipliciren u. s. w. Man erinnere den Schüler daran, daß er mit Gottes Hülfe auch einmal ein erwachsener Mensch,

und

und hoffentlich selbst auch ein eigener Hauswirth werden wird. Dann muß er seine Geldangelegenheiten selbst besorgen, muß seine Einnahmen und Ausgaben, seinen Einkauf und Verkauf selbst berechnen, wobei auch in der kleinsten Wirthschaft vielerlei zu berechnen vorkommt. Der Schüler wird leicht begreifen, daß wenn er dann einmal 13 Pfund Butter kaufen will, und das Pfund mit 5 Gr. bezahlen soll, er selbst wissen muß, wie er den Preis von allen 13 Pfunden ausrechnen soll, und das dann kein Lehrer neben ihn stehe, und ihm sagen wird: du mußt die 5 Gr. mit 13 multipliciren, da kommen 65 Gr. heraus. Und wenn er nun weiter wissen will, wie viel dies Thaler sind, so wird ihm Niemand sagen, du mußt die 65 Gr. mit 24 dividiren, da kommen 2 Thaler und 17 Gr. heraus. Offenbar muß ihm dann sein eigener Verstand sagen, welche Rechnungsart er in jedem Falle anzuwenden habe.

Das Schlimmste dabei ist, daß sich hierbei gar keine bestimmte Regeln angeben lassen, nach denen man jede Rechnungsfrage bei dem ersten Blick ansehen könnte, wohin sie gehört. Alle Regeln, die sich hierbei geben lassen, laufen auf folgende zweie hinaus:

1) Du mußt dir von jeder Rechnungsart einen recht deutlichen Begriff machen, d. h. du mußt aufs deutlichste wissen, was Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren heißt,

damit

damit du, so wie du eines dieser Wörter hörest, auch ganz bestimmt wissest, was es sagen will.

2) Kommt dir ein Rechnungsfall vor, so mußt du dir alles dabei aufs deutlichste vorstellen, und es muß nicht die geringste Dunkelheit, oder Zweideutigkeit bei der Frage bleiben. Dann wirst du selbst ohne Anleitung wahrnehmen was zu thun ist.

Es giebt sehr viele Fälle, wo die Anwendung dieser Regeln sehr leicht, aber auch Fälle, wo dies sehr schwer ist, und dem geübtesten Kopfe viel zu schaffen macht. Indessen kommen Fälle der letztern Art im gemeinen Leben nur selten vor. Da es aber zu den nützlichsten Uebungen des Verstandes und Nachdenkens gehört, bei vorgelegten Rechnungsfragen durch eignes Nachdenken zu bestimmen, was geschehen soll, so muß der Lehrer seine Schüler vorzüglich hierin zu üben suchen, und ihnen so viele leichte Rechnungsfragen, als nur möglich, vorlegen, aber bloß der Sache nach, nicht so, daß er ihnen dabei die anzuwendende Rechnungsart sagt. Und damit die Schüler diese nicht, ohne Nachdenken, bloß errathen, so muß er dabei gar nicht die Ordnung der Rechnungsarten beobachten, sondern ohne alle Ordnung bald aus dieser, bald aus jener Exempel aufgeben. Der beste Ort zu dergleichen Uebungen scheint hier zu seyn, wo voraus gesetzt wird, daß der Schüler die vier Rechnungsarten gut gefaßt habe: obgleich der Lehrer vom Anfang seines Unterrichts

an,

an, bis zu Ende, diese Art von Verstandes-Uebung beständig vor Augen haben muß.

Uebungsbeispiele.

§. 75.

Wir wollen hier einen kleinen Vorrath von Beispielen liefern, die aus den täglichen Vorfällen im gemeinen Leben leicht vermehrt werden können, nur muß man sich hauptsächlich auf solche Fälle beschränken, wo nur Zahlen von einer einzigen Benennung vorkommen. Doch werden unbedenklich einige Fälle, wo etwa Thaler und Groschen zusammen kommen, mit unterlaufen dürfen, weil jeder, der das vorige gefaßt, sich in den leichtern Fällen dieser Art ohne Mühe zurecht finden wird.

190) Ein Kaufmann hat 27 Centner Kaffee gekauft, und für jeden Centner 40 Thaler bezahlt, wie viel stosten ihm alle 27 Centner?

191) Wie viel Pfund betragen diese 27 Cent.?

192) Wenn eben der Kaufmann jedes Pfund für 12 Gr. verkauft, wie viel Groschen erhält er für alles?

193) Wie viel Thaler betragen die im vorigen Exempel herausgekommenen Groschen?

194) Wie viel hat der Kaufmann bei dem Verkauf gewonnen?

195)

195) Es läßt sich Jemand einen Rock machen; dazu braucht er a) 3 Ellen Tuch, die Elle zu 2 Thaler; b) 4 Ellen Zeug zum Unterfutter, die Elle 8 Gr.; c) 1 Elle Leinewand zu Taschen für 6 Gr.; d) der Schneider bekömmt für Macherlohn, Knöpfe, Zwirn und andere kleine Ausgaben 2 Thaler, was kostet der ganze Rock?

196) Es baut Jemand ein Haus: der Mauermeister bekommt 850 Thaler; der Zimmermeister 334 Thaler; der Schlosser 37 Thaler; der Tischler 54 Thaler; der Glaser 32 Thaler; an Trinkgeldern für die Arbeitsleute, und andern Ausgaben, sind in allem ausgegeben 164 Thaler: was kostet das ganze Haus?

197) Es kann Jemand täglich in den Werkeltagen 8 Gr. verdienen, wie viel beträgt daß a) in einer Woche? b) in einem ganzen Jahre?

198) Ein Hausvater braucht zur Bestreitung seines Tisches wöchentlich 5 Thaler; wieviel beträgt dies a) in einem Vierteljahre; b) in einem ganzen Jahre?

199) Es kaufen ihrer Zweie zusammen ein Stück Leinewand von 38 Ellen, und theilen sich zur Hälfte darin. Sie bezahlen für die Elle 7 Gr. Es frägt sich a) wie viel Ellen bekommt jeder? und b) wie viel muß jeder bezahlen?

200) Ein Vater hinterläßt 5 Kindern ein Vermögen von 6850 Thalern. Der älteste Sohn ist aber selbst nicht mehr am Leben, sondern 2 Kinder, die er hinterlassen hat, erben seinen Antheil. a) Wieviel bekommt jedes der 4 lebenden Geschwister? b) wieviel bekommt jedes von den beiden Kindern des ältesten Sohns?

201) Es kauft Jemand ein Faß Butter für 5 Thaler 20 Gr. Das Faß und die Butter zusammen wiegen 37 Pfund. Das Faß allein wiegt 9 Pfund. Nun fragt sich a) wie viel Butter hat er eigentlich gekauft? und b) wie viel kostet ihm jedes Pfund?

202) Es borgt Jemand von einem guten Freund 8500 Thalern und verspricht sie ihm jährlich mit 4 pro Cent zu verzinsen; d. h. auf Deutsch: er verspricht ihm für jede hundert Thaler jährlich 4 Thaler Zins zu bezahlen. Wie viel Zins muß er also von dem ganzen Capital jährlich bezahlen?

203) Es kauft Jemand 19 Scheffel Haber, und bezahlt für jeden Scheffel 18 Gr. a) wie viel Groschen bezahlt er also für alle 19 Scheffel? b) wie viel Thaler beträgt dies?

204) Ein Pfund Lichter kostet 5 Gr. Wenn man nun 10 Lichter auf das Pfund bekommt; was kostet ein Licht?

205) Ein Bauer verkauft auf dem Markte 3 Scheffel Hafer, den Scheffel zu 20 Gr.;

4 Scheffel Rocken, den Scheffel zu 1 Thaler 4 Gr.; und 1 Scheffel Kartoffeln für 16 Gr. Von dem gelöseten Gelde nimmt er 2 Thaler 12 Gr. und kauft sich dafür verschiedene Sachen, die er nöthig hat. Es fragt sich: a) wie viel hat er gelöset? b) wie viel bringt er nach Hause.

206) Es kauft Jemand 1 Ries, das heißt 20 Buch Schreibepapier (Taf. 23), dafür bezahlt er 2 Thaler 12 Gr., wie viel kostet jedes einzelne Buch?

207) Wenn man mit der Post von Berlin nach Königsberg in Preußen reiset, so kann man entweder durch Pommern, oder durch die Neumark reisen. Wählt man den letztern Weg, so sind die merkwürdigsten Städte, durch welche man kommt, Cüstrin, Bromberg, Culm, Graudenz, Marienwerder. Cüstrin ist von Berlin entfernt 10 Meilen; Cüstrin von Bromberg 34 Meilen; Bromberg von Culm 6 Meilen; Culm von Graudenz 4 Meilen; Graudenz von Marienwerder 6 Meilen; Marienwerder von Königsberg 24 und eine halbe Meile. Es fragt sich a) wie weit ist also Königsberg von Berlin entfernt? b) Und da für jede Meile 6 Gr. Postgeld bezahlt werden, wie viel beträgt dies für den ganzen Weg?

208) An einem Orte sind vor kurzem 900 Haufen (Taf. 25) hartes Holz verbrannt.

Schlägt man nun den Haufen zu 19 Thalern an, wie groß ist der Schaden?

209) Zum Beschluß dieser Exempel noch folgendes. Es kauft Jemand 4 Stück Gänse-Eier, das Stück für 10 Pfennige, und 10 Stück Hüner-Eier, das Stück 4 Pfennige.

a) Was kosten jene und diese?

Es ist ungleich zu wissen, wobei mehr Vortheil sey. Er wiegt also ein Gänse-Ei und ein Hüner-Ei. Da aber das Dotter eigentlich am Ei das Beste ist, so wiegt er von jedem noch die Schale, und das Dotter besonders. Er findet folgendes:

	Gewicht des Ganzen	Schale	Dotter
Gänse-Ei	48 Quentchen	9 Quent.	17 Quent.
Hüner-Ei	13 = =	2 Quent.	4 Quent.

Nun frägt sich:

b) Wie viel wog das Weiße in jedem Ei?

c) Wie viel Schale, Weißes und Dotter hatte er an seinen 4 Gänse-Eiern?

d) Wie viel Schale, Weißes und Dotter hatte er an seinen 10 Hüner-Eiern?

Sie-

Siebenter Abschnitt.

Vorübungen zu den Rechnungen mit benannten Zahlen.

§. 76.

Jede Art von Dingen erfordert ihre eigene Art von Maß. Die Entfernung von zwei Oertern kann nicht nach Pfunden, und das Gewicht einer Waare nicht nach Ellen bestimmt, oder angegeben werden. Es ist daher ganz unvermeidlich, daß beim Rechnen mancherlei Arten und Benennungen von Maßen, Gewichten, Münzen, u. d. gl. vorkommen.

Indessen würden um deswillen dennoch keine **besonderen Rechnungsarten in benannten Zahlen** nöthig seyn, wenn man entweder bei jeder Art von Dingen nur eine einzige Benennung eingeführt hätte, (wie z. B. bei dem Gelde in Portugal, wo man im Rechnen bloß allein die Benennung einer gewissen kleinen Münze braucht, welche Reè heißt, und nach unserm Gelde ungefähr $\frac{1}{2}$ Pfennig werth ist, nach der man die größten, so

wie die kleinsten Geldsummen angiebt); oder wenn wenigstens die verschiedenen Benennungen, die bei einer Art von Dingen vorkommen, sich nach unserer gemeinen Zählungsart richteten, und keine andere als zehntheilige Abtheilungen enthielten. (Wie z. B. bei dem Gelde in Rußland, wo man zwar statt unserer Thaler, Groschen und Pfennige, auch dreierlei Münzbenennungen im Rechnen braucht, nemlich Rubel, Grieven und Kopeken; aber der Rubel, der ungefähr 1 Thaler in unsern Gelde werth ist, enthält zehn Grieven, und die Grieve zehn Kopeken; welches den Vortheil gewährt, daß man eine Summe, die in allen drei Benennungen gegeben ist, als 7 Rubel, 8 Grieven, 5 Kopeken, augenblicklich und ohne Rechnung unter eine einzige Benennung bringen kann, indem man die Ziffern bloß zusammenschreibt, und bei der oben genannten Summe sagt, sie beträgt 785 Kopeken, welches bei unsern Thalern, Groschen und Pfennigen nicht so geschwinde angeht).

Hätten wir bei Münzen, Gewichten, und allen Arten von Maßen, die eine oder die andere Art von diesen Einrichtungen, so könnten aus jedem Rechenbuche die Abschnitte, die um der benannten Zahlen willen nöthig sind, ganz wegfallen, indem schon aus dem hier gesagten klar ist, daß alle Rechnungen mit zehntheilig abgetheilten Dingen mit den Rechnungsarten in unbenanten Zahlen völlig übereinstimmen müssen,

und

und daß, z. B. in Rußland Niemand, der Addiren, Subtrahiren rc. in unbenannten Zahlen gelernt hat, hinter her noch besonders lernen darf, wie er Rubel, Grieven und Kopeken addiren, subtrahiren, multipliciren oder dividiren soll.

Aber zum Verdruß der Rechenkunst ist bei Münzen, Gewichten und Maßen aller Art, die zehntheilige Abtheilung gerade die seltenste. Unser Thaler hat nicht 10, sondern 24 Gr., und unser Groschen 12 Pf.; unser Centner hat 110 Pfund, unser Pfund 32 Loth u. s. w.

Aber fast noch schlimmer als dieses ist es, daß eine und dieselbe Benennung, an verschiedenen Orten, ja öfters an demselben Orte, nicht immer ein und dasselbe Maaß bedeutet. Ein **Thaler** im Brandenburgischen, und ein **Thaler** im Sächsischen, oder in Hamburg, ist nicht ganz einerlei. Eine **Elle** hat fast an jedem Orte eine etwas andere Länge. Ein **Pfund** in Berlin ist etwas anders, wenn man von Kramergewicht, oder von Schlächtergewicht, oder von Apothekergewicht, oder von Gold- und Silber-Gewicht redet. Es ist daher leicht zu begreifen, daß dies im Handel und Wandel unzählige Rechnungen verursachen muß, deren wir überhoben seyn könnten, wenn überall gleiche und zehntheilig abgetheilte Maße, bei allen Arten von Dingen eingeführt würden.

Es ist daher verdienstlich, wenn ein Lehrer, der im Rechnen Unterricht ertheilt, seine jungen Lehrlinge bei schicklicher Gelegenheit darauf aufmerksam macht, wie vortheilhaft bessere Einrichtungen aller Maße seyn würden. Ich sage es ist **verdienstlich**: denn er trägt dadurch, so viel er kann, das Seinige bei, um Verbesserungen in diesen Dingen den Weg zu bahnen, sollten auch erst unsere Enkel oder Urenkel die Ausführung erleben.

Es würde viel zu weitläuftig und dem Zwecke dieses Rechenbuches zuwider seyn, wenn wir hier auch nur von allen in Deutschland üblichen Münzen, Gewichten und Maßen jeder Art, eine etwas vollständige Nachricht geben wollten. Es dürfte ohne dies nicht rathsam seyn, Kinder eine Menge von Dingen dieser Art hinter einander zu erklären. Sie würden eines über dem andern vergessen. Wir wollen daher blos am Ende des Buchs Tabellen über die vornehmsten Münzen, Gewichte und Maße aller Art anhängen, woraus der Lehrer das Nöthige, so wie die Exempel Veranlassung dazu geben, erklären kann.

§. 77.

Erste Vorübung zum Rechnen mit benannten Zahlen.

Da die Zahlen 12 und 24 bei so vielen Münz- und Maßabtheilungen vorkommen, (der Thaler hat

hat 24 Gr., der Groschen 12 Pf., der Wispel 24 Scheffel, das Jahr 12 Monathe, die Ruthe 12 Fuß, der Fuß 12 Zoll ꝛc.), so ist es es nöthig, die schon §. 45. empfohlene Erlernung der Vielfachen von 12 und 24, bis zum Zehnfachen jetzt ernstlicher zu betreiben. Ich finde es am besten, sie in der Form lernen zu lassen, wie man sie unter den Tabellen am Ende des Buchs Nr. 2, und 3 findet. Die Anwendung vom Gelde auf andere Dinge, z. B. Wispel und Scheffel, machen Kinder leicht. Beim Durchfragen dieser Vielfachen muß man nicht versäumen, die Fragen öfters umzukehren. Man muß z. B. nicht bloß fragen: wie viel Pfennige haben 3 Gr., oder 5 Gr., oder 7 Gr. ꝛc.? sondern auch umgekehrt: wie viel Groschen sind 36 Pf., 60 Pf., 84 Pf.? u. d. g. m. Auch thut man wohl, bei diesen Fragen die Benennungen abzuändern, u. z. B. statt des obigen auch zu fragen: wie viel Monate haben 3, 5, 7 Jahr ꝛc.? oder: wie viel Jahre sind 36, 60, 84 Monate? u. d. g. m.

Haben Kinder diese Vielfachen richtig gefaßt, so lasse man sie aus dem Kopfe Fragen, wie folgende, beantworten: wie viel Groschen sind 1 Thl. 8 Gr.? oder 1 Thl. 19 Gr.? oder 2 Thl. 20 Gr.? 3 Thl. 15 Gr. ꝛc. ꝛc. Dann kehre man diese Fragen um, und frage, wie viel sind 30 Gr.? 36 Gr.? 44 Gr.? 58 Gr.? 79 Gr.? 98 Gr.? ꝛc., welche Fragen Kinder, wenn sie die Tabelle 2 im Kopfe haben, leicht und ohne dividiren zu müssen

sen beantworten lernen. Es ist nicht nöthig, mit diesen Fragen über 100 zu gehen, obgleich die Thaler = Tabelle bis 240 Gr. geht. Den Grund geben die folgenden Zeilen.

Da 100 Gr. gerade vier Thaler und vier Gr. sind, so lernen Kinder sehr leicht ausrechnen, wie viel 200, 300, 400 — bis 1000 Gr sind. Können sie nun Groschen unter 100 leicht in Thaler verwandeln, so lernen sie auch sehr bald diese Verwandlung mit Zahlen über 100 zu machen. Nur müssen sie erst die hunderte allein, und dann das übrige besonders zu Thalern machen. Z. B. Es sollen 443 Gr. zu Thalern gemacht werden; so sagt man, weil 100 Gr. = 4 Thl. 4 Gr., so sind 400 Gr. = 16 Thl. 16. Gr.; und 43 Gr. sind = 1 Thl. 19 Gr., also beides zusammen 18 Thl. 11 Gr. Durch diese und ähnliche Uebungen bringt man es leicht dahin, daß sie Summen von Groschen, die nur unter 1000 sind, leicht in dem Kopfe zu Thalern machen.

Daß ähnliche Uebungen mit Groschen und Pfennigen anzustellen, oder vielmehr von den Rechnungen mit Thalern und Groschen voraus zu schicken sind, darf wohl kaum erinnert werden. Bei Groschen und Pfennigen ist es übrigens genug, wenn sie nur Summen von Pfennigen, die unter 100 sind, zu Groschen machen können. Denn größere Summen kommen bei wirklichen Rechnungen selten vor.

Will

Will Jemand außer den Zahlen 12 und 24, auch noch mit andern Zahlen, als 15, 16, 32, die auch bei Geld- Gewicht- und andern Abtheilungen vorkommen, ähnliche Uebungen anstellen, so kann dies nichts schaden. Indessen sind diese Uebungen weniger nöthig, weil Geldrechnungen weit häufiger, als andere vorkommen.

Wo andere Rechnungsmünzen, als Thaler, Groschen, Pfennige, üblich sind, muß man ähnliche Uebungen, z. B. mit Silbergroschen, Mariengroschen, Kreutzern u. s. w. anstellen.

§. 78.

Zweite Vorübung.

Die zweite Vorübung besteht darin, daß man die Schüler eine Menge Zahlen von einer einzigen kleinern Benennung, nach und nach im Kopfe addiren, und so bald es angeht, sie auf die größere Benennung bringen läßt. Ein einziges Beispiel, nach dem sich leicht hundert andere machen lassen, wird die Sache deutlich machen.

Fragen.					Antwort			
Wie viel sind	9	lth.	u.	7 lth.	=	=	16	lth.
u. noch	11	lth.		=	=	=	27	lth.
u. noch	9	=	=	=	1 ℔	u.	4	lth.
u. noch	13	=	=	=	1 ℔	u.	17	lth.
u. noch	8	=	=	=	1 ℔	u.	25	lth.
u. noch	20	=	=	=	2 ℔	u.	13	lth.

u. s. f.

Hier geschieht bei der 3ten und 6ten Frage der erwähnte Uebergang auf einer höhern Benennung, nemlich auf ℔.

Man beobachte aber bei dieser Uebung einen guten Fortgang vom leichtern zum Schwerern. Das obige Exempel, wo, um es kürzer zu machen, auch größere Zahlen, (11, 13, 20) addirt werden, würde ich nicht zu der allerersten Uebung in dieser Art vorschlagen. Man fange etwa mit ein Paar Exempeln in **Quentchen** an, nachdem man vorher die Kinder mit den gewöhnlichen Gewichten und ihren Abtheilungen bekannt gemacht hat. Exempel dieser Art sind äußerst leicht, weil das höchste, was zugezählt werden darf, 3 ist, da 4 Quentchen schon ein volles Loth machen würden. Auf ähnliche Art kann man sie **Viertel** oder **Achtel** einer Elle, **Mandel**, deren 4 ein Schock machen, **Steine**, deren 5 einen Centner machen, **einzelne Garben**, deren 15 eine Mandel machen, **Metzen**, deren 16 auf einen Scheffel gehn, u. s. w. zusammenzählen lassen. Doch rathe ich nicht dergleichen Uebungen ganze Stunden lang fortzusetzen, weil sie durch ihre Einförmigkeit zu sehr ermüden. Man lasse sie mit andern Rechnungen abwechseln, und nehme dabei übrigens weniger auf Geld, als auf andere Maße und Gewichte Rücksicht.

Uebrigens versäume man doch ja nicht, so oft eine neue Benennung vorkommt, die Kinder recht genau von ihrer Bedeutung zu unterrichten, und

ihnen

ihnen, wo es angeht, die Dinge (Maße, Gewichte u. d. g.) wirklich vorzuzeigen, damit sie eine anschauliche Vorstellung von der Sache haben, wovon die Rede ist. Man kann es bei Kindern in dem Punkte der Deutlichkeit nicht leicht übertreiben, denn die allerbekanntesten Dinge sind ihnen oft unbekannt. Ich habe sehr viele Erfahrungen dieser Art gemacht, eine aber kann ich mich nicht enthalten herzusetzen, weil sie sehr auffallend beweiset, wie nöthig es sey, Kindern auch die geringsten Kleinigkeiten zu erklären. Ein 8 oder 9jähriger Knabe konnte mir einst die Frage nicht beantworten, wie viel Pfennige 3 Sechser wären. Es war mir unbegreiflich, weil ich wußte, daß er das Einmaleins inne hatte, bis ich durch verschiedene Veränderungen der Frage entdeckte, daß er nicht wußte, daß ein Sechser und sechs Pfennige einerlei wären. Freilich ist dem Lehrer nicht zuzumuthen, daß er alles errathen soll, was etwa irgend einem einfältigen und versäumten Kinde noch unbekannt ist, aber eben deswegen muß er seine Schüler gewöhnen, selbst zu fragen, sobald ihnen etwas nicht recht deutlich ist.

Dritte Vorübung.

§. 79.

Die dritte Vorübung besteht in den einfachen **Namenveränderungen** (oder sogenannten ein=

einfachen Reductioen*) auf dem Papier. Diese Rechnungen bestehen darinn, daß man auch bei etwas größern Zahlen eine größere Benennung in eine kleinere (z. B Pfunde in Lothe), oder umgekehrt, (Lothe in Pfunde, Pfunde in Centner u. d. g.) verwandelt.

*) Von dem lat. Worte reducere, zurückführen; weil eine Benennung auf die andere zurückgeführt, d. h. in die andere verwandelt wird. Uebrigens heißen diese Namenveränderungen einfach, weil es noch andere giebt, die eine verwickeltere Rechnung erfordern; nemlich wenn z. B. nicht Pfunde in Centner, sondern Berliner Pfund, in Amsterdammer oder französische Pfunde verwandelt werden sollen, dies sind zusammengesetzte Namenveränderungen oder Reductionen, von denen hier aber nicht die Rede seyn kann.

Namenveränderung von einer größeren Benennung auf eine kleinere.

§. 80.

Die allgemeine Regel ist: **jede Verwandlung eines größeren Namens in einen kleinern, geschieht durch Multiplication mit der Eintheilungszahl.** Die Eintheilungszahl aber nenne ich die Zahl, welche mir anzeigt, wie viele Stücke von der kleinen Benennung auf die größern gehen. Z. B. wenn **Thaler zu Groschen** gemacht werden sollen, so ist Thaler die größere Benennung, und Groschen die kleinere

nere Benennung, und 24 die Eintheilungszahl, weil 24 Groschen auf einen Thaler gehen.

Den Grund der obigen Regel wird man in jedem Beispiel deutlich einsehen, sobald man sich denselben in einem einzigen Beispiele deutlich gemacht hat. Gesetzt man soll 368 Thl. zu Gr. machen, so ist klar, daß, da jeder einzelne Thaler 24 Gr. enthält, 368 Thl. 368 mal 24 Gr. enthalten werden. Wenn aber 24, 368 mal genommen werden soll, so heißt dies nach der Erklärung der Multiplication (§. 32), es soll 24 mit 368 multiplicirt werden. Hierbei ist also eigentlich 368 der Multiplicator. Allein da die Eintheilungszahl 24 meistens die kleinere ist, so darf man sie (nach §. 35) als Multiplicator ansehen.

Wir setzen ein Paar Beispiele hinzu, die hoffentlich keiner Erläuterung bedürfen.

a)

```
   368 Thl.
    24
  ----
  1472
  736
  ----
  8832 Gr.
    12
 -----
 17664
 8832
 ------
105984 Pf.
```

Oder auch mit der Abkürzung §. 45. a.

```
   368 Thl.
  ------(24
  8832 Gr.
 -------(12
105984 Pf.
```

b)

b)

87 ℔
32
174
261
2784 Lth.
4
11136 Qt.

Oder nach §. 45. b.

87 ℔
—(4
348
—(8
2784 Lth.
—(4
11136 Qt.

e)

27 Schck.
4
108 Mdl.
15
540
108
1620 St.

Oder

27 Schck.
—(4
108 Mdl.
—(3
324
—(5
1620 St.

d)

7218 Wispel.
24
28872
14436
173232 Schfl.
16
1039392
173232
2771712 Metzen.

Oder

7218 Wispel.
—(24
173232 Schfl.
—(4
692928
—(4
2771712 Metzen.

Uebungs-

Uebungsbeispiele.

210) 365 Rthlr. Wie viel sinds Groschen? wie viel Pfennige?

211) 728 Rthlr. Wie viel sinds Groschen? wie viel Pfennige?

212) 5550 Rthlr. Wie viel sinds Groschen? wie viel Pfennige?

213) 924 Rthlr. Wie viel sinds Silbergroschen? wie viel Denar?

214) 6482 Gulden. Wie viel sinds Kreuzer? wie viel Pfennige?

215) 225 Centn. Wie viel sinds Pfund? wie viel Loth? wie viel Quent.

216) 571 Centn. Wie viel sinds Stein? wie viel Pfund? wie viel Loth?

217) 196 Wispel. Wie viel sinds Scheffel? wie viel Metzen?

218) 82 Jahr. Wie viel sinds Tage? wie viel Stunden? wie viel Minuten?

Man sey aufmerksam darauf, daß dergleichen Exempel von Kindern nicht gedankenlos gerechnet werden, wozu viele geneigt sind. Man kehre nur dergleichen Exempel um, und mache die Antwort zur Frage. Z. B. bei dem oben gerechneten Exempel d frage man, wie viel Scheffel oder Wispel Hafer 2 771 712 Metzen sind? und man wird finden, daß mancher flüchtige Knabe, der das Exempel gerechnet hat, nicht darauf zu antworten weiß.

Auch

Auch solche Exempel muß man rechnen lassen, wo außer der größern Benennung noch kleinere mit vorkommen. Z. B. wie viel betragen 719 Thl. 16 Gr. 6 Pf. in Groschen und Pfennigen?

```
   719 Thl. 16 Gr. 6 Pf.
    24
  ----
  2876
 1438
 -----
 17272 Gr. 6 Pf.
    12
 -----
 34544
17272
------
207270 Pf.
```

Oder:

```
   719 Thl. 16 Gr. 6 Pf.
 ------(24
 17272 Gr. 6 Pf.
 ------(12
207270
```

In der ersten Rechnung ist zuerst mit 24 ganz auf die gewöhnliche Art multiplicirt; nur beim Addiren sind die oben stehenden 16 gleich mit in das Product gezogen. Anstatt nemlich, wie sonst, 6 herunter zu setzen, und dann 7 und 8 zu addiren u. s. f. sage ich gleich, 6 und 16 macht 22, also

also wird 2 herunter gesetzt, und 2 im Sinn behalten: denn 7 und 8 ist 15 und 2 dazu ist 17 u. s. f. Eben so sind nach der Multiplication mit 12, beim Addiren gleich zu der Ziffer 4, die obenstehenden 6 Pf. mit in das Product gezogen. Bei der zweiten Rechnung fallen die Additionen weg; daher wird das Zuzählen der 16 Gr. und 6 Pf. gleich beim Multipliciren vorgenommen. In der ersten Multiplication sagt man, 9 mal 24 ist 216, und 16 dazu ist 232, also werden 2 hingeschrieben und 23 im Sinn behalten, u. s. w.

Wie viele Loth und Quentchen betragen 3 Pfund 27 Lth. 3 Quent.?

```
 32
  3 ℔ 27 Lth. 3 Quent.
 ---
123 Lth. 3 Quent.
  4
 ---
495 Quent.
```

Wie viel Scheffel und Metzen betragen 714 Wispel, 11 Scheffel?

```
      714 Wspl. 11 Schfl.
     ------(24
    17147 Schfl.
   -------(4
    68588
  --------(4
   274352 Mtz.
```

Uebungsbeispiele.

219) 17 Thl. 19 Gr. Wie viel sinds Pfennige?

220) 69 Thl. 11 Gr. 6 Pf. Wie viel sinds Pfennige?

221) 183 Thl. 7 Pf. Wie viel sinds Pfennige?

222) 625 Thl. 17 Gr. 3 Pf. Wie viel sinds Pfennige?

223) 5002 Thl. 18 Gr. 6 Pf. Wie viel sinds Pfennige?

224) 71 Thl. 22 Silbergr. Wie viel sinds Denar?

225) 215 Thl. 2 Silbergr. 10 Denar. Wie viel sinds Denar?

226) 637 Gulden. 57 Kr. 3 Pf. Wie viel sinds Pfennige?

227) 93 Gulden. 31 Kr. 1 Pf. Wie viel sinds Pfennige?

228) 456 Mrk. 3 Schill. Wie viel sinds Pfennige?

229) 1928 Mrk. 10 Pf. Wie viel sinds Pfennige?

230) 57 Cent. 80 ℔. Wie viel sinds Pfund?

231) 13 Cent. 11 ℔. 4 Lth. Wie viel sinds Loth?

232) 90 ℔. 27 Lth. Wie viel sinds Quent.?

233) 87 ℔. 13 Lth. 3 Quentch. Wie viel sinds Quentchen?

234) 3 Centn. 7 ℔. 8 ℔th. 1 Quent. Wie viel sinds Quentchen?

235) 7 Centn. 8 Stein. 1 Quentch. Wie viel sinds Quentchen?

236) 8 Wisp. 21 Schfl. Wie viel sinds Metzen?

237) 30 Wisp. 5 Schfl. 9 Metz. Wie viel sinds Metzen?

238) 138 Wisp. und 10 Metz. Wie viel sinds Metzen?

239) 39 Jahr. 7 Tage. 3 Stunden. Wie viel sinds Minuten?

Anmerk. Bei zehntheiligen Abtheilungen fällt die hier erklärte Rechnung gänzlich weg. Man versuche, um dies einzusehen, nur ein Paar Exempel aus den zehntheiligen Fußmaße (Tabelle 15) zu rechnen. Z. E. wie viel Fuß, und Zoll sind

	39°.	$8^{\prime}$.	$7^{\prime\prime}$?
Antwort.		$398^{\prime}$.	$7^{\prime\prime}$
und			$3987^{\prime\prime}$.

Denn da jede Ruthe 10 Fuß beträgt, so sind 39 Ruthen $= 390^{\prime}$ Fuß: also $39^{\circ} + 8^{\prime} = 398^{\prime}$. Und da ein jeder Fuß 10 Zoll hat, so sind $398^{\prime} = 3980^{\prime\prime}$, also $39^{\circ} + 8^{\prime} + 7^{\prime} = 3987^{\prime\prime}$. Eben so

	27°.	0 I.	9 II
sind		270 I.	9 II
oder			2709 II
desgleichen			486°
sind			4860 I
und			48600 II
	u.	d. g.	m.

Namenveränderung von einer kleinern Benennung auf eine größere.

§. 81.

Man sieht schon aus der Ueberschrift, daß diese Rechnung gerade das Gegentheil der vorigen ist. Die allgemeine Regel ist: **wenn ein kleiner Name in einem größern verwandelt werden soll, so muß durch die Eintheilungszahl dividirt werden.**

Gesetzt es sollen 7860 Pf. zu Gr. gemacht werden, so sieht man leicht ein, daß ausgerechnet werden soll, wieviel mal 12 Pf. in 7860 Pf. enthalten sein, d. h. (nach §. 49.) 7860 soll durch 12 dividirt werden. Hier kommen 655 Gr. heraus, sollen diese zu Thalern gemacht werden, so muß ich ausrechnen, wieviel mal 24 Gr. in 655 Gr. enthalten sey.

	7800 Pf.
12)	
	655 Gr.
24)	
	27 Thl. 7 Gr.

Bleibt

Bleibt bei einer solchen Division, wie hier bei der 2ten, ein Rest (7), so pflegt man diesen gewöhnlich nicht in einen Bruch ($\frac{7}{24}$) zu setzen, (ob es gleich an sich ganz richtig wäre, weil $\frac{7}{24}$ Thl. und 7 Gr. wirklich einerlei ist), sondern man schreibt diesen Rest, ohne ihn zu dividiren, mit der kleineren Benennung neben dem Quotienten. Im obigen Beispiel findet man auf diese Art 655 Gr., betragen 27 Thl. 7 Gr.

Folgende Rechnungen werden nunmehr ohne Erklärung verständlich seyn.

Wieviel Gr. und Thl. sind 10 000 Pf.?

10 000 Pf.
12)———
833 Gr. 4 Pf.
24)———
34 Thl. 17 Gr. 4 Pf.

Wieviel Scheffel und Wispel sind 7937 Metzen?

7937 Metzen	496 Scheffel	20 Wispel
(16)	(24)	
64	48	
153	16 Scheffel.	
144		
97		
96		
1 Metze.		

7937 Metzen betragen also 20 Wspl. 16 Schfl. 1 Mtz.

Wie viel Centner sind 19 857 ℔?

19 857 ℔.
11) 0 . (Vergl. §. 65)
180 Cnt. 57 ℔.

Wie viel Lth., ℔., Cnt. sind 100 000 Quentchen?

100 000 Quent.
4)
25000 Lth. | 781 ℔ | 7 Cnt. 11 ℔. 8 Lth.
(32) (110)
224 770
260 11 ℔.
256
40
32
8 Lth.

100000 Quentchen betragen also 7 Cnt. 11 ℔. 8 Lth.

Wie viel Fuße und Ruthen betragen 122 634 Zolle, des zwölftheiligen Rheinländischen Maßes (Tabelle 14).

122 634''
12)
10 219'. 6''
12)
851°. 7'. 6''

d. h. 122 634 Zoll betragen 851 Ruthen, 7 Fuß, 6 Zoll.

Uebungs-

Uebungsbeispiele.

240) 3 456 Pfennige. Wie viel sinds Thaler, Groschen und Pfennige?

241) 50 187 Pfennige. Wie viel sinds Thaler, Groschen und Pfennige?

242) 1 000 000 Pf. Wie viel sinds Thaler, Groschen und Pfennige?

243) 719 038 Pf. Wie viel sinds Thaler, Groschen und Pfennige?

244) 803 154 Denar. Wie viel sinds Thaler, Silbergroschen, Pfennige?

245) 416 680 Denar. Wie viel sinds Thaler, Silbergroschen, Pfennige?

246) 5 877 169 Denar. Wie viel sinds Thaler, Silbergroschen, Pfennige?

247) 1 723 018 Pf. Wie viel sinds Gulden, Kreuzer, Pfennige?

248) 3 089 007 Pf. Wie viel sinds Gulden, Kreuzer, Pfennige?

249) 7 510 123 Pf. Wie viel sinds Gulden, Kreuzer, Pfennige?

250) 407 821 Pf. Wie viel sinds Mark, Schilling, Pfennige?

251) 5 916 455 Pf. Wie viel sinds Mark, Schilling, Pfennige?

252) 10 875 210 Pf. Wie viel sinds Mark, Schilling, Pfennige?

253) 6 610 590 Pfund. Wie viel sinds Centner, Stein, Pfund?

254) 7 189 218 Pfund. Wie viel sinds Centner, Stein, Pfund?

255) 8 538 792 Loth. Wie viel sinds Centner, Pfund, Loth?

256) 9 233 150 Quentch. Wie vielsi nds Centner, Pfund, Loth und Quentchen?

257) 351 077 Metz. Wie viel sinds Wispel, Scheffel, Metzen?

258) 5 000 Metz. Wie viel sinds Wispel, Scheffel, Metzen?

259) 387 654 Stunden. Wie viel sinds Jahr, Tage, Stunden?

260) 36 720 021 Minuten. Wie viel sinds Jahr, Tage, Stunden und Minuten?

Anmerk. Auch diese Rechnung fällt bei zehntheiligen Abtheilungen gänzlich weg. Gesetzt man sollte z. B. 31829 Linien des zehntheiligen Reinländischen Maßes, (Tabelle 15) in Zolle, Fuße und Ruthen verwandeln, so hat man ohne Rechnung

$$31809^{'''}$$

sind $3180^{''}.\ 9^{'''}$

oder $318^{'}\ 0^{''}\ 9^{'''}$

oder $31^{\circ}.\ 8^{'}.\ 0^{''}\ 9^{'''}$

Denn wenn man 31 809 durch 10 dividirt, so ist aus §. 65. bekannt, daß 3 180 heraus kommen, und 9 übrig bleiben. Eben so verhält es sich, wenn 3 180 durch 10 dividirt werden; es kommen 318 heraus, und 0 bleibt übrig, u. s. f.

Vierte Vorübung. Die Neuner-Reste vielfach benannter Zahlen zu finden.

§. 82.

Um die Neuner- und Elfer-Proben auch auf Rechnungen in benanten Zahlen anwenden zu können, ist nichts weiter nöthig als von jeder vielfach benannten Zahl den Rest angeben zu können, den sie bei einer Division mit 9, oder mit 11, lassen würde.

Um nun dergleichen Reste überhaupt, und vor jetzt namentlich die Neunerreste, zu finden, kommt es bloß darauf an, daß man wisse, von einer einfachbenannten Zahl, den Neunerrest, **in einer kleinern Benennung**, zu finden; d. h. denjenigen Neunerrest zu finden, den die Zahl lassen würde, wenn sie unter eine niedrigere Benennung gebracht würde.

Es soll z. B. der Neunerrest von 3859 Thalern **in Groschen** gefunden werden. Man hat hierbei auf zweierlei zu sehen, 1) auf den Neunerrest, den die Zahl für sich läßt (bei der obigen Zahl ist er 7), 2) auf den Neunerrest, den ein einzelner Thaler, wenn er zu Groschen gemacht wird, läßt, und dieser beträgt bei 1 Thl. oder 24 Gr. allezeit 6; denn von den 24 Gr. gehen 18 mit 9 auf. Hat man diese beiden Zahlen (7 u. 6) gefunden, so multiplicirt man sie, und wirft aus dem Product 9 weg, so oft es angeht.

Also bei der obigen Zahl ist 6 mal 7 = 42, und hiervon 36 weggeworfen, bleibt 6. Dies ist der Neunerrest in Gr., d. h. wenn 3859 Thl. zu Gr. gemacht und mit 9 dividirt werden, so bleiben 6 Gr. als Rest. Ein nachdenkender Rechner wird den Grund dieser Regel schon aus dem Gesagten begreifen. Dividire ich nemlich 3859 Thl. durch 9 geradezu, so müssen 7 Thaler als Rest bleiben. Wollte ich nun diese mit 24 zu Gr. machen, und sagen, 7 mal 24 ist 168, so würde mir diese Zahl den gesuchten Neunerrest geben. Allein ich kann es mir leichter machen, indem ich 24 Gr. in Gedanken in 18 Gr. + 6 Gr. theile. Die 18 Gr. gehen für sich mit 9 auf, und brauchen also nicht weiter in Betrachtung gezogen zu werden. Daher brauche ich nur 6 Gr. mit 7 zu multipliciren, und davon den Neunerrest zu suchen.

Hätte man statt Thaler andere Benennungen, so verfährt man eben so. Der Neunerrest von 3461 Gr. ist 3 Pf., denn 1) die Zahl selbst hat den Neunerrest 7, 2) 1 Gr. oder 12 Pf. hat den Neunerrest 3. Nun ist 3 + 7 = 21, und hiervon ist der Neunerrest 3 Pf.

Von 1744 Cnt. ist der Neunerrest in Steinen, 8 Stein. Denn 1) die Zahl selbst giebt den Neunerrest 7. 2) Da 1 Cnt. nur 5 Stein hat, und dies weniger als 9 ist, so ist der Neunerrest von 1 Cnt. in Steinen, 5 Stein selbst. Nun ist 7mal 5 Stein = 35 Stein, und hiervon der Neunerrest 8 Stein.

Von

Von eben dem Gewicht 1744 Cnt. ist der Neunerrest in Pfunden 5 ℔. Denn 1) die Zahl selbst giebt 7. 2) 1 Cnt. = 110 ℔ giebt den Neunerrest 2 ℔. Nun ist 7 mal 2 ℔ = 14 ℔, und hiervon der Neunerrest 5 ℔.

Von 867 ℔ ist der Neunerrest in Lothen, 6 Loth. Denn 1) die Zahl selbst giebt 3. 2) 1 ℔ = 32 Loth giebt 5 Loth. Nun ist 3 mal 5 Loth = 15 Loth, und hiervon den Neunerrest 6 Loth.

Hieraus werden folgende Uebungsbeispiele verständlich seyn.

a) 286 Schock	7		b) 714 Schfl.	3	
60 Stück	6		24 Mtz.	6	
	42			18	
Neunerrest	6 St.		Neunerrest	0 Mtz.	
c) 234 ℔	0		d) 529 Dutz.	7	
32 lt.	5		12 Stück	3	
	0			21	
Neunerrest	0 lt.		Neunerrest	3 St.	
e) 55 Gr.	1		f) 448 Stein	7	
12 Pf.	3		22 ℔	4	
	3			28	
Neunerrest	3		Neunerrest	1	

Es wird hinreichend seyn, ein einziges dieser Beispiele zu erläutern. Im Beispiel a steht in

der

der ersten Zeile die Zahl, deren Neunerrest gesucht wird, 286 Schock, und daneben ihr unmittelbarer Neunerrest 7. Aus der 2ten Zeile ersieht man, in was für Benennung der Neunerrest gesucht wird, nemlich in der Benennung **einzelne Stücke**, deren 60 auf ein Schock gehen. Hier steht also die Eintheilungszahl 60, und hinter ihr ihr Neunerrest 6. In der 3ten Zeile sind die beiden Neunerreste multipliciret; ihr Product ist 42, und hiervon ist der gesuchte Neunerrest 6 Stück, der in der 4ten Zeile steht.

Uebrigens versteht es sich von selbst, daß man sich gewöhnen muß, die leichte Rechnung, die wir oben blos der Deutlichkeit wegen auf dem Papier gemacht haben, ganz im Kopfe zu machen.

Nach dieser Vorübung kann es nicht schwer seyn, auch an einer Zahl, die in mehreren Benennungen gegeben ist, den Neunerrest zu finden. Z. B. 742 Thl. 17 Gr. 7 Pf.

Ich sage hier: 1) von 742 Thl. beträgt nach der vorigen Rechnung der Neunerrest in Gr. 3 Gr. 2) Hierzu addire ich 17 Gr. das giebt 20 Gr. 3) Jetzt suche ich von 20 Gr. den Neunerrest in Pf., er beträgt 6 Pf. 4) Hierzu addire ich 7 Pf. dies giebt 13 Pf., und davon ist der gesuchte Neunerrest 4 Pf.

Eben so verfährt man bei folgendem Exempel:

24 Cnt. 86 ℔. 23 Lth.

Von

Von 24 Cnt. ist der Neunerrest in ℔, 3 ℔. Hierzu 86 addirt giebt 89 ℔. Von 89 ℔. ist der Neunerrest in Lothen 4 Lth. hierzu 23 Lth addirt giebt 27 Lth. von 27 Lth., aber ist der Neunerrest 0.

Noch einige Beispiele zur Uebung

Gegebene Zahl				Neunerrest.
1 Cnt.	56 ℔.	=	=	4 ℔.
312 Thl	8 Gr.	=	=	8 Gr.
4 Thl.	2 Gr.	6 Pf.	=	3 Pf.
12 Wspl.	20 Schfl.	=	=	2 Schfl.
5 Wspl.	19 Schfl	3 Mtz.		6 Mtz.
34 Tage	14 Stund.	35 Min.		2 Min.

Den Elfer = Rest vielfach benannter Zahlen zu finden.

§. 83.

Was im vorigen §. vom Neunerrest gesagt worden, könnte alles auf die Elferreste angewendet werden, wenn man nur überall statt Neunerrest Elferrest läse, und die Beispiele der Sache gemäß abänderte. Wir werden uns also hier kürzer fassen können.

Zuerst wenn von einer einfach benannten Zahl der Elferrest in einer niedrigen Benennung gesucht wird, so nimmt man den Elferrest der Zahl selbst und der Eintheilungszahl, und multipli-

tiplicirt beide mit einander, wirft aber aus dem Product so viele Elfen weg, als angeht.

Z. B. wenn von 3528 Thl. der Elferrest in Groschen gesucht wird, so sage ich 1) der Elferrest von 3528 ist 8; 2) der Elferrest der Eintheilungszahl 24 ist 2. Nun ist 8 mal 2 Gr. = 16 Gr. und davon 11 weggelassen bleiben 5 Gr

Zur Uebung noch folgende Beispiele.

		11er-rest.		11er-rest.
Gegebene Zahl	347 Schfl.	6	569 Ctt.	8
Eintheilungszahl	16 Mtz.	5	110 ℔.	0
Product		30		0
Elferrest des Produts 8 Mtz				0
Gegeb. Zahl	13 523 ℔.	4	151 Schock	8
Einth. Zahl	32 Lt.	10	4 Mandel	4
Product		40		32
Elferrest des Produets 7 Lth.				10

Ist die gegebene Zahl vielfach benannt, so schreitet man, wie bei dem Neunerrest, von einer Benennung zur andern fort. Hat man z. B. Thl. Gr. und Pf., so sucht man den Elferrest der Thl. in Gr. Hierzu addirt man die gegebenen Groschen. Dann sucht man den Elferrest dieser Gr. in Pf., und addirt dazu die gegebenen Pfennige, und sucht von diesen Pfennigen den Elferrest.

Wäre

Wäre die gegebene Zahl 941 Thl. 18 Gr. 5 Pf., so rechnet man so: der Elferrest von 941 Thl. ist in Gr. 6 Gr. Aber 6 Gr. + 18 Gr. = 24 Gr. und hiervon ist der Elferrest in Pfennigen 2 Pf.; aber 2 Pf. + 5 Pf. = 7 Pf. und da dies kleiner als 11, so sind 7 Gr. selbst der Elferrest der ganzen Zahl.

Zur Uebung mögen noch folgende Beispiele dienen.

Gegebene Zahl				Elfer-Rest
19251 Thl.	14 Gr	=	=	5 Gr.
7219 Thl.	8 Gr.	10 Pf.	=	2 Pf.
418 Cnt.	102 ℔.	=	=	3 ℔.
2 Cnt.	87 ℔.	24 Lth.	=	3 Lth.
	19 ℔.	15 Lth.	3 Quent.	9 Quent.

Anmerk. Man sieht leicht ein, daß bei zehntheiligen Abtheilungen für die Neuner- und Elfer-Reste gar keine besondere Rechnung nöthig ist, sondern daß sie völlig, wie bei unbenannten Zahlen, gefunden werden, z. B. von 9 Ruthen, 8 Fuß, 4 Zoll, 3 Linien, zehntheiligen Maßes, (d. i. 9843 Linien) ist, wie bei unbenannten Zahlen, der Neunerrest 6, und der Elferrest 9.

Anwendung auf die Rechnungen des 76 und 77 §.

§. 84.

Es wird nunmehr leicht seyn, von solchen Rechnungen, als wir §. 76 und 77 gerechnet haben, Neuner- und Elfer-Proben zu machen. Da nemlich

nemlich bei allen dahin gehörigen Exempeln bloß die Benennungen verändert werden, von der Größe der gegebenen Zahl aber gar nichts geändert wird; so ist klar, daß bei der gegebenen und gefundenen Zahl, beide Arten von Resten gleich seyn müssen.

Z. B. im Exempel a) §. 80. war die gegebene Zahl 368 Thl. und die gefundene 105 984 Pf. Man suche also von 368 den Neunerrest, in Pf., er ist 0 Pf., und eben so groß ist er bei der gesuchten Zahl. Desgleichen ist der Elferrest von 368 Thl. in Pf., 10 Pf., und eben so groß ist er in der gesuchten Zahl.

Eben so im ersten Exempel §. 81. war 7860 Pf. die gegebene Zahl; der Neunerrest hiervon ist 3 Pf., der Elferrest 6 Pf. Die gefundene Zahl war 27 Thl. 7 Gr., hiervon ist in Pf. der Neunerrest wie oben 3 Pf., und der Elferrest 6 Pf.

Achter Abschnitt.

Vom Zusammenzählen oder Addiren vielfach benannter Zahlen.

Addition solcher Dinge, bei welchen zehntheilige Abtheilungen statt finden, verglichen mit der zwölftheiligen Eintheilung.

§. 85.

Hätten wir bei Münzen, Gewichten und Maaßen, gar keine andere als zehntheilige Abtheilungen, so würde für die Addition in benannten Zahlen gar kein besonderer Unterricht nöthig seyn, indem die Rechnung völlig wie bei unbenannten Zahlen gemacht wird.

Gesetzt man sollte folgende Längen des zehntheiligen Fußmaßes (Tabelle 15) zusammen zählen.

$3^{r}.\ 9^{rr}.\ 8^{rrr}.\ +\ 4^{o}.\ 7^{r}.\ 6^{rr}.\ 7^{rrr}.$
$+\ 9^{rr}.\ 3^{rrr}.\ +\ 34^{o}.\ 5^{r}.\ 8^{rr}.\ 6^{rrr}.$
$+\ 2^{o}.\ 0^{r}.\ \ 0^{rr}.\ 4^{rrr}.\ +\ 3^{r}.\ 5^{rr}.\ 9^{rrr}.$

so ist der Aufsatz

entweder				oder
^{o}	$3^{r}.$	$9^{rr}.$	8^{rrr}	$398^{rrr}.$
4.	7.	6.	7	4767
		9.	3	93
34.	5.	8.	6	34586
2.	0.	0.	4	2004
	3.	5.	9	359
42°	$2^{r}.$	$0^{rr}.$	7^{rrr}	42207^{rrr}

In beiden Fällen ist die Rechnung völlig einerlei, und wie bei unbenannten Zahlen. Denn wenn man z. B. die letzte Säule des ersten Aufsatzes zusammenzählt, so kommen 37 Linien heraus. Da aber 10 Linien allemal einen Zoll machen, so betragen 37 Linien, 3 Zoll und 7 Linien: es müssen also, wie bei unbenannten Zahlen, 7 hingeschrieben, und 3 im Sinn behalten, und zu der Säule, welche Zolle enthält, addirt werden. Aehnliche Betrachtungen lassen sich bei jeder folgenden Säule anstellen.

Um nun den Grund deutlich einzusehen, warum man für das Rechnen mit benannten Zahlen gegenwärtig einen besondern Unterricht bedarf; so rechne man das obige Exempel nach dem ersten Aufsatz noch einmal, nur mit der Abänderung, daß die Ruthen, Fuße, Zolle und Linien, nicht Zehn- sondern zwölftheiliges Maaß seyn sollen;

°	3^{I}.	9^{II}.	8^{III}
4.	7.	6.	7
		9.	3
34.	5.	8.	6
2.	0.	0.	4
	3.	5.	9
41°.	9^{I}.	4^{II}.	1^{III}

Dies ändert sogleich die ganze Rechnung. Denn wenn ich die letzte Säule addire, so kommen zwar auch 37^{III} heraus: allein da ich jetzt nicht mehr 10 Linien auf einen Zoll rechnen darf, sondern 12; so kann ich auch nicht sagen 37^{III} sind 3^{II} und 7^{III}, sondern ich muß erst in Gedanken 37^{III} in 3^{II} (d. i. 36^{III}) und 1^{III} verwandeln; also nur 1^{III} hingeschrieben, und 3^{II} im Sinn behalten, und zu der Säule der Zolle hinzu zählen. Eben diese Betrachtungen finden bei jeder folgenden Säule statt. Die Säule der Zolle giebt 40^{II}; aber ich darf nicht 0 hinschreiben, und 4 im Sinn behalten, sondern ich muß erst ausrechnen, daß 40^{II} im zwölftheiligen Maaß 3^{I} und 4^{II} betragen; ich schreibe daher 4^{II} hin, und behalte 3^{I} in Gedanken. Die Säule der Fuße giebt 21^{I}, die 1°. 9^{I} betragen; also werden 9 hingeschrieben, und 1° zu den Ruthen gezählt, deren Summe nun 41 wird.

Addition vielfach benannter Zahlen überhaupt.

§. 86.

Aus dem vorigen §. ersieht man schon, auf welche Art überhaupt vielfach benannte Zahlen zusammen zu zählen sind.

Man setzt die gegebenen Stücke zuerst so untereinander, daß immer gleiche Benennungen unter einander in einer Säule zu stehen kommen. Dann zählt man die Säule der kleinsten Benennung zusammen, schreibt aber ihre Summe nicht sogleich hin, sondern rechnet erst (nach den im vorigen Abschnitt erklärten Vorübungen §. 76-81) aus, wieviel diese Summe Einheiten von der nächst höhern Benennung in sich faßt. Bloß den Ueberrest schreibt man hin, die höhern Einheiten aber zählt man mit zur nächsten Säule, und verfährt mit der Summe derselben gerade so, als mit der Summe der zuerst addirten Säule. Kurz man addirt so, wie wir im vorigen §. das letzte Exempel gerechnet haben, nur daß nicht bei allen solchen Additionen die Eintheilungszahl, so wie dort, immer 12 ist.

Bloß diese Verschiedenheit der Eintheilungszahlen und der darauf sich gründenden Namenveränderungen, macht einigen Unterschied in der Rechnung, denn Pfennige müssen anders zu Groschen, als Groschen zu Thalern, oder als Loth zu

Pfun-

Pfunden, oder als Pfunde zu Centnern gemacht werden u. s. f.

Wir wollen daher die am häufigsten vorkommenden Arten von Exempeln einzeln durchgehen. Da aber das Zusammenzählen in jeder Säule bei einem Exempel gerade so wie bei dem andern, und wie bei ganzen Zahlen geschieht, so wird nichts weiter nöthig seyn, als bei jeder Art von Exempeln zu zeigen, wie die Summe jeder Säule am bequemsten unter die nächste höhere Benennung gebracht wird. D. h. wir wollen zeigen, welches die bequemste Art sey, die Pf. zu Gr., die Gr. zu Thl., die Quent. zu Lth., die Lth. zu Pfund u. s. w. zu machen. Wir werden aber dabei im Stande seyn, uns kurz zu fassen, da wir die verschiedenen Arten, wie dergleichen Namenveränderungen gemacht werden können, schon im vorigen Abschnitt §. 76-81 erklärt haben. Uebrigens empfehle ich jedem Lehrer, bei Durchgehung der Rechnungen, welche die folgenden §. §. enthalten, folgender Gestalt zu Werke zu gehen. Zuerst erkläre er bei jeder Art von Exempeln die Tabelle, die bei jeder Art angeführt worden, und im Anhange des Buches zu finden ist. Dann übe er sie in den Namenveränderungen, die bei dieser Art von Exempeln vorkommen; das will sagen: er übe sie bei der ersten Art von Exempeln Pf. zu Gr., Gr. zu Thl. zu machen; bei der zweiten Art Pf. zu Mgr., Mgr. zu Thl. zu machen; bei der dritten Art Pf. zu Schl., Schl. zu

Thl. zu machen u. s. f. Die meisten dieser kleinen Rechnungen (denn groß muß man sie absichtlich nicht machen) sind von der Art, daß sie gute Uebungen zum Kopfrechnen abgeben. Erst dann, wenn sie diese Namenveränderungen begriffen haben, lasse man sie auf dem Papier addiren.

Geld-Additionen in Thalern, Groschen und Pfennigen (Tafel 1, 2, 3).

§. 87.

Thl.	Gr.	Pf.
758	14	3
12 467	9	8
1 772	18	6
3 549	12	11
756	8	8
2 479	23	11
21 784	15	11

Wenn man die Säule der Pfennige addirt hat, so werden sie am vortheilhaftesten und kürzesten nach §. 73 zu Gr. gemacht. Eben so nach Addition der Groschen-Säule die Groschen zu Thalern. Wer auf diese Art nicht fertig werden könnte, müßte wie §. 78 oder 81 rechnen.

Uebungs-

Uebungsbeispiele.

261) 3 Thl. 8 Gr. 6 Pf. + 7 Thl. 5 Gr. + 9 Thl. + 15 Thl. 21 Gr. 9 Pf. Wie viel sind es Thaler, Groschen und Pfennige?

262) 18 Thl. 10 Gr. + 29 Thl. 2 Gr. 3 Pf. + 34 Thl. 16 Gr. 9 Pf. + 110 Thl. 11 Gr. 9 Pf. Wie viel sinds Thaler, Groschen und Pfennige?

263) 48 Thl. 1 Gr. + 209 Thl. 20 Gr. 6 Pf. + 11 Thl. 12 Gr. 6 Pf. + 345 Thl. 19 Gr. 4 Pf. + 71 Thl. 4 Gr. 3 Pf. Wie viel sinds Thaler, Groschen und Pfennige?

264) 5 301 Thl. 19 Gr. 6 Pf. + 71 Thl. 9 Pf. + 840 Thl. + 429 Thl. 21 Gr. 3 Pf. + 1 005 Thl. 8 Gr. 6 Pf. Wie viel sinds Thaler, Groschen und Pfennige?

265) 47 Thl. 4 Gr. 3 Pf. + 90 Thl. 16 Gr. 6 Pf. + 309 Thl. 7 Gr. 3 Pf. + 6 709 Thl. 20 Gr. 10 Pf. + 921 Thl. 6 Gr. 9 Pf. Wie viel sinds Thaler, Groschen und Pfennige?

266) 4 038 Thl. 7 Gr. 6 Pf. + 168 Thl. 5 Gr. + 1 Thl. 14 Gr. 3 Pf. + 6[illegible]0 Thl. 9 Pf. + 582 Thl. 17 Gr. 3 Pf. + 26 Thl. 4 Gr. 3 Pf. Wie viel sinds Thaler, Groschen und Pfennige?

267) 2 000 Thl. + 50 Thl. 12 Gr. + 600 Thl. 8 Gr. + 13 Thl. 22 Gr. 9 Pf. + 5 Thl.

23 Gr. 3 Pf. + 22 Thl. 11 Gr. 6 Pf. Wie viel sinds Thaler, Groschen und Pfennige?

268) 203 Thl. 3 Gr. 9 Pf. + 4 823 Thl. 9 Gr. 3 Pf. + 761 Thl. 14 Gr. 6 Pf. + 907 Thl. 19 Gr. 9 Pf. + 56 Thl. 1 Gr. 3 Pf. + 3 517 Thl. 7 Gr. 9 Pf. + 59 Thl. 8 Gr. 9 Pf. Wie viel sinds Thaler, Groschen und Pfennige?

269) 64 321 Thl. 11 Gr. + 5 709 Thl. 18 Gr. 6 Pf. + 586 Thl. 23 Gr. 9 Pf. + 70 900 Thl. 12 Gr. + 40 Thl. 17 Gr. 9 Pf. + 1 000 Thl. 16 Gr. 6 Pf. + 59 Thl. 14 Gr. 9 Pf. + 416 Thl. 13 Gr. 6 Pf. Wie viel sinds Thaler, Groschen und Pfennige?

270) 589 Thl. 16 Gr. 6 Pf. + 6 644 Thl. 10 Gr. 9 Pf. + 20 Thl. 1 Gr. 4 Pf. + 90 214 Thl. 22 Gr. 9 Pf. + 839 Thl. 18 Gr. 6 Pf. + 7 Thl. 5 Gr. 9 Pf. + 3 001 Thl. 6 Gr. 6 Pf. + 579 Thl. 9 Pf. + 20 Gr. 6 Pf. Wie viel sinds Thaler, Groschen und Pfennige?

In Thl., Mgr. und Pf. (Taf. 4)

Thl.	Mgr.	Pf.
327	35	7
67	19	4
246	24	6
9	28	3
652	—	4

Im beigefügten Exempel giebt die Pfennig-Säule 20 Pf. Da 8 Pf. = 1 Mgr., so giebt das bloße Einmaleins, daß 20 Pf. = 2 Mgr. 4 Pf., die Säule der Mgr. giebt 108; diese

diese macht man durch eine kleine Division mit 36, auf einem Nebenblatt, zu Thl.; sie betragen gerade 3 Thl. Die Thaler werden, wie überall die höchste Benennung, ganz wie unbenannte Zahlen addirt.

Uebungsbeispiele.

271) 5 Thl. 6 Mgr. 2 Pf. + 12 Thl. 27 Mgr. 6 Pf. + 39 Thl. 20 Mgr. 4 Pf. + 76 Thl. 11 Mgr. 4 Pf. + 81 Thl. 30 Mgr. 2 Pf. Wieviel sinds Thaler, Mariengroschen und Pfennige?

272) 10 Thl. 9 Mgr. 6 Pf. + 15 Thl. 35 Mgr. 7 Pf. + 428 Thl. 21 Mgr. 4 Pf. + 6 Thl. 10 Mgr. 6 Pf. + 34 Thl. 2 Mgr. 4 Pf. + 77 Thl. 5 Mgr. 6 Pf. Wie viel sinds Thaler, Mariengroschen und Pfennige?

273) 400 Thl. + 19 Thl. 31 Mgr. 7 Pf. + 5 Thl. 7 Mgr. 6 Pf. + 104 Thl. 22 Mgr. 4 Pf. + 88 Thl. 19 Mgr. 2 Pf. + 17 Thl. 20 Mgr. 4 Pf. Wie viel sinds Thaler, Mariengroschen und Pfennige?

274) 81 Thl. 15 Mgr. 6 Pf. + 3 000 Thl. 27 Mgr. 4 Pf. + 169 Thl. 6 Mgr. 6 Pf. + 7 Thl. 11 Mgr. 2 Pf. + 411 Thl. 23 Mgr. 4 Pf. + 9 Thl. 19 Mgr. 2 Pf. Wie viel sinds Thaler, Mariengroschen und Pfennige?

275) 213 Thl. 10 Mgr. 6 Pf. + 90 Thl. 20 Mgr. 4 Pf. + 10 Thl. 6 Pf. + 520 Thl.

3 Mgr. + 14 Mgr. 6 Pf. + 636 Thl. 15 Mgr. 7 Pf. Wie viel sinds Thaler, Mariengroschen, Pfennige?

276) 1200 Thl. 18 Mgr. + 902 Thl. 33 Mgr. 4 Pf. + 50 Thl. 1 Mgr. 6 Pf. + 3875 Thl. 30 Mgr. 2 Pf. + 14 Thl. + 21 Thl. 15 Mgr. + 17 Thl. 2 Pf. Wie viel sinds Thaler, Mariengroschen und Pfennige?

In Thl. Silbergr., Denar (Taf. 5.)

Thl.	Sgr.	Pf.
4316	8	8
689	29	11
57	14	4
2166	28	5
7230	21	4

Die Säule der Pfennige (oder Denare) giebt 28 Pf. und diese werden gerade so zu Sgr., wie gewöhnliche Pfennige zu Gr. gemacht. Sie betragen 2 Sgr. 4 Pf. Die Säule der Sgr. giebt 81 Sgr., diese werden durch Division mit 30 zu Thl. gemacht, welches sehr leicht ist, wenn man das, was §. 65 gezeigt worden, gefaßt hat. 81 Sgr. = 2 Thl. 21 Sgr.

Uebungsbeispiele.

277) 11 Thl. 19 Silbergr. 10 Denar. + 17 Thl. 29 Silbergr. 6 Denar. + 25 Thl. 4 Silbergr. 8 Denar. + 55 Thl. 7 Silbergr. 11 Denar. + 31 Thl. 8 Silbergr. 4 Denar. + 51 Thl. 13 Silbergr. 6 Denar. Wie viel sinds Thaler, Silbergroschen und Denar?

278)

278) 48 Thl. 17 Silbergr. 8 Denar. + 233 Thl. 21 Silbergr. 6 Denar + 342 Thl. 19 Silbergr. 2 Denar + 78 Thl. 4 Silbergr. 3 Denar + 159 Thl. 6 Silbergr. 6 Denar + 54 Thl. 2 Silbergr. 9 Denar. Wie viel sinds Thaler, Silbergroschen, Denar?

279) 100 Thl. 3 Silbergr. 6 Denar + 66 Thl. 28 Silbergr. 4 Denar + 9 Thl. 11 Silbergr. 10 Denar + 313 Thl. 14 Silbergr. 1 Denar + 40 Thl. 12 Silbergr. 2 Denar + 781 Thl. 19 Silbergr. 6 Denar. Wie viel sinds Thaler, Silbergroschen, Denar?

280) 441 Thl. 2 Silbergr. + 800 Thl. 29 Silbergr. + 82 Thl. 22 Silbergr. 9 D. + 7 Thl. 10 Silbergr. 6 D. + 203 Thl. 20 Silbergr. 3 D. + 1 601 Thl. 19 Silbergr. Wie viel sinds Thaler, Silbergr. und Denar?

281) 11 Thl. 19 Silbergr. + 7 000 Thl. + 76 Thl. 24 Silbergr. 6 D. + 5 Thl. 9 D. + 8 441 Thl. 18 Silbergr. 6 D. 151 Thl. 26 Silbergr. 6 D. + 90 Thl. 9 D. + 33 Thl. 11 Silbergr. Wie viel sinds Thaler, Silbergr. und Denar?

282) 12 Thl. 25 Silbergr. 9 D. + 337 Thl. 8 Silbergr. 3 D. + 5 002 Thl. 17 Silbergr. 6 D. + 89 Thl. 2 Silbergr. 6 D. + 105 Thl. 28 Silbergr. 9 D. + 60 Thl. 15 Silbergr. 3 D. Wie viel sinds Thaler, Silbergr. und Denar?

In

In Mark, ßl., Pf. (Tafel 7).

Mrk.	ßl.	Pf.
9 416	15	6
742	9	11
2 426	14	9
882	11	10
13 469	4	—

Die Säule der Pfennige giebt 36 Pf., welche zu ßl. gemacht werden, gerade wie Pfennige zu Gr. Sie betragen also 3 Gr. Die Säule der ßl. giebt 52 ßl., die durch eine Neben-Division mit 16 zu Marken gemacht werden. Wer die Vielfachen von 16, wie §. 45 empfohlen worden, im Kopfe hat, weiß ohne Rechnung, daß 3 Mrk. = 48 ßl.; also 52 ßl. = 3 Mrk. 4 ßl. Auch kann man die ßl. nach §. 78 zusammenzählen.

Uebungsbeispiele.

283) 70 Mark 5 ßl. 10 Pf. + 12 Mark 13 ßl. 8 Pf. + 39 Mark 15 ßl. 4 Pf. + 44 Mark 9 ßl. 3 Pf. + 77 Mark 3 ßl. 6 Pf. + 150 Mark 15 ßl. 9 Pf. Wie viel sinds Mark, ßl. und Pf.?

284) 20 Mark 10 ßl. 4 Pf. + 518 Mark 7 ßl. 3 Pf. + 84 Mark 3 ßl. 11 Pf. + 164 Mark 9 ßl. 2 Pf. 67 Mark 14 ßl. 9 Pf. + 293 Mark 6 ßl. 6 Pf. Wie viel sinds Mark, ßl. und Pf.?

285) 100 Mark 3 Pf. + 16 Mark 12 ßl. 6 Pf. + 848 Mark 15 ßl. 4 Pf. + 11 Mark 1 ßl. 3 Pf. + 9 Mark 9 ßl. + 224 Mark,

Mark 8 ßl. 9 Pf. Wie viel sinds Mark, ßl. und Pf.?

286) 77 Mark 4 ßl. 2 Pf. + 6 050 Mark 12 ßl. + 109 Mark 15 ßl. 6 Pf. + 54 Mark 9 ßl. + 715 Mark 4 ßl. 4 Pf. + 62 Mark 3 ßl. 9 Pf. Wie viel sinds Mark, ßl. und Pf.?

287) 124 Mark 9 ßl. 3 Pf. + 5 102 Mark 15 ßl. + 12 ßl. 9 Pf. + 80 Mark 3 Pf. + 215 Mark 14 ßl. 6 Pf. + 664 Mark 11 ßl. 3 Pf. Wie viel sinds Mark, ßl. und Pf.?

288) 1 797 Mrrk 8 ßl. 3 Pf. + 500 Mark + 19 Mark 2 ßl. 10 Pf. + 3 627 Mark 13 ßl. + 419 Mark 8 ßl. 7 Pf. + 1 000 Mark + 711 Mark 12 ßl. 6 Pf. Wie viel sinds Mark, ßl. und Pf.?

In Fl., Kr., Pf. (Taf. 8).

Fl.	Kr.	Pf.
576	59	3
88	47	2
766	53	—
2 478	50	3
797	48	3
4 709	37	3

Die Säule der Pf. giebt 11 Pf.; und da 4 Pf. = 1 Kr., so weiß man aus dem bloßen Einmaleins, daß 11 Pf. = 2 Kr. 4 Pf. Die Säule der Kr. giebt 277 Kr. Da 1 Fl. = 60 Kr., so müssen diese 277 Kr. mit 60 dividirt werden, welches aber nach §. 65 sehr leicht ist. Man findet 277 Kr. = 4 Fl. 37 Kr.

Uebungs-

Uebungsbeispiele.

289) 4 Fl. 21 Kr. 3 Pf. + 23 Fl. 48 Kr. 2 Pf. + 140 Fl. 3 Kr. 2 Pf. + 27 Fl. 13 Kr. 1 Pf. + 50 Fl. 50 Kr. 1 Pf. + 1 Fl. 17 Kr. 3 Pf. Wie viel sinds Fl., Kr. und Pf.?

290) 31 Fl. 37 Kr. 3 Pf. + 604 Fl. 41 Kr. 2 Pf. + 40 Fl. 16 Kr. 2 Pf. + 89 Fl. 8 Kr. 1 Pf. + 140 Fl. 39 Kr. 3 Pf. + 1 Fl. 4 Kr. 2 Pf. Wie viel sinds Fl., Kr. und Pf.?

291) 500 Fl. 46 Kr. 3 Pf. + 78 Fl. 25 Kr. + 43 Fl. 30 Kr. 2 Pf. + 2 Fl. 18 Kr. 1 Pf. + 705 Fl. 55 Kr. + 25 Fl. 27 Kr. 3 Pf. Wie viel sinds Fl., Kr. und Pf.?

292) 47 Fl. 11 Kr. 2 Pf. + 3 000 Fl. 4 Kr. + 511 Fl. 41 Kr. 3 Pf. + 778 Fl. 56 Kr. 1 Pf. + 82 Fl. 15 Kr. 1 Pf. + 130 Fl. 23 Kr. 2 Pf. Wie viel sinds Fl., Kr. und Pf.?

293) 442 Fl. 38 Kr. 2 Pf. + 5 798 Fl. 44 Kr. 3 Pf. + 25 Fl. 21 Kr. 1 Pf. + 691 Fl. 47 Kr. 3 Pf. + 8 Fl. 10 Kr. 2 Pf. + 7 400 Fl. 1 Pf. Wie viel sinds Fl., Kr. und Pf.?

Rechnet man nun weiter die Säule der Lothe zusammen, so findet man 131 Loth. Diese müssen durch eine kleine Neben-Division mit 32 zu Pfunden gemacht werden. Man findet 131 Lt. = 4 ℔. 3 Lt. Wer nach §. 45 die Vielfachen von 32 im Kopfe hat, weiß, daß 4 Pfund = 128 Lt. und weiß daher augenblicklich auch ohne Division, daß 131 Lt. = 4 Pfund, 3 Lt.

Addirt man weiter die Säule der Pfunde, so findet man 396 Pfund, diese lassen sich sehr leicht in Cnt. verwandeln, wenn man auf das Rücksicht nimmt, was bei der Tafel des Handels-Gewichtes (Tafel 9. Anmerk. 5) gesagt worden. Denn da 330 Pfund = 3 Cnt., so sind 396 Pfund = 3 Cnt. 66 Pfund. Die Centner werden, wie immer die höchste Benennung, gerade so, wie unbenannte Zahlen, addirt.

Uebungsbeispiele.

297) 3 Pfund 17 Lt. 3 Quent. + 18 Pfund 2 Lt. 2 Quent. + 20 Pfund 24 Lt. 3 Quent. + 9 Pfund 8 Lt. 1 Quent. + 5 Pfund 5 Lt. 2 Quent. + 30 Pfund 2 Lt. 1 Quent. Wie viel sinds Pfunde, Lt., und Quent.?

298) 44 Pfund 1 Lt. 2 Quent. + 11 Pfund 13 Lt. 2 Quent. + 9 Pfund 21 Lt. 3 Quent. + 19 Pfund 17 Lt. 1 Quent. + 4 Pfund 1 Lt. 2 Quent. + 8 Pfund 10 Lt. 3 Quent. Wie viel sinds Pfunde, Lt., und Quent.?

299) 50 Pfund 29 Lt. 3 Quent. + 101 Pfund 14 Lt. 2 Quent. + 94 Pfund 2 Lt. 1 Quent. + 39 Pfund 16 Lt 2 Quent. + 102 Pfund 25 Lt. 3 Quent. + 77 Pfund 5 Lt. 2 Quent. Wie viel sinds Pfunde, Lt., und Quent.?

300) 7 Cent. 55 Pfund 17 Lt. 1 Quent. + 13 Cent. 69 Pfund 30 Lt. 2 Quent. + 30 Cent. 44 Pfund 11 Lt. 1 Quent + 12 Cent. 100 Pfund 30 Lt. + 48 Cent. 2 Pfund 1 Lth. 3 Quent. + 2 Cent. 39 Pfund. 13 Lth. 2 Quent. Wie viel sinds Cent., Pfunde, Lth. und Quent.?

301) 5 Cent. 11 Pfund 17 Lth. 2 Quent. + 88 Pfund 4 Lth. 1 Quent. + 14 Cent. 30 Lth. 1 Quent. + 9 Cent. 20 Pfund + 21 Cent. 67 Pfund 21 Lth. + 2 Cent. 13 Pfund 2 Quent. Wie viel sinds Cent., Pfund, Lth. und Quent.?

302) 4 Cent. 72 Pfund 13 Lth. 1 Quent. + 29 Cent. 34 Pfund 5 Lth. 2 Quent. + 15 Cent. 49 Pfund 2 Lth. + 7 Cent. 107 Pfund 24 Lth. + 1 Cent. 4 Pfund 8 Lth. 3 Quent. + 8 Cent. 1 Pfund 20 Lth. 3 Quent. Wie viel sinds Cent., Pfunde, Lth. und Quent.?

303) 9 Cent. 89 Pfund 12 Lth. 1 Quent. + 17 Cent. 22 Pfund 30 Lth. 2 Quent. + 21 Cent. 18 Pfund 17 Lth. + 3 Cent. 96 Pfund + 5 Cent. 1 Pfund 3 Lth. 3 Quent.

Quent. + 20 Cent. 40 Pfund 30 Lth. Wie viel sinds Cent., Pfunde, Lth. und Quent.?

304) 12 Cent. 19 Pfund 16 Lth. 1 Quent. + 37 Cent. 80 Pfund 24 Lth. + 99 Pfund 5 Lth. 3 Quent. + 4 Cent. 73 Pfund 11 Lth. + 6 Cent. 8 Pfund 2 Quent. + 10 Cent. 50 Pfund 2 Lth. + 8 Cent. 36 Pfund 31 Lth. 2 Quent. Wie viel sinds Cent., Pfunde, Lth. und Quent.?

305) 4 Cent. 40 Pfund 16 Lth. 3 Quent. + 10 Cent. 20 Pfund 30 Lth. + 6 Cent. 109 Pfund 3 Lth. + 4 Cent. 4 Lth. 3 Quent. + 26 Cent. 38 Pfund 15 Lth. 3 Quent. + 18 Cent. 69 Pfund 17 Lth. 2 Quent. Wie viel sinds Cent., Pfunde, Lth. und Quent.?

306) 21 Cent. 40 Pfund 10 Lth. 2 Quent. + 8 Cent. 87 Pfund 31 Lth. 2 Quentchen + 7 Cent. 57 Pfund + 3 Cent. 8 Pfund 29 Lth. 3 Quent. + 5 Cent. 70 Pfund 11 Lth. 3 Quent. + 19 Cent. 51 Pfund 15 Lth. 3 Quent. + 4 Cent. 90 Pfund 16 Lth. 2 Quent. Wie viel sinds Cent., Pfund, Lth. und Quent.?

Schlächter-Gewicht von Centnern und Pfunden (Taf. 10).

Cent.	Pfund.
2.	84
13.	29
7.	99
5.	64
11.	9
40	85

Bei dem Schlächter-Gewicht, oder überhaupt bei Centnern von 100 Pfund, ist die Addition von Cent. und Pfund völlig so wie bei unbenannten Zahlen. Man addire nemlich zuerst die hinterste Säule, oder die Einer der Pfunde. Im beigefügten Exempel ist ihre Summe 35, wovon 5 hingeschrieben, und 3 in Gedanken behalten werden. Die Säule der Zehner giebt 28, d. i. 8 Zehner und 2 Hunderte; aber 2 Hundert Pfund sind 2 Centner, also werden 8 hingesetzt, und 2 im Sinn behalten, die man nun ferner zu den übrigen Centnern addirt.

Uebungsbeispiele.

307) 3 Centner 80 Pfund Schlächtergew. + 75 Pfund + 1 Centner 4 Pfund + 7 Cent. 15 Pfund + 98 Pfund + 5 Centner. Wie viel sinds Centner und Pfunde Schlächtergewicht.

308) 2 Centner 55 Pfund + 3 Centner 10 Pfund + 1 Centner 96 Pfund + 2 Cent. 67 Pfund + 44 Pfund + 1 Centner 19 Pfund. Wie viel sinds Centner und Pfunde Schlächtergewicht.

309)

309) 1 Centner 70 Pfund + 6 Centner 89 Pfund + 2 Centner 90 Pfund + 35 Pfund + 2 Centner 19 Pfund + 30 Pfund. Wie viel Centner und Pfunde Schlächtergewicht.

310) 2 Centner 66 Pfund + 4 Centner + 3 Centner 39 Pfund + 1 Centner 77 Pfund + 80 Pfund + 2 Centner 3 Pfund + 3 Centner 46 Pfund. Wie viel sinds Centner und Pfunde Schlächtergewicht?

Vermischte Additionen.

§. 89.

Aus dem bisherigen wird das, was bei Additionen jeder Art zu beobachten ist, hinlänglich klar seyn. Es wird daher hinreichend seyn, zur Uebung noch mehrere Beispiele von vermischter Art hinzuzufügen. Da Additionen, unterandern auch bei Rechnungen von Handwerksleuten, Künstlern, u. d. gl., für verfertigte Arbeit vorkommen, so kann hier Gelegenheit genommen werden, Kindern in Beispielen zu zeigen, wie dergleichen Rechnungen auf eine verständliche und regelmäßige Art aufzusetzen sind. Man wird unter den folgenden Uebungsexempeln mehrere zu diesen Zweck dienliche finden.

Uebungsbeispiele.

311) Rechnung über die Umsetzung eines Ofens, für Herrn N.

Für 30 Stück Dachsteine		10 Gr.	6 Pf.
Für Lehm = = =		10 Gr.	
Den Schutt wegzufahren		6 Gr.	
Für eine Rauchröhre =		18 Gr.	
Für eine Ofenthür = =		22 Gr.	
20 Kacheln = = =		20 Gr.	
Arbeitslohn = =	1 Thl.	12 Gr.	

312) Rechnung über verfertigte Tischlerarbeit, für Herrn N.

Eine Bretterwand zu machen = =	1 Thl.	20 Gr.	
Für Latten und Nägel	—	11 Gr.	6 Pf.
7 Gardinenrähme	2 Thl.	15 Gr.	
2 Rollo's mit Rollen	—	16 Gr.	
Für Schnur und Stock	—	4 Gr.	
2 kleine Tische =	2 Thl.	8 Gr.	

313) Rechnung für Herrn N. über

3 Fenstergardinen zu verfertigen =	1 Thl.	—	—
8 Ellen weiße Frangen	—	8 Gr.	—
Für blaue Farbe	—	4 Gr.	—
2 Gardinen mit Vorhang = =	—	16 Gr.	—
25 Ellen grüne Frangen = =	1 Thl.	16 Gr.	—
Für weißes Band	—	1 Gr.	6 Pf.

314)

314) Rechnung für Herrn N. über verfertigte Arbeit:

$4\frac{1}{2}$ Elle Tuch =	7 Thl.	2 Gr.	—
$5\frac{1}{2}$ Elle Rasch =	1 Thl.	20 Gr.	—
Leinwand zu Aermel und Taschen	—	10 Gr.	—
Für Halb = und Nähseide = =	—	3 Gr.	—
Für steife Leinwand	—	7 Gr.	—
Das Tuch zu krumpfen	—	4 Gr.	—
Für Knöpfe =	—	14 Gr.	—
Für schwarzen Sammet zum Kragen	—	20 Gr.	—
Einen Ueberrock zu machen =	1 Thl.	6 Gr.	—

315) Berechnung der Ausgaben für Einrichtung eines Zimmers:

Ein Spiegel =	9 Thl.	—	—
Ein Divan =	20 Thl.	8 Gr.	—
Ein Dutzend Stühle	12 Thl.	12 Gr.	—
Ein Kleiderspinde	11 Thl.	4 Gr.	—
Gardinen	3 Thl.	21 Gr.	6 Pf.
Eine Komode =	15 Thl.	6 Gr.	—
Ein Tisch =	2 Thl.	16 Gr.	—
Das Zimmer zu mahlen = =	6 Thl	—	—
Verschiedene Trinkgelder. = =	—	17 Gr.	6 Pf.

316) Zusammenrechnung verschiedener Ausgaben:

Für Einrichtung eines Zimmers	81 Thl.	13 Gr.	—
An den Schneider	12 Thl.	14 Gr.	—
An den Tischler	8 Thl.	2 Gr.	6 Pf.
Für Umsetzung eines Ofens =	5 Thl.	2 Gr.	6 Pf.
Für Kaffe, Zucker u. d. gl. =	11 Thl.	18 Gr.	6 Pf.
Für Miethe =	76 Thl.	—	—
Für Holz =	27 Thl.	5 Gr.	6 Pf.

317) Wie viel betragen folgende Schulden, die jemand zu bezahlen hat?

Baar geliehen	100 Thl.	—	—
Interessen für $2\frac{1}{4}$ Jahr =	12 Thl.	12 Gr.	—
Für Bücher =	31 Thl.	15 Gr.	—
Dem Buchbinder	3 Thl.	7 Gr.	—
Für Materialwaaren = =	17 Thl.	8 Gr.	6 Pf.
Dem Pferdeverleiher =	18 Thl.	12 Gr.	—
Dem Schneider	42 Thl.	5 Gr.	6 Pf.
Für Wein =	9 Thl.	8 Gr.	—

318) In ein Stroh-Magazin werden nach und nach folgende Lieferungen gemacht:

	Schock.	Mandel.	Bund.
den 3ten Jul. 1795	7.	3	14
eodem =	10.	2	5
den 4ten Jul.	21.	2	—
eodem =	14.	1	12
eodem	9.	—	13
den 6ten Jul.	34.	3	8

319) Eine Dorfgemeine liefert an Gerste nach und nach:
3 Wispel 4 Scheffel 3 Metzen + 5 Wispel 17 Scheffel 6 Metzen + 2 Wisel 5 Scheffel + 4 Wispel 3 Scheffel 8 Metzen + 4 Wispel 2 Scheffel + 1 Wispel 15 Scheffel + 2 Wispel 10 Scheffel 3 Metz. Wie viel beträgt es zusammen?

320) Auf einem Schiffe liegen folgende Kaufmannsgüter:

Eine Tonne wiegt	2 Cent.	5 Pfund
Ein Faß = =	—	88 Pfund
Ein Ballen = =	3 Cent.	7 Pfund
Ein Ballen = =	1 Cent.	30 Pfund
Eine Kiste =	4 Cent.	21 Pfund
Eine Kiste = =	2 Cent.	63 Pfund
Ein Koffer = =	—	43 Pfund

Wie viel wiegts zusammen?

321) Es hat Jemand Vorrath an Papier:

	Ries.	Buch.	Bog.
Fein Briefpapier, unbeschnitten	1	3	3
Dergleichen beschnitten = =	—	6	2
Fein Baumpapier	2	8	6
Fein Herrnpapier	3	4	12
Gewöhnliches Schreibpapier = =	1	3	9
Schlechteres Schreibpapier = =	—	9	5
Blaues unbeschnittenes	1	—	16
Blaues beschnitten	—	5	17

Wie viel hat er an Ries, Buch und Bogen?

322) Ein ordentlicher Hauswirth, der alle seine Einnahme und Ausgabe aufschreibt, und am Ende jenes Monats summirt, will am Ende des Jahres 1796 wissen, wie viel er im ganzen Jahr eingenommen und ausgegeben habe. Er schreibt also die monatliche Einnahme und Ausgabe folgender Gestalt auf:

Januar

	Einnahme			Ausgabe		
	Thl.	Gr.	Pf.	Thl.	Gr.	Pf.
Januar	42	16	6	36	15	3
Februar	51	4	—	34	16	6
März	103	12	4	48	19	6
April	34	16	6	49	12	8
Mai	61	20	10	54	14	4
Juni	50	8	—	42	—	6
Juli	39	23	3	46	16	—
August	36	14	6	38	11	6
September	41	12	8	44	16	3
October	43	19	6	36	14	6
November	39	21	8	40	12	3
December	45	13	3	62	14	8

Ueber Vortheile beim Addiren, und über das Addiren im Kopfe.

§. 90.

Ueber beide Gegenstände ist hier nur wenig zu sagen.

Der Vortheile beim Addiren giebt es wenige, und sie bestehen größtentheils darin, die Namenveränderungen kürzer oder bequemer, als durch eine wirkliche Division zu machen. Hiervon ist aber schon das Nöthige, theils im vorigen Abschnitt, theils bei den einzelnen Arten von Exempeln gesagt worden. Doch wollen wir hier noch eines kleinen Vortheils beim Zusammenzählen erwähnen.

Gr.
21
17
5
19
23
20
13
8
5
23
16
5
8
12
8 Thl. 3 Gr.

nen. Wenn man eine Säule, die bloß aus zweiziffrigen Zahlen besteht, zusammenzählt, so geht es schneller, wenn man gegen die sonstige Ordnung erst die Zehner, und dann die Einer zusammenrechnet. In der beistehenden Säule von Gr., rechne man z. B. von oben so: 20 und 10 ist 30, und noch 10 ist 40, und noch 20 ist 60, und noch 20 ist 80, und 10 ist 90, und 20 ist 110 und noch 10 ist 120, und noch 10 ist 130. Ohne diese 130 hinzuschreiben, fährt man nun von unten an fort, die Einer hinzu zu zählen, nemlich: 130 und 2 ist 132, und 8 ist 140, und 5 ist 145, und 6 ist 151, und 3 ist 154, und 5 ist 159, und 8 ist 167, und 3 ist 170, und 3 ist 173, und 9 ist 182, und 5 ist 187, und 7 ist 194, und 1 ist 195; und dies beträgt 8 Thl. 3 Gr. Diese Art des Zusammenzählens hat besonders den Vortheil, daß man während der Rechnung nichts aufzuschreiben braucht, sondern gleich die Summe der ganzen Säule erhält.

Was die Rechnungen im Kopfe betrift, so ist schon am Ende des 82 §. gezeigt worden, was für Veranlassungen zu kleinen Rechnungen im

im Kopfe sich bei dergleichen Additionen darbieten. Es wird aber nützlich seyn, auch außerdem bei jeder Art von Exempeln kleine Additionen im Kopfe machen zu lassen, wozu aber keine weitere Anleitung nöthig seyn wird.

Proben der Addition.

§. 91.

Statt eigentlicher Proben ist auch hier ein doppeltes Durchrechnen das beste Mittel, sich gegen Rechenfehler zu sichern; und zwar ist es am bequemsten, jede einzelne Säule gleich zweimal hinter einander durchzurechnen, etwa einmal von oben nach unten, und das zweitemal in umgekehrter Ordnung.

Will indessen Jemand auch hier gern die Neuner- und Elfer-Proben anwenden, so ist alles dazu Nöthige bereits erklärt worden. Will man nemlich eine Neuner-Probe machen, so sucht man nach §. 82 von jedem einzelnen gegebenen Stücke den Neunerrest. Alle diese Neunerreste addirt man, und wirft aus der Summe so viele Neunen weg, als angeht, das Uebrigbleibende muß mit dem Neunerrest der Summe des Exempels stimmen. Will man eine Elfer-Probe machen, so verfährt man gerade so mit den Elferresten, die nach §. 83 gefunden werden. Z. B.

Thl.

			Proben	
Thl.	Gr.	Pf.	durch 9 erreste.	durch 11 erreste.
17	13	5	8	8
8	17	3	0	3
21	11	2	8	0
14	19	4	7	7
8	23	7	4	2
71	12	9	0	9

Nemlich die Neunerreste 8 + 0 + 8 + 7 + 4 geben die Summe 27, und daraus 3 mal Neune weggeworfen, bleibt als Neunerrest 0. Eben dies findet man aber auch, wenn man von 71 Thl. 12 Gr. 9 Pf. den Neunerrest sucht.

Bei der Elfer-Probe geben die Reste 8 + 3 + 0 + 7 + 2 die Summe 20, und hiervon 11 weggenommen, bleibt 9. Eben dies aber findet sich auch, wenn man den Elferrest von 71 Thl. 12 Gr. 9 Pf. unmittelbar sucht.

Es ist indessen nicht zu leugnen, daß dergleichen Proben, wenn sie nicht selbst fehlerhaft ausfallen sollen, einen schon etwas geübten Rechner voraussetzen.

Neun-

Neunter Abschnitt.

Vom Abziehen oder Subtrahiren vielfach benannter Zahlen.

Subtraction bei zehntheiligen Abtheilungen.

§. 92.

Auch bei der Subtraction benannter Zahlen ist der leichteste Fall der, wenn die Dinge, von denen die Rede ist, durchgehends zehntheilig abgetheilt sind. Denn in diesem Falle ist die Rechnung von der Subtraction unbenannter Zahlen durchaus nicht verschieden.

Gesetzt es sollen von einer Länge, die im Rheinländischen zehntheiligen Maße (Taf. 15) $13^{\circ}.4^{\prime}.0^{\prime\prime}.0^{\prime\prime\prime}$ beträgt, $7^{\circ}.6^{\prime}.5^{\prime\prime}.8^{\prime\prime\prime}$ abgezogen werden, so kann man den Aufsatz entweder in allen, oder in einer einzigen Benennung machen,

entweder

entweder.				oder
13°.	4'.	0''.	0'''	13 400'''
7.	6.	5.	8	7 658
5.	7.	4.	2	5 742

In beiden Fällen ist die Rechnung völlig wie bei unbenannten Zahlen. Denn im ersten Aufsatz rechnet man so: 8''' von 0''' können nicht abgezogen werden; es muß also geborgt werden, und weil keine Zolle da sind, ein Fuß. Dieser 1' beträgt 10 Zoll, von diesen bleiben 9 bei den Zollen, und der zehnte wird zu 10''' gemacht, und kommt zu den Linien. Ich ziehe also 8''' von 10''' ab, so bleiben 2'''; ferner ziehe ich 5'' von 9'' ab, so bleiben 4''. Weiter sollen 6' von 3' abgezogen werden. Um dies zu können, borgt man 1°, oder 10', und zieht nun 6' von 13 ab, so bleiben 7' übrig. Endlich bleiben, wenn 7° von 13° abgezogen werden, 6° übrig.

Man rechne dagegen das obige Exempel noch einmal, aber mit der Voraussetzung, daß es zwölftheiliges Maß bedeuten soll, so wird die ganze Rechnung anders. Nemlich 8''' von 0''' lassen sich nicht abziehen; und da in der obern Reihe auch keine Zolle vorhanden sind, so muß man 1' borgen. Aber 1 hat hier nicht wie vorher 10, sondern 12''; von diesen setzt man in Gedanken 11 in die Stelle der Zolle, und einen, den man in

13°.	4'.	0''.	0'''
7.	6.	5.	8
5.	9.	6.	4

in 12^{III} verwandelt, in die Stelle der Linien. Ich ziehe also nun 8^{III} von 12^{III} ab, so bleiben 4^{III}. Ferner werden 5^{II} von den geborgten 11^{II} abgezogen, so bleiben 6^{II}. Weiter sollen nun 6^{I} von 3^{I} abgezogen werden; da aber dies nicht angeht, so wird 1^{0}, d. i. 12^{I} geborgt. Diese 12^{I} mit 3^{I} zusammengezählt geben 15^{I}, und hievon 6^{I} abgezogen, bleiben 9^{I} übrig.

Der Unterschied, den zehntheilige und andere Eintheilungen machen, wird hier deutlich in die Augen fallen. Er liegt nemlich darin: bei unbenannten Zahlen, so wie bei zehntheiligen Abtheilungen, hat das, was ich borge, in der nächsten Stelle rechter Hand, wohin ich es borge, den Werth 10, und kann daher leicht und ohne Rechnung mit dem, wovon ich abziehen soll, zusammengezogen werden. Bei andern Abtheilungen hingegen ist dies anders. Ein geborgter Thaler hat nicht 10, sondern 24 Gr.; ein geborgter Gr. nicht 10, sondern 12 Pf.; ein geborgter Centner nicht 10, sondern 110 Pfund; ein geborgtes Pfund nicht 10, sondern 32 Loth ꝛc. ꝛc. Diese nicht zehntheilige und ungleiche Abtheilungen sind es also, welche die Rechnung erschweren, und man sieht deutlich ein, daß, wenn alle unsere Münzen, Maße und Gewichte zehntheilig abgetheilt wären, wir gar keine besondere Regeln für die Subtraction benannter Zahlen nöthig haben würden.

Geld-Subtractionen.

§. 93.

In Thl., Gr. und Pf. (Taf. 1, 2, 3).

	Thl.	Gr.	Pf.
a)	4716	19	10
	3628	13	4
	1088	6	6
b)	1007	8	3
	968	14	6
	38	17	9
c)	572	—	—
	48	15	4
	523	8	8

Im Exempel a) kommt der Fall des Borgens bei den Gr. und Pf. nicht vor. Daher hat das Abziehen keine Schwierigkeit, und bei den Thalern geschieht die Subtraction wie bei unbenannten Zahlen. Im Exempel b) muß zu den 3 Pf. ein Groschen geborgt werden. Man hat also statt 3 Pf. nunmehr 12 Pf. + 3 Pf. d. i. 15 Pf. und hiervon lassen sich 6 Pf. abziehen. Eben so bei den Gr. Zu den 7 übrigen Groschen muß ein Thaler geborgt werden; man hat also statt 7 Gr. nunmehr 24 Gr. + 7 Gr., d. i. 31 Gr. und hiervon lassen sich 14 Gr. abziehen. Die Thaler werden wie unbenannte Zahlen subtrahirt, nur daß man in der obern Zeile nicht mehr 1 007, sondern nur 1 006 hat. Im Exempel c) muß gleich bei der Subtraction der Pf. ein Thaler geborgt werden. Dieser hält 24 Groschen. 23 hiervon setzt man in Gedanken in der obern Zeile in die Stelle der Gr., und den 24sten verwandelt

delt man in 12 Pf., und bringt ihn in die Stelle der Pf. Auf diese Art können 4 Pf. von 12 Pf., desgleichen 15 Gr. von 23 Gr., und endlich 48 Thl. von 571 Thl. abgezogen werden.

Ein Vortheil bei dergleichen Subtractionen.

§. 94.

Ehe wir noch mehrere Arten von Exempeln durchgehen, wollen wir einen kleinen Vortheil erklären, der bei allen Arten von Subtractionen in benannten Zahlen seine Anwendung findet. Der Fall, wo er anwendbar ist, ist der, welcher in dem Exempel b des vorigen §. vorkam. Es ist nemlich nicht nöthig, das Geborgte gleich mit der zu kleinen Zahl, von der ich subtrahiren soll, zusammen zu zählen; sondern was ich abziehen soll, ziehe ich gleich vom Geborgten ab, und rechne dann erst zum Ueberrest das hinzu, wovon ich abziehen soll. Die Anwendung wird dies deutlich machen.

Thl.	Gr.	Pf.
1 007	8	3
968	14	6
38	17	9

Bei den Pfennigen rechne man so: 6 Pf. kann ich von 3 Pf. nicht abziehen, also borge ich bei den 8 Gr. einen Gr. oder 12 Pf. Hievon ziehe ich sogleich 6 Pf. ab, so bleiben 6 Pf., und hierzu noch die 3 Pf., wovon abgezogen werden sollte, zugezählt, giebt 9 Pf., welche unter den Strich

kommen. Der Grund von dieser Ordnung der Rechnung ist leicht einzusehen. Man mache sich die Sache sinnlich. Ich habe in einem Beutel 3 Pf., und soll 6 herausnehmen; das geht nun nicht.. Ich wickle also noch 12 Pf. in ein Papier, und lege sie zu den 3 Pf. in den Beutel. Es fragt sich, was übrig bleibt, wenn ich nun 6 Pf. herausnehme? hier ist nun klar, daß ich eben nicht nöthig habe, die 12 Pf. im Papier erst mit den 3 Pf. zusammen zu schütten, und nun zu sagen: jetzt habe ich 15 Pf. und wenn ich 6 Pf. wegnehme, bleiben 9 Pf.; sondern ich kann die 6 Pf. gleich aus dem Papier nehmen, so bleiben hier 6 Pf., und im Beutel bleiben 3 Pf., also zusammen 9 Pf.

Eben so bei den Gr. 14 Gr. lassen sich von 7 Gr. nicht abziehen. Ich muß also einen Thl. oder 24 Gr. borgen. Es ist aber einerlei, ob ich in Gedanken diese 24 Gr. mit den 7 Gr. in einen Beutel zusammenschütte, und dann wieder 14 Gr. herausnehme: oder ob ich meine 14 Gr. gleich von den geborgten 24 Gr. abnehme, und nur die übrig bleibenden 10 Gr. zu den 7 Gr. im Beutel thue. In beiden Fällen behalte ich 17 Gr. übrig: aber nach der hier beschriebenen Art habe ich den Vortheil, daß ich mit kleinern Zahlen zu rechnen habe. Es ist leichter zu rechnen: 14 von 24 bleibt 10, und 7 dazu ist 17; als: 24 und 7 ist 31, und 14 davon bleiben 17.

Man

Man gewöhne sich also gleich anfänglich an diese Art zu subtrahiren, die in allen Fällen die Rechnung erleichtert. Nur allein bei zehntheiligen Abtheilungen ist es bequemer, das Geborgte gleich mit der Zahl, wovon subtrahirt werden soll, zusammen zu ziehen.

Uebungsbeispiele in Thl., Gr. und Pf.

323) 15 Thl. 18 Gr. 6 Pf. — 8 Thl. 2 Gr. 3 Pf.

324) 98 Thl. 14 Gr. 9 Pf. — 69 Thl. 9 Gr. 6 Pf.

325) 132 Thl. 5 Gr. 3 Pf. — 63 Thl. 16 Gr. 6 Pf.

326) 300 Thl. 8 Gr. 6 Pf. — 57 Thl. 12 Gr.

327) 1 000 Thl. 12 Gr. — 562 Thl. 20 Gr. 6 Pf.

328) 4 002 Thl. 10 Gr. 3 Pf. — 1 709 Thl. 12 Gr. 6 Pf.

329) 12 481 Thl. 16 Gr. 3 Pf. — 5 205 Thl. 18 Gr. 6 Pf.

330) 50 000 Thl. — 4 382 Thl. 11 Gr. 9 Pf.

331) 154 328 Thl. 9 Pf. — 90 709 Thl. 14 Gr. 6 Pf.

332) 760 000 Thl. 5 Gr. — 381 966 Thl. 6 Pf.

Anm. Einige Rechner bedienen sich ohne Noth und Nutzen einer andern gekünstelten Art des Borgens. Anstatt nemlich in dem Exempel b des vorigen §., nach

nach dem 12 Pf. geborgt sind, die 8 Gr. um 1 Gr. zu vermindern, legen sie unter den 14 Gr. einen zu, und ziehen nun 15 Gr. von 8 Gr., oder weil dies nicht geht, von 24 Gr. + 8 Gr. ab, wo freilich auch 17 Gr. übrig bleiben. Eben so nehmen sie den geborgten Thaler nicht von 1 007 Thaler ab; sondern legen ihn zu 968 hinzu, und ziehen also 969 von 1 007 ab; wo freilich auch 38 Thl. übrig bleiben. Aber diese Art zu subtrahiren ist nicht nur eine unnütze und zwecklose Künstelei, sondern hat auch den Nachtheil, daß Kindern der eigentliche Grund des Verfahrens schwerer deutlich zu machen ist, als bei der gewöhnlichen und oben beschriebenen Art des Borgens.

Fortsetzung der Geldsubtractionen.

§. 95.

In Thl., Mgr. und Pf. (Taf. 4).

Thl.	Mgr.	Pf.
3 751	29	5
88	31	7
3 662	33	6

7 Pf. lassen sich von 5 Pf. nicht abziehen; also borgt man 1 Mgr., d. i. 8 Pf. Hiervon 7 Pf. abgezogen bleibt 1 Pf., und 5 Pf. dazu beträgt 6 Pf. Ferner 31 Mgr. lassen sich von 28 Mgr. nicht abziehen; also borgt man 1 Thl., d. i. 36 Mgr., hiervon 31 Mgr. abgezogen, bleiben 5 Mgr. und 28 Mgr. dazu geben 33 Mgr. Endlich 88 Thl. werden von 3 750 Thl. wie in unbenannten Zahlen abgezogen.

Uebungsbeispiele.

333) 55 Thl. 23 Mgr. 6 Pf. — 17 Thl. 5 Mgr. 4 Pf.

334)

334) 102 Thl. 15 Mgr. 3 Pf. — 72 Thl. 27 Mgr. 4 Pf.

335) 5036 Thl. 11 Mg. 2 Pf. — 917 Thl. 16 Mgr.

336) 40 000 Thl. 27 Mgr. — 1 265 Thl. 27 Mgr. 6 Pf.

337) 150 271 Thl. 1 Mgr. 4 Pf. — 97 864 Thl. 10 Mgr. 6 Pf.

338) 90 000 Thl. 28 Mgr. 2 Pf. — 1 456 Thl. 6 Pf.

In Thl., Sgr., Pf. (Taf. 5).

Thl.	Sgr.	D.
5 237	20	4
300	27	10
4 936	22	6

10 Denar können von 4 Denaren nicht abgezogen werden; also borgt man 1 Sgr., d. i. 12 Denare; und nun sagt man: 10 D. von 12 D. bleibt 2 D., und 4 D. dazu ist 6 D. Bei den Sgr. können 27 Sgr. von 19 Sgr. nicht abgezogen werden: man borgt also 1 Thl., d. i. 30 Sgr., und sagt 27 von 30 bleibt 3, und 19 dazu ist 22 Sgr. Bei den Thalern werden 300 Thl. von 5 236 Thl. wie bei unbenannten Zahlen subtrahirt.

Uebungsbeispiele.

339) 100 Thl. 24 Sgr. 6 D. — 57 Thl. 18 Sgr. 4 D.

340) 227 Thl. 7 Sgr. 3 D. — 90 Thl. 19 Sgr. 9 D.

341) 2 020 Thl. 28 Sgr. 6 D. — 769 Thl. 27 Sgr. 9 D.
342) 30 120 Thl. 15 Sgr. 9 D. — 27 964 Thl. 29 Sgr. 3 D.
343) 30 000 Thl. — 79 Thl. 19 Sgr. 3 D.
344) 100 500 Thl. 15 Sgr. — 6 149 Thl. 28 Sgr. 9 D.

In Mark, Schl., Pf. (Taf. 7).

Mrk.	Schl.	Pf.
8 000	9	—
87	14	8
7 912	10	4

8 Pf. können von 0 Pf. nicht abgezogen werden. Man borgt also 1 Schl., das ist 12 Pf., 8 Pf. abgezogen, bleiben 4 übrig. 14 Schl. können von 8 Schl. nicht abgezogen werden; ich borge also 1 Mrk. d. i. 16 Schl. und sage 14 Schl. von 16 Schl. bleiben 2 Schl. und 8 Schl. dazu, sind 10 Schl. die 87 Mrk. werden von 7 999 Mrk. wie bei unbenannten Zahlen abgezogen.

Uebungsbeispiele.

345) 480 Mrk. 10 Schl. 8 Pf. — 77 Mrk. 8 Schl. 9 Pf.
346) 7 023 Mrk. 15 Schl. — 85 Mrk. 9 Schl. 9 Pf.
347) 5 000 Mrk. 6 Pf. — 543 Mrk. 11 Schl. 8 Pf.
348) 10 781 Mrk. 5 Schl. — 6 004 Mrk. 15 Schl. 3 Pf.

349)

349) 73 112 Mrk. 8 Schl. 6 Pf. — 853 Mrk. 9 Pf.

350) 158 716 Mrk. 1 Schl. — 90 857 Mrk. 13 Schl. 8 Pf.

In Fl., Kr., Pf. (Taf. 8).

Fl.	Kr.	Pf.
14 701	37	2
13 964	47	3
735	49	3

Bei den Pf. geschieht die Subtraktion, wie bisher: nemlich 3 Pf. von 1 geborgten Kr., oder 4 Pf. bleibt 1 Pf., und 2 dazu, beträgt 3 Pf. Bei Subtraktion der Kr. aber verfährt man besser, wenn geborgt werden muß, auf folgende Art. Da 1 Fl. = 60 Kr., so lege man bloß zu den Zehnern der Zahl, wovon abgezogen werden soll, 6 Zehner zu, und ziehe dann wie bei unbenannten Zahlen ab. Es sollen hier 47 Kr. von 36 Kr. abgezogen werden; es muß also 1 Fl. d. i. 60 Kr. geborgt werden, ich lege also zu den 3 Zehnern der Zahl 36 noch 6 Zehner zu, und ziehe folglich 47 von 96 ab, indem ich sage, 7 von 16 bleibt 9, und 4 von 8 bleibt 4. Endlich werden 13 964 Fl. von 14 700 Fl. wie in unbenannten Zahlen abgezogen.

Uebungsbeispiele.

351) 300 Fl. 48 Kr. 3 Pf. — 54 Fl. 17 Kr. 3 Pf.

352) 4 001 Fl. 19 Kr. 1 Pf. — 3 900 Fl. 59 Kr. 2 Pf.

353) 60 801 Fl. 2 Pf. — 988 Fl. 41 Kr. 3 Pf.
354) 327 234 Fl. 21 Kr. 1 Pf. — 41 076 Fl. 48 Kr. 3 Pf.
355) 170 925 Fl. — 3 608 Fl. 3 Pf.
356) 200 000 Fl. — 15 493 Fl. 5 Kr. 2 Pf.
357) 938 200 Fl. 41 Kr. 2 Pf. — 70 361 Fl. 53 Kr. 3 Pf.
358) 580 000 Fl. 59 Kr. — 61 300 Fl. 59 Kr. 2 Pf.

Gewichts = Subtraction.

§. 96.

In Cent. Pfunde Lothe Quent. (Taf. 9)

Cent.	℔.	Lth.	Quent.
4	—	19	1
3	98	26	2
—	11.	24.	3

Da 2 Quentchen von 1 Quentchen nicht abgezogen werden können, so wird 1 Loth d. i. 4 Quent. geborgt: hiervon 2 Qnt. abgezogen, bleiben 2 Quentchen, und 1 dazu ist 3. Nun sollen 26 Loth von 18 Loth abgezogen werden. Hierzu muß ein Pfund geborgt werden, da aber keine Pfunde da sind, so borgt man 1 Centner, d. i. 110 Pfund, hiervon setzt man 109 Pfund in Gedanken in der Stelle der Pfunde, und 1 Pfund d. i. 32 Loth nimmt man mit zu den Lothen. Ich ziehe also 26 Loth von diesen geborgten 32 Lothen ab, bleiben 6 Loth, und 18 dazu, so bleiben 24 Loth übrig. Ferner kann nun 98 von

109,

109, desgleichen auch die Centner nie in unbenannten Zahlen abgezogen werden.

Uebungsbeispiele.

359) 78 Pfund 17 Loth 3 Quentchen — 39 Pfund 15 Loth 3 Quent.

360) 91 Pfund 2 Quentchen — 44 Pfund 16 Loth 3 Quentchen.

361) 7 Centner 16 Pfund 5 Loth 3 Quent. — 3 Centner 31 Pfund 15 Loth 3 Quent.

362) 40 Centner 101 Pfund 11 Loth 1 Quent. —16 Centner 90 Pfund 12 Loth 3 Quent.

363) 51 Centner 1 Pfund 7 Loth 2 Quent. — 28 Centner 55 Pfund 27 Loth 3 Quentchen.

364) 100 Centner 3 Loth — 40 Centner 77 Pfund 12 Loth 2 Quentchen.

365) 120 Centner — 70 Centner 11 Pfund 3 Quentchen.

366) 137 Centner 88 Pfund — 58 Centner 92 Pfund 2 Quentchen.

Vermischte Exempel.

367) Es nimmt Jemand ein 70 Thl. 2 Gr. 6 Pf.
Und giebt aus 55 Thl. 12 Gr. 9 Pf.
Wie viel behält er?

368) Wenn man Schulden hat 300 Thl. 8 Gr. 6 Pf.
Bezahlt davon 125 Thl. 16 Gr. 6 Pf.
Wie viel Schulden hat man noch?

369)

369) Es kauft Jemand
ein Haus für 13 084 Thl. 4 Gr.
Und bezahlt darauf 8 377 Thl. 20 Gr.
Wie viel hat er noch zu bezahlen?

370) Ein Kaufmann hat ausstehende Schulden 120 391 Thl. 5 Gr. 3 Pf.
Davon nimmt er ein 4 933 Thl. 11 Gr. 6 Pf.
Wie viel hat er noch auszustehen?

371) In einem Jahre giebt man aus 3 012 Thl. 19 Gr. 6 Pf.
Und hat eingenommen 1 776 Thl. 20 Gr. —
Wie viel hat man mehr ausgegeben?

372) Ein Landgut kostet 132 000 Thl. 15 Gr. 3 Pf.
Man verkauft es für 123 860 Thl. 18 Gr. 6 Pf.
Wie viel Schaden hat man?

373) Ein Kaufmann hat Indigo 87 ℔. 7 ℔th. 2 Quent.
Verkauft. 19 ℔. 18 ℔th. 3 Quent.
Wie viel hat er noch?

374)

374) Am Kaffe-Vorrath ist da 2 Cent. 37 ℔. 8 Lth.
davon wird verbraucht — 98 ℔. 16 Lth.
Wie viel bleibt?

375) Ein Becker hat Getreide 7 Wspl. 5 Schfl. 8 M.
Verbackt 4 Wspl 7 Schfl. 12 M.
Wie viel behält er?

376) An Hafer wird geliefert 105 Wspl. 3 Schfl. 4 M.
Bezahlt werden nur 78 Wspl. 12 Schfl. 4 M.
Für wie viel ist noch zu bezahlen?

377) Ein Papierhändler hat 20 B. 7 R. 8 Buch —
Davon verkauft = 8 = 13 = 2 Bog.
Wie viel hat er Vorrath?

378) Ein Victualienhändler hat Eyer 13 Sch. 3 Mand. 6 Stück.
Verkauft 12 = 2 = 14 =
Wie viel hat er noch?

Zeit = Subtraction.

§. 97.

Additionen in mehr als einer Zeit = Benennung, (als Jahre, Tage, Stunden, Minuten, Secunden), kommen im gemeinen Leben selten vor; daher haben wir sie beim Addiren absichtlich übergangen. Dagegen kommt der Fall, wo eine Zeit von einer andern abgezogen werden soll, öfters vor. Wenn man z. B. den Tag der Geburt und den Tag des Todes von einem Menschen weiß, so ist der kürzeste Weg, sein Alter auszurechnen dieser, daß man die Zeit, seiner Geburt, von der Zeit seines Todes abzieht.

Zu dergleichen Subtractionen ist aber eine Vorübung nöthig, ohne die man leicht Fehler begeht. Zuerst ist es nöthig, sich dasjenige, was Tafel 28 von der Zeiteintheilung erklärt, ist bekannt zu machen. Dann muß man sich üben, für jeden bestimmt angegebenen Tag, (auch wohl für eine Stunde, oder Minute), die Zeit anzugeben, welche seit Christi Geburt verflossen ist. Dies erfordert aber gar keine Rechnung, sondern nur etwas Aufmerksamkeit. Wir pflegen nemlich, wenn wir eine Zeit angeben (z. B. 1796 d. 23 October, Morgens um 10 Uhr), nicht zu sagen, wie viel Jahre nach Christi Geburt schon verflossen sind, sondern das wievielste Jahr das gegenwärtige sey, wir sagen nicht, wie viel Monate von diesem Jahr verflossen sind, sondern

in

in welchem Monate wir jetzt leben; wir sagen nicht, wie viel Tage dieses Monats schon vorüber sind, sondern der wievielste Tag, der heutige noch nicht vollendete ist, u. s. f. Um also für einen bestimmt angegebenen Zeitpunkt zu bestimmen, wie viel Zeit nach Christi Geburt verflossen ist, darf man nur jede der gegebenen Zahlen um 1 vermindern, nur bei dem Monath, muß man aus der bekannten Anzahl und Folge der Monate erst abzählen, wie viel Monate des Jahres schon vorüber sind. Auch bei den kleinern Abtheilungen Stunden, Minuten und Secunden, muß immer die volle Zahl, der schon verflossenen, angesetzt werden z. B.

im Jahr 1796, den 23 Oct, Morgens um 10 Uhr sind nach Christi Geburt verflossen

1795 Jahre, 9 Monate, 22 Tage, 10 Stunden. Nemlich: so lange das Jahr 1796 noch nicht abgelaufen ist, so lange sind erst 1795 volle Jahre vorüber; so lange der October, als der 10te Monat im Jahr, noch nicht abgelaufen ist, sind erst 9 volle Monate vorüber; so lange der 23ste Tag dieses Monates noch nicht zu Ende ist, sind erst 22 volle Tage dieses Monates vorüber. Was aber die Stunden betrift, so muß man immer abzählen, wie viele Stunden seit der letzten Mitternacht verflossen sind, fällt daher die Zeit auf den Nachmittag, so müssen 12 Stunden mehr geschrieben werden, als die Uhr zeigte. Z. B.

1797 den 23 Febr. Abends um 10 Uhr sind nach Christi Geburt verflossen

1796

1796 Jahr, 1 Monat, 22 Tage, 22 Stunden.

Sind nun zwei Zeitpunkte, welche von einander abgezogen werden sollen, auf solche Art geschrieben, so ist in Absicht der Rechnung nur noch zu bemerken, daß man einen geborgten Monat, zur Erleichterung der Rechnung immer nur zu 30 Tage rechnete, obgleich mehrere Monate 31 Tage und der Febr. 28 oder 29 Tage hat. Man darf dies thun, weil es in Rechnungen dieser Art gewöhnlich auf einen Tag mehr oder weniger nicht ankommt. Wir wollen das Gesagte durch ein Beispiel anschaulich machen. Friedrich der Einzige wurde geboren 1712 den 24 Januar, und starb 1786 den 17 August. Wie alt ist er geworden?

Nach Christi Geburt waren verflossen	Jahr	Monat	Tage
bei seinem Tode	1785	7	16
bei seiner Geburt	1711	0	23
Alter	74	6	23

Man rechnet so: weil 23 von 16 nicht abgezogen werden können, so muß von den 7 Monaten einer geborgt werden. Wird dieser Monat zu 30 Tagen gerechnet, und 23 Tage davon abgezogen, so bleiben 7 übrig, und 16 dazu geben 23. Der übrige Theil der Rechnung bedarf keiner Erläuterung. Muß ein Jahr geborgt werden, so wird es zu 12 Monaten gerechnet.

Uebungs-

Uebungsbeispiele.

379) Luther ward geboren 1483 den 10. Nov. und starb 1546 den 18. Febr., wie lange hat er gelebt?

380) Gellert ward geboren 1715 den 4. Jul., starb 1769 den 18. Dec., wie alt ward er?

381) Friedrich Wilhelm, der große Kurfürst, ward geboren 1620 den 6. Febr., starb 1688 den 26. Jun., wie alt ward er?

382) Maria Theresia ward geboren 1717 den 13. Mai und starb 1780 den 29. Nov., wie alt ward sie?

383) Joseph II. ward geboren 1741 den 13. März und starb 1790 den 20. Febr., wie alt ward er?

384) Es hat Jemand ein Capital geborgt, und soll davon jährlich den 28. Nov. Zinsen bezahlen. Dies thut er auch richtig bis im Jahr 1788, wo er zum letztenmal seine Zinsen bezahlt. Er stirbt bald nachher, und über sein Vermögen entsteht ein Prozeß, der erst im Jahr 1797 entschieden wird. Den 1sten Mai soll das Capital und die rückständigen Zinsen von seiner Erbschaft ausgezahlt werden. Es frägt sich, von wie viel Jahren, Monaten und Tagen sind Zinsen zu bezahlen?

Anm. 1) Es ist eben nicht nothwendig, immer Christi Geburt zu dem Anfangspunkt zu nehmen, von wo jede Zeit gerechnet wird. Der Anfang eines neuen Jahrhunderts, ja der Anfang jedes einzelnen Jahres kann zu eben den Zweck gebraucht werden; wenn man nur einen solchen Anfangspunkt wählt, der noch vor dem frühern Zeitpunkt, welcher in Rechnung kommt, voraus geht. Z. B. in der Berechnung des Alters Friedrich des Einzigen, hätte man recht wohl den Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts, d. i. den Anfang des Jahres 1700 zum Anfangspunkt der beiden Zeiten nehmen können; nemlich:

nach 1700 waren verflossen:	Jahr	Monat	Tage
bei seinem Tode	85	7	16
bei seiner Geburt	11	0	23
Alter . .	74	6	24

Fallen die beiden Zeitpunkte, welche zu subtrahiren sind, nur wenige Jahre auseinander, so ist es am bequemsten, den Anfang des frühern Jahres selbst zum Anfangspunkt zu nehmen. Z. B. Es hat Jemand ein Capital geborgt, wovon er jährlich den 23sten October die Zinsen bezahlen soll. Zum letztenmal hat er sie den 23. Oct. 1794 bezahlt. In den folgenden Jahren unterläßt er die Zahlung, daher fordert der Gläubiger sein Capital zurück. Er bekommt es ausgezahlt den 7. Febr. 1796. Es soll nun die Zeit ausgerechnet werden, von welcher die Zinsen noch rückständig sind, d. h. es soll ausgerechnet werden, wie viel Zeit vom 23. Oct. 1794 bis zum 7. Febr. 1796 verflossen sind. Hier macht man am besten den Anfang des Jahres 1794 zum Anfangspunkt beider Zeiten.

Seit dem Anfang des Jahres 1794 waren verflossen:	Jahr	Monat	Tage
den 7. Febr. 1796 . .	2	1	6
den 23. Oct. 1794 . .	0	9	22
	1	3	14

So

So viel Zeit war also vom 23. Oct. 1794 bis 7. Febr. 1796 verflossen. Bei der Rechnung ist nur zu merken, daß bei allen Rechnungen, wo vom Zins die Rede ist, nicht bloß der Bequemlichkeit wegen, sondern weil es die Gesetze ausdrücklich vorschreiben, der Monat nie anders als zu 30 Tagen gerechnet werden darf.

Fallen beide Zeiten in ein Jahr, so nimmt man den Anfang dieses Jahres selbst zum Anfangspunkt; so fällt die Benennung Jahr ganz weg. Z. B. Es borgt mir Jemand Geld den 19ten März 1796; ich zahl es zurück den 11ten November eben des Jahres, wie lang ist der Zeitraum, von welchen ich Zinsen zahlen muß?

Seit dem Anfang des Jahres 1796 waren verflossen:

	Monat	Tage
den 11. Nov. 1796 = = = =	10	10
den 19. März 1796 = = = =	2	18
Zwischenzeit = =	7	22

Die Rechnung wird für sich verständlich seyn.

2) Die hier erklärte Rechnungsart ist bequem, und wenn vom Alter eines Menschen, oder auch von Zinsen und ähnlichen Dingen die Rede ist, wo es auf ein Paar Tage zu viel oder zu wenig nicht ankommt, so ist sie auch genau genug. Man muß aber dennoch nicht übersehen, daß sie an sich, wenn alles aufs genaueste genommen werden sollte, nicht fehlerfrei ist, weil weder Jahr noch Monate ein bequemes und regelmäßiges Zeitmaaß ist, da beide nicht immer von gleicher Länge sind. Fälle, wo hier alles aufs genaueste zu nehmen wäre, kommen im gemeinen Leben wenig, oder gar nicht vor. Fände sich indessen ein solcher Fall; so müßte man die Benennungen Jahr und Monat gar nicht brauchen, sondern sich bloß an die Benennungen Tag, Stunde, Minute ꝛc. halten.

Z. B. Den 3. April 1791 und den 5. Sept. 1793 waren 2 große Sonnenfinsternisse. Am größten waren die Verfinsterungen 1791 den 3. April um 1 Uhr 46 Minuten Nachmittags, und 1793 den 5. Sept. um 12 Uhr 13 Min. Nachmittags. Wie viel Tage, Stunden und Minuten sind zwischen diesen beiden Zeitpunkten verflossen? Man nehme hier den Anfang des 1791. Jahres zum Anfangspunkt, und berechne zuerst die Tage, Stunden und Minuten, die von da bis zur spätern Finsterniß 1793 verflossen sind. Das Jahr 1791 war ein gemeines Jahr von 365 Tagen, 1792 ein Schaltjahr von 366 Tagen. Also beide zusammen 731 Tage. 1793 war ein gemeines Jahr, und da (nach Taf. 28) bis zu Ende August 243 Tage des Jahres abgelaufen sind, so haben wir nun 974 Tage; wozu noch vom Septemb. 4 Tage 12 Stunden 13 Minuten kommen. — Was die frühere Finsterniß betrift, so war das Jahr 1791 ein gemeines Jahr, von diesem waren die Monate Januar, Februar und März abgelaufen, d. i. (nach Taf. 28.) 90 Tage; dazu kommen vom April 2 Tage 13 Stunden 46 Minuten.

Seit dem Anfang des Jahres 1791 waren also verflossen:	Tage	Stund.	Min.
bei der spätern Finsterniß =	978	12	13
— — frühern — — =	92	13	46
Zwischenzeit =	885	22	27

Wenn sehr lange Zeiträume, besonders aus den verflossenen Jahrhunderten zu berechnen sind, so ist noch vielerlei dabei zu beobachten, was hier nicht erklärt werden kann. Wer Unterricht darüber verlangt, muß Mathematik lernen.

Pro-

Proben der Subtraction.

§. 98.

Eine sehr gute Probe der Subtraction kann, wie §. 31, durch die Addition gemacht werden, indem man den Rest und Abzug zusammenzählt, wodurch das Ganze, von welchem abgezogen worden, wieder herauskommen muß. Dies kann geschehen, ohne eine Ziffer zu schreiben. Im hier beigefügten Exempel ist 9 Pf. + 6 Pf. = 1 Gr. 3 Pf.. Ferner 17 Gr. + 15 Gr. + 1 Gr. = 33 Gr. d. i. 1 Thl. 9 Gr. Ferner 313 + 77 + 1 Thl. = 391 Thl. Daß die letzte Addition bloß Ziffer vor Ziffer zu geschehen braucht, versteht sich von selbst.

Thl.	Gr.	Pf.
391	9	3
77	15	6
313	17	9

Wegen der Leichtigkeit und Sicherheit dieser Probe würde es unnütz seyn, hier von den Neuner- und Elferproben umständlich zu reden. Wie sie zu machen wären, läßt sich übrigens mit ein Paar Worten sagen: man muß die Neunerreste des Abzugs und des Restes zusammenzählen, und daraus 9, so oft es angeht, wegwerfen, was übrig bleibt, muß mit dem Neunerrest des Ganzen stimmen. Wenn man in dieser Regel statt Neunerrest und 9, Elferrest und 11 liest, so hat man die Regel für die Elferprobe.

Ueber Vortheile beim Subtrahiren.

§. 99.

Von Vortheilen ist bei dieser Subtraction, außer dem, was §. 94, desgleichen bei den einzelnen Exempeln, erklärt worden, nichts zu sagen. Die Hauptsache ist, durch häufige Uebung kleiner Subtractionen im Kopfe sich die Rechnungsart recht geläufig zu machen.

Zehnter Abschnitt.

Vom Zusammensetzen oder Multipliciren vielfach benannter Zahlen.

Vorerinnerung.

§. 100.

Wir haben schon oben bei der Multiplication unbenannter Zahlen (§. 34) gesehen, daß bei jeder Multiplication der Multiplicator oder die Zusammensetzungszahl eine unbenannte Zahl sey. Es darf daher hier nichts weiter gelehrt werden, als wie eine vielfach benannte Zahl mit einer unbenannten zu multipliciren sey. Fälle, wo das Gegentheil vorzukommen scheint, hier durchzugehen, würde zu weitläuftig seyn, auch hier auf keine recht zweckmäßige Art geschehen können. Bequemer wird dies in der Folge bei gelegentlichen Veranlassungen geschehen können.

Multiplication solcher Dinge, bei welchen zehntheilige Abtheilungen statt finden.

§. 101.

Schon bei der Addition und Subtraction war der Vortheil zehntheiliger Abtheilungen augenscheinlich; aber noch auffallender ist er beim Multipliciren. Bei zehntheiligen Abtheilungen ist nemlich in jedem nur erdenklichen Falle die Rechnung gerade so, wie bei unbenannten Zahlen, da hingegen andere Abtheilungen jederzeit eine viel weitläuftigere und beschwerlichere Rechnung verursachen, besonders wenn der Multiplicator etwas groß ist; ein Fall, der eben nicht selten vorkommt.

Wir wollen dies wieder durch ein Beispiel aus der einzigen zehntheiligen Abtheilung, die bei uns gewöhnlich ist, erläutern. Es sey also eine Länge von $3^{\circ}\ 8^{\prime}\ 9^{\prime\prime}\ 4^{\prime\prime\prime}$ zehntheiliges Fußmaaß (Taf. 15), mit 347 zu multipliciren; so ist die Rechnung wie bei unbenannten Zahlen, man mag die 4 Benennungen lassen, oder alles in die einzige Benennung **Linien** zusammenziehen. Die Rechnung ist

entweder				oder
3°	$8^{\prime}$	$9^{\prime\prime}$	$4^{\prime\prime\prime}$	$3894^{\prime\prime\prime}$
	5	4	7	347
27	2	5	8	27258
155	7	6		15576
1168	2			11682
1351°	$2^{\prime}$	$1^{\prime\prime}$	$8^{\prime\prime\prime}$	$1351218^{\prime\prime\prime}$

Auch sieht man den Grund dieser Art zu rechnen so leicht ein, daß es unnöthig wäre, etwas darüber zu sagen. Denn man darf nur statt der Wörter **Linie**, **Zoll**, **Fuß**, **Ruthe**, die Wörter **Einer**, **Zehner**, **Hunderte**, **Tausende** setzen, so ist alles wie bei unbenannten Zahlen.

Man rechne nun eben das Exempel noch einmal, aber unter der Voraussetzung, daß 3° $8^{\prime}$ $9^{\prime\prime}$ $4^{\prime\prime\prime}$ **zwölftheiliges** Fußmaaß (Taf. 14) bedeuten sollen, so wird man so kurz nicht fertig. Ueberhaupt geht es nicht füglich an, die Rechnung auch nur **auf ähnliche** Art, als beim zehntheiligen Maaße zu machen. Denn wollte man den Aufsatz wie in der ersten Rechnung machen, so wäre es zwar nicht unmöglich, die Multiplication auszuführen, aber man würde alle Augenblick kleine Nebenrechnungen im Kopfe oder auf dem Papiere machen müssen. Man müßte z. B. anfangen, 7 mal $4^{\prime\prime\prime}$ ist $28^{\prime\prime\prime}$, aber nun darf nicht 8 hingeschrieben

werden; denn 28 Linien sind im 12theiligen Maaße 2^{II} und 4^{III}, also muß 4 hingeschrieben und 2 im Sinn behalten werden ꝛc. In der 2ten und 3ten Zeile aber würde die Rechnung noch verdrießlicher werden. In der 2ten Zeile müßte ich z. B. anfangen, 40 mal 4^{III} sind 160^{III}. Nun müßte ich erst durch Division mit 12 diese Linien zu Zollen und Fußen machen u. s. w. Kurz, es würde nicht leicht Jemand Geduld haben, die Rechnung auf diese Art zu machen. Uebrigens ist unter den verschiedenen Arten, wie das Exempel gerechnet werden könnte, folgende diejenige, die am wenigsten Kopfbrechen macht. Man verwandelt die $3^{\circ}\ 8^{I}\ 9^{II}\ 4^{III}$ in lauter Linien (nach §. 80. b). Dann multiplicirt man die Linien mit 347, und was herauskommt, verwandelt man wieder rückwärts (nach §. 81) in Zolle, Fuße und Ruthen. Die Rechnung sieht so aus:

$3^{\circ}\ 8^{\prime}\ 9^{\prime\prime}\ 4^{\prime\prime\prime}$

A = = $44^{\prime}$

B = = = $537^{\prime\prime}$

C = = = = = $6448^{\prime\prime\prime}$

347

45136

25792

19344

D = = $2237456^{\prime\prime\prime}$

E = 12) $186454^{\prime\prime}\ 8^{\prime\prime\prime}$

F = 12) $15537^{\prime}\ 10^{\prime\prime}\ 8^{\prime\prime\prime}$

G = 12) $1294^{\circ}\ 9^{\prime}\ 10^{\prime\prime}\ 8^{\prime\prime\prime}$

Die beigesetzten Buchstaben sind bloß gesetzt, um die Rechnung bequemer erklären zu können. Nemlich zuerst sind 3° durch Multiplication mit 12 zu Fußen gemacht, und $8^{\prime}$ dazu gezählt worden, das giebt $44^{\prime}$ (A). Diese $44^{\prime}$ sind wieder mit 12 zu Zollen gemacht, und 9 Zoll dazu gezählt worden, das giebt $537^{\prime\prime}$ (B). Diese $537^{\prime\prime}$ sind wieder mit 12 zu Linien gemacht und $4^{\prime\prime\prime}$ dazu addirt worden, dies giebt $6448^{\prime\prime\prime}$ (C). Auf diese Art ist die ganze Länge $3^{\circ}\ 8^{\prime}\ 9^{\prime\prime}\ 4^{\prime\prime\prime}$ in lauter Linien verwandelt. Hierauf folgt die Multiplication mit 347. Das Product ist $2\ 237\ 456^{\prime\prime\prime}$ (D). Diese Linien werden durch Division mit 12 zu Zollen gemacht. Man fin-

det

det 186 454^{II} und 8^{III} bleiben übrig (E). Weiter werden 186 454^{II} durch Division mit 12 zu Fußen gemacht; es kommen 15 537^{I} heraus, und 10^{II} nebst den 8^{III} der vorigen Zeile bleiben übrig (F). Endlich werden 15 537^{I} durch Division mit 12 zu Ruthen gemacht; es kommen 1 294° heraus, und 9^{I} 10^{II} 8^{III} aus den vorigen Zeilen müssen angehängt werden (G). Und hiermit ist die ganze Rechnung geschlossen.

Wer noch nicht gelernt hat, mit 12 so wie mit einer einfachen Ziffer zu multipliciren und zu dividiren, der wird die obige Rechnung mehr als noch einmal so lang machen müssen.

Multiplicationen mit einer einzigen Ziffer

§. 102.

Wir wollen bei der Multiplication die Exempel nicht, wie in den beiden vorigen Abschnitten, nach den Benennungen, die darin vorkommen, abtheilen, und über Geld- oder Gewichts-Multiplicationen u. d. g. besonders reden. Denn obgleich die Verschiedenheit der Benennungen auch eine Verschiedenheit in den Rechnungen zur Folge hat, so ist sie beim Multipliciren doch nicht so groß, als diejenige welche aus der verschiedenen Beschaffenheit des Multiplicators entspingt. Wir wollen daher die Exempel nach der Beschaffenheit des Multiplicators anordnen; wodurch wir

wir zugleich den Vortheil gewinnen, daß der Schüler gleich vom Anfang mit den Vortheilen bekannt wird, die sich bei dergleichen Rechnungen anwenden lassen.

Der leichteste und einfachste Fall ist der, wenn der Multiplicator aus einer einzigen Ziffer besteht. In allen dergleichen Exempeln wird die Rechnung in einer einzigen Zeile verrichtet, indem man von der kleinsten Benennung anfängt, und zu der höhern fortschreitet. Jede Benennung muß für sich multiplicirt werden. Das Product bringt man dann auf die nächst höhere Benennung; bloß was übrig bleibt, schreibt man hin, was aber in der höhern Benennung herauskommt, wird im Sinn behalten, um zum nächsten Product zugezählt zu werden. Hat man die Vielfachen von den Eintheilungszahlen im Kopf, so kann gemeiniglich auch die ganze Rechnung ohne alle Nebenrechnung verrichtet werden. Ist dies aber nicht, so sind kleine Nebenmultiplicationen oder Divisionen nöthig.

Thl.	Gr.	Pf.	
314	16	4	(7
2202	18	4	

Fl.	Kr.	Pf.	
74	43	3	(9
672	33	3	

Ct.	℔	Lt.	Qt.	
—	84	23	2	(8
6	17	28	—	

In

In den ersten der 3 obigen Exempel rechnet man so: 7 mal 4 Pf. sind 28 Pf., das sind 2 Gr. 4 Pf.; also werden 4 Pf. geschrieben, und 2 Gr. gemerkt. Dann müssen 16 Gr. mit 7 multiplicirt, und zum Product 2 Gr. zugezählt werden. Wer nicht im Kopfe ausrechnen kann, daß 7 mal 16 = 112, muß es durch eine kleine Nebenrechnung finden. Werden 2 Gr. hinzugezählt, so hat man 114 Gr., und wer nicht im Kopfe ausrechnen kann, daß dies 4 Thl. 18 Gr. beträgt, muß es gleichfalls auf dem Papier durch eine Division mit 24 finden. Es werden also 18 Gr. geschrieben und 4 Thl. gemerkt. Die Thaler werden mit 7, wie bei unbenannten Zahlen addirt, nur daß gleich bei der Multiplication der niedrigsten Ziffer die im Sinn behaltenen 4 Thl. zugezählt werden müssen.

Im 2ten Exempel sind 9 mal 3 Pf. = 27 Pf., d. i. 6 Kr. 3 Pf. Ferner ist 9 mal 43 Kr. = 387 Kr. und 6 Kr. dazu, giebt 393 Kr. Da 360 Kr. 6 Fl. machen, so sind dies 6 Fl. 33 Kr. Das übrige wie bei unbenannten Zahlen.

Im 3ten Exempel sind 8 mal 2 Qt. = 16 Qt., d. i. 4 ℔. Ferner, 8 mal 23 ℔. = 184 ℔. und 4 ℔. dazu giebt 188 ℔. Diese müssen nun zu ℔. gemacht werden; kann man das nicht im Kopfe, so muß man sie durch 32 dividiren, so findet man 5 ℔. 28 ℔. Weiter sind 8 mal 84 ℔. = 672 ℔., und 5 ℔. dazu sind 677 ℔.

Da

Da 660 ℔. = 6 Ct., so beträgt dies 6 Ct. 17 ℔.

Auch muß man sich gewöhnen, wenigstens mit den Zahlen 10, 11 und 12, auch 24, nie anders als auf diese Art zu rechnen:

Thl.	Gr.	Pf.		Wsp.	Sch.	Mz.	
348	14	6		35	19	6	
3486	1	—	(10	393	21	2	(11

Thl.	Gr.	Pf.		Thl.	Gr.	Pf.	
566	18	4		37	14	9	
6801	4	—	(12	902	18	—	(24

Es wird hoffentlich unnöthig seyn, jedes dieser Exempel vollständig durchzugehen; also nur ein Paar Anmerkungen. — Die Multiplication mit 10 ist zwar bei Exempeln dieser Art nicht ganz so leicht und einfach, als bei unbenannten Zahlen, doch wird man bei aufmerksamen Rechnen leicht wahrnehmen, daß 10 auch hier einer der bequemsten Multiplicatoren ist. — Der Multiplicator 12 ist, wo Thl. Gr. und Pf. vorkommen, gleichfalls ein sehr bequemer Multiplicator; wenn man nur bedenkt, daß jede Summe von Pf., wenn sie 12 mal genommen werden soll, sich gerade zu in eben so viele Gr. verwandeln. 1 Pf. 12 mal, giebt 1 Gr.; 2 Pf. 12 mal, sind 2 Gr.; 3 Pf. 12 mal, sind 3 Gr. u. s. f. Werden aber Gr. mit 12 multipli-

tiplicirt, so verwandeln sie sich in halb so viele Thaler, weil nemlich jeder einzelne Gr., 12 mal genommen, einen halben Thaler giebt. Z. B. 12 mal 8 Gr. muß 8 halbe oder 4 ganze Thaler machen; 12 mal 18 muß 18 halbe oder 9 ganze Thaler machen; 12 mal 13 Gr. macht 13 halbe, also $6\frac{1}{2}$ Thaler, d. i. 6 Thl. 12 Gr.; 12 mal 23 Gr. macht 23 halbe Thaler, d. i. 11 Thl. 12 Gr. u. d. gl. m. — Eben so bequem ist bei Thl. Gr. und Pf. der Multiplicator 24. Denn Pfennige mit 24 multiplicirt, geben doppelt so viel Gr.; und Gr. mit 24 multiplicirt, verwandeln sich in Thl. Im 4ten Exempel geben 9 Pf. mit 24 multiplicirt 18 Gr., die geradezu unter die Gr. geschrieben werden können; und 14 Gr. mit 24 multiplicirt, geben 14 Thl., die beim Multipliciren der 37 Thl. mit zugezählt werden müssen.

Dieser Vortheil liegt indessen nicht in einer besondern Eigenheit der Zahlen 12 und 24, sondern er rührt daher, weil 12 gerade die Eintheilungszahl der Gr. gegen Pf., und 24 die Eintheilungszahl der Thl. gegen Gr. ist. Jede Eintheilungszahl gewährt unter den gehörigen Umständen den nemlichen Vortheil. Werden z. B. Lothe mit 32 multiplicirt, so verwandeln sie sich geradezu in Pfunde. Z. B. 32 mal 19 Lt. = 19 Pfund. Werden Metzen mit 16 multiplicirt, so verwandeln sie sich geradezu in Scheffel; z. B. 16 mal 13 Mtz. = 13 Schfl. Werden

Pfunde

Pfunde mit 110 multiplicirt, so verwandeln sie sich geradezu in Centner, als 110 mal 83 ℔. = 83 Centn. ꝛc. Da aber keine Rechnungen im gemeinen Leben so häufig vorkommen, als Geldrechnungen, so sind für Länder, die nach Thl., Gr. und Pf. rechnen, die Zahlen 12 und 24 vorzüglich wichtige Rechnungszahlen; und man muß daher ja nicht versäumen, die Vielfachen dieser Zahlen (Tafel 2 und 3), aufs Vollkommenste ins Gedächtniß zu fassen.

Uebungsbeispiele.

385) 225 Thl. 18 Gr. × 2.
386) 3876 Thl. 15 Gr. × 3.
387) 9765 Thl. 12 Gr. 6 Pf. × 4.
388) 12 086 Thl. 21 Gr. 3 Pf. × 5.
389) 70 165 Thl. 20 Gr. 9 Pf. × 6.
390) 48 712 Thl. 17 Gr. 3 Pf. × 7.
391) 887 500 Thl. 19 Gr. 8 Pf. × 8.
392) 702 190 Thl. 9 Pf. × 9.
393) 597 680 Thl. 11 Gr. 3 Pf. × 10.
394) 366 802 Thl. 22 Gr. 6 Pf. × 11.
395) 561 088 Thl. 10 Gr. 4 Pf. × 12.
396) 640 972 Thl. 5 Gr. 8 Pf. × 12.
397) 914 236 Thl. 12 Gr. 6 Pf. × 24.
398) 44 809 Thl. 8 Gr. 3 Pf. × 24.
399) 856 Ct. 79 ℔. 20 Lt. 3 Qt. × 7.
400) 907 Ct. 21 ℔. 3 Lt. 1 Qt. × 8.
401) 69 Ct. 19 ℔. 15 Lt. 2 Qt. × 9.
402) 176 Wspl. 21 Sch. 13 Mz. × 8.

403) 583 Wspl. 14 Sch. 8 Mtz. × 10.
404) 1 609 Wspl. 7 Sch. 14 Mtz. × 11.

Multiplicationen durch Zerfällung des Multiplicators.

§. 103.

Ist der Multiplicator eine zwei- oder mehrziffrige Zahl, so muß man vor allen Dingen untersuchen, ob er sich nicht etwa in ein Paar kleine Zahlen zerfällen läßt. Denn geht dies an, so kann man mit den beiden kleinen Zahlen hintereinander auf eben die Art multipliciren, wie wir dies schon bei den unbenannten Zahlen (§. 45, b) erklärt haben. Es sollen z. B. 13 Thl. 8 Gr. 6 Pf. mit 45 multipliciret werden, so zerfällt man 45 in 5 mal 9; und nun multiplicirt man 13 Thl. 8 Gr. 6 Pf. erst mit 5, und was herausgekommen ist, nemlich 66 Thl. 18 Gr. 6 Pf. noch mit 9; oder man kann auch in umgekehrter Ordnung erst mit 9, und was herauskommt, mit 5 multipliciren. Denn wenn ich das 5fache 9 mal, oder das 9fache 5 mal vergrößere, so bekomme ich in beiden Fällen das 45fache heraus.

Thl.	Gr.	Pf.	
13	8	6	(5
66	18	6	
600	22	6	(9

Man kann aber mit Hülfe der Kennzeichen von den kleinern Divisoren, die wir §. 67 erklärt haben, diesen Vortheil auch auf größere Zahlen

Zahlen ausdehnen. Wir haben schon oben §. 45 a, und §. 68 b, einiges über das Zerfällen der Zahlen gesagt, und werden auch in der Folge auf diese nützliche Materie öfters zurückkommen. Hier wollen wir in einigen Beispielen zeigen, wie für den gegenwärtigen Zweck dergleichen Zerfällungen am bequemsten zu machen sind.

a) 5) 165 / 3) 33 / 11

b) 8) 3168 / 4) 396 / 9) 99 / 11

c) 9) 33957 / 11) 3773 / 7) 343 / 7) 49 / 7

Im Exempel a) ist 165 zuerst mit 5 dividirt. Es kommt 33 heraus; also ist 165 = 5 × 33. Aber 33 läßt sich noch mit 3 dividiren, und es kommt 11 heraus, so daß 33 = 3 × 11. Also ist 165 = 5 × 3 × 11; d. h. 165 ist in die drei Zahlen 5, 3 und 11 zerfällt. Auf eben die Art sind die beiden folgenden Zerfällungen,

3168 = 8. 4. 9. 11

33957 = 9. 11. 7. 7. 7

gemacht. Nemlich man sucht nach den Kennzeichen einen Divisor, der aufgeht, und dividirt sie damit. Mit dem Quotienten macht man es wieder so, und fährt damit fort, so

lange sich noch ein Divisor findet, oder wenigstens der letzte Quotient klein genug ist. Dann machen die sämtlichen Divisoren, zusammengenommen mit dem letzten Quotienten, die Factoren aus, in welche sich die gegebene Zahl zerfällen läßt.

Man wird leicht wahrnehmen, daß bei dergleichen Zerfällungsrechnungen allerlei Abänderungen gemacht werden können.

Zuerst ist nemlich die Ordnung der Divisoren willkührlich, und wenn ich bei der gegebenen Zahl sogleich mehrere Divisoren wahrnehme, so ist es im Grunde einerlei, mit welchen ich zuerst dividire. Z. B. 495 läßt sich mit 5, 9 und 11 dividiren.

495	495	495
5) 99	9) 55	11) 45
9) 11	5) 11	5) 9

Zum andern kann oft auch in den Zahlen, womit man dividirt, eine Verschiedenheit statt finden. Z. B.

264	264	264	264
2) 132	8) 33	6) 44	11) 24
2) 66	3) 11	4) 11	
2) 33			
3) 11			

Doch

Doch ist dieser Unterschied nicht wesentlich, und wenn man die hier stehenden 4 Zerfällungen vergleicht, so wird man finden, daß in der ersten, nemlich

264 = 2 2 2 3 11

die folgenden drei mit enthalten sind; denn in der 2ten steht nur 8, statt 2 2 2; in der 3ten steht 6 4, statt 2 2 2 3; beides ist 24, und in der 4ten steht endlich 24 selbst, statt 2 2 2 3.

Unter den verschiedenen Abänderungen aber, die sich hier machen lassen, wird immer die Zerfällung die beste seyn, die theils die wenigsten Factoren, theils die zum Multipliciren bequemsten Zahlen liefert. Das wird sich aber im Folgenden immer erst bei jedem einzelnen Exempel am besten beurtheilen lassen, welche Zerfällung gerade bei jedem Exempel die bequemste sey.

Kommen bei einer Zerfällung nicht lauter kleine Factoren heraus; wie in dem hier beigefügten Exempel 37, so ist die Zerfällung hier für uns nicht zu brauchen, ob sie gleich bei andern Arten von Rechnungen ihre Vortheile haben kann.

$$7)\ \frac{259}{37}$$

Fortsetzung.

§. 104.

Kommt nun ein Exempel vor, wo der Multiplicator eine etwas größere Zahl ist, so muß

man vor allen Dingen untersuchen, ob er sich nicht auf die beschriebene Art in lauter kleine Factoren zerfällen läßt, und dann multiplicirt man mit diesen kleinen Zahlen nach der Reihe den mehrfach benannten Multiplicandus, in beliebiger Ordnung, nur so, daß man immer mit den folgenden das Product multiplicirt, was der vorige gegeben hat. Die bequemste Art des Aufsatzes und der Rechnung wird man aus dem beigefügten Beispiele ersehen. Es sollen 9 Thl. 14 Gr. 6 Pf. mit 315 multiplicirt werden. Der Multiplicator 315 steht rechter Hand neben dem Exempel. Da es in die Augen fällt, daß er mit 5 aufgeht, so wird unter beides (Multiplicandus und Multiplicator) ein Strich gezogen, und 5 in Klammern dazwischen gesetzt, rechter Hand dividirt man nun mit 5, so kommt 63 heraus, und linker Hand multiplicirt man mit 5, das giebt 48 Thl. — Gr. 6 Pf. Nun fällt weiter in die Augen, daß 63 mit 7 aufgeht. Es werden also wieder Striche gemacht, und 7 in Klammern dazwischen gesetzt. Rechter Hand dividirt man nun mit 7, das giebt 9, und linker Hand multiplicirt man (48 Thl. — Gr. 6 Pf.) mit 7, das giebt 336 Thl. 3 Gr. 6 Pf. Da endlich rechter Hand bloß 9 übrig ist, so macht man

Thl.	Gr.	Pf.			
9	14	6	×	315	
48	—	6	(5)	63	
336	3	6	(7)	9	
3035	7	6	(9		

Da 60 die Eintheilungszahl der Fl. und Kr. ist, und 420, wie man leicht wahrnimmt, mit 60 aufgeht, so thut man wohl, 60 zum ersten Multiplicator zu machen. Dann rechnet man so: 2 Pf. sind ein halber Kr., und 60 halbe Kr. betragen 30 ganze Kr. Diese 30 Kr. kann man gleich in die Stelle der Kr. schreiben, weil man weiß, daß die oben stehenden 44 Kr. sich durch die Multiplication mit 60 geradezu in 44 Fl. verwandeln. Es ist also nur noch übrig, 758 Fl. mit 60 zu multipliciren, und zum Product 44 Fl. zuzuzählen. Dies geschieht sehr leicht im Kopfe.

758
60
———
45524

Nun muß man sich den Aufsatz im Kopfe so denken, wie er hier an der Seite wirklich gemacht ist; und die Hinzuzählung von 44 geschieht so, daß man erst zu 0 die 4 Einer zuzählt; dann sagt man, 6 mal 8 ist 48, und die 4 Zehner (von 44) dazu, geben 52; es werden also 2 geschrieben, und 5 gemerkt, und nun fährt man fort mit 6 ganz auf die gewöhnliche Art zu multipliciren.

Mit Vorbedacht haben wir diese Exempel etwas umständlicher durchgenommen, um zu zeigen, wie man durch Ueberlegung fast bei jeden einzelnen Exempel Vortheile auffinden kann, die der bloß maschinenmäßige Rechner oft übersieht. Ich weiß indessen sehr gut, daß geübte, aber nicht genugsam zum Nachdenken gewöhn-

gewöhnte Rechner eine Einwendung gegen den Gebrauch solcher Vortheile in Bereitschaft haben, die ganz natürlich so aussieht, als wenn sie Grund hätte. „Ehe ich, pflegen sie zu sagen, einen solchen Vortheil heraussuche, bin ich, nach meiner vielleicht etwas weitläuftigern Art, schon mit dem Exempel fertig". Und darin haben sie auch ganz Recht, und doch beweiset ihre Einwendung nichts. Denn sie übersehen einen einzigen kleinen Umstand, diesen nemlich, daß, wenn sich Jemand gewöhnt, jedes Exempel mit Aufmerksamkeit und Nachdenken zu rechnen, seine Beurtheilungskraft dadurch mit der Zeit so geschärft wird, daß er dergleichen Vortheile fast augenblicklich wahrnimmt, die freilich der im Nachdenken weniger geübte erst langsam aufsuchen muß. Es ist daher wohl unstreitig, gar sehr der Mühe werth, Kinder vom Anfang an zum Nachdenken bei jedem Exempel zu gewöhnen, und ich empfehle dies besonders bei den folgenden Uebungsexempeln, wo übrigens schwierige Fälle absichtlich vermieden sind.

Uebungsbeispiele.

405) 75 Thl. 2 Gr. 6 Pf. × 63.
406) 802 Thl. 11 Gr. 3 Pf. × 56.
407) 1497 Thl. 21 Gr. 9 Pf. × 81.
408) 44038 Thl. 7 Gr. 3 Pf. × 108.

409)

409) 66 209 Thl. 4 Gr. 9 Pf. × 336.
410) 90 807 Thl. 23 Gr. 6 Pf. × 576.
411) 3 814 Ct. 18 ℔. 7 ℔h. × 49.
412) 28 876 Ct. 107 ℔. 21 ℔h. × 168.
413) 17 784 Ct. 87 ℔. 17 ℔h. × 210.
414) 812 Wspl. 18 Sch. 8 Mtz. × 72.
415) 5 302 Wspl. 9 Sch. 7 Mtz. × 88.
416) 7601 Wspl. 19 Sch. 13 Mtz. × 308.

Multiplicationen durch Zerstückelung des Multiplicators.

§. 105.

Wo keine solche bequeme Zerfällung des Multiplikators statt findet, und dies ist freilich der gewöhnlichste Fall; da kann man durch eine **Zerstückelung** des Multiplicators in jeden Fall eine ziemlich bequeme Rechnung erzwingen.

Man zerstückelt nemlich den Multiplicator in zwei, auch wohl mehrere Stücke, welches nach §. 36 allezeit verstattet ist: nur muß man jedes Stück so nehmen, daß es sich bequem in lauter kleine Faktoren zerfällen läßt. Dann multiplicirt man mit jedem Stück einzeln, wie im vorigen §, und addirt am Ende, was die Multiplication mit jedem Stück gegeben hat, zusammen. Beispiele werden dies deutlich machen, nur wollen wir beim ersten Exempel, in Ansehung des Aufsatzes, nicht sowohl auf Kürze und Bequemlichkeit, als auf Deutlichkeit Rücksicht nehmen.

Es

Es sollen 94 Thl. 15 Gr. 9 Pf. mit 137 multiplicirt werden. — Man zerstückle 137, das sich nicht zerfällen läßt, in

135 + 2

und verwandle also das ganze Exempel in zwei Multiplicationsexempel, indem man 1) 94 Thl. 15 Gr. 9 Pf. erst mit 135, und 2) eben die Summe 94 Thl. 15 Gr. 9 Pf. auch mit 2 multiplicirt. Zuletzt addirt man, was beide Multiplicationen gegeben haben. Die erste dieser Multiplicationen kann sehr bequem durch Zerfällung von 135 verrichtet werden, und die andere ist an sich leicht.

	Thl.	Gr.	Pf.				Thl.	Gr.	Pf.	
a)	94	15	9	×	135	b)	94	15	9	× 2
	473	6	9	(5)	27		189	7	6	
	4259	12	9	(9)	3					
	12778	14	3	(3						

	Thl.	Gr.	Pf.
Die Multiplication a gab =	12778	14	3
— — — b — =	189	7	6
Also ist das ganze gesuchte Product = = =	12967	21	9

Die Rechnung wird ohne Zweifel für sich verständlich seyn; aber bequemer ist folgender Aufsatz, wo nichts doppelt geschrieben wird.

Thl.

		Thl.	Gr.	Pf.	× 137	
A	= =	94	15	9	135	+ 2
B	= =	473	6	9 (5)	27	
C	= =	4259	12	9 (9)	3	
D	=	12778	14	3 (3		
E	=	189	7	6 (2		
		12967	21	9		

Nemlich der Multiplicator 137 ist absichtlich höher gerückt; gerade ußter ihm steht seine Zerstükkelung 135 + 2. Nun folgt in den Zeilen B, C, D unverändert die obige Rechnung a. Was aber in der Zeile E steht, ist das Product der Rechnung b, d. h. das Product von 2, mit der Zeile A. Zwischen D und E ist kein Strich gezogen, weil zwischen Summen, die addirt werden sollen, kein Strich gesetzt wird. Man versäume nicht, Kinder darauf aufmerksam zu machen, daß, wo die zweite Multiplication angeht, (in der Zeile E), nicht mehr die vorhergehende Zeile (D), sondern die erste (A), von neuen multiplicirt werden muß; denn weil bei den einfachen Zerfällen ohne Zerstückelung die Rechnung immer von einer Zeile zur andern fortläuft, so sind sie sehr geneigt, es ohne Nachdenken auch hier so zu machen.

So oft also ein solcher Multiplicator vorkommt, der sich nicht gut zerfällen läßt, so muß man

man sogleich überlegen, ob nicht in der natürlichen Zahlenreihe in der Nähe dieser Zahl eine andere vorkomme, die gut zerfällt werden kann; und wäre diese Zahl auch größer, als der Multiplicator, so schadet dies nichts; man multiplicirt alsdann mit dieser größern, und was man auf die Art zuviel erhält, subtrahirt man wieder, d. h. der Multiplicator kann auch durch — (minus) zerstückelt werden. Z. B.

	Thl.	Gr.	Pf.	× 173
A	371	18	3	175 — 2
B	1858	19	3 (5)	35
C	9294	—	5 (5)	7
D	65058	2	11 (7	
E	743	12	6 (2	
	64314	14	5	

Hier ist zuerst statt des Multiplicators 173 geschrieben, 175 weniger 2. Dann ist A in den Zeilen B, C, D durch Zerfällungen mit 175 multiplicirt. In der Zeile D steckt also A, zwei mal zu oft. Ich multiplicire daher nochmals A mit 2; dies giebt die Zeile E, die dann von D abgezogen, das richtige Product in der letzten Zeile giebt.

Am besten ist es freilich, wenn der Multiplicator sich durch + oder — so zerstückeln läßt, daß

daß das 2te Stück nur aus einer einzigen Ziffer besteht. Dies geht aber nicht immer an, besonders wenn der Multiplicator sehr groß ist. Findet sich nun ganz nahe beim Multiplicator keine solche Zahl, oder verursacht wenigstens ihre Aufsuchung zu viel kleine Nebenrechnungen, so zerstückle man den Multiplicator geradezu in 2 oder mehrere Stücke; die bequemste Art dieser Zerstückelung zeigt folgendes Beispiel:

	Thl.	Gr.	Pf.		× 9403
A = =	47	8	9		9000 + 400 + 3
B = =	473	15	6	(10)	900
C = =	4736	11	—	(10)	90
D =	47364	14	—	(10)	9
E	426281	6	—	(9	
F	18945	20	—	(400	
G = =	142	2	3	(3	
H =	445369	4	3		

Die Rechnung ist folgendergestalt gemacht: der Multiplicator 9403 ist auf die einfachste Art zerstückelt, in 9000 + 400 + 3, und diese Zerstückelung nach den Ziffern ist bei großen Multiplicatoren fast immer die bequemste; nur muß man in der Rechnung folgende Ordnung beobachten. Das erste Stück 9000 zerfällt man zuerst mit 10, so oft es angeht, und zuletzt erst multi-

plicirt man mit der geltenden Ziffer (9). Auf diese Art enthält die Zeile B, das Zehnfache des Multiplicandus A. C enthält das Hundertfache, D das Tausendfache, und endlich E das 9000fache von A. Um nun ferner das 400fache von A zu erhalten, ist weiter nichts nöthig, als die Zeile C, die schon das Hundertfache enthält, mit 4 zu multipliciren; dies ist in der Zeile F geschehen. Endlich, um noch das 3fache von A zu erhalten, wird A geradezu mit 3 multiplicirt, welches in der Zeile G geschehen ist. Addirt man nun die Zeilen E, F und G, so enthält ihre Summe H offenbar das 9403fache des Multiplicandus A.

Die hier erklärte Art der Zerstückelung hat die Bequemlichkeit, daß sie ohne langes Probiren gemacht wird, und auf alle Multiplicatoren ohne Ausnahme anwendbar ist.

Hat man einen großen Multiplicator, der sich aber doch wenigstens durch irgend eine kleine Zahl zerfällen läßt, so thut man doch wohl, daß man diese Zerfällung zuerst macht, und nun nicht den Multiplicator selbst, sondern den Quotienten, den er nach der ersten Division läßt, so zerstückelt. Z. B.

	Wspl.	Schfl.	Mtz.			
A = =	—	3	11		× 6184	
B = =	1	5	8	(8)	773	
C = =	12	7	—	(10)	700	+ 70 + 3
D = =	122	22	—	(10)	70	
E = =	860	10	—	(7	7	
F = =	86	1	—	(70		
G = =	3	16	8	(3		
	950	3	8			

Da sich 6184 mit 8 zerfällen läßt, so ist in der Zeile B, der Multiplicandus 3 Sch. 11 Mtz. mit 8 multiplicirt, und 6184 mit 8 dividirt worden, welche Division den Quotienten 773 giebt, eine Zahl, die sich nicht weiter zerfällen läßt. Da nun 1 Wspl. 5 Sch. 8 Mtz. mit 773 multiplicirt werden sollen, so sehe man dies gleichsam als ein neues Exempel an, und rechne es auf ähnliche Art, als das vorhergehende. Nemlich, 773 zerstückelt man in 700 + 70 + 3. Von diesen 3 Stücken wird das erste, 700 in 10 mal 10 mal 7 zerfällt, und mit diesen 3 Zahlen ist die Zeile B hinter einander in den Zeilen C, D, E, multiplicirt, so daß die Zeile C das Zehnfache von B, die Zeile D das Hundertfache von B, und die Zeile E das 700fache von B enthält. Hierzu soll nun das 70fache von B kommen, welches man durch eine Multiplication

des zehnfachen (C), mit 7 erhalten könnte. Zufällig aber kann man hier weit schneller dazu kommen: denn daß das 70fache gerade der 10te Theil des 700fachen seyn muß, und in der Zeile E gerade 2 Zeilen stehn, die mit 10 aufgehn, so sieht man ohne weitere Rechnung, daß das 70fache von B, 86 Wspl. 1 Schfl. seyn werde. Dies steht nun in der Zeile F. Endlich wird B mit 3 multiplicirt, was herauskommt, steht in der Zeile G; und nun müssen das 700fache, das 70fache und das 3fache, d. i. die Zeilen E, F und G, addirt werden; ihre Summe ist das gesuchte Product.

Daß bei dergleichen Rechnungen mancherlei Abänderungen gemacht werden können, fällt leicht in die Augen, so hätte man z. B. den 2ten Theil der vorigen Rechnung, von der 3ten Zeile an, noch auf folgende Art, mit Ersparung einer Zeile, rechnen können:

	Wspl.	Schfl.	Mtz.	× 773
A = =	1	5	8	770 + 3
B = =	12	7	— (10)	77
C = =	135	5	— (11)	7
D = =	946	11	— (7	
E = =	3	16	8 (3	
	950	3	8	

Man

Man sieht nemlich leicht ein, daß die Zeile D das 770fache von A ist. Darunter steht in der Zeile E das 3fache von A; und in der letzten Zeile sind D und E addirt.

Man thut wohl, wenn man sich die Mühe nicht verdrießen läßt, dergleichen Abänderungen durchzurechnen: denn außerdem, daß dies eine sehr gute Uebung ist, sich Geläufigkeit in dieser Art Rechnungen zu verschaffen, und die Urtheilskraft zu schärfen, dient jede solche Abänderung zugleich als Probe der ersten Rechnung. Mehrere andere Abänderungen und Vortheile bei dergleichen Rechnungen, setzen Kenntniß von der Division benannter Zahlen, und von den Brüchen voraus, und können also hier noch nicht erklärt werden. Indessen empfehle ich jedem folgende Uebungsbeispiele mit Aufmerksamkeit und Nachdenken durchzurechnen.

Was kosten

417) 67 ℔. Butter? das ℔. z. 6 gr. 3 pf. gerechn.
418) 1 Ct. 63 ℔. Butter? das ℔. zu 5 Gr. 9 P.
419) 2 Schock 33 Ell. Leinwand? die Elle zu 10 Gr. 4 Pf.
420) 83 ℔. Lichter? das ℔. zu 4 Gr. 10 Pf.
421) 7 Ct. 11 ℔. Lichter? zu eben dem Preise.
422) 323 Ell. Tuch? die Ell. zu 2 Th. 8 Gr. 6 pf.
423) 79 Schfl. Waizen? den Schfl. zu 1 Thl. 4 Gr. 6 Pf.
424) 37 Wspl. 17 Schfl.? den Sch. zu 1 Thl. 6 Gr. 6 Pf.
425) 2 Ct. 27 ℔. Zucker? das ℔. zu 10 gr. 9 pf.

426) 14 Ct. 51 ℔. Kaffee? d. ℔. zu 11 gr. 3 pf.
427) 729 St. Flachs? d. St. zu 2 th. 6 sgr. 3 pf.
428) 439 Stein Wolle? d. St. 4 thl. 18 sgr.
429) 1373 ℔. Eisen? das ℔. zu 8 mgr. 3 pf.
430) 13 Ct. 4 St. Talg? d. St. zu 2 thl. 30 mgr.
431) 119 Orth. Wein? d. Orth. z. 93 fl. 47 kr.
432) 967 St. Fensterscheib.? d. Sch. 5 kr. 2 pf.
433) Wie viel betragen 841 St. Friedr. d'or? das St. zu 5 thl. 10 gr. 6 pf. gerechnet.
434) 1 ℔. Sterl. (so heißt die Hauptrechnungs-Münze in Engl.), ist nach unserm Gelde 5 thl. 13 gr. 11 pf. werth. Wie viel betragen 1 347 517 ℔. St.?
435) Wenn man für 1 thl. 1 ℔. 9 lth. Wachs bekömmt? wie viel erhält man für 173 thl.?
436) Wenn man für 1 thl. 1 Sch. 9 Mtz. Haber erhält: wie viel für 1321 thl.?

Eine andere Art zu multipliciren.

§. 106.

Im Allgemeinen darf bei jeder Multiplication der Multiplicator und Multiplicandus verwechselt werden (§. 35). Hier stehen nur die mehreren Benennungen des Multiplicandus im Wege, da der Multiplicator durchaus eine unbenannte Zahl seyn muß. Allein man darf nur den Multiplicator mit jedem einzelnen Stück des Multiplicandus besonders multipliciren, und also so viele Multiplicationen machen, als Benennungen da sind, so läßt sich auch hier die Verwechselung anwenden. Z. B.

2 Thl.

2 Thl. 4 Gr. 3 Pf. × 739

a.	b.	c.
739 Thl.	739 Gr.	739 Pf.
1478 Thl. (2	2956 Gr. (4	2217 Pf. (3
	123 Th. 4 gr.	184 Gr. 9 Pf.
		7th. 16gr. 9pf.

Die Rechnung	a	giebt	1478	Thl.	—	Gr.	—	Pf.
—	—	b —	123	=	4	=	—	=
—	—	c —	7	=	16	=	9	=
Das ganze Pr. ist also			1608	=	20	=	9	=

Es sind hier wegen der Benennungen des Multiplicators Thl. Gr. Pf. 3 Multiplicationen gemacht. In der ersten (a), sind, anstatt 2 Thl. mit 739 zu multipliciren, umgekehrt 739 Thl. mit 2 multiplicirt, das Produkt ist 1478 Thl. In der 2ten Multiplication (b), sind, anstatt 4 Gr. mit 739 zu multipliciren, umgekehrt 739 Gr. mit 4 multiplicirt. Das Product ist: 2956 Gr., und diese sind gleich darunter, durch Division mit 24, in 123 Thl. 4 Gr. verwandelt. In der 3ten Multiplication (c), sind, anstatt 3 Pf. mit 739 zu multipliciren, umgekehrt 739 Pf. mit 3 multiplicirt. Das Product ist, 2217 Pf. Diese sind gleich darunter durch Division mit 12 zu Gr. gemacht, und geben 184 Gr. 9 Pf., und hiervon sind die 184 Gr. zuletzt zu Thl. gemacht, so daß diese ganze 3te Multiplication

7 Thl. 16 Gr. 9 Pf. giebt. Endlich sind unter diese drei Rechnungen die Producte, welche die 3 Multiplicationen gaben, zusammengezählt worden, und so ergiebt sich das Product 1608 Thl. 20 Gr. 9 Pf.

Diese Art ist freilich nicht immer die kürzeste, besonders wenn schwerere Divisionen, als mit 12 und 24, dabei vorkommen. Indessen hat sie doch in manchen Fällen ihre Bequemlichkeit, besonders, wenn der eigentliche Multiplicandus (2 Thl. 4 Gr. 3 Pf.) aus lauter kleinen und einziffrigen Zahlen besteht.

Ich setze keine Uebungsbeispiele hinzu, sondern empfehle von den Exempeln des vorigen §. einige nach dieser Art zu rechnen.

Noch eine andere Art zu multipliciren.

§. 107.

Endlich läßt sich jedes Multiplicationsexempel in benannten Zahlen auf eben die Art rechnen, wie wir schon oben in der letzten Hälfte des 101. §. ein Exempel vom zwölftheiligen Fußmaaße gerechnet haben. Nemlich, man bringt erst alles auf die kleinste Benennung; dann verrichtet man die vorgeschriebene Multiplication, und was da herauskommt, bringt man wieder auf die größern Benennungen. Z. B.

14 Mgr.

14 Mgr. 4 Pf. × 3721
8
116 Pf.
3721
22326
3721
3721
431636 Pf.

	Thl.	Mgr.	Pf.
8) 53954 Mgr. 4 Pf.	1498	26	4

(36)
179
144
355
324
314
288
26 Mgr.

Die 14 Mariengr. sind erst mit 8 zu Pfennigen gemacht, und 4 Pf. dazu gezählt. Dies giebt 116 Pf. Und nun werden, statt 14 Mgr. 4 Pf., diese 116 Pf. mit 3721 multiplicirt; wobei nur zu merken, daß in der obigen Rechnung 116 als Multiplicator angesehen worden. Diese Multiplication giebt 431636 Pf. und diese müssen nun zuerst durch Division mit 8 zu Mgr. gemacht werden. Auf diese Art erhält

man 53954 Mgr. 4 Pf. Die eben genannten Mgr. werden endlich durch die Division mit 36 zu Thl. gemacht. So erhält man
1498 Th. 26 Mgr. 4 Pf.

Diese Art zu multipliciren ist unstreitig die weitschweifigste, hat aber für maschinenmäßige Rechner die Bequemlichkeit, daß sie den Kopf nicht sehr angreift, weil ein Exempel wie das andere gerechnet wird.

Auch hier setze ich keine Uebungsbeispiele zu, sondern verweise auf diejenigen, die §. 105 gegeben worden.

Proben dieser Multiplicationen.

§. 108.

Wegen Proben darf man bei dergleichen Multiplicationen nicht verlegen seyn. Jede Veränderung der Rechnung ist eine solche Probe.

Will Jemand Neuner- und Elferproben machen, so muß er 1) die Neuner- und Elferreste vom Multiplicandus und Multiplicator suchen. 2) Beide multipliciren, und aus dem Product 9 oder 11 wegwerfen, so oft es angeht, 3) was so übrig bleibt, muß mit dem Neuner- und Elferrest des Products der ganzen Rechnung stimmen.

Mul-

Multiplicationen im Kopfe.

§. 109.

Bei keiner Rechnungsart ist es so nöthig und nützlich recht viele Uebungen im Kopfrechnen anzustellen, als bei der Multiplication benannter Zahlen: indem in den Rechnungen des gemeinen Lebens nichts so häufig vorkommt. Denn was kommt häufiger vor, als aus den bekannten Preis von 1 ℔., oder 1 Lth., oder 1 Elle u. d. gl. einer Waare, den Preis von mehreren auszurechnen. Nur müssen dergleichen Exempel nie zu groß gemacht werden. Den Preis von einem Pfund, Elle u. d. gl. muß man höchstens in zwei Benennungen ansetzen, (also nicht etwa 1 Elle kostet 3 Thl. 14 Gr. 6 Pf., denn so ein Preis kommt im Handel und Wandel nicht leicht vor), und die Anzahl der Pfunde, Elle u. d. gl. deren Preis berechnet werden soll, muß nicht leicht 100 übersteigen, auch gewöhnlich nur in einer einzigen Benennung bestimmt seyn. Anfängern würde es zu viel zugemuthet seyn, wenn man ihnen z. B. aufgeben wollte, auszurechnen, wie viel 17 ℔. 23 Lth. Seide kosten würden, 1 Lth. zu 7 Gr. 9 Pf. gerechnet. Dagegen werden sie leicht und mit Vergnügen ausrechnen, was 1 ℔. kostet, wenn das Loth zu 7 Gr. 6 Pf. gerechnet wird.

Es giebt aber bei diesen Kopfrechnen allerlei kleine Vortheile, die von anderer Art sind, als

bei

bei Rechnungen auf dem Papier. Dieses wollen wir noch in einigen Beispielen zeigen.

Was kosten 30 Scheffel Haber, den Schfl. zu 18 Gr. gerechnet? Statt 18 Gr. rechne man vors erste nur 12 Gr.; dann werden 30 Schfl. 30 halbe Thaler, d. i. 15 Ganze kosten. Nun müssen aber auf jeden Sch. noch 6 Gr. nachgerechnet werden, das muß aber gerade die Hälfte von dem austragen, was zu 12 Gr. herauskam; also die Hälfte von 15 Thl., d. i. 7 Thl. 12 Gr. — 30 Sch. kosten also 22 Thl. 12 Gr.

Was kosten 40 Pfund Lichter, das Pfund zu 5 Gr. 6 Pf.? Statt 5 Gr. 6 Pf. rechne man vors erste 6 Gr. Nun ist 6 Gr. der 4te Theil des Thalers. Also kosten 4 Pfund gerade 1 Thaler, daher 40 Pfund 10 Thl. Aber wir haben auf jedes Pfund einen Sechser zu viel gerechnet, also 40 Sechser, d. i. 20 Gr. Diese von 10 Thl. abgezogen, bleiben 9 Thl. 4 Gr.

Was kostet 1 Schock (oder 60 Ellen) Leinwand, die Elle zu 9 Gr. 3 Pf. gerechnet?

Zu 6 Gr. gerechnet, würde es	15 Thl.		machen.
Noch 3 auf die Elle, betragen	7 Thl.	12 Gr.	
Noch 3 Pf. auf die Elle = = — =		15 =	
Also alles zusammen = =	23 Thl.	3 Gr.	

Was

Was werden 18 Pfund Kalbfleisch kosten, das Pfund zu 1 Gr. 9 Pf. gerechnet? Man rechne 2 Gr. voll, so sind es 36 Gr., d. i. anderthalb Thaler. Wir haben aber auf diese Art auf jedes Pfund einen Dreier, also in allen 18 Dreier zu viel gerechnet. Da nun 4 Dreier 1 Gr. machen, so sind 18 Dreier 4 Gr. 6 Pf. Rechnet man diese von 1 Thl. 12 Gr. ab, so bleiben 1 Thl. 7 Gr. 6 Pf. übrig.

Wenn der Scheffel Rocken 1 Thl. 6 Gr. kostet, was kostet der Wispel? Antwort: 30 Thl. Alle Fragen dieser Art, wo der Preis eines Scheffels in Gr. gegeben, und nach den Preis eines Wispels gefragt wird, lassen sich augenblicklich und fast ohne Rechnung beantworten. Denn weil der Wispel 24 Sch. hält, so muß er gerade so viel Thaler kosten, als der Scheffel Groschen kostet.

Wenn der Scheffel Kartoffeln 19 Gr. 6 Pf. kostet, so wird der Wispel — 19 Thl. 12 Gr. kosten. Denn zu den 19 Thlrn., die von den 19 Gr. herkommen, müssen noch 24 Sechser, d. i. 12 Gr. hinzukommen.

Die Metze Porstorfer Aepfel kostet 8 Gr. 6 Pf., wie viel 1 Sch., d. i. 16 Mtz.? Zu 6 Gr. die Metze gerechnet, würden 4 Thl. herauskommen. Hierzu kommen noch auf jede Me-

tze 2 Gr., also (weil 2 mal 16 = 32) 1 Thl. 8 Gr., mit dem vorigen zusammen 5 Thl. 8 Gr. Endlich ist noch auf jede Metze 1 Sechser, also in allen 8 Gr. nachzurechnen. Der Schfl. kostet also 5 Thl. 16 Gr.

Wenn 1 Elle Tuch 1 Thl. 17 Gr. kostet, was werden 30 Ellen kosten? 1 Thl. 17 Gr. sind 41 Gr. Ob ich diese 30 mal, oder umgekehrt, 30 Gr. 41 mal nehme, ist einerlei. Ich nehme das letzte an, und theile in Gedanken 30 Gr. in 24 Gr. + 6 Gr. Das erste Stück (24 Gr.) 41 mal genommen, giebt 41 Thl. Das letzte (6 Gr.) 41 mal genommen, muß 4 mal weniger, also 10 Thl. 6 Gr. geben. Beides (41 Thl. und 10 Thl. 6 Gr.) zusammen, beträgt 51 Thl. 6 Gr.

Was kosten 56 Ellen Leinwand, die Elle zu 6 Gr. 6 Pf.? Man rechne zuerst bloß 6 Gr., so kosten immer 4 Ellen einen Thaler; da nun 4 in 56, 14 mal enthalten ist, so kosten 56 Ellen 14 Thl. Hierzu kommen 56 Sechser = 28 Gr. = 1 Thl. 4 Gr. Also zusammen 15 Thl. 4 Gr.

Diese Beispiele mögen hinreichen, zu zeigen, wie ungefähr dergleichen kleine Rechnungen im Kopfe zu behandeln sind. Der Vortheil besteht fast

fast bei allen in einer Zerstückelung des Geldes, oder der Waare, oder in Verwechselung des Multiplicators und Multiplicandus. Mehr Regeln lassen sich im Allgemeinen nicht geben: aber eben deswegen wird durch sie Nachdenken und Urtheilskraft vorzüglich geübt. Man lasse daher recht viel dergleichen Rechnungen machen, die ohnedieß für Kinder eine sehr angenehme Beschäftigung sind.

Elfter Abschnitt.

Vom Zersetzen oder Dividiren vielfach benannter Zahlen.

Vorerinnerung.

§. 110.

Beim Dividiren kann (nach §. 52) der Divisor sowohl eine benannte, als unbenannte Zahl seyn, nur muß er im ersten Fall mit dem Dividendus einerlei Benennung haben; im andern Fall aber müssen Dividendus und Quotient einerlei Benennung haben. Wir werden daher uns hier nicht, wie bei der Multiplication, bloß auf den Fall einschränken dürfen, wenn eine Zahl von mehreren Benennungen durch eine unbenannte Zahl dividirt werden soll; sondern wir werden auch zeigen müssen, wie eine Zahl von mehrern Benennungen durch eine andere von eben der Art zu dividiren sey.

Divi-

Division einer Zahl von mehreren Benennungen, durch eine andere Zahl derselben Art.

§. 111.

Beziehen sich die Benennungen auf zehntheilige Abtheilungen, so ist die Rechnung völlig wie bei unbenannten Zahlen. Will man z. B. wissen, wie vielmal $3^{xx}\ 4^{xxx}$ in $7^{\circ}\ 8^{x}\ 6^{xx}$ enthalten sind, so schreibt man nur beide Zahlen in einerlei, und zwar der kleinsten Benennung, hin, (also statt $7^{\circ}\ 8^{x}\ 6^{xx}\ 0^{xxx}$, 7860^{xxx}; und statt $3^{xx}\ 4^{xxx}$ 34^{xxx}); dann dividirt man, wie gewöhnlich. Der Quotient $231\frac{6}{34}$ im beigefügten Beispiel, zeigt an, wie oft $3^{xx}\ 4^{xxx}$ in $7^{\circ}\ 8^{x}\ 6^{xx}$ enthalten sey.

$$
\begin{array}{l|l}
7860^{xxx} & 231\frac{6}{34} \\
(34) & \\
68 & \\
\hline
106 & \\
102 & \\
\hline
40 & \\
34 & \\
\hline
6 &
\end{array}
$$

Beziehen sich hingegen die Benennungen auf Eintheilungen, welche nicht zehntheilig sind, so ist zwar die Rechnung in der Hauptsache eben so: nemlich, sowohl der Dividendus als der Divisor müssen auf die kleinste Benennung, die in ihnen vorkommt, gebracht werden (§. 80. b); dann aber dividirt man wie in unbenannten Zahlen. Es fällt aber in die Augen, daß die Rechnung immer weitläuftiger, als bei zehntheiligen Abtheilungen werden müsse, weil die Namenverände-

rung weitläuftiger ist. Z. B. wenn Jemand 1 ℔. 19 lth. grünen Vitriol für 1 Thl. gekauft hätte, wie viel müßte er, zu eben dem Preise, für 1 Ct. bezahlen? Begreiflich muß er so viele Thaler bezahlen, als viel mal 1 ℔. 19 lth. in 1 Ct. enthalten sind; d. h. er muß einen Centn. durch 1 ℔. 19 lth dividiren. Da nun hier lth. die kleinste Benennung ist, so muß sowohl 1 Ct. d. i. 110 ℔., als auch 1 ℔. 19 lth. zu lauter Lothen machen, und dann die Division in Lothen vornehmen.

1 ℔. 19 lth.	32	
32	110 ℔.	
51 lth.	3 520 lth.	$69\frac{1}{51}$ Thl.
	(51)	
	306	
	460	
	459	
	1	

Zuerst ist 1 ℔. 19 lth. in 51 lth. verwandelt; dann auch 110 ℔. in 3520 lth., wobei nur zu merken, daß 110 als Multiplicator angesehen worden, nemlich, 32 ist mit 11, wie mit einer einzelnen Ziffer multiplicirt, und die 0 angehängt worden. Darauf ist 3520 durch 51 dividirt. Der Quotient $69\frac{1}{51}$ zeigt an, daß 1 ℔. 19 lth. so oft in 110 ℔. enthalten sey, und daß daher

1 Ct.

1 Ct. $69\frac{1}{51}$ Thaler kosten werde. Wie übrigens der Bruch $\frac{1}{51}$ Thl. in Gr. und Pf. zu verwandeln sey, werden wir bei der Lehre von den Brüchen zeigen.

Es wird nicht nöthig seyn, mehrere Beispiele ausführlich zu berechnen: denn von den Namenveränderungen haben wir ausführlich im 7ten Abschnitt gehandelt, die eigentliche Division aber ist völlig wie bei unbenannten Zahlen: daher lassen sich hier auch keine andere Vortheile anbringen, als solche, die entweder bei den Namenveränderungen, oder beim Dividiren schon erklärt sind.

Wir setzen daher bloß noch folgende Uebungsbeispiele hinzu.

Uebungsbeispiele.

437) 117 Thl. 21 Gr. : 5 Thl. 3 Gr.
438) 240 Thl. : 26 Thl. 16 Gr.
439) 1317 Thl. : 73 Thl. 4 Gr.
440) 148 Thl. 23 Gr. : 3 Thl. 9 Gr. 3 Pf.
441) 1736 Thl. 13 Gr. : 24 Thl. 11 Gr.
442) 1247 Thl. 12 Gr. : 5 Thl. 4 Gr. 9 Pf.
443) 1500 Th. 18 Gr. 9 Pf. : 13 Th. 6 Gr. 9 Pf.
444) 9710 Th. 1 Gr. 3 Pf. : 149 Th. 9 Gr. 3 Pf.

Division einer Zahl von mehreren Benennungen, durch eine einziffrige unbenannte Zahl.

§. 112.

Wir gehen gleich zu den andern Hauptfall der Division über, wenn der Divisor eine unbenannte Zahl ist. Hat man mit zehntheiligen Abtheilungen zu thun, so wird hier, wie bei jeder andern Rechnungsart, völlig wie bei unbenannten Zahlen dividirt. Am bequemsten ist es, den Dividendus während der Rechnung in die kleinste Benennung zu setzen. Z. B. um den 31sten Theil von $14^{v}\ 9^{x}\ 6^{xx}\ 8^{xxx}$ zehntheiliges Maaß zu finden, schreibt man gleich 14968^{xxx}, und dann dividirt man völlig wie in unbenannten Zahlen. Sind hingegen die Abtheilungen anders, als zehntheilig, so wird die Arbeit viel umständlicher, und man muß mehrere Fälle von einander unterscheiden. Der leichteste und einfachste Fall ist hier, wenn der Divisor bloß aus einer Ziffer besteht. Die Division geschieht in diesem Fall stückweise: man dividirt zuerst die größte Benennung, was hier etwa übrig bleibt, zieht man mit der nächstfolgenden kleinern Benennung zusammen,

$$
\begin{array}{l|l}
14968 & 482\frac{26}{31} \\
(31) & \text{oder} \\
124 & 4^{x}\,8^{xx}\,2\frac{26}{31}^{xxx} \\
\hline
\ \ 256 & \\
\ \ 248 & \\
\hline
\ \ \ \ 88 & \\
\ \ \ \ 62 & \\
\hline
\ \ \ \ 26 &
\end{array}
$$

sammen, und dividirt es alsdann wieder, und so geht man bis zur kleinsten Benennung fort; bleibt da noch etwas übrig, so wird es als Bruch angehängt. Z. B. wie viel ist der 7te Theil von 3614 Thl. 4 Gr.? Die 3614 Thl. werden zuerst auf die gewöhnliche Art durch 7 dividirt, es kommen 516 Thl. heraus, und 2 Thl. bleiben übrig. Diese noch nicht dividirten 2 Thl. macht man zu 48 Gr., und zieht sie mit die folgenden 4 Gr. zusammen, so hat man 52 Gr. zu dividiren. Diese 52 Gr. mit 7 dividirt, geben 7 Gr.; es bleiben aber 3 Gr. übrig. Diese noch nicht dividirten 3 Gr. werden zu 36 Pf. gemacht, und weil nichts hinzuzuzählen vorhanden ist, sogleich mit 7 dividirt. Es kommen 5 Pf. heraus; aber 1 Pf. bleibt übrig. Soll auch dieser noch nicht dividirte Pf. dividirt werden, so kann es nicht anders als durch einen Bruch $\frac{1}{7}$ Pf. geschehen, weil außer Pfennige keine kleinere Geldbenennung bei uns üblich ist.

	3614 Thl.	4 Gr. —	Pf.
7)	516 =	7 =	$5\frac{1}{7}$ Pf.

Wer sich die nöthige Fertigkeit in den Namenveränderungen erworben hat, wird, nach Anleitung des gerechneten Exempels, leicht folgende Uebungsbeispiele rechnen. Wenigstens mit 10, 11, 12 und 24 muß man sich gewöhnen, wie mit einer einzigen Ziffer, zu dividiren.

Uebungsbeispiele.

445) 561 Thl. 7 Gr. 6 Pf. : 7.
446) 9602 Thl. 6 Gr. 9 Pf. : 9.
447) 1234 Thl. 18 Gr. 2 Pf. : 10.
448) 5715 Thl. 3 Gr. : 12.
449) 7113 Thl. 14 Gr. : 12.
450) 13490 Thl. 8 Gr. : 24.
451) 85371 Thl. 18 Gr. : 24.
452) 39 Ct. 92 ℔. 8 lth. : 8.
453) 227 Ct. 75 ℔. 10 lth. : 10.
454) 614 Ct. 103 ℔. 15 lth. : 11.
455) 83 Wspl. 21 Sch. 9 Mtz. : 9.
456) 128 Wspl. 10 Sch. 8 Mtz. : 24.

Zerfällung des Divisors, wenn er aus mehr als einer Ziffer besteht.

§. 113.

Bei größern Divisoren ist die Zerfällung desselben, einer von den Hauptvortheilen bei dergleichen Divisionen. Nur können wir hier von diesem Vortheil noch nicht vollständig Gebrauch machen: denn es geschieht sehr häufig, daß gleich in der ersten Division ein Bruch entsteht, der daher bei der zweiten Division mit dividirt werden müßte. Wie dies zu machen sey, kann erst in dem Abschnitte von der Division der Brüche erklärt werden. Indessen wollen wir doch einige Beispiele hersetzen, wo aber dieser Fall absicht-

lich

lich vermieden ist. Es sollen 15 Wispel Haber unter 1920 Reuter vertheilt werden, wie viel bekommt jeder? Wie der Aufsatz am bequemsten zu machen sey, sieht man deutlich aus der beigefügten Rechnung. Dann sucht man kleine Zahlen, mit denen, wo möglich, nicht bloß der Divisor, sondern auch der Dividendus aufgeht, (obgleich das letztere, wenn man schon mit Brüchen zu rechnen weiß, nicht nothwendig ist). In unserm Beispiele geht beides mit 5 auf. Der Divisor giebt 384, der Dividendus 3 Wispel. Ferner ist beides mit 8 dividirt, womit auch der Dividendus 3 Wspl., wenn man ihn zu 72 Scheffeln macht, aufgeht. Beim Divisor erhält man 48, beim Dividendus 9 Sch. In der folgenden Zeile ist beides noch einmal mit 8 dividirt. Der Divisor giebt 6. Der Dividendus (9 Sch.) aber, giebt erst 1 Sch., und eben so viel bleibt übrig. Dieser letzte noch nicht dividirte Sch. wird zu 16 Mtz. gemacht, und mit 8 dividirt, auf diese Art erhält man also in der 4ten Zeile 1 Sch. 2 Mtz. Endlich wird dies (1 Sch. 2 Mtz.) mit der noch übrigen 6 dividirt, indem man 1 Sch. zu 16 Mtz. macht, und 2 dazu addirt, welches 18 Mtz. giebt, die

	Wspl.	Sch.	Mtz.
1920	15	—	—
5) 384	3	—	—
8) 48	—	9	—
8) 6	—	1	2
6)	—	—	3

die mit 6 dividirt, zum letzten Quotienten 3 Mtz. geben. So viel muß also jeder Reuter erhalten.

Den Grund dieser Rechnung sieht man am leichtesten aus dem 5ten Grundsatz der Division §. 56 ein. Denn in jeder Zeile wird Divisor und Dividendus um gleichviel mal verkleinert, welches im Quotienten nichts ändern kann.

Uebungsbeispiele.

457) 238 Thl. 12 Gr. : 72.
458) 5125 Thl. : 90.
459) 2906 Thl. 6 Gr. : 216.
460) 123143 Thl. 2 Gr. 8 Pf. : 512.
461) 3169 Ct. 1 Pfd. 1 Lth. : 77.
462) 580 Ct. 61 Pfd. : 112.
463) 1964 Wspl. 12 Sch. 7 Mtz. : 125.
464) 3822 Wspl. 3 Sch. 1 Mtz. : 343.

Anm. Wir haben schon bei der Division unbenannter Zahlen §. 68. (Pag. 152 Anm.) gezeigt, daß bei keiner Division der Divisor zerstückelt werden darf. Wir haben also auch hier bei der Division einen Vortheil weniger, als bei der Multiplication.

Erste allgemeine Regel zur Division benannter Zahlen, durch einen unbenannten Divisor.

§. 114.

Da die in den beiden vorigen §§. erklärten vortheilhaftern Arten zu dividiren, bei weiten nicht

nicht auf alle Exempel angewendet werden können, so ist es um desto nöthiger, hier allgemeine Regeln anzugeben, die auf jeden Fall zum Ziele führen. Man kann aber dabei auf doppelte Art zu Werke gehen.

Die erste Art, welche in diesem §. erklärt werden soll, besteht darin, daß man geradezu die größte Benennung auf die gewöhnliche Art durch den unveränderten Divisor dividirt, den Rest mit der nächst kleinern Benennung zusammenzieht, und wieder auf eben die Art dividirt. Man fährt so fort, bis man zur kleinsten Benennung kommt. Bleibt da etwas übrig, so wird es in einen Bruch gesetzt. Es sollen z. B. 3869 Thl. 14 Gr. durch 457 dividirt werden.

Thl.	Gr.	Pf.	Thl.	Gr.	Pf.
3869	14	—	8	11	$2\frac{274}{457}$

(457)
3656
213 Thl.
5126 Gr. (24
457
556
457
99 Gr.
1188 Pf. (12
914
274 Pf.

Die Rechnung ist so gemacht: Zuerst sind 3869 Thl. auf die gewöhnliche Art durch 457 dividirt. Der Quotient ist 8 Thl. und die Division läßt den Rest 213 Thl. Diese noch nicht dividirte Summe wird zu Gr. gemacht, und dazu werden gleich im Multipliciren die oben im Dividendus stehenden 14 Gr. mit zugezählt, so kommen 5126 Gr. heraus. Diese dividirt man nun von neuen mit 457. Der Quotient ist 11 Gr. und der Rest 99 Gr. Diese noch nicht dividirten 99 Gr. werden zu Pf. gemacht, und ständen oben im Dividendus Pf., so müßten diese zugezählt werden. Hier kommen 1188 Pf. heraus. Diese werden wieder mit 457 dividirt, und es kommt der Quotient 2 Pf. heraus; aber 234 Pf. bleiben als Rest. Soll auch dieser Rest dividirt werden, so kann es nur dadurch geschehen, daß er als Bruch $\frac{234}{457}$ angehängt wird.

Als Uebungsbeispiele, kann man einige, oder alle Exempel des folgenden §. rechnen.

Anm. Wäre die erste Benennung zu klein, so daß sie sich nicht dividiren ließe, so versteht es sich von selbst, daß die erste Arbeit darin besteht, sie gleich auf die 2te Benennung durch Multiplication zu bringen.

Zweite allgemeine Regel.

§. 115.

Die zweite Art besteht darin, daß man gleich Anfangs alles auf die kleinste Benennung

nung bringt, dann auf die gewöhnliche Art dividirt, und nun den Quotienten wieder auf die größeren Benennungen bringt. Z. B. Es hat Jemand 137 ℔. Reiß gekauft; diese hat er baar bezahlt mit 10 Thl., hat aber dabei noch 1 Thl. 15 Gr. 6 Pf. Unkosten gehabt, wie hoch hat er jedes Pfund bezahlt? Für alles hat er also 11 Thl. 15 Gr. 6 Pf. bezahlt, und da dies der Preis von 137 ℔. ist, so muß der 137ste Theil des Geldes ausgerechnet werden; d. h. es müssen 11 Thl. 15 Gr. 6 Pf. durch 137 dividirt werden. Diese Division ist hier folgender Gestalt gemacht: zuerst sind 11 Thl. durch Multiplication mit 24 zu Gr. gemacht, und aus dem Dividendus 15 Gr. zugezählt worden, dies giebt 279 Gr. Diese 279 Gr. sind weiter durch Multiplication mit 12 zu Pf. gemacht, und aus dem Dividendus 6 Pf. zugezählt worden, dies giebt 3354 Pf. Also betragen 11 Thl. 15 Gr. 6 Pf. zusammen 3354 Pf. Hierauf sind diese 3354 Pf. mit 137 auf die gewöhnliche Art dividirt. Der Quotient ist 24 Pf., es bleiben aber 66 Pf. übrig. Sollen auch diese dividirt werden, so geben

Thl.	Gr.	Pf.
11	15	6
24		
279 Gr.		
12		
3354 Pf.	24 $\frac{66}{137}$ Pf.	
(137)		
274		
614	2 Gr. $\frac{66}{137}$ Pf.	
548		
66		

oder

geben sie den Bruch $\frac{66}{137}$ Pf. Endlich müssen die herausgekommenen Pf. zu Gr, und wenn es angeht, auch zu Thl. gemacht werden. Da hier bloß 24 Pf. herausgekommen sind, so wird diese jeder sogleich, ohne Rechnung in 2 Gr. verwandeln. Der Bruch aber muß seine Benennung Pf. behalten, wenn gleich nun keine ganze Zahl neben ihn zu stehen kommt, was an sich gar nicht nöthig ist.

Uebungsbeispiele.

465) 47 ℔. Kaffee kosten 20 Thl. 12 Gr. 6 Pf. Was kostet 1 ℔.?

466) 5 Ct. 27 ℔. Kaffee kosten 280 Thl., Was kostet 1 ℔.?

467) Ein Faß Butter, worin 31 ℔., kostet 6 Thl. 8 Gr. Was kostet 1 ℔.?

468) 3 Ct. 67 ℔. Butter kosten 87 Thl. 12 Gr. Was kostet 1 ℔.?

469) 157 Ellen Tuch kosten 300 Thl. Was kostet 1 Elle?

470) 61 Schfl. Gerste kosten 48 Thl. 12 Gr. Was kostet 1 Schfl.?

471) 9 Wspl. 7 Schfl. Rocken kosten 230 Thl. 8 Gr. Was kostet 1 Schfl.?

472) 115 Stein Talg kosten 240 Thl. 8 Gr. Was kostet 1 St.?

473) Für 109 Stück Friedrichsd'or erhält Jemand 590 Thl. Silbergeld. Wie viel beträgt also 1 Fr. d'or?

474)

474) Für 317 Stück Dukaten erhält Jemand gerade 1000 Thl. Courant. Wie viel gilt also 1 Dukaten?

475) 317 Wspl. Waizen sind bezahlt worden mit 9800 Thl. Wie viel kostet 1 Wspl.? wie viel 1 Sch.?

476) 67 Orth. Wein sind bezahlt worden mit 6600 Fl. 30 Kr. Was kostet 1 Orth.?

477) 311 Ct. Kupfer kosten 18500 Mk. 4 ß. Was kostet 1 Ct.?

478) 3513 Elle schlesische Leinwand, alle von gleicher Güte, sind bezahlt worden mit 1600 Thl. Was kostet 1 Elle, u. zwar in Sgr. und Den.?

479) 715 Klafter Büchenholz sind bezahlt worden, mit 4114 Fl. 15 Kr. Was kostet 1 Klafter?

480) 57 Ct. Kaffee kosten 3412 Mrk. 8 ß. Was kostet 1 Ct.?

481) 37 Ballen Papier sind bezahlt worden mit 710 Thl. 18 Mgr. Was kostet 1 Ball.?

482) 71 Stein Flachs sind bezahlt worden mit 145 Thl. 10 Sgr. Was kostet 1 St.?

483) Es kauft Jemand 47 Pfd. gesponnene Seide für 400 Thl. Wie viel Lth. und Quent. kann er für 1 Thl. verkaufen, wenn er weder Vortheil noch Schaden haben will?

484) Es kauft Jemand 7 ℔. Zimmet für 18 Thl. Wie viel Lth. und Qt. kann er, ohne

ne Schaden und Vortheil, für 1 Thaler verkaufen?

Proben der Division benannter Zahlen.

§. 116.

Doppeltes Durchrechnen, (besonders gleich unmittelbar in der Rechnung selbst so oft ein kleiner Abschnitt der Rechnung fertig ist) bleibt auch hier die beste Probe.

Sonst lassen sich auch zur Uebung allerlei andere Proben anstellen. So können z. B. Multiplication und Division auch hier, so wie bei unbenannten Zahlen, einander zur Probe dienen; oder man kann ein Exempel auf zwei oder mehr verschiedene Arten rechnen.

Auch Neuner- und Elferproben kann man machen; und zwar in der Hauptsache eben so, wie bei der Division unbenannter Zahlen (§. 69 und 71); nur daß die Neuner- und Elferreste selbst, bei benannten Zahlen, nach §. 82 und 83 gesucht werden müssen.

Beschluß der einfachen Rechnungsarten, mit benannten Zahlen.

§. 117.

Mit der Division der benannten Zahlen haben wir einen wichtigen Theil des Weges, den wir

wir machen wollen, zurückgelegt. Ich rathe, auf der Station, wo wir jetzt sind, ein wenig zu verweilen, und auf ähnliche Art, als wir am Ende der Rechnungsarten mit unbenannten Zahlen (im 6ten Abschnitt), gezeigt haben, das Nachdenken und die Urtheilskraft der Lehrlinge dadurch zu üben, daß man ihnen eine große Menge leichter Rechnungsfälle vorlegt, aber ihnen dabei nicht sagt, welche Rechnungsarten anzuwenden sind. Dieß ausfindig zu machen, muß man ihrem eigenen Scharfsinn überlassen, und höchstens den Schwächern dabei ein wenig zu Hülfe kommen. Der Lehrer ist hier in der Wahl solcher Rechnungsfälle schon weit weniger gebunden, als im 6ten Abschnitt, wo er Zahlen von mehreren Benennungen fast ganz ausweichen mußte; dagegen er hier nur Bruch-Rechnungen vermeiden muß.

Besonders empfehle ich, wie im 6ten Abschnitt, viele solche kleine Rechnungen **aus dem Kopfe** machen zu lassen. Ich füge einen kleinen Vorrath von Exempeln hinzu, welche hauptsächlich bestimmt sind, das Nachdenken und die Urtheilskraft zu schärfen.

485) Ihrer **dreie** kaufen zusammen einen Ct. Zucker, und bezahlen dafür 50 Thl. auf der Stelle, und 17 Gr. 6 Pf. an kleinen Ausgaben. Es frägt sich, a) wie viel Pfund

und

und loth bekommt jeder? b) wie viel muß jeder bezahlen? c) wie viel kostet ihnen 1 Pfund?

486) Es giebt Jemand einem Kinde die Hälfte seiner Aepfel, und noch einen halben dazu; dennoch schneidet er keinen durch, und behält einen Apfel übrig. Wie viel Aepfel hat er gehabt? und wie viele hat er dem Kinde gegeben?

487) Es vertheilt Jemand einige Aepfel an zwei Kinder. Dem Aeltesten giebt er, wie vorher, die Hälfte aller seiner Aepfel, und noch einen halben Apfel. Dem jüngern giebt er von seinen noch übrigen Aepfeln die Hälfte und noch einen halben Apfel. Er schneidet aber keinen Apfel entzwei, und behält einen Apfel übrig, wie viel Aepfel hatte er zu Anfang? und wie viele hat er jedem Kinde gegeben?

488) Eine Erbschaft von 700 Thl. soll unter zwei Erben so vertheilt werden, daß so oft der erste 4 Thl. erhält, der andere nur 1 Thl. bekommen soll; wie viel bekommt jeder?

489) Es wird Jemand gefragt, wie viel er Geld habe? Er antwortet: Du kannst es ausrechnen, wenn ich Dir sage, daß die Hälfte

Hälfte meines Geldes gerade einen Thaler mehr beträgt, als der dritte Theil desselben. Wie viel hat er gehabt?

490) Ein andrer antwortet auf eben die Frage: der dritte und vierte Theil seines Geldes sey um 18 Gr. 6 Pf. verschieden. Wie viel hat dieser?

491) Ein Mann, der ohne Kinder stirbt, vermacht seiner Frau die Hälfte, und einem Freunde den 5ten Theil seines Vermögens. Das übrige beträgt 3600 Thl., und soll zur Errichtung einer wohlthätigen Anstalt verwendet werden. Wie groß war das Vermögen des Mannes? und wie viel hat jeder bekommen?

492) Es wird Jemand um sein Alter gefragt. Er antwortet: wenn ich über mein jetziges Alter noch 20 mal so alt wäre, als ich bin, und noch 4 mal, so wäre ich gerade 1000 Jahre alt. Wie alt war er?

493) Ein Vater sagt zu seinem Sohne: Jetzt bin ich zwar 6 mal so alt als du, denn ich bin 48 Jahr alt. Aber wenn du groß seyn wirst, und ich lebe noch, so werde ich nicht mehr 6 mal so alt als du seyn. Rechne mir also aus, wie lange wir noch zusam-

men leben müssen, bis ich sagen kann, daß ich gerade noch einmal so alt sey, als du?

494) Ein Vater hinterläßt 9 Kindern ein Vermögen von 10000 Thalern. Jede Tochter soll davon 1200; jeder Sohn aber nur 1000 bekommen. Bei der Theilung geht das Vermögen gerade auf. Wie viel waren Söhne, wie viel waren Töchter?

495) Ein anderer Vater hinterläßt 12 Kindern 13400 Thl. Sie sollen eben so vertheilt werden; nemlich, daß jeder Sohn 1000 Thl. und jede Tochter 1200 Thl. bekommt. Bei der Theilung geht alles gerade auf. Wie viel waren Söhne? und wie viel Töchter?

496) Drei Erben sollen sich in eine Erbschaft von 2500 Thl. so theilen, daß der erste 200 Thl. mehr als der 2te, und der 2te 100 Thl. mehr als der 3te bekommt. Wie viel erhält also jeder?

497) Vier Personen sollen sich in 400 Thl. theilen, aber so, daß immer der folgende dreimal so viel, als der vorige bekommt. Wie viel erhält also jeder?

498) Es mengt Jemand zwei Arten Toback zusammen: nemlich 2 ℔. wovon ein jedes 1 Thl. kostet, und 3 ℔., wovon jedes 14 Gr. kostet. Wie viel ist nun 1 ℔. von dem Gemenge werth?

Anm.

Anm. Man wird auch ohne mein Erinnern wahrnehmen, daß diese Beispiele mehr die Uebung des Verstandes, als Fertigkeit im Rechnen zur Absicht haben: denn was dabei zu rechnen ist, läßt sich ohne Mühe im Kopfe machen. Fähige Kinder von 8 bis 12 Jahren, die zum Nachdenken gewöhnt sind, rechnen manche dergleichen Exempel, ohne Anleitung. Den meisten aber wird man doch dabei auf die Spur helfen müssen. Alles dazu nöthige findet man in den Beantwortungen.

Zwölfter Abschnitt.

Vorübungen zu den Rechnungen mit Brüchen.

Vorerinnerung.

§. 118.

Was unter einem Bruch zu verstehen sey, haben wir schon oben §. 60, umständlich auseinander gesetzt, und können uns also hier um desto kürzer fassen. Da aber Deutlichkeit und Gründlichkeit in allen Dingen, und besonders im Rechnen von der **Richtigkeit und Deutlichkeit der ersten Begriffe** abhängt, so muß man sich die Mühe nicht verdrießen lassen, jenen §. hier nochmals mit der nöthigen Aufmerksamkeit durchzugehen; und überhaupt auf die Vorübungen, die in diesem Abschnitt vorkommen, allen Fleiß zu wenden, und sie nicht etwa bloß für **Nebendinge** zu halten.

All=

Allgemeine Erklärung eines Bruchs.

§. 119.

Wenn eine Einheit (z. B. 1 Thl., oder 1 Gr., oder 1 Pf., oder 1 Ct., oder 1 ℔., oder 1 Lth., oder 1 Elle ꝛc. ꝛc.) in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile (wirklich, oder in Gedanken), getheilt wird, so benennt man jeden solchen Theil nach der Anzahl aller Theile, indem man an das Zahlwort die Sylbe **tel**, (welche eine Abkürzung des Wortes **Theil** ist), oder **stel**, wenn sich das Zahlwort auf g endigt, anhängt. In Ziffern aber bezeichnet man, wie wir schon §. 60 gezeigt haben, dergleichen Theile dadurch, daß man 1 und die Anzahl der Theile durch einen Divisionsstrich verbindet.

Wird z. B. 1 ℔. in 12 gleiche Theile getheilt, so heißt **ein** solcher Theil ein **Zwölftel**, und wird geschrieben $\frac{1}{12}$. Wird ein Pfund in 20 Theile getheilt, so heißt **ein** solcher Theil ein **Zwanzigstel**, und wird geschrieben $\frac{1}{20}$. Auch bei einer großen Anzahl von Theilen findet diese Benennung statt. Würde 1 Ct. in 378 Theile getheilt, so heißt jeder dieser Theile ein **Dreihundertachtundsiebzigstel**, und wird geschrieben $\frac{1}{378}$. Nur bei der Theilung in 2 und 3 Theile sind die Benennungen etwas anders gebildet. Denn statt ein **Zweitel** ($\frac{1}{2}$), und ein **Dreitel** ($\frac{1}{3}$) zu sagen, sagt man ein **Halb**, und ein **Drittel**.

Wird nun auf diese Art irgend eine Einheit, in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile getheilt, und irgend eine Anzahl solcher Theile (wäre es auch nur ein einziger) zusammen genommen, so heißt das **ein Bruch**. In Worten setzt man die Anzahl der Theile voran, und läßt dann den Namen der Theile folgen. Wenn z. B. ein Pfd. in 8 Theile getheilt, und 5 solche Theile zusammen genommen werden, so heißt das **fünf Achtel**. Soll der Bruch mit Ziffern geschrieben werden, so setzt man die Anzahl der Theile über, und die Benennung unter den Divisionsstrich. Fünf Achtel werden also geschrieben $\frac{5}{8}$.

Mit Anfängern sind hierbei zweierlei Uebungen anzustellen.

1) Sie müssen erklärte Brüche **aussprechen** und **schreiben** lernen. Man muß ihnen also eine Menge Fragen von folgender Art vorlegen. Wenn eine Elle in 15 Theile getheilt wird, wie heißt **ein** solcher Theil? wie wird er geschrieben? wie werden 2, 3, 4 rc. solche Theile genennt? wie werden sie geschrieben? Kann man ihnen die Theilung sichtbar vor Augen machen, so ists desto besser.

2) Sie müssen einen geschriebenen Bruch **lesen** und **verstehen** lernen. Man muß ihnen also eine Menge Fragen von folgender Art vorlegen. Wie sind die Brüche, $\frac{3}{4}$ Elle, $\frac{7}{8}$ Thl., $\frac{3}{5}$ Ct., $\frac{17}{48}$ ℔., $\frac{37}{215}$ Lth. rc. zu lesen? und was bedeutet ein jeder? Wenn hier 1 Elle, 1 Thaler,

ler, 1 Centner rc. vor uns läge, wie müßten wir es anfangen, $\frac{3}{4}$ Elle, $\frac{7}{8}$ Thl., $\frac{3}{5}$ Ct. rc. zu machen?

Zähler und Nenner eines Bruchs.

§. 120.

Man sieht aus dem vorigen, daß bei jedem Bruch allezeit **zwei** Zahlen in Betrachtung gezogen werden müssen. Die eine, welche mir nicht nur anzeigt, in wie viel Theile das Ganze getheilt werden soll, sondern zugleich dient, jeden solchen Theil zu **benennen**, heißt daher der **Nenner** des Bruchs, und hat allezeit seine Stelle unter dem Strich. Die andere, welche **zählt**, oder die Anzahl der Theile angiebt, die ich zusammen nehmen soll, heißt der **Zähler** des Bruchs.

In dem Bruche $\frac{5}{8}$ Ct. zeigt mir die 8 an, daß ein ganzer Ct. in 8 gleiche Theile getheilt werden soll; zugleich dient diese Zahl 8, jeden dieser Theile zu **benennen**, denn sie heißen sämtlich **Achtel**=Centner; also ist 8 der Nenner des Bruchs. — Die Zahl 5 hingegen **zählt** mir die Achtel, die ich zusammen fassen soll. Sie ist also der **Zähler** des Bruchs

Kinder verwechseln sehr leicht diese beiden Begriffe, sie müssen daher hier und in der Folge fleißig in der Unterscheidung derselben geübt werden.

Aechte Brüche, unächte Brüche, gemischte Zahlen.

§. 121.

Wenn ein Bruch noch kein volles Ganzes, sondern nur einige Theile desselben in sich begreift, so heißt er ein ächter (d. i. wahrer) Bruch. Z. B. $\frac{7}{8}$ ℔., wo ein Pfund in 8 Theile getheilt wird, aber nur 7 davon zusammengenommen werden. Es giebt ein sehr leichtes und einfaches **äußeres Kennzeichen**, wodurch sich ächte Brüche unterscheiden lassen; und dies besteht darin, daß der Zähler allezeit kleiner ist als der Nenner. Aechte Brüche sind also z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{9}$ rc.

Es giebt aber auch Brüche, welche ein volles Ganzes (wie z. B. $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$ rc.), oder noch mehr als ein Ganzes in sich fassen. Denn so gut als ich z. B. ein einziges Pfund in 4 Viertel abtheilen kann, so gut kann ich auch zwei, oder mehrere Pfunde, jedes in 4 Viertel theilen, und auf diese Art noch mehr als 4 Viertel in Eins zusammen fassen. Hätte ich also z. B. 5 Pfunde vor mir, und jedes in 4 Viertel getheilt, so könnte ich die Viertel nach der Reihe von 1 Viertel an bis 20 Viertel durchzählen; ich könnte also zählen $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{9}{4}$, u. s. w. bis $\frac{20}{4}$. Solche Brüche nun, die ein volles Ganzes, oder noch drüber enthalten, heißen **unächte Brüche**. Ihr **äußeres Kennzeichen** bestehet darin, daß der Zähler **nicht größer** ist

als

als der Nenner, d. h. daß er entweder eben so groß, oder größer als der Nenner ist. Unächte Brüche sind also, z. B. folgende: $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{21}{5}$, $\frac{11}{11}$, $\frac{12}{11}$, $\frac{22}{11}$, $\frac{99}{11}$, u. dgl. m.

Sehr oft hängt man eine ganze Zahl, und einen ächten Bruch an einander, wie wir dies schon oben bei der Division unbenannter Zahlen im Quotienten gethan haben, wenn die Rechnung nicht aufging. Dergleichen Zusammensetzungen, nennt man **gemischte Zahlen**, (auch wohl gemischte Brüche), dergleichen gemischte Zahlen sind z. B. $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, $2\frac{3}{4}$, $1\frac{7}{8}$, $5\frac{6}{7}$, $23\frac{2}{5}$, $178\frac{4}{9}$, $17\frac{233}{234}$, u. dgl. m. Man sieht übrigens leicht ein, daß unächte Brüche und gemischte Zahlen, sehr nahe verwandt sind, indem leicht das eine in das andere verwandelt werden kann, denn statt $\frac{8}{3}$ kann man $2\frac{2}{3}$ setzen, weil allemal $\frac{3}{3}$ ein Ganzes machen. Und umgekehrt kann man statt $3\frac{1}{4}$, $\frac{13}{4}$ setzen, weil ein Ganzes aus $\frac{4}{4}$ besteht. Wie übrigens in beiden Fällen die Verwandlung am bequemsten zu machen sey, soll in eigenen §§. erklärt werden.

Man kann sich jeden Bruch als einen Quotienten vorstellen.

§. 122.

Schon aus dem, was bei der Division unbenannter Zahlen §. 60 über die Brüche gesagt worden, sieht man, daß allezeit ein Bruch zum

Quotienten herauskommt, so oft eine kleinere Zahl, durch eine größere dividirt werden soll. Wenn z. B. 5 ℔. durch 8 dividirt werden sollen, so kommt $\frac{5}{8}$ ℔. heraus: denn der achte Theil jedes einzelnen Pfundes ist $\frac{1}{8}$ ℔. Nimmt man also von jeden der 5 Pfunde $\frac{1}{8}$, so hat man zusammen $\frac{5}{8}$ Pfunde.

Man kann demnach jeden Bruch auf eine doppelte Art erklären, oder verstehen. Z. B. $\frac{5}{8}$ ℔. heißt

entweder nach §. 119: es soll **ein** Pfund in 8 Theile getheilt, und fünf solche Theile sollen zusammen genommen werden;

oder es heißt, nach dem, was zu Anfang dieses §. gesagt worden, geradezu: **fünf** Pfund sollen in acht Theile getheilt, und nur **ein** solcher Theil soll genommen werden.

Daß es **nicht einerlei Arbeit** ist, ob ich ein Pfund in 8 Theile theile, oder ob ich fünf Pfund in 8 Theile theile, ist wohl für sich klar; aber daß dennoch beides hier am Ende einerlei geben müsse, wird hoffentlich aus dem Gesagten nicht minder einleuchtend seyn.

Uebrigens ist, um die Gründe aller Bruchrechnungen deutlich einzusehen, bisweilen die eine, bisweilen die andere Vorstellungsart bequemer. Man muß sich daher beide **deutlich**, und durch Anwendung auf mehrere Beispiele **geläufig** zu machen suchen, deren man sich sehr leicht eine Menge wird machen können, wenn man nur in

dem

dem obigen Beispiel, statt $\frac{5}{8}$ ℔. irgend einen andern Bruch setzt.

Einen unächten Bruch in eine gemischte, oder, wenn es angeht, ganze Zahl zu verwandeln.

§. 123.

Man dividire den Zähler des unächten Bruchs durch seinen Nenner, was herauskommt, es sey bloß eine ganze Zahl, oder eine gemischte Zahl, ist dem gegebenem unächten Bruche an Werthe gleich.

Der Bruch sey z. B. $\frac{19}{4}$ ℔., so darf man nur überlegen, daß $\frac{4}{4}$ ℔. allezeit ein ganzes ℔. ausmachen, so ist klar, daß in $\frac{19}{4}$ so viel ganze Pfunde stecken müssen, als oft 4 in 19 enthalten ist. Man muß also mit 4 in 19 dividiren. Dies giebt $4\frac{3}{4}$ ℔.

Der Bruch sey $\frac{135}{9}$ Thl.: so machen $\frac{9}{9}$ immer ein Ganzes; also müssen in $\frac{135}{9}$ so viele ganze Thaler enthalten, als vielmal 9 in 135 enthalten ist. Die Division giebt 15 Thl.

Noch kürzer kann man sich von der Richtigkeit der gegebenen Regel überzeugen, wenn man sich erinnert, daß im vorigen §. erwiesen ist, daß zwischen Brüchen und Quotienten eigentlich gar kein Unterschied ist, und daß es also einerlei ist, ob ich sage $\frac{27}{5}$, oder 27 dividirt durch 5. Indessen

hat

hat unsere obige Erklärungsart mehr Anschaulichkeit für Kinder.

Es würde unnöthig seyn, mehrere Beispiele hinzuzusetzen, da man sehr leicht nach diesen eine Menge anderer machen kann. Aber man gehe über diese Rechnung, weil sie leicht ist, nicht etwa zu schnell weg. Besonders wird es von Nutzen seyn, recht viel Exempel dieser Art im Kopfe rechnen zu lassen. Hierzu werden hauptsächlich kleine Exempel, deren Nenner entweder nur aus einer Ziffer besteht, oder 10, 11, 12, 24 ist, dienen können. Wenn indessen Zähler und Nenner nicht gar zu sehr verschieden sind, so ist es nicht schwer, auch unächte Brüche, wie die folgenden, im Kopfe in ~~un~~ächte Brüche zu verwandeln. $\frac{25}{19} = 1\frac{6}{19}$; $\frac{43}{36} = 1\frac{7}{36}$; $\frac{58}{27} = 2\frac{4}{27}$; $\frac{70}{43} = 1\frac{27}{43}$; u. s. w.

Zur Uebung auf dem Papier setzen wir noch folgende Exempel hinzu.

Uebungsbeispiele.

499) $\frac{12847}{16}$ Fl.
500) $\frac{20063}{17}$ Ct.
501) $\frac{51914}{72}$ Thl.
502) $\frac{21577}{73}$ Ct.
503) $\frac{101833}{137}$ ℔.
504) $\frac{92311}{107}$ Schfl.
505) $\frac{101671}{293}$ Ct.
506) $\frac{509995}{367}$ Thl.

Eine

Eine ganze Zahl in einen unächten Bruch, mit vorgeschriebenen Nenner zu verwandeln.

§. 124.

Man multiplizirt die ganze Zahl mit dem vorgeschriebenen Nenner, was herauskommt, ist der Zähler des gesuchten unächten Bruchs, worunter man dann geradezu den vorgeschriebenen Nenner setzt. Es sollen z. B. 7 Scheffel, in einen unächten Bruch mit dem Nenner 8, d. h. in Achtel-Scheffel, verwandelt werden: so sage ich, 7 mal 8 ist 56. Dies ist der Zähler des gesuchten unächten Bruchs, worunter 8 als Nenner zu schreiben ist. Die Rechnung giebt also 7 Sch. = $\frac{56}{8}$ Schfl.

Auf eben die Art berechnet man, daß 9 ℔. = $\frac{18}{2}$ ℔. = $\frac{27}{3}$ ℔. = $\frac{36}{4}$ ℔. ꝛc. oder 8 Thl. = $\frac{32}{4}$ Thl. = $\frac{72}{9}$ Thl. ꝛc. oder 12 Ct. = $\frac{48}{4}$ Ct. = $\frac{60}{5}$ Ct. = $\frac{120}{10}$ Ct. ꝛc.

Den Grund dieser Rechnung sieht man sehr leicht ein. Denn wenn ich z. B. 11 ℔. zu Achtel-Pfunden machen soll, so weiß ich, daß jedes Pfund 8 Achtel ($\frac{8}{8}$) enthält; folglich müssen 11 Pfund 11 mal 8 Achtel, d. i. 88 Achtel ($\frac{88}{8}$) enthalten. Eben die Schlüsse lassen sich bei jedem andern Beispiel machen.

Auch hier ist es nützlich und nöthig, nicht wenig kleine Exempel im Kopfe rechnen zu lassen.

Zur

Zur Uebung auf dem Papier können folgende dienen.

Uebungsbeispiele.

507) Wieviel 18tel Thl. sind 251 ganze Thl.?
508) — — 24 = Thl. sind 347 — Thl.?
509) — — 36 = Thl. sind 541 — Thl.?
510) — — 54 = Ct. sind 711 — Ct.?
511) — — 61 = ℔. sind 1344 — ℔.?
512) — — 97 = Wspl. sind 2734 — Wsp.?
513) — — 1213 = Ct. sind 375 — Ct.?
514) — — 3721 = ℔. sind 69 — ℔.?

Würde nur überhaupt verlangt, daß eine ganze Zahl in Gestalt eines Bruchs ausgedrückt werden sollte, ohne daß der Nenner vorgeschrieben wäre; so kann dies auf unzählige Arten geschehen. Die kürzeste aber ist, daß man geradezu unter die Zahl den Nenner 1 setzt; also z. B. $\frac{7}{1}$ statt 7 Ganze schreibt. Denn **Eintel** bedeutet nichts anders als **Ganze**.

Eine gemischte Zahl einzurichten, d. h. in einen einzigen unächten Bruch zusammen zu ziehen.

§. 125.

Man multiplizirt die ganze Zahl mit dem Nenner des angehängten Bruchs, und zu dem Produkt addirt man den Zähler. Die Zahl, wel-

welche so herauskommt, ist der Zähler des gesuchten Bruchs, unter den man bloß den Nenner des angehängten Bruchs, als Nenner unterzusetzen hat. Es sollen z. B. $9\frac{3}{4}$ Thl. in einen einzigen unächten Bruch verwandelt werden; so sagt man: 9 mal 4 ist 36, und 3 dazu gezählt, ist 39. Diese 39 sind nun der Zähler, und 4 der darunter zu setzende Nenner des gesuchten unächten Bruchs. Es sind also $9\frac{3}{4}$ Thl. $= \frac{39}{4}$ Thl.

Kommen größere Zahlen hierbei vor, als daß sich die Rechnung bequem im Kopfe machen ließe, (z. B. wenn $259\frac{367}{439}$ in einen unächten Bruch verwandelt werden soll); so macht man Aufsatz und Rechnung, wie hier an der Seite. Zuerst wird nemlich 259 mit 439 ganz auf die gewöhnliche Art multiplicirt; aber beim Addiren, wird aus dem Zähler (367) des angehängten Bruchs, zu den Einern 7, zu den Zehnern 6, zu den Hunderten 3 zugezählt. Was so herauskommt, (114068) ist der Zähler des unächten Bruchs, und 439 der Nenner desselben.

$$\begin{array}{r} 259\frac{367}{439} \\ \hline 2331 \\ 777 \\ 1036 \\ \hline 114068 \end{array}$$

$$259\frac{367}{439} = \frac{114068}{439}$$

Den Grund dieser Rechnung wird man sich leicht an jedem einzelnen Beispiele deutlich machen können. Gesetzt es sollen $14\frac{3}{8}$ in einen unächten Bruch verwandelt werden, so ist eigentlich nur die

die ganze Zahl 14 in einen Bruch mit dem Nenner 8 zu verwandeln. Dies geschieht nach dem vorigen §. dadurch, daß man 14 mit 8 multiplicirt. Man findet auf diese Art $14 = \frac{112}{8}$. Mit diesen 112 Achteln sollen aber noch 3 Achtel zusammengezogen werden, es kann also nichts anders, als 115 Achtel herauskommen.

Diese Rechnung, die erstaunend häufig bei allen Bruchrechnungen vorkommt, nennt man das **Einrichten der Brüche**. Eine Benennung, die beim ersten Blick sonderbar klingt, aber doch nicht übel gewählt ist. In einer gemischten Zahl, wie $5\frac{3}{4}$ Elle, wird ein Stück (5 Ellen) in ganzen Ellen, das übrige aber in Viertelellen angegeben; da hingegen in dem eben so großen unächten Bruch $\frac{23}{4}$ Elle alles auf gleichförmige Art in Vietelellen angegeben wird. Was also dort unregelmäßig zerstückelt war, ist hier gleichsam in die Richte gebracht.

Kleinere Exempel dieser Art sind fleißig im Kopfe zu rechnen; zu größeren Rechnungen auf dem Papiere können folgende dienen.

Uebungsbeispiele.

Es sollen eingerichtet werden:

515) $34\frac{15}{16}$ Thl.
516) $57\frac{9}{13}$ Thl.
517) $147\frac{11}{18}$ ℔.
518) $3\frac{214}{215}$ Lth.
519) $17\frac{102}{110}$ Ct.
520) $3434\frac{1}{30}$ Thl.
521) $531\frac{1}{21}$ Fl.
522) $4236\frac{147}{300}$ Schfl.

Er-

Erster Grundsatz für die Rechnungen mit Brüchen.

§. 126.

Wird der Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplicirt, so wird der ganze Bruch dadurch so vielmal größer, als die ganze Zahl Einheiten hat. Wird hingegen der Nenner mit einer ganzen Zahl multiplicirt, so wird der Bruch um so viel kleiner, als die ganze Zahl Einheiten hat.

Wenn z. B. $\frac{3}{4}$ im Zähler mit 5 multiplicirt werden, so erhält man $\frac{15}{4}$, und dies ist offenbar **fünfmal mehr** als $\frac{3}{4}$. Denn die Theile selbst (Viertel) sind ungeändert geblieben, ihre Anzahl aber ist fünfmal größer geworden.

Wird hingegen $\frac{3}{4}$ im Nenner mit 5 multiplicirt, so erhält man $\frac{3}{20}$, und dies ist **fünfmal weniger** als $\frac{3}{4}$. Denn nun ist die Anzahl der Theile (3) ungeändert geblieben. Die Theile selbst aber sind **fünfmal kleiner** geworden. Denn hätte ich z. B. eine Elle in Viertel getheilt, und ich wollte sie nun in Zwanzigstel theilen, so darf ich bloß jedes Viertel in 5 Theile theilen. Es ist also augenscheinlich jedes $\frac{1}{20}$ fünfmal kleiner als $\frac{1}{4}$.

Unser Grundsatz giebt uns also ein Mittel, jeden Bruch so oft als man will, zu vergrößern,

(vervielfältigen, multipliciren) oder zu verkleinern, (theilen, dividiren).

Um die Anwendung dieses Grundsatzes geläufig zu machen, lasse man Anfänger eine Menge kleine Exempel von folgender Art im Kopfe rechnen.

Was kommt heraus, wenn ich $\frac{3}{14}$ ℔. 3mal nehme? ($\frac{9}{14}$).

Oder; wenn ich $\frac{7}{8}$ Thl. 5mal größer mache? ($\frac{35}{8}$).

Oder; wenn ich $\frac{2}{9}$ Ct. mit 11 multiplikire? ($\frac{22}{9}$).

Desgleichen: was kommt heraus, wenn ich den Bruch $\frac{7}{11}$ 4mal kleiner mache? ($\frac{7}{44}$).

Oder; wie viel beträgt der 3te Theil von $\frac{5}{8}$? ($\frac{5}{24}$).

Oder; was kommt heraus, wenn ich $\frac{7}{12}$ ℔. mit 3 dividire? ($\frac{7}{36}$).

Zur Uebung auf dem Papier mögen folgende Exempel dienen.

Uebungsbeispiele.

523) $\frac{30}{85}$, 47mal genommen, beträgt?
524) $\frac{89}{129}$, mit 83 multiplicirt, beträgt?
525) $\frac{202}{589}$, 131mal vergrößert, beträgt?
526) $\frac{487}{814}$, mit 317 multiplicirt, beträgt?
527) $\frac{79}{1886}$, durch 23 dividirt, beträgt?
528) $\frac{97}{1470}$, mit 15 dividirt, beträgt?
529) $\frac{139}{2717}$, 19mal verkleinert, beträgt?
530) $\frac{229}{9120}$, der 32ste Theil davon, beträgt?
531) $\frac{983}{76325}$, der 79ste Theil davon, beträgt?

Zwei-

Zweiter Grundsatz für die Rechnungen mit Brüchen.

§. 127.

Wird der Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl dividirt, so wird der ganze Bruch dadurch so vielmal kleiner als die ganze Zahl Einheiten hat. Wird aber der Nenner eines Bruchs mit einer ganzen Zahl dividirt, so wird der Bruch dadurch so vielmal größer, als die ganze Zahl Einheiten hat.

Werden z. B. $\frac{9}{28}$ im Zähler mit 3 dividirt, so erhält man $\frac{3}{28}$, und dies ist offenbar 3mal weniger als $\frac{9}{28}$, da die Theile selbst (Achtundzwanzigstel), ungeändert geblieben sind, ihre Anzahl aber 3mal kleiner gemacht ist.

Werden hingegen $\frac{3}{28}$ im Nenner mit 4 dividirt, so erhält man $\frac{3}{7}$, und das ist 4mal mehr als $\frac{3}{28}$. Denn die Anzahl der Theile (3) ist in beiden Brüchen gleich, aber die Theile selbst sind in $\frac{3}{7}$ 4mal größer als in $\frac{3}{28}$. Denn hätte ich eine Elle in 28 Theile getheilt, und wollte sie nun in 7 Theile theilen, so müßte ich immer von den erstern Theilen 4 in Eins zusammenziehn.

Wir erhalten durch diesen zweiten Grundsatz ein neues Mittel, einen Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren und zu dividiren. Nur läßt sich diese zweite Art, nur alsdann bequem brauchen, wenn die Division aufgeht. Denn

wollte man z. B. $\frac{13}{15}$ auf diese Art mit 4 dividiren, so würde 13 durch 4 dividirt werden müssen, das gäbe $3\frac{1}{4}$. Man erhielte also einen Bruch $\frac{3\frac{1}{4}}{15}$, wo im Zähler noch ein Bruch steckte. Dergleichen Brüche nennt man **gebrochne Brüche**. Man vermeidet sie gern, welches auch immer angeht. Daher wollen wir diese zweite Multiplications- und Divisions-Regel nur da anwenden, wo die Division aufgeht. Man wird übrigens leicht bemerken, daß diese zweite Regel, wo sie anwendbar ist, den Vortheil hat, das Gesuchte in kleinern Zahlen zu geben, als die erste Regel.

Auch hier ist es nützlich, kleine Exempel, wie folgende, im Kopfe zu rechnen?

Der 3te Theil von $\frac{12}{17}$, beträgt? ($\frac{4}{17}$).
$\frac{8}{9}$ durch 4 dividirt, giebt? ($\frac{2}{9}$).
Der 5te Theil von $\frac{15}{22}$ beträgt? ($\frac{3}{22}$).
$\frac{11}{12}$ mit 3 multiplicirt, giebt? ($\frac{11}{4}$).
$\frac{7}{15}$, 5mal vergrößert, beträgt? ($\frac{7}{3}$).
$\frac{13}{21}$, 7mal genommen, beträgt? ($\frac{13}{3}$).

Zur Uebung auf dem Papier mögen folgende Exempel dienen.

Uebungsbeispiele.

532) $\frac{360}{407}$, durch 15 dividirt, beträgt?
533) $\frac{429}{790}$, 39mal verkleinert, beträgt?
534) $\frac{1672}{3813}$, 44mal verkleinert, beträgt?
535) $\frac{1098}{7715}$, der 61ste Theil davon?

536)

536) $\frac{409}{407}$, mit 37 multiplicirt, beträgt?
537) $\frac{487}{576}$, mit 48 multiplicirt, beträgt?
538) $\frac{839}{849}$, 53mal genommen, beträgt?
539) $\frac{971}{1647}$, 61mal vergrößert, beträgt?

Dritter Grundsatz für die Rechnungen mit Brüchen.

§. 128.

Wird ein Bruch im Zähler und Nenner zugleich, mit einerlei Zahl multiplicirt, oder dividirt, so bleibt sein Werth unverändert.

Multiplicirt man z. B. $\frac{3}{4}$ in Zähler und Nenner mit 5, so erhält man $\frac{15}{20}$; und dies ist mit $\frac{3}{4}$ völlig einerlei. Denn durch die Multiplication des Zählers wird der Bruch nach §. 126, 5mal größer, aber durch die Multiplication des Nenners wieder 5mal kleiner, also wieder so groß als er erst war. (Die Theile selbst sind 5mal kleiner gemacht, aber dafür ihre Anzahl 5mal größer genommen).

Eben so, wenn man $\frac{15}{25}$ im Zähler und Nenner mit 5 dividirt, so erhält man $\frac{3}{5}$, und dies ist mit $\frac{15}{25}$ völlig einerlei. Denn durch die Division des Zählers ist der Bruch nach §. 127, 5mal kleiner, durch die Division des Nenners aber, wieder 5mal größer geworden. (Die Theile selbst sind 5mal vergrößert, aber dafür auch ihre Anzahl 5mal kleiner geworden).

Will man sich die Richtigkeit der Sache gleichsam handgreiflich machen, so zeichne man sich die Länge einer Elle, und theile sie, wie es zwei solche gleiche Brüche ($\frac{15}{25}$ und $\frac{3}{5}$) erfordern.

Einen Bruch zu heben; das heißt: ihn auf die kleinsten Zahlen zu bringen.

§. 129.

Aus dem vorigen §. ist klar, daß ein Bruch, ohne seinen Werth zu ändern, auf sehr verschiedene Art geschrieben werden könne, und daß z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, u. s. w. bloß verschiedene Bezeichnungen von einem und demselben Werthe sind. In den meisten Fällen ist diejenige Art der Bezeichnung eines Bruchs die bequemste, wo er mit den möglichst kleinsten Zahlen geschrieben ist. Z. B. bei den obigen Brüchen, $\frac{1}{2}$. Dies heißt, **die kleinste Benennung** eines Bruchs; auch sagt man: der Bruch sey unter seinen **kleinsten Nenner**, oder auf die **kleinsten Zahlen** gebracht.

Hierbei entstehen zwei Fragen: 1) Woran kann man sehen, ob ein gegebener Bruch schon auf die kleinste Benennung gebracht sey, oder nicht? und 2) wenn er noch nicht in der kleinsten Benennung ist, wie bringt man ihn dazu?

Was die **erste** Frage betrift, so sieht man aus §. 128 leicht ein, daß ein Bruch noch nicht

unter

unter den kleinsten Nenner gebracht sey, so lange sich noch eine Zahl findet, womit sich sowohl Zähler als Nenner dividiren läßt. Z. B. $\frac{84}{91}$ ist noch nicht unter dem kleinsten Nenner, weil sich sowohl 84 als 91 mit 7 dividiren lassen. Dividirt man wirklich, so verwandelt sich $\frac{84}{91}$ in $\frac{12}{13}$; und dies ist die kleinste Benennung des Bruchs, weil es keine Zahl mehr giebt, womit sich sowohl 12 als 13 dividiren ließe.

Was die zweite Frage betrift, so ist klar, daß man wird den größten Divisor aufsuchen müssen, womit sich Zähler und Nenner dividiren läßt. Wenn z. B. der Bruch $\frac{45}{60}$ im Zähler und Nenner mit 5 dividirt wird, so erhält man $\frac{9}{12}$; aber dies ist noch nicht die kleinste Benennung; denn es giebt einen größern Divisor als 5, womit sich sowohl 45 als 60 dividiren läßt, und dieser ist 15. Wird also $\frac{45}{60}$ mit 15 im Zähler und Nenner dividirt, so erhält man $\frac{3}{4}$, welches die kleinste Benennung ist.

Diese Verkleinerung der Zahlen eines Bruchs, von der bei allen Bruchrechnungen sehr häufig Gebrauch gemacht wird, nennt man das **Heben**, (auch wohl das **Aufheben**) der Brüche. Doch wird das Wort Heben überhaupt gebraucht, **so oft man zwei Zahlen, durch eine und dieselbe dritte Zahl dividirt.**

Wir kommen nun zur nähern Erklärung der Regeln, die beim Heben der Brüche zu beobachten sind.

Brüche durch Hülfe der oben erklärten Kennzeichen kleiner Divisoren zu heben.

§. 130.

Wenn Brüche nicht mit gar zu großen Zahlen geschrieben sind, so sind die oben §. 67 erklärten Kennzeichen der kleinen Divisoren völlig hinreichend, sowohl zu finden, ob sich ein Bruch heben läßt, als auch das Heben selbst zu bewerkstelligen. Ja, oft kann man auch bei großen Zahlen, bloß durch diese Kennzeichen fertig werden. Wir wollen also zeigen, wie die Sache auf diesem Wege anzugreifen ist.

a) Läßt sich ein Bruch durch Divisoren heben, die nicht größer als 12 sind, so zeigen dies die Kennzeichen geradezu. Und zwar ist es nicht nothwendig, daß man gleich den größten Divisor finde, womit sich der Bruch heben läßt, sondern man hebt ihn mit dem Divisor, der am ersten in die Augen fällt. Ist er so noch nicht auf die kleinste Benennung gebracht, so verfährt man mit dem Bruch, den das erste Heben gegeben hat, wieder eben so, und setzt dies fort, bis man deutlich sieht, daß sich nichts mehr heben läßt. Es sey z. B. der Bruch $\frac{315}{385}$ gegeben, so macht man Aufsatz und Rechnung, wie hier an der Seite. Nemlich zuerst fällt in die Augen, daß Zähler und Nenner mit 5 aufgehn.

$$\frac{315}{385} \overset{5}{\smile} \left| \frac{63}{77} \overset{7}{\smile} \right| \frac{9}{11}$$

Man macht also rechter Hand neben dem Bruch

Bruch einen Strich, schreibt den Divisor 5 oben, und dividirt Zähler und Nenner. So verwandelt sich der Bruch in $\frac{63}{77}$, wo sehr bald in die Augen fällt, daß man noch zum zweitenmale, nemlich mit 7 heben kann. Durch dies zweite Heben, verwandelt sich der Bruch in $\frac{7}{11}$, welches seine kleinste Benennung ist.

Uebungsbeispiele.

540) $\frac{455}{945}$.
541) $\frac{1584}{2442}$.
542) $\frac{2460}{3900}$.
543) $\frac{3276}{3486}$.
544) $\frac{8160}{8736}$.
545) $\frac{15840}{16665}$.
546) $\frac{7062}{8184}$.
547) $\frac{36162}{39438}$.

b) Auch selbst alsdenn, wenn sich durch Hülfe der Kennzeichen kein **gemeinschaftlicher** Divisor zeigt; aber doch an einer von beiden Zahlen ein oder mehrere Divisoren sichtbar sind, so kann man in den mehresten Fällen leicht finden, ob und wodurch sich der Bruch heben läßt. Es sey z. B. der Bruch $\frac{3285}{4891}$ gegeben; wo zwar leicht in die Augen fällt, daß der Zähler mit 5 und 9 aufgeht, am Nenner aber gar kein Divisor sichtbar ist. Man nehme nun den Zähler, und zerfälle ihn, wie bei a geschehen ist, erst durch 5, dann durch 9, wo zuletzt 73 herauskommt, welches sich nicht weiter zerfällen läßt. Auf diese Art ist 3285

a

5) 3285
9) 657
73

b

73
3285 / 4891 | 45 / 67

zerfällt in 5 × 9 × 73. Soll sich nun der Bruch heben lassen, so muß es durch eine von diesen Zahlen gehn, oder er läßt sich gar nicht heben. Mit 5 und 9 läßt er sich nicht heben, dies ergiebt sich schon aus den Kennzeichen von 5 und 9. Also ist bloß noch zu versuchen, ob es mit 73 geht. Versucht man also den Nenner 4891 zu dividiren, so geht die Division wirklich auf. Es läßt sich also der Bruch durch 73 heben, und es kommt $\frac{45}{67}$ heraus. Hätte sich aber der Nenner nicht durch 73 dividiren lassen, so wäre es ein sicheres Zeichen gewesen, daß der Bruch gar nicht gehoben werden könne. Dieser Fall kommt z. B. bei folgendem Bruche vor. $\frac{677}{744}$. Denn der Nenner 744 läßt sich in 3 × 8 × 31 zerfällen. Sollte sich also der Bruch heben lassen, so müßte es mit 31 seyn. Wenn man aber 677 durch 31 dividirt, so geht die Rechnung nicht auf: also läßt er sich gar nicht heben.

$$\begin{array}{l} 3)\ 744 \\ 8)\ 248 \\ \quad\ \ 31 \end{array}$$

Uebungsbeispiele.

548) $\frac{3090}{7313}$.

549) $\frac{2773}{3008}$.

550) $\frac{979}{1780}$.

551) $\frac{7469}{11058}$.

552) $\frac{928}{1827}$.

553) $\frac{821}{2035}$.

Allge-

Allgemeine Regel für das Heben der Brüche.

§. 131.

Man wird mit den im vorigen §. erklärten Regeln in den allermeisten Fällen ausreichen. Da indessen doch Fälle vorkommen, wo sie nicht hinreichend sind, so ist es nöthig, für diesen Nothfall noch eine allgemeine Regel in Bereitschaft zu haben. Wir wollen diese sogleich an einen Beispiel deutlich machen. Der Bruch sey $\frac{6401}{18511}$, so macht man eine Reihe von Divisionen nach folgender Regel: man dividirt 1) mit dem Zähler in den Nenner; 2) mit dem Rest der ersten Division in den Divisor der ersten Division; 3) mit dem Rest der zweiten Division in den Divisor der 2ten Division; 4) mit dem Rest der 3ten Division in den Divisor der 3ten Division, u. s. w. nemlich immer mit dem letzten Rest in den letzten Divisor. Und dies setzt man so lange fort, bis man auf eine Division kommt, die keinen Rest läßt. Dann ist der letzte Divisor diejenige Zahl, womit sich der Bruch heben, und auf seine kleinste Benennung bringen läßt.

Für den obigen Bruch $\frac{6401}{18511}$ bekommt die Rechnung folgende Gestalt.

A)

A) 6401|18511|2
12802

B) 5709|6401|1
5709

C) 692|5709|8
5536

D) 173|692|4
692
0

E
173|6401|37
519
1211
1211
0

F
173|18511|107
173
1211
1211
0

173

G) 6401 | 37
18511 | 107

Bei A, B, C, D steht die angegebene Reihe von Divisionen, wobei zu bemerken, daß gegen unsere bisherige Gewohnheit der Divisor nie unter, sondern vor den Dividendus gesetzt worden. Bei A ist 18511 durch 6401 dividirt. Der Quotient ist 2, und der Rest 5709. Bei B ist mit diesen Rest in den vorigen Divisor 6401 dividirt: der Quotient ist 1, und der Rest 692. Bei C ist mit diesem Rest in den vorhergehenden

Di=

Divisor 5709 dividirt: der Quotient ist 8, und es bleibt der Rest 173. Bei D endlich ist mit diesem Rest in den vorhergehenden Divisor 692 dividirt: der Quotient ist 4, und die Rechnung geht auf. Der letzte Divisor 173 ist nun die Zahl die wir suchten, nemlich der größte Divisor zu dem Zähler und Nenner unsres Bruchs, wodurch derselbe auf seine kleinste Benennung gebracht wird. Bei E ist daher der Zähler 6401, und bei F der Nenner 18511 durch 173 dividirt. Jene Division giebt den Quotienten 37, diese 107. Bei G endlich ist dies Heben in der Form vorgestellt, die wir schon im vorigen §. beobachtet haben. Der gehobene Bruch heißt $\frac{37}{107}$.

Läßt sich der Bruch gar nicht heben, so laufen die Divisionen so lange fort, bis man endlich zum letzten Divisor 1 erhält, wo freilich die Rechnung aufgeht, nur ist 1 zum Heben untauglich, weil es im Dividiren die Zahlen ungeändert läßt. Der Bruch sey $\frac{113}{788}$, so ist die Rechnung folgende: die keiner Erläuterung bedürfen wird.

```
113|788|6
   678
   ---
   110|113|1
      110
      ---
        3|110|36
          9
          --
          20
          18
          --
           2|3|1
            2
            --
             1|2|2
               2
               --
               0
```

Es ist übrigens nicht nothwendig, diese ganze Reihe von Divisionen jederzeit völlig zu Ende zu bringen: sondern man kann aufhören, so bald man an eine Division kommt, wo man deutlich einsieht, daß der Divisor und Dividendus sich gegen einander nicht heben lassen. Z. B. ein mäßig geübter Rechner kann schon nach der 2ten Division, wo 110 durch 3 dividirt werden soll, abbrechen, weil man sehr leicht einsieht, daß 3 und 110 ein Paar Zahlen sind, für der es keinen gemeinschaftlichen Divisor giebt.

Ehe wir an einen Beweis dieser Regeln denken, wird es gut seyn, die folgenden Uebungsbeispiele

beispiele durchzurechnen, um sich erst das ganze Verfahren deutlich und geläufig zu machen.

Uebungsbeispiele.

554) $\frac{6499}{7236}$. 67 = $\frac{97}{108}$

555) $\frac{17596}{26145}$. 83 = $\frac{212}{315}$

556) $\frac{34553}{43709}$. 109 = $\frac{317}{401}$

557) $\frac{44323}{61087}$. 127 = $\frac{349}{481}$

558) $\frac{62431}{77188}$. läßt sich nicht heben

559) $\frac{74141}{102680}$. mit 151 = $\frac{491}{680}$

560) $\frac{90514}{116399}$. mit 167 = $\frac{542}{697}$

561) $\frac{186633}{207841}$. läßt sich 3 heben.

Wir kommen nunmehr zu den Beweis der erklärten Regeln.

Wenn eine Zahl z. B. 92 mit irgend eine Zahl z. B. 4 aufgeht, und man nimmt von ihr (von 92) 4, oder 8, oder 12, oder 16 ꝛc. oder irgend eine andere Zahl, die auch mit 4 aufgeht, weg, so sieht man leicht ein, daß allezeit der Rest auch mit 4 aufgehen müsse. Denn wenn 92 mit 4 aufgeht, so darf man sich vorstellen, daß es lauter Vieren (nemlich aus 23 Vieren) zusammengesetzt sey; nimmt man daher von dieser Zahl eine oder mehrere Vieren weg, so muß doch das übrige immer noch aus lauter Vieren bestehen.

Daraus folgt weiter, daß, wenn zwei Zahlen, die beide mit 4 aufgehen, dividirt werden, und einen Rest lassen, so muß dieser Rest auch mit 4 aufgehen. Wenn z. B. 92 durch 24 dividirt wird, welche Zahlen beide mit 4 aufgehn, so kommt 3 heraus, und es bleibt der Rest 20, der auch mit 4 aufgeht. Denn wenn ich 92 mit 24 dividire,

dividire, so thue ich eigentlich nichts anders als daß ich 24 dreimal von 92 abziehe. Was ich abziehe, geht also alles mit 4 auf, und daher kommt es, daß auch der Rest 20 nothwendig mit 4 aufgehen muß.

Auf diese Art wird man leicht die Richtigkeit des Satzes einsehen: **daß wenn ein Divisor und Dividendus mit irgend einer Zahl aufgehe, so muß auch der Rest mit der nemlichen Zahl aufgehen.** Und dies ist der Hauptsatz, auf welchen unser Beweis beruht; und man wird sehr wohl thun, wenn man sich denselben, in mehrern Beispielen, recht anschaulich macht.

Wir wollen nun, um diesen Satz auf unsere Rechnung anzuwenden, den Bruch $\frac{391}{713}$ zu heben suchen. Die Rechnung würde so aussehen:

```
A) 391|713|1
       391
B)     322|391|1
          322
C)        69|322|4
             276
D)          46|69|1
               46
E)           23|46|2
                46
                 0
```

F	G
23|391|17	23|713|31
23	69
161	23
161	23
0	0

H $\frac{\overset{23}{\smile}}{\frac{321}{713}}\Big|\frac{17}{31}$

Hier schließe ich nun so: wenn 391 und 713 in der Zeile A, einen gemeinschaftlichen Divisor haben, so muß der Rest 322, der bei der ersten Division bleibt, mit eben der Zahl aufgehen. — Eben so in der Zeile B: wenn 322 und 391 einen gemeinschaftlichen Divisor haben, so muß der Rest der 2ten Division 69 auch mit eben der Zahl aufgehen. — Ferner in der Zeile C: wenn 69 und 322 einen gemeinschaftlichen Divisor haben, so muß der Rest der 3ten Division 46, mit eben der Zahl aufgehn. — Eben so in der Zeile D: wenn 46 und 69 einen gemeinschaftlichen Divisor haben, so muß der Rest der 4ten Division, 23, mit eben der Zahl aufgehn. — Nun zeigt sich in der 5ten Division, daß 23 und 46 einen gemeinschaftlichen Divisor haben, nemlich 23: also müssen mit 23 auch alle vorhergenannte Zahlen (69, 322, 391, 713) aufgehn. Es muß sich also der Bruch $\frac{321}{713}$ mit 23 heben lassen.

Bei einem unächten Bruch, z. B. $\frac{713}{391}$ ist die Rechnung eben so; nur daß man bei der ersten Division nicht den Nenner durch den Zähler, sondern umgekehrt, dividirt.

Uebrigens sieht man leicht, daß diese Rechnung nicht bloß zum Heben der Brüche dient, sondern daß man ganz allgemein vermittelst derselben finden kann, ob zwei Zahlen einen gemeinschaftlichen Divisor haben? und welchen?

Brüche durch größere Zahlen auszudrücken.

§. 132.

Soll ein Bruch mit größern Zahlen geschrieben werden, welches bei vielen Rechnungen nöthig ist, so muß er nach §. 128, im Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl multiplizirt werden.

Man hat dabei seine Aufmerksamkeit vorzüglich auf die Nenner zu richten. Denn wo diese Rechnung vorkommt, da ist immer der Nenner, den der veränderte Bruch erhalten soll, vorgeschrieben.

Wenn man irgend einen Bruch, z. B. $\frac{3}{7}$, im Zähler und Nenner, nach der Reihe mit 2, 3, 4, 5, 6, 7 rc. multipliziret, so erhält man eine Reihe Brüche

$\frac{3}{7}$, $\frac{6}{14}$, $\frac{9}{21}$, $\frac{12}{28}$, $\frac{15}{35}$, $\frac{18}{42}$, $\frac{21}{49}$ rc.

Die

die sämmtlich mit $\frac{3}{7}$ einerlei sind. Vergleicht man ihre Nenner, so sieht man, daß es keine andere Zahlen sind, noch seyn können, als solche, die mit 7 aufgehen. **Ein Bruch läßt sich also nur unter solche größere Nenner bringen, die mit seinem eigenen Nenner aufgehen.** (Also: $\frac{3}{7}$ lassen sich wohl zu 15teln, 35teln, 55teln rc., aber nicht zu 7teln, 12teln, 21teln rc. machen, weil die letztern Nenner nicht mit 5 aufgehn).

Sollten nun $\frac{3}{7}$ zu 105teln gemacht werden, so entsteht noch die Frage, wie soll ich die Zahl finden, womit $\frac{3}{7}$ im Zähler und Nenner multiplizirt werden muß, damit der veränderte Bruch den Nenner 105 erhalte. Offenbar finde ich diese Zahl, wenn ich mit 7 in 105 dividire. Rechnung und Aufsatz sind also folgende.

105

$\frac{3}{7} \mid 15 \mid \frac{45}{105}$

Zuerst wird hinter den Bruch rechter Hand ein Strich, und über denselben der vorgeschriebene Nenner 105 gesetzt. Dann dividirt man 105 durch 7, der Quotient 15 kommt hinter den Strich, und dies ist die Zahl, womit $\frac{3}{7}$ im Zähler und Nenner multiplizirt werden muß, um in 105tel verwandelt zu werden. Man hat aber eigentlich nur den Zähler mit 15 zu multipliziren, denn daß die Multiplikation des Nenners 105 geben muß, weiß man schon voraus, weil 7 in 105, 15mal enthalten ist.

Bei größern Zahlen ist Aufsatz und Rechnung eben so; nur daß die Division und Multiplikation auf einem Nebenblatt gemacht werden muß.

$\overbrace{\frac{13}{35}|47|\frac{611}{1645}}^{1645}$

Gienge in einem Fall die Division nicht auf, so wäre der vorgeschriebene Nenner falsch.

Uebungsbeispiele.

562) $\frac{17}{18}$ zu 378stel. 566) $\frac{66}{67}$ zu 1206tel.
563) $\frac{32}{35}$ zu 665stel. 567) $\frac{75}{82}$ zu 2050stel.
564) $\frac{27}{39}$ zu 507tel. 568) $\frac{87}{91}$ zu 2639stel.
565) $\frac{61}{90}$ zu 2070stel. 569) $\frac{99}{103}$ zu 3811tel.

Zwei oder mehrere Brüche unter einen gemeinschaftlichen Hauptnenner zu bringen.

§. 133.

Vermittelst des Vorigen lassen sich jederzeit zwei oder mehrere Brüche, die verschiedene Nenner haben, so verändern, daß sie, ohne ihren Werth zu ändern, einerlei Nenner bekommen.

Da wir nemlich gesehen haben, daß sich ein Bruch unter jeden größern Nenner bringen läßt, der mit seinem eigenen Nenner aufgeht, so ist klar, daß sich zwei oder mehrere Brüche zugleich, unter jeden Nenner bringen lassen, der mit ihren sämmtlichen Nennern aufgeht. So werden sich z. B. die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{5}$ beide unter jeden Nenner bringen lassen, der sowohl mit

4, als mit 5 aufgeht. Eine solche Zahl findet man allemal, wenn man die beiden Nenner multiplizirt $4 \times 5 = 20$. Aber es giebt außerdem noch unzählige solche Nenner (als 40, 60, 80, 100, 120 ꝛc.) unter welche sich eben diese Brüche bringen lassen. Aber die kleinste dieser Zahlen ist offenbar die bequemste, und das ist hier 20. Sobald man diesen gemeinschaftlichen Nenner, den man den **Hauptnenner** (oder **Generalnenner**) zu nennen pflegt, für die Brüche gefunden, so geschieht die Rechnung ganz nach Anleitung des vorigen §, so daß die hier beigefügte Rechnung ohne Erläuterung verständlich seyn wird. Der Bruch $\frac{3}{4}$ wird durch dieselbe in $\frac{15}{20}$, und der Bruch $\frac{2}{5}$ in $\frac{8}{20}$ verwandelt.

	20	
$\frac{3}{4}$	5	$\frac{15}{20}$
$\frac{2}{5}$	4	$\frac{8}{20}$

Auch bei 3 und mehreren Brüchen kann man eben so rechnen, die Brüche mögen $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{7}$ seyn, so werden sie sich unter jeden Hauptnenner bringen lassen, der mit 6, 5 und 7 aufgeht. Man multiplizire also erst 6 mit 5, welches 30 giebt; dann 30 mit dem 3ten Nenner 7, wodurch man 210 erhält, welches ein brauchbarer Hauptnenner für die 3 Brüche ist.

	210	
$\frac{5}{6}$	35	$\frac{175}{210}$
$\frac{2}{5}$	42	$\frac{84}{210}$
$\frac{3}{7}$	30	$\frac{90}{210}$

Uebungsbeispiele.

570) $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{8}$. 572) $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{3}$.

571) $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{5}$. 573) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$.

Zu zwei nicht großen Brüchen den kleinsten Hauptnenner im Kopfe zu finden.

§. 134.

Auf die Art, wie wir im vorigen §. gerechnet haben, findet man nicht immer den kleinsten Hauptnenner. $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{12}$ würden nach der Rechnung des vorigen §. zu 96steln gemacht werden müssen, da sie sich doch beide, unter den viel kleinern Nenner 24 bringen lassen. Dies ereignet sich allezeit, so bald die beiden Nenner einen gemeinschaftlichen Divisor haben (wie hier, wo 8 und 12 sich durch 4 dividiren lassen).

In diesem Fall findet man den kleinsten Hauptnenner so: einen von beiden Nennern dividirt man durch den gemeinschaftlichen Divisor, und bloß durch den Quotienten multiplizirt man den andern ~~Divisor~~ Nenner. Hier dividirt man z. B. 12 durch 4, der Quotient ist 3, und hierdurch multiplizirt man 8, so erhält man $3 \times 8 = 24$, als den kleinsten Hauptnenner. Die übrige Rechnung ist völlig wie bei den vorhergehenden Exempeln.

	24	
$\frac{5}{8}$	3	$\frac{15}{24}$
$\frac{7}{12}$	2	$\frac{14}{24}$

Den Grund unserer Regel sieht man am leichtesten ein, wenn man die beiden Nenner durch den gemeinschaftlichen Divisor zerfällt. Nemlich $8 = 4 \times 2$, und $12 = 4 \times 3$. Da nun der Hauptnenner mit 8 und 12 aufgehen muß, so muß er auch mit 4, mit 2, desgleichen mit 4 und

und mit 3 aufgehn. Allein es ist nicht nöthig, daß 4 zweimal in ihm enthalten sey, sondern er wird schon mit 12 und 8 aufgehen, wenn er nur mit 2, mit 4, und mit 3 aufgeht. Man kann also die eine 4 aus dem einen Nenner durch Division wegschaffen.

Wenn ein Nenner in dem andern aufgeht, so ist der größere selbst der Hauptnenner, wie man leicht selbst wahrnehmen wird, wenn man unsere Regel auf das hier beigesetzte Beispiel anwendet.

16		
$\frac{9}{16}$	1	$\frac{9}{16}$
$\frac{3}{4}$	4	$\frac{12}{16}$

Uebungsbeispiele.

574) $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{12}$. 576) $\frac{11}{20}$, $\frac{9}{28}$.
585) $\frac{13}{15}$, $\frac{5}{9}$. 577) $\frac{13}{35}$, $\frac{4}{63}$.

Zu mehreren kleinen Brüchen den kleinsten Hauptnenner eben so zu finden.

§. 135.

Sind der Brüche mehrere, so kann man den kleinsten Hauptnenner finden, indem man erst zu dem ersten und zweiten Nenner nach dem vorigen §. den Hauptnenner sucht. Diesen nimmt man mit dem 3ten Nenner zusammen, und sucht hierzu wieder, auf eben die Art den Hauptnenner; so hat man einen Hauptnenner für die drei ersten Brüche. Diesen Hauptnenner nimmt man auf eben die Art,

mit dem Nenner des 4ten Bruchs zusammen, und fährt auf diese Art fort, bis man einen Hauptnenner zu allen Brüchen hat.

360

$\frac{5}{12}$	30	$\frac{150}{360}$
$\frac{7}{8}$	45	$\frac{315}{360}$
$\frac{3}{15}$	24	$\frac{72}{360}$
$\frac{4}{9}$	40	$\frac{160}{360}$

Bei den hier an der Seite stehenden Brüchen rechnet man so: die beiden ersten Nenner 12 und 8, haben den Divisor 4 gemein, und der Hauptnenner für beide ist 24. Ferner 24 und 15 haben den Divisor $\overset{3}{\cancel{4}}$ gemein, und der Hauptnenner für beide ist 120. Ferner 120 und 9 haben den Divisor 3 gemein, und der Hauptnenner zu beiden ist 360. Unter diesen lassen sich also alle 4 Brüche bringen, die übrige Rechnung ist wie vorher.

Uebungsbeispiele.

578) $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{3}{16}$.
579) $\frac{5}{12}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$.
580) $\frac{19}{20}$, $\frac{11}{25}$, $\frac{7}{30}$.

Anm. Wenn man sich selbst noch mehrere Exempel machen will, so muß man dahin sehen, daß die Brüche, die man aufschreibt, auf die kleinsten Zahlen gebracht sind, sonst findet man nicht immer den kleinsten Hauptnenner. Wer z. B. zu $\frac{8}{12}$ und $\frac{8}{16}$ den Hauptnenner sucht, der findet 48. Wenn man hingegen $\frac{2}{3}$ statt $\frac{8}{12}$ und $\frac{1}{2}$ statt $\frac{8}{16}$ setzt, so sieht man, daß sich beide Brüche zu 6teln machen lassen.

Allge-

Allgemeine Regel mehrere Brüche unter einen gemeinschaftlichen kleinsten Hauptnenner zu bringen.

§. 136.

Wenn die Nenner so klein sind, daß man die vorher beschriebene Rechnung anwenden kann, so ist sie die bequemste. Sind hingegen die Nenner so groß, daß man die Rechnung nicht wohl im Kopfe vollenden kann, so rechnet man besser auf folgende Art.

Es sollten z. B. die Brüche $\frac{10}{24}$, $\frac{31}{45}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{13}{14}$, unter den kleinsten Hauptnenner gebracht werden, so schreibt man die Nenner in eine Zeile neben einander. Dann sucht man eine Zahl, durch welche sich mehrere von den Nennern dividiren lassen.

	24.	45.	18.	14
2)	12.	45.	9.	7
3)	4.	15.	3.	7
3)	4.	5.	1.	7

So läßt sich hier z. B. 24, 18 und 14 mit 2 dividiren. Man schreibt also diesen Divisor 2 vorne, und was sich dividiren läßt, dividirt man wirklich, was sich aber nicht dividiren läßt (wie hier 45), setzt man undividirt unter dem Strich. Nach dieser Division stehn in der 2ten Zeile die Zahlen 12, 45, 9, 7. Mit diesen verfährt man gerade wie mit der ersten Zeile, und diese Arbeit wiederholt man, bis man zu einer Zeile kommt, in der sich

auch nicht zwei Zahlen finden, die einen Divisor gemein hätten. Ist man so weit, so multiplizirt man alle Zahlen, die in der untersten Zeile stehn, nebst allen gebrauchten und linker Hand stehenden Divisoren, in beliebiger Ordnung mit einander. Ihr Produkt ist der gesuchte kleinste Hauptnenner. In dem obigen Beispiele sind (mit Weglassung der 1 in der untersten Zeile) folgende Zahlen mit einander zu multipliziren: die Divisoren 2, 3, 3, und die Quotienten aus der untersten Zeile 4, 5, 7. Die Ordnung ist willkührlich. Ich rechne so, die 3 Divisoren geben $2 \times 3 \times 3 = 18$; ferner $4 \times 5 = 20$, und $18 \times 20 = 360$; endlich $360 \times 7 = 2520$, welches der gesuchte kleinste Hauptnenner ist.

Von der Richtigkeit dieser Art zu rechnen kann man sich überzeugen, wenn man bemerkt, was in der obigen Rechnung mit jedem der 4 Nenner eigentlich geschehen ist. Jeder ist zerfällt worden in zwei oder mehr Bestandtheile, die sich sämtlich, entweder unter den Divisoren, oder unter den Quotienten finden. Der erste Nenner 24 ist in der 2ten Zeile mit 2, und in der 3ten Zeile mit 3 dividirt, der hier bleibende Quotient 4 ist in die 4te Reihe heruntergerückt. 24 ist also zerfällt in $2 \times 3 \times 4$, wovon sich die beiden ersten Bestandtheile unter den Divisoren, der letzte unter den

Quo-

Quotienten findet. Aehnliche Betrachtungen lassen sich bei jedem der folgenden Nenner anstellen. Formirt man nun ein Produkt aus sämtlichen Divisoren und Quotienten, so ist klar, daß in demselben die Bestandtheile eines jeden einzelnen Nenners enthalten seyn werden, daß also dieses Produkt durch jeden einzelnen Nenner aufgehen muß; daß folglich dieses Produkt ein brauchbarer Hauptnenner zu den gegebenen Brüchen sey. Daß es aber der **kleinste** Hauptnenner sey, ist daraus klar, weil jeder Bestandtheil, der mehreren Nenner gemein ist, nur **einmal** in das Produkt kommt, also alles Entbehrliche weggelassen ist. Die übrige Rechnung ist im Grunde wie in den vorigen §§. Nur daß, weil hier etwas größere Multiplicationen und Divisionen vorkommen, kleine Nebenrechnungen auf einem besondern Blatt nicht wohl zu vermeiden sind. Die Divisionen kann man indeß leichter machen, wenn man die sämtlichen Bestandtheile des Hauptnenners $2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7$ vor Augen behält. Denn wird der Hauptnenner durch 24 (d. i. $2 \times 3 \times 4$) dividirt, so muß $4 \times 5 \times 7 = 105$ herauskommen, u. s. f.

2520

19/24	105	1995 / 2520
31/45	56	1736 / 2520
7/18	140	980 / 2520
13/14	180	2340 / 2520

Uebungs-

Uebungsbeispiele.

581) $\frac{17}{28}$, $\frac{23}{30}$, $\frac{11}{24}$, $\frac{24}{35}$, $\frac{9}{20}$. = 840
582) $\frac{1}{56}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{11}{21}$, $\frac{5}{24}$. = 2172
583) $\frac{61}{120}$, $\frac{7}{48}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{25}$. = 1200

§. 137.

Je besser alles, was in diesem Abschnitt erklärt worden, gefasset und geübt ist, um desto leichter wird man sich in alle Rechnungen mit Brüchen finden.

Drey-

Dreyzehnter Abschnitt.

Vom Zusammenzählen oder Addiren der Brüche.

Addition solcher Brüche, die gleiche Nenner haben.

§. 138.

Brüche die gleiche Nenner haben, addirt jeder, der nur weiß, was ein Bruch ist, auch ohne Anweisung. Daß $\frac{3}{17} + \frac{5}{17} + \frac{6}{17} = \frac{14}{17}$, ist leicht einzusehen. Durchs Zusammenzählen können nicht die Theile und ihre Benennung, sondern nur ihre Anzahl geändert werden. Also addirt man bloß die Zähler, und setzt unter ihre Summe den ungeänderten Nenner.

Sind der Brüche so viele, daß man die Rechnung nicht wohl im Kopfe machen kann, oder befinden sich Ganze vor den Brüchen, oder Zahlen von verschiedenen Benennungen; so zeigen die folgenden Beyspiele, wie die Rechnung auf dem

dem Pappiere am bequemsten aufzusetzen und zu machen ist.

$\frac{7}{36}$ Thl.
$\frac{5}{36}$ =
$\frac{11}{36}$ =
$\frac{17}{36}$ =
$\frac{29}{36}$ =
$\frac{31}{36}$ =

$2\frac{7}{9}$ = $\left|\frac{100}{36}\right|\frac{25}{9}$ (4)

Die Summe aller Zähler ist 100. Also die Summe aller Brüche $\frac{100}{36}$. Man schreibt aber diese Summe nicht gerade unter die Bruchsäule, weil sehr oft nach geschehener Addition, noch eine kleine Nachrechnung zu machen ist. $\frac{100}{36}$ lassen sich nemlich erst mit 4 heben, und verwandeln sich dadurch in $\frac{25}{9}$. Und dieser unächte Bruch läßt sich wieder in die gemischte Zahl $2\frac{7}{9}$ verwandeln. Und erst dies wird unter die Säule der Brüche, als der bequemste Ausdruck der Summe, geschrieben.

$4\frac{3}{11}$ Ct.
$13\frac{10}{11}$ =
$\frac{9}{11}$ =
$6\frac{8}{11}$ =
14 =
$1\frac{7}{11}$ =

$41\frac{4}{11}$ = $\left|\frac{37}{11}\right.$

Zuerst werden die Zähler der Brüche addirt, ihre Summe ist 37; also die Summe der Brüche selbst, $\frac{37}{11}$. Dieser unächte Bruch beträgt in einer gemischten Zahl $3\frac{4}{11}$; wovon $\frac{4}{11}$ unter die Säule der Brüche geschrieben, die 3 Ganzen aber mit den übrigen Ganzen zusammengezählt worden. So beträgt die ganze Summe $41\frac{4}{11}$ Ct.

Ct.

Ct.	℔.		
2	$58\frac{5}{8}$		
1	$\frac{7}{8}$		
19	68		
3	$17\frac{5}{8}$		
—	$19\frac{1}{8}$	2	
26	$54\frac{1}{4}$	$\frac{18}{8}$	$\frac{2}{4}$

Die Brüche geben die Summe $\frac{18}{8}$, d. i. wenn man mit 2 hebt, $\frac{2}{4}$; oder in einer gemischten Zahl $2\frac{1}{4}$. Hiervon wird $\frac{1}{4}$ unter die Säule der Brüche geschrieben. Die 2 Ganzen aber werden mit den übrigen ganzen Pfunden zusammengezählt. Die übrige Rechnung ist ganz wie bei mehrfach benannten Zahlen.

Uebungsbeispiele.

584) $\frac{3}{49} + \frac{8}{49} + \frac{11}{49} + \frac{22}{49} + \frac{30}{49} + \frac{34}{49} + \frac{39}{49} + \frac{41}{49}$. $= 3\frac{41}{49}$

585) $3\frac{9}{11} + 17\frac{5}{11} + 22\frac{9}{11} + 5\frac{1}{11} + 6\frac{10}{11} + 314\frac{7}{11} + 506\frac{2}{11} + 60\frac{4}{11} + 1\frac{3}{11} + 10\frac{6}{11} + 87\frac{8}{11}$. $= 1036\frac{9}{11}$

586) 30 Thl. 5 Gr. $6\frac{20}{23}$ Pf. + 55 Thl. — Gr. $9\frac{7}{23}$ Pf. + 104 Thl. 15 Gr. $\frac{19}{23}$ Pf. + 71 Thl. 14 Gr. $4\frac{11}{23}$ Pf. + 6 Thl. 19 Gr. $7\frac{1}{23}$ Pf. + 47 Thl. 21 Gr. $8\frac{22}{23}$ Pf. + 189 Thl. 10 Gr. $10\frac{9}{23}$ Pf. + 14 Thl. 17 Gr. $1\frac{18}{23}$ Pf. = 520 Thl. 9 gr. $1\frac{15}{23}$ pf.

587) 51 Ct. 9 ℔. $13\frac{1}{32}$ Lth. + 7 Ct. 109 ℔. $23\frac{3}{32}$ Lth. + 80 Ct. 54 ℔. $\frac{29}{32}$ Lth. + 36 Ct. 98 ℔. $17\frac{11}{32}$ Lth. + 19 Ct. 70 ℔. $29\frac{19}{32}$ Lth. + 1 Ct. $15\frac{7}{32}$ Lth. + 29 Ct. 36 ℔. $30\frac{15}{32}$ Lth. + 11 Ct. 85 ℔. $14\frac{31}{32}$ Lth. + 48 Ct. 96 ℔. $24\frac{27}{32}$ Lth. 287 Ct. 12 ℔ $9\frac{15}{32}$ L.

588)

588) $\frac{8}{17} + \frac{13}{17} + \frac{16}{17} + \frac{2}{17} + \frac{5}{17} + \frac{9}{17} + \frac{10}{17} + \frac{3}{17}$ $= 3\frac{15}{17}$

589) $4\frac{8}{19} + 88\frac{1}{19} + 15\frac{7}{19} + 21\frac{18}{19} + 9\frac{13}{19} + 45\frac{6}{19} + 3\frac{11}{19} + 17\frac{15}{19}$ $= 206\frac{3}{19}$

590) 66 Thl. 1 Gr. $4\frac{3}{13}$ Pf. + 15 Thl. 18 Gr. $\frac{5}{13}$ Pf. + 103 Thl. $8\frac{7}{13}$ Pf. + 90 Thl. 21 Gr. $4\frac{9}{13}$ Pf. + 21 Thl. 17 Gr. $5\frac{1}{13}$ Pf. + 7 Thl. 16 Gr. $\frac{9}{13}$ Pf. + 24 Thl. 2 Gr. $3\frac{11}{13}$ Pf. + 23 Gr. $4\frac{2}{13}$ Pf. 143 Thl. 11 Gr. $9\frac{6}{13}$ Pf. = 473 Thl. 16 gr. $5\frac{1}{13}$ pf.

591) 7 Ct. 88 ℔. $15\frac{13}{19}$ Lth. + 100 ℔. $6\frac{17}{19}$ Lth. + 2 Ct. 50 ℔. $12\frac{12}{19}$ Lth. + 11 Ct. 73 ℔. $11\frac{16}{19}$ Lth. + 3 Ct. 35 ℔. $\frac{11}{19}$ Lth. + 22 Ct. 18 ℔. $30\frac{15}{19}$ Lth. + 13 Ct. 79 ℔. $29\frac{13}{19}$ Lth. + 4 Ct. $14\frac{6}{19}$ Lth. = 66 Ct. 6 ℔ $26\frac{8}{19}$ Lth.

Addition zweier oder mehrerer Brüche von ungleichen Nennern.

§. 139.

Sind Brüche von ungleichen Nennern zu addiren, so ist nichts weiter nöthig, als daß man sie vorher sämtlich nach §. 133 — 136 unter einen gemeinschaftlichen Hauptnenner bringt. Alles was hierzu nöthig ist, ist also schon erklärt. Um aber die bequemste äußere Form der Rechnung zu zeigen, wollen wir ein Paar Beispiele vollständig berechnen.

	420	
$\frac{5}{12}$	35	175
$\frac{7}{15}$	28	196
$\frac{11}{21}$	20	220
$1\frac{57}{140}$		$\frac{591}{420}$ $\frac{197}{140}$ (3)

Zu $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{15}$ und $\frac{11}{21}$ findet man nach §. 135 oder 136 den Hauptnenner 420. Unter diesen Nenner werden die Brüche nach §. 132 gebracht. Die Zahlen 175, 196, 220 in der 3ten Säule, sind die Zähler der veränderten Brüche, weil man um der Kürze willen in dergleichen Rechnungen, den allgemeinen Nenner 420 wegläßt. Die Summe dieser Zähler ist 591. Also die Summe der Brüche selbst $\frac{591}{420}$. Dieser Bruch verwandelt sich durch Hebung mit 3 in $\frac{197}{140}$, d. i. $1\frac{57}{140}$, welches vorne unter die Säule der Brüche geschrieben wird.

	72	
$15\frac{7}{8}$	9	63
$9\frac{4}{9}$	8	32
$\frac{11}{12}$	6	66
$26\frac{17}{72}$		$\frac{161}{72}$

Das Unterscheidende dieses zweiten Exempels besteht darin, daß Ganze vor den Brüchen stehen. Der Hauptnenner 72 läßt sich hier nach §. 135 aus dem Kopfe finden. Die Summe der drei Brüche, nachdem sie unter den Nenner 72 gebracht worden, beträgt $\frac{161}{72}$, d. i. 2 Ganze und $\frac{17}{72}$. Diese $\frac{17}{72}$ werden unter die vordere Säule der Brüche geschrieben; die 2 Ganzen aber werden gemerkt, und mit den übrigen Ganzen zusammengezählt, deren Summe auf diese Art 26 wird.

Wspl.	Sch.	Mtz. 180		
3	19	$12\frac{7}{18}$	10	70
—	21	$4\frac{14}{15}$	12	168
21	4	$2\frac{7}{20}$	9	63
25	21	$3\frac{121}{180}$		$\frac{301}{180}$

Auch in diesem dritten Beispiel läßt sich der Hauptnenner nach §. 135 durch Kopfrechnung finden, besonders wenn man von unten anfängt. Die übrige Rechnung ist wie vorher. Die Brüche geben die Summe $\frac{301}{180}$, welches 1 Ganzes und $\frac{121}{180}$ beträgt. Der letzte Bruch kommt unter die Brüche. Das Ganze (d. i. 1 Metze), wird zu den übrigen Metzen gezählt, und die übrige ganze Rechnung wie bei benannten Zahlen gemacht.

Uebungsbeispiele.

592) $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + \frac{5}{7} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{3}{8} + \frac{3}{5}$. $3\frac{290}{280}$

593) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{4}{5} + \frac{7}{8} + \frac{7}{10} + \frac{11}{12} + \frac{13}{15} + \frac{17}{24}$. $5\frac{19}{20}$

594) $14\frac{7}{8} + 11\frac{2}{5} + 5\frac{8}{9} + 62\frac{1}{2} + 3\frac{7}{10} + 13\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$. $= 116\frac{197}{360}$

595) $9\frac{2}{3} + 1\frac{5}{8} + 16\frac{4}{7} + 5\frac{3}{4} + 18\frac{2}{5} + 21\frac{1}{3} + 17\frac{7}{8} + 20\frac{1}{6} + 10\frac{2}{9}$. $121\frac{769}{1260}$

596) $48\frac{1}{5} + 3\frac{8}{9} + 3\frac{11}{12} + 7\frac{1}{7} + 10\frac{2}{3} + 33\frac{3}{8} + 5\frac{1}{9} + 7\frac{3}{4} + 8\frac{1}{2}$. $129\frac{403}{840}$

597) 3 Thl. 18 Gr. $4\frac{2}{3}$ Pf. + 7 Thl. 10 Gr.

Gr. $2\frac{1}{2}$ Pf. + 18 Thl. 7 Gr. $3\frac{1}{4}$ Pf. + 41 Thl. 16 Gr. $8\frac{2}{5}$ Pf. + 26 Thl. 8 Gr. $4\frac{1}{6}$ Pf. + 80 Thl. 5 Gr. $3\frac{7}{8}$ Pf. = 177 rtl 18 gr 2 $\frac{102}{102}$ pf

598) 12 Thl. 8 Gr. $6\frac{1}{2}$ Pf. + 5 Thl. 4 Gr. $3\frac{1}{8}$ Pf. + 2 Thl. 7 Gr. $1\frac{1}{5}$ Pf. + 16 Thl. 12 Gr. $8\frac{2}{3}$ Pf. + 10 Thl. 4 Gr. $1\frac{1}{4}$ Pf. + 85 Thl. 2 Gr. $\frac{3}{8}$ Pf. + 6 Thl. 15 Gr. $7\frac{5}{6}$ Pf. + 1 Thl. 6 Gr. $3\frac{3}{4}$ Pf. = 139 rtl 12 gr. $8\frac{7}{10}$ pf.

599) 87 Thl. $3\frac{2}{3}$ Pf. + 17 Thl. 11 Gr. $2\frac{1}{5}$ Pf. + 3 Thl. 23 Gr. $6\frac{1}{2}$ Pf. + 106 Thl. 15 Gr. $\frac{1}{8}$ Pf. + 5 Thl. 16 Gr. $7\frac{5}{9}$ Pf. + 6 Thl. 5 Gr. $\frac{17}{18}$ Pf. + 55 Thl. 11 Gr. $2\frac{3}{4}$ Pf. + 71 Thl. 1 Gr. $3\frac{2}{7}$ Pf. + 10 Thl. 10 Gr. $11\frac{1}{6}$ Pf. = 363 rtl 23 gr 2 $\frac{163}{840}$ pf.

600) 4 Ct. 3 ℔. $1\frac{1}{8}$ Lt. + 10 Ct. 100 ℔. $7\frac{5}{6}$ Lt. + 3 Ct. 8 ℔. $17\frac{5}{16}$ Lt. + 33 Ct. 44 ℔. $30\frac{1}{15}$ Lt. + 4 Ct. 39 ℔. $27\frac{1}{2}$ Lt. + 29 Ct. 24 ℔. $21\frac{17}{24}$ Lt. + 2 Ct. 15 ℔. $19\frac{1}{3}$ Lt. = 87 Ct 16 ℔ 28 $\frac{347}{480}$ Lt.

601) 35 Ct. 78 ℔. $16\frac{5}{7}$ Lt. + 87 ℔. $21\frac{8}{9}$ Lt. + 11 Ct. 91 ℔. $30\frac{2}{17}$ Lt. + 1 Ct. 17 ℔. $\frac{8}{15}$ Lt + 4 Ct. $13\frac{1}{32}$ Lt. + 13 Ct. 40 ℔. $7\frac{7}{36}$ Lt. + 50 ℔. $\frac{2}{3}$ Lt. + 7 Ct. 81 ℔. $19\frac{16}{21}$ Lt. = 75 Ct 7 ℔ 13 $\frac{51889}{57120}$ Lt.

602) 7 Wspl. 21 Sch. $14\frac{7}{8}$ Mtz. + 1 Wspl. 3 Sch. $9\frac{6}{11}$ Mtz. + $18\frac{1}{2}$ Mtz. + 5 Wspl. 8 Sch. $\frac{3}{4}$ Mtz. + 22 Sch. $\frac{11}{18}$ Mtz. + 3 Wspl. 3 Sch. $4\frac{1}{4}$ Mtz. + 13 Wspl. $7\frac{5}{9}$

Mtz. + 2 Wspl. 15 Sch. $17\frac{11}{12}$ Mtz. + 11 Wspl. 18 Sch. $1\frac{1}{3}$ Mtz. = 45 W. 22 S. $11\frac{80}{264}$ M.

603) 13 Wspl. 11 Sch. $\frac{2}{9}$ Mtz. + 8 Sch. $12\frac{1}{16}$ Mtz. + 7 Wspl. 1 Sch. $8\frac{5}{7}$ Mtz. + 5 Wspl. $8\frac{3}{20}$ Mtz. + 7 Wspl. 7 Sch. $8\frac{5}{6}$ Mtz. + 33 Wspl. 5 Sch. $\frac{9}{13}$ Mtz. + 6 Wspl. 16 Sch. $8\frac{4}{5}$ Mtz. + 9 Wspl. 13 Sch. $7\frac{7}{8}$ Mtz. + 8 Wspl. 2 Sch. $15\frac{17}{32}$ Mtz. = 90 W. 19 S. $6\frac{115433}{131040}$ M.

Vier-

Vierzehnter Abschnitt.

Vom Abziehen oder Subtrahiren der Brüche.

Subtraction solcher Brüche, welche gleiche Nenner haben.

§. 140.

Wenn die Brüche, welche man subtrahiren soll, gleiche Nenner haben, so ist meistens die Rechnung so leicht, daß sie auch Kinder, sobald sie verstehen, was ein Bruch ist, ohne Anleitung rechnen. Wer begreift nicht, daß wenn $\frac{3}{8}$ Ct. von $\frac{7}{8}$ Ct. abgezogen werden sollen, $\frac{4}{8}$ Ct. (d. i. $\frac{1}{2}$ Ct.) übrig bleiben. Denn wenn ich Achtel von Achteln abziehe, so kann so wenig etwas anders als Achtel übrig bleiben, so wenig als Birnen übrig bleiben können, wenn ich Aepfel von Aepfeln wegnehme. D. h. der Nenner bleibt ungeändert, und nur der Zähler, oder die Anzahl der Theile wird geändert.

Wir wollen die verschiedenen Fälle, die bei ser Rechnung vorkommen können, kürzlich durchgehen. Es sollen von $\frac{17}{18}$ abgezogen werden $\frac{3}{18}$, so zieht man 3 von 17 ab. Es bleiben also $\frac{14}{18}$ übrig. Die Subtraction ist nun geschehen. Weil aber $\frac{14}{18}$ sich mit 2 heben lassen, so kommt noch die kleine Nebenrechnung hinzu, wodurch man sie in $\frac{7}{9}$ verwandelt.

$$\begin{array}{l|l} \frac{17}{18} & \\ \frac{3}{18} & 2 \\ \hline \frac{14}{18} & \frac{7}{9} \end{array}$$

Von $4\frac{3}{16}$ sollen $\frac{15}{16}$ abgezogen werden. Hier kommt der Fall vor, daß ein größerer Bruch $\frac{15}{16}$, von einem kleinern $\frac{3}{16}$ abgezogen werden sollte. Man thut also, was man in diesem Fall immer thut, man borgt 1, bei den 4 Ganzen. So wie man aber einen geborgten Ct. zu Pfunden, ein geborgtes ℔. zu Lothen machen muß, u. s. w., eben so muß man hier die geborgte 1 zu 16teln machen. 1 Ganzes aber beträgt $\frac{16}{16}$. Und nun rechnet man entweder $\frac{16}{16}$ und $\frac{3}{16}$ zusammen, und zieht $\frac{15}{16}$ von $\frac{19}{16}$ ab, wo $\frac{4}{16}$ übrig bleiben; oder welches allemal bequemer ist, man zieht $\frac{15}{16}$ von den geborgten $\frac{16}{16}$ ab, und was übrig bleibt, nemlich $\frac{1}{16}$, zählt man mit den obenstehenden $\frac{3}{16}$ zusammen, wodurch man wie vorher $\frac{4}{16}$ erhält. Diese $\frac{4}{16}$ lassen sich aber durch 4 heben und in $\frac{1}{4}$ verwandeln. Von den obenstehenden 4 Ganzen aber sind noch 3, also in allen $3\frac{1}{4}$ übrig.

$$\begin{array}{l|l} 4\frac{3}{16} & \\ \frac{15}{16} & 4 \\ \hline 3\frac{4}{16} & \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 3\frac{7}{11} \\ \hline 11\frac{4}{11} \end{array}$$

Von 15 Ganzen sollen $3\frac{7}{11}$ abgezogen werden. Um den Bruch $\frac{7}{11}$ abziehen zu können, borgt man von 15 ein Ganzes, und macht dies zu $\frac{11}{11}$. Hievon $\frac{7}{11}$ abgezogen, bleiben $\frac{4}{11}$; und von 14 Ganzen 3 abgezogen, bleiben 11, also in allem $11\frac{4}{11}$ übrig.

$$\begin{array}{r} 17\frac{9}{14} \\ 12 \\ \hline 5\frac{9}{14} \end{array}$$

Von $17\frac{9}{14}$ sollen 12 Ganze abgezogen werden. Da von $\frac{9}{14}$ nichts abzuziehen da ist, so bleiben sie unvermindert übrig. Von den 17 Ganzen aber bleiben 5, also in allem $5\frac{9}{14}$ übrig.

Wir setzen noch einige Exempel vollständig berechnet hinzu, die keiner umständlichen Erläuterung bedürfen werden.

a)

Thl.	Gr.	Pf.
12	15	$3\frac{1}{3}$
4	21	$8\frac{2}{3}$
7	17	$6\frac{2}{3}$

b)

Thl.	Gr.	Pf.
90	—	—
27	14	$6\frac{5}{9}$
62	9	$5\frac{4}{9}$

c)

Wspl.	Sch.	Mtz.
114	8	$-\frac{1}{4}$
37	20	$9\frac{3}{4}$
76	11	$6\frac{2}{4}\Big\vert\frac{1}{2}$

d)

Wspl.	Sch.	Mtz.
1	—	$-\frac{1}{8}$
—	17	$13\frac{5}{8}$
—	6	$2\frac{4}{8}\Big\vert\frac{1}{2}$

e)

Ct.	℔.
13	$4\frac{5}{32}$
2	$83\frac{17}{32}$
10	$30\frac{20}{32}\Big\vert\frac{5}{8}$

f)

Ct.	℔.
217	—
69	$14\frac{19}{64}$
147	$95\frac{45}{64}$

Im Exempel b wird 1 Thl. an die Gr. geborgt; 1 Gr. hiervon an die Pf.; ein Pf. hiervon wird zu $\frac{2}{2}$ gemacht. Eben so wird im Exempel d, ein Wspl. an die Schfl., hiervon 1 Schfl. an die Mtz., und hiervon eine Metze an die Brüche geborgt, und zu $\frac{8}{8}$ gemacht, u. s. w.

Uebungsbeispiele.

604) $24\frac{7}{8} - 19 =$
605) $307\frac{11}{24} - 99 =$
606) $54\frac{23}{32} - 27\frac{9}{32} =$
607) $120\frac{88}{121} - 51\frac{59}{121} =$
608) $283 - 199\frac{3}{8} =$
609) $400 - 247\frac{11}{98} =$
610) $36\frac{3}{16} - 17\frac{9}{16} =$
611) $7001\frac{97}{200} - 809\frac{107}{200} =$

Subtraction solcher Brüche, die ungleiche Nenner haben.

§. 141.

Sollen solche Brüche subtrahirt werden, die ungleiche Nenner haben, so muß man sie erst nach §. 133 — 136 unter einerlei Nenner bringen. Dann subtrahirt man wie im vorigen §.

	126	
$\frac{13}{18}$	7	91
$\frac{5}{21}$	6	30
$\frac{61}{126}$		61

Z. B. zu 18teln und 21steln ist nach §. 134 oder 136, der kleinste Hauptnenner 126. Es verwandeln sich daher nach §. 132 die beiden Brüche

Brüche $\frac{13}{18}$ und $\frac{5}{21}$ in $\frac{91}{126}$ und $\frac{30}{126}$; wovon man, wie beim Addiren, bloß die Zähler hinschreibt. Die Subtraction dieser Zähler giebt 61, d. i. $\frac{61}{126}$, und da dies ein ächter Bruch ist, der sich auch nicht heben läßt, so ist nichts weiter übrig, als ihn vorn unter die Brüche zu setzen:

	72	
$3\frac{3}{8}$ Thl.	9	27
$1\frac{7}{9}$ =	8	56
$1\frac{43}{72}$ =		43

Von $3\frac{3}{8}$ Thl. sollen $1\frac{7}{9}$ Thl. abgezogen werden. Der Hauptnenner zu 8teln und 9teln ist (nach §. 133), 72. Und die Brüche $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{9}$ verwandeln sich (§. 132) in $\frac{27}{72}$ nnd $\frac{56}{72}$. Das aufgegebene Exempel lautet also nach dieser Verwandlung so: von $3\frac{27}{72}$ Thl. sollen $1\frac{56}{72}$ Thl. abgezogen werden. Es ist also hier der Fall vorhanden, wo ein größerer Bruch $\frac{56}{72}$ von einem kleinern $\frac{27}{72}$ abgezogen werden soll. Um dies zu können, muß man vorne von den 3 Thl. einen borgen, und denselben in $\frac{72}{72}$ verwandeln. Hiervon lassen sich nun $\frac{56}{72}$ abziehen, und es bleiben $\frac{16}{72}$ übrig, die mit den obenstehenden $\frac{27}{72}$ zusammengenommen $\frac{43}{72}$ geben. Es ist indessen nicht nöthig, wie wir hier um mehrerer Deutlichkeit willen gethan haben, bei dem Abziehen, die Nenner mit in Rechnung zu ziehen: sondern man sagt, 56 kann von 27 nicht abgezogen werden; also muß 1 Thl. geborgt werden. Dieser beträgt 72 (nemlich 72stel). Hiervon 56 abgezogen, bleiben

bleiben 16, und 27 dazu, macht 43. Da sich der Bruch $\frac{43}{72}$ nicht heben läßt, so wird er vorn unter die Brüche geschrieben, und dann werden noch die Ganzen subtrahirt.

Ct.	℔.	96		
43	—	$\frac{5}{32}$	3	15
9	100	$\frac{19}{24}$	4	76
3	9	$\frac{35}{96}$		35

Von 43 Ct. und $\frac{5}{32}$ ℔. sollen 9 Ct. $100\frac{19}{24}$ ℔. abgezogen werden. Der Hauptnenner zu 32steln, und 24steln ist (§. 133), 96. Und die beiden Brüche verwandeln sich in $\frac{15}{96}$ und $\frac{76}{96}$. Man sagt also: da 76 von 15 nicht abgezogen werden kann, so muß man borgen. Da aber keine ganzen Pfunde oben sind, so kann nur ein ganzer Ct., d. i. 110 ℔., geborgt worden. Von diesen 110 ℔. setzt man in Gedanken 109 in die leere Stelle der Pfunde. 1 ℔. aber macht man zu $\frac{96}{96}$steln. Daher lautet nun die Rechnung so: 76 von 96 bleiben 20, und 15 dazu, sind 35. Unter die Brüche kommen also $\frac{35}{96}$. Dann zieht man 100 ℔. von 109 ℔. ab, u. s. f.

Uebungsbeispiele.

612) $\frac{5}{8}$ — $\frac{2}{7}$.
613) $\frac{5}{6}$ — $\frac{1}{8}$.
614) $\frac{13}{20}$ — $\frac{7}{15}$.
615) $\frac{17}{32}$ — $\frac{9}{55}$.
616) $39\frac{5}{7}$ — $20\frac{1}{32}$.
617) $312\frac{19}{20}$ — $97\frac{9}{17}$.

618)

618) $19\frac{1}{3}$ — $6\frac{7}{8}$.
619) $536\frac{1}{4}$ — $78\frac{11}{15}$.
620) $403\frac{2}{5}$ — $66\frac{8}{9}$.
621) $210\frac{5}{18}$ — $89\frac{17}{31}$.

622) 33 Thl. 4 Gr. $5\frac{11}{12}$ Pf. — 17 Thl. $6\frac{5}{12}$ Pf.
623) 500 Thl. — 388 Thl. 11 Gr. $7\frac{3}{8}$ Pf.
624) 392 Thlr. 17 Gr. $9\frac{1}{2}$ Pf. — 197 Thl. 16 Gr. $11\frac{5}{9}$ Pf.
625) 437 Thl. 21 Gr. $1\frac{11}{32}$ Pf. — 309 Thl. $6\frac{19}{24}$ Pf.
626) 37 Ct. 81 ℔. $7\frac{1}{15}$ Lth. — 19 Ct. 93 ℔. $21\frac{7}{8}$ Lth.
627) 77 Ct. 103 ℔. 11 $\frac{2}{3}$ Lth. — 51 ℔. 17 $\frac{109}{110}$ Lth.
628) 30 Wspl. 1 Sch. $11\frac{51}{83}$ Mtz. — 11 Wsp. 7 Sch. $7\frac{40}{41}$ Mtz.
629) 108 Wspl. 5 Sch. $5\frac{0}{57}$ Mtz. — 19 Wspl. 16 Sch. $9\frac{11}{24}$ Mtz.

Funf-

Funfzehnter Abschnitt.

Vom Zusammensetzen oder Multipliciren der Brüche.

Allgemeine Erklärung der Multiplication.

§. 142.

Nach §. 32 heißt **multipliciren** so viel als, den Multiplicandus so vielmal nehmen, als der Multiplicator Einheiten enthält. Diese Erklärung ist richtig und anwendbar, so lange der Multiplikator **eine ganze Zahl** ist, und daher eine bestimmte Anzahl ganzer Einheiten enthält. Der Multiplicandus darf hierbei beschaffen seyn, wie er will. Daher konnten wir in den Vorübungen §. 126 und 127 Brüche mit ganzen Zahlen multipliciren, ohne eine neue Erklärung zu bedürfen.

Ist hingegen der Multiplicator ein Bruch, z. B. $\frac{3}{4}$, so enthält er keine **ganzen** Einheiten, son-

sondern nur Theile der Einheit. Daher kann in diesem Fall auch das Product nicht den Multiplicandus **mehrmal ganz**, sondern nur Theile desselben enthalten. Wir müssen daher von nun an unsern Begriff von der Multiplication erweitern, und ihn so festsetzen: multipliciren heißt **eine Zahl finden, die aus dem Multiplicandus selbst, oder aus Theilen desselben eben so zusammengesezt ist, als der Multiplicator aus der Einheit, oder aus Theilen derselben.**

Es sei z. B. 16 mit $\frac{5}{8}$ zu multipliciren, so muß das Product aus 16 entstehen, wie $\frac{5}{8}$ aus 1. Nun entsteht aber $\frac{5}{8}$ aus 1, wenn man 1 in 8 Theile theilt, und einen solchen Theil ($\frac{1}{8}$) 5mal nimmt. Und auf eben die Art muß man den Multiplicandus in 8 Theile theilen, und einen solchen Theil (2), 5mal nehmen: wodurch man das Product 10 erhält.

Grundsatz für die Multiplication mit Brüchen.

§. 143.

Aus dieser erweiterten Erklärung ergiebt sich folgender Satz, auf welchen alle Regeln für die Multiplication mit Brüchen beruhen.

Wenn der Multiplicator ein Bruch ist, so muß der Multiplicandus in beliebiger Ordnung mit dem Zähler desselben

ben multiplicirt, und mit dem Nenner dividirt werden.

Das will sagen: wenn ich irgend einen Multiplicandus, er sey ganz oder gebrochen, oder gemischt, von einer Benennung, oder von mehreren Benennungen mit einem Bruch z. B. $\frac{3}{4}$ multipliciren soll, so kann ich

entweder zuerst den Multiplicandus mit 3 multipliciren, und was herauskommt, mit 4 dividiren

oder ich kann in umgekehrter Ordnung erst den Multiplicandus mit 4 dividiren, und was herauskommt, mit 3 multipliciren.

Denn da nach unserer Erklärung das Product aus den Multiplicandus eben so zusammengesetzt seyn muß, als der Multiplicator aus der Einheit, oder aus Theilen zusammengesetzt ist, so darf man sich nur anschaulich machen, auf welche Art $\frac{3}{4}$ aus 1, durch **Theilen** und **Wiederholen** oder **Vervielfältigen** entstehen könne. Dies kann nun auf zweierlei Art geschehen.

Da $\frac{3}{4}$ nach §. 122 so viel heißen kann, als 3 dividirt durch 4: so kann ich sagen $\frac{3}{4}$ entstehn aus 1, wenn ich 1 zuerst **dreimal nehme**, (das giebt 3), und hiervon **den vierten Theil** mache, (das giebt $\frac{3}{4}$). Ist also $\frac{3}{4}$ ein Multiplicator, so werde ich das Product auf eben dieselbe Art machen müssen. Ich muß nemlich den Multiplicandus erst **dreimal nehmen** (d. h. mit 3 mul-

multipliciren), und von dem, was herauskommt, den **vierten Theil** machen (d. h. mit 4 dividiren).

Es kann aber $\frac{3}{4}$ noch auf andere Art aus 1 hervorgebracht werden. Ich kann nemlich zuerst 1 in **vier Theile theilen** (das giebt $\frac{1}{4}$), und dieses Viertel **dreimal nehmen**, (das giebt $\frac{3}{4}$). Ist also $\frac{3}{4}$ ein Multiplicator, so kann ich das Product finden, wenn ich zuerst den Multiplicandus in **vier Theile theile**, (d. h. mit 4 dividire), und dann den 4ten Theil desselben **dreimal nehme**, (d. h. mit 3 multiplicire).

Um die Anwendung dieses Grundsatzes geläufig zu machen, rathe ich mehrere kleine Exempel nach demselben rechnen zu lassen, wozu am bequemsten Multiplicationen ganzer Zahlen mit einem Bruch gewählt werden können. Z. B.

12 Thl. $\times \frac{3}{5}$	36 ℔. $\times \frac{4}{9}$
36 (3	9) 4
5) $7\frac{1}{5}$ Thl.	16 ℔. (4

Hauptsächlich müssen viel dergleichen Exempel im Kopfe gerechnet werden.

Anm. Da auf diesen Satz die Beweise aller besondern Multiplicationsregeln beruhen, so scheue man die Mühe nicht, ihn zur völligen Deutlichkeit zu bringen. Ein gutes Hülfsmittel, sich die Entstehung eines gebrochnen Multiplicators anschaulich zu machen, besteht darin, daß man eine körperliche Einheit (die Länge einer Elle, 1 ℔. oder Lth. von einer theilbaren

ren Waare, oder auch nur einen Bogen Papier rc.) vor sich nimmt, und daraus den Werth des Multiplicators (z. B. $\frac{3}{4}$) durch wirkliche Theilung und Zusammensetzung darstellt.

Zusatz.

§. 144.

Der Multiplicator ist auch hier, wie §. 34, allezeit eine unbenannte Zahl, oder wenn er eine Benennung hat, so hat diese auf das Product keinen Einfluß. Wenn man ausrechnen soll, wie viel $\frac{3}{4}$ ℔. Seide kosten, das ℔. zu 8 Thl. gerechnet, so ist $\frac{3}{4}$ ein Multiplicator, womit 8 Thl. multiplicirt werden müssen; aber die Benennung ℔. hat auf das Product, welches 6 Thl. ist, keinen Einfluß, und man erhält immer 6 Thl., man mag statt **Pfund Seide**, irgend was anders setzen, als Centner, Loth, Elle u. d. g. m. Der Multiplicandus ist der Stoff, woraus das Product gemacht werden soll, und kann daher alle mögliche Benennungen haben. Der Multiplicator hingegen, oder vielmehr seine Entstehung aus Eins, giebt bloß die Regel, wie ich das Product machen soll.

Allgemeine Multiplicationsregel für Brüche.

§. 145.

Wer **zwei Brüche** mit einander zu multipliciren weiß, muß allenfalls im Stande seyn, jedes

jedes Exempel, in welchem Brüche vorkommen, zu rechnen. Denn ist eine ganze Zahl im Exempel, so kann sie nach §. 124 in Gestalt eines Bruchs geschrieben werden. Ist eine gemischte darin, so kann man sie nach §. 125 zu einem einzigen Bruch machen. Kommt eine Zahl von mehreren Benennungen vor, so kann man sie nach §. 80. unter eine einzige Benennung bringen, und dann wie vorher in Bruchgestalt schreiben.

Zwei Brüche aber werden dadurch mit einander multiplicirt, daß man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multiplicirt. Jenes giebt den Zähler, dieses den Nenner des Products. Z. B. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$. Denn wenn in diesem Beispiel $\frac{5}{7}$ der Multiplicator ist, so muß nach §. 143 der Bruch $\frac{2}{3}$ mit 5 multiplicirt, und was herauskommt, mit 7 dividirt werden. Jenes giebt $\frac{10}{3}$, und dieses $\frac{10}{21}$.

Diese Regel ist in vieler Rücksicht sehr bequem; theils weil sie sich leicht beweisen und einsehen läßt; theils weil sie das Gedächtniß wegen ihrer großen Einfachheit leicht faßt; theils weil man dabei eine Menge besonderer Regeln für die Fälle, wo ganze und gemischte Zahlen vorkommen, entbehren kann, theils endlich, weil sie auch in den meisten Fällen eine leichte und bequeme Rechnung giebt, welches sonst bei sehr allgemeinen Regeln nicht immer der Fall ist.

Ohngeachtet aber unsere Regel wirklich auf alle nur erdenkliche Fälle angewendet werden kann, so wollen wir sie doch hier nur auf solche Fälle anwenden, wo entweder nur unbenannte, oder bloß einfachbenannte Zahlen vorkommen. Ueber die Fälle, wo mehrere Benennungen vorkommen, werden wir in besondern §§. reden müssen.

Ehe wir aber Anwendungen von unserer Regel machen, wollen wir noch eine leichte Folgerung aus derselben ziehn. Man sieht nemlich vermittelst unserer Regel sehr deutlich ein, daß Multiplicator und Multiplicandus, so wie bei ganzen Zahlen (§. 34), also auch bei Brüchen verwechselt werden können. Denn ich bekomme z. B. aus den beiden Brüchen $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{11}$ immer das Product $\frac{15}{44}$, ich mag, welchen von beiden Brüchen ich will, als den Multiplicator ansehen. Diese Verwechselung ist also jederzeit verstattet, nur muß man merken, **daß die Benennung des Products sich in allen erdenklichen Fällen nach der Benennung des wahren Multiplicandus richtet.**

Zuerst lasse man Anfänger recht viele kleine Exempel, z. B. von folgender Art, im Kopfe rechnen.

3 Thl. $\times \frac{3}{4} = \frac{3}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ Thl.
$1\frac{1}{2}$ Thl. $\times \frac{5}{7} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$ Thl.
$2\frac{1}{2}$ ℔. $\times 3\frac{1}{4} = \frac{5}{2} \times \frac{13}{4} = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8}$ ℔.
$3\frac{3}{4}$ Wspl. $\times 7 = \frac{15}{4} \times \frac{7}{1} = \frac{105}{4} = 26\frac{1}{4}$ Wsp.
u. s. w.

Zur

Zur Rechnung auf dem Papier empfehle ich folgende Art des Aufsatzes. Nachdem beide Zahlen in Bruchgestalt gebracht sind, verbinde man sie durch einen gemeinschaftlichen Divisionsstrich, so daß beide Zähler über, und beide Nenner unter denselben zu stehen kommen. Z. B. Es sollen $8\frac{3}{4}$ Fl. mit $\frac{9}{16}$ multipliciret werden; so sind $8\frac{3}{4}$

$$\frac{35.\ 9}{4.\ 16} = \frac{315}{64}$$

$$\begin{array}{l|l} 315 & 4\frac{59}{64}\text{ Fl.} \\ (64) & \\ \underline{256} & \\ 59 & \end{array}$$

$= \frac{35}{4}$. Man schreibt also $\frac{35}{4}$ und $\frac{9}{16}$ wie hier an der Seite, multiplicire dann die Zähler und Nenner, und dividire zuletzt, wenn ein unächter Bruch herauskommt.

Oder es sollen $5\frac{9}{13}$ Ct. mit $1\frac{6}{17}$ multipliciret werden, so richtet man zuerst beide Brüche ein. Es ist aber $5\frac{9}{13} = \frac{74}{13}$, und $1\frac{6}{17} = \frac{23}{17}$. Dann rechnet man wie folgt:

$$\frac{74.\ 23}{13.\ 17}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \underline{13} \\ 51 \\ \underline{17} \\ 221 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 74 \\ \underline{13} \\ 222 \\ \underline{74} \\ 962 \\ \underline{884} \\ 78 \end{array} \Big| 4\tfrac{78}{221}\text{ Ct.}$$

Der Aufsatz der Brüche $\left(\frac{74.\ 23}{13.\ 17}\right)$ wäre hier allenfalls zu entbehren; indessen gewährt er in

len Fällen Vortheile. Hat man nemlich den Aufsatz gemacht, und es findet sich, daß sich einer der beiden Zähler gegen einen der beiden Nenner ganz oder zum Theil heben läßt, so thut man wohl, vor den Multiplicationen zu heben, z. B. es sollen $3\frac{7}{16}$ ℔. mit $1\frac{8}{11}$ multiplicirt werden; so sieht der Aufsatz so aus:

$$\frac{\cancel{55}.\ 5.\ 19}{16.\ \ \cancel{11}.\ 1} = \frac{95}{16} = 5\tfrac{15}{16}\ ℔.$$

$\frac{55.\ 19}{16.\ 11}$. Hier läßt sich 55 gegen 11 mit 11 heben. Man dividire also beide durch 11, durchstreiche sogleich was dividirt ist, und setze den Quotienten daneben. Auf diese Art hat man im Zähler nur 5 mit 19 und im Nenner gar nichts zu multipliciren.

Es sollen $134\frac{3}{8}$ Ell. mit $16\frac{8}{25}$ multiplicirt werden, so erhält man durch das Einrichten $134\frac{3}{8} = \frac{1075}{8}$ und $16\frac{8}{25} = \frac{408}{25}$. Der Aufsatz ist also

$$\frac{1075.\ 408}{8.\ \ 25}.$$

Hier läßt sich 1075 gegen 25 mit 5 heben. Man erhält also statt dieser beiden Zahlen 215 und 5. Diese Zahlen lassen sich noch einmal mit 5 heben, und so erhält man 43 und 1. Ferner läßt sich 408 gegen 8 mit 8 heben, und man erhält 51 u. 1. Nach diesen Hebungen bleibt im Zähler 43 und 51 zu multipliciren übrig, im Nenner aber bleibt 1, so daß gar keine Division zu machen ist.

43
~~215~~ 51
~~1075~~. ~~408~~
8. 1. ~~25~~
~~5~~.
1.

43
51
43
215
2193 Ell.

Ue-

Uebungsbeispiele.

630) 32 ℔. × $\frac{8}{11}$.
631) 51 ℔. × $\frac{9}{17}$.
632) 46 Thl. × $\frac{57}{98}$.
633) $4\frac{3}{8}$ Ct. × $7\frac{5}{6}$.
634) $6\frac{2}{3}$ Thl. × $8\frac{1}{5}$.
635) $13\frac{7}{9}$ Thl. × $9\frac{4}{41}$.
636) $25\frac{11}{18}$ Ct. × $3\frac{28}{127}$.
637) $\frac{18}{19}$ Thl. × $21\frac{17}{88}$.
638) $\frac{15}{22}$ ℔. × $23\frac{44}{95}$.
639) $\frac{78}{83}$ Thl. × $34\frac{111}{112}$.

Ueber die Multiplication benannter, besonders mehrfach benannter Zahlen, im Allgemeinen.

§. 146.

Hätten wir in unsern Münzen, Maaßen und Gewichten lauter zehntheilige Eintheilungen, so würde hier zu der Multiplication der Brüche wenig oder nichts hinzu zu setzen seyn. Allein die Menge und Unregelmäßigkeit der Abtheilungen, macht eine Menge Nebenregeln unentbehrlich, die wir noch zu erklären haben. Ehe wir aber an die eigentliche Multiplication mehrfach benannter Zahlen mit Brüche kommen, müssen wir erst noch eine andere Materie auseinander setzen.

In den Exempeln des 145sten §. kommen im Product öfters Brüche mit einer großen Benennung heraus, (z. B. $\frac{1}{4}$ Thl.; $\frac{1}{14}$ Thl.; $\frac{1}{8}$ ℔.; $\frac{1}{4}$ Wspl.;

$\frac{1}{4}$ Wspl.; $\frac{59}{64}$ Fl. u. s. w.). In den meisten Fällen will man lieber wissen, wie viel ein solcher Bruch in den kleinern Benennungen, (Gr. und Pf., Schfl. und Mtz.) austrägt. Man muß also wissen, wie der Name oder die Benennung eines Bruchs zu verändern ist. Die Nothwendigkeit, auch dieser ganzen Rechnung, ist eine Folge unserer unregelmäßigen Maaßabtheilungen. Denn bei zehntheiligen Abtheilungen hat man es ohne Mühe in seiner Gewalt, das Product gleich, in welcher Benennung man will, heraus zu bringen, und diese Benennung wieder, so gut als ohne Rechnung, in jede andere zu verwandeln.

Jeden größern Namen auf den nächst kleinern zu bringen.

§. 147.

Die oben §. 80 für ganze Zahlen gegebene Regel, gilt auch für Brüche. **Der größere Name wird ganz allgemein durch Multiplication mit der Eintheilungszahl in den kleinern verwandelt.**

Wenn $\frac{4}{7}$ Thl. zu Gr. gemacht werden sollen, so multiplicirt man diesen Bruch mit 24. Dies giebt (nach §. 145) $\frac{96}{7}$ Gr., d. i. $13\frac{5}{7}$ Gr., wo der Bruch $\frac{5}{7}$ Gr. auf ähnliche Art in $\frac{60}{7}$ Pf. $= 8\frac{4}{7}$ Pf. verwandelt werden kann.

Wenn

Wenn man sich den Bruch $\frac{4}{7}$ Thl. nach §. 122 als einen Quotienten vorstellt, so sieht man den Grund von dieser Rechnung leicht ein. Denn $\frac{4}{7}$ Thl. heißt so viel als **der siebente Theil von 4 Thalern.** Will ich wissen, wie viel das Gr. sind, so muß ich 4 Thl. zu Gr. machen, d. h. ich muß den Zähler unsers Bruchs mit 24 multipliciren, und von dem Produkt 96 den 7ten Theil ausrechnen.

Ist der gegebene Bruch klein, so läßt sich die Rechnung im Kopfe machen, und man kann sich die hierher gehörigen Exempel in einige Klassen abtheilen.

a) Wenn der Nenner gegen die Eintheilungszahl ganz aufgeht, z. B.

$$\frac{3}{4}\text{ Thl.} = \frac{3 \cdot \cancel{24}\,6}{\cancel{4}}\text{ Gr.} = 18\text{ Gr.}$$

$$\frac{13}{22}\text{ Ct.} = \frac{13 \cdot \cancel{110}\,5}{\cancel{22}}\text{ ℔.} = 65\text{ ℔.}$$

u. s. w.

b) Wenn der Nenner zum Theil gegen die Eintheilungszahl aufgeht. Z. B.

$$\frac{7}{9}\text{ Thl.} = \frac{7 \cdot \cancel{24} \cdot 8}{\cancel{9} \cdot \cancel{3} \cdot 1}\text{ Gr.} = \frac{56}{3}\text{ Gr.} = 18\tfrac{2}{3}\text{ Gr.}$$
$$= 18\text{ Gr. } 8\text{ Pf.}$$

$\frac{15}{44}$ Ct. $= \frac{15 \cdot \cancel{110}\ 10}{\cancel{44} \cdot 4}$ ℔. $= \frac{150}{4}$ ℔. $= 37\frac{1}{2}$ ℔.
$= 37$ ℔. 16 Lth.

u. s. w.

c) Wenn sich nichts heben läßt.

$\frac{3}{11}$ Thl. $= \frac{72}{11}$ Gr. $= 6\frac{6}{11}$ Gr. $= 6$ Gr. $\frac{72}{11}$ Pf.
$= 6$ Gr. $6\frac{6}{11}$ Pf.

$\frac{4}{15}$ ℔. $= \frac{128}{15}$ Lth. $= 8\frac{8}{15}$ Lth. $= 8$ Lth. $\frac{32}{15}$ Qt.
$= 8$ Lth. $2\frac{2}{15}$ Qt.

u. s. w.

Es versteht sich von selbst, daß von jeder Art mehr Exempel, als hier stehn, gerechnet werden müssen.

Wenn der gegebene Bruch mit etwas großen Zahlen geschrieben ist, so daß sich die Rechnung nicht wohl im Kopfe machen läßt, so erhält man im Grunde immer die kürzeste Rechnung, wenn man den Aufsatz nach §. 145 macht. Doch kann man auch ohne zu heben den Zähler geradezu mit der Eintheilungszahl multipliciren, und durch den Nenner dividiren.

Uebungsbeispiele.

640) $\frac{11}{16}$ Thl. wie viel Groschen?
641) $\frac{17}{28}$ Thl. — — — ?
642) $\frac{49}{71}$ Thl. — — — ?
643) $\frac{23}{36}$ Ct. wie viel ℔?

644)

644) $\frac{55}{79}$ Ct. wie viel ℔.?
645) $\frac{83}{91}$ Wspl. wie viel Scheffel?

Jeden kleinern Namen auf den nächstgrößern zu bringen.

§. 148.

Auch dies geschieht **in allen Fällen**, so wie bei ganzen Zahlen (§. 81.), **durch Division mit der Eintheilungszahl.**

Es sind hier mehrere Fälle zu erörtern.

a) Wenn die gegebene Zahl zwar ganz, aber so klein ist, daß keine eigentliche Division statt findet, so geschieht die Division nach §. 60. z. B. 7 Gr. $= \frac{7}{24}$ Thl; desgleichen 18 Gr. $= \frac{18}{24}$ Thl. $= \frac{3}{4}$ Thl. Desgleichen 22 ℔. $= \frac{22}{110}$ Ct. $= \frac{1}{5}$ Ct.

b) Wenn die gegebene Zahl ganz und so groß ist, daß eine eigentliche Division statt findet, die aber nicht aufgeht, so ist es nicht nothwendig, wie §. 81., den Rest in der kleinern Benennung stehen zu lassen, sondern man kann ihn, wenn man will, (nach a) mit unter die größere Benennung bringen. Z. B.

779 Gr. $= \frac{779}{24}$ Thl. $= 32\frac{11}{24}$ Thl.

5433 ℔. $= \frac{5433}{110}$ Ct. $= 49\frac{43}{110}$ ℔.

c) Wenn die gegebene Zahl ein ächter Bruch ist, so dividirt man ihn durch die Eintheilungszahl nach §. 126. Z. B.

$\frac{5}{6}$ Gr. $= \frac{5}{144}$ Thl.

$\frac{11}{120}$ Ct. $= \frac{11.1}{12.11\emptyset.10}$ ℔. $= \frac{1}{120}$ ℔.

Anm. Wenn sich, wie im 2ten Exempel, der Zähler gegen die Eintheilungszahl ganz oder zum Theil heben läßt, so thut man wohl, nicht gleich im Nenner zu multipliciren, sondern nur die Eintheilungszahl mit in dem Nenner zu schreiben, und erst zu heben.

d) Ist die gegebene Zahl gemischt, und kleiner als die Eintheilungszahl, so verwandelt man sie erst in einen unächten Bruch, und rechnet nach c. Z. B.

$7\frac{2}{3}$ Gr. $= \frac{23}{3}$ Gr. $= \frac{23}{72}$ Thl.

$12\frac{1}{2}$ ℔. $= \frac{25}{2}$ ℔. $= \frac{25.5}{2.11\emptyset.22}$ Ct. $= \frac{5}{44}$ Ct.

e) Ist aber die gegebene Zahl gemischt und größer als die Eintheilungszahl, so dividirt man erst die Ganzen, so weit es angeht, den Rest mit dem anhängenden Bruch aber behandelt man nach d. Z. B.

$59\frac{2}{3}$ Gr. $= 2$ Thl. $11\frac{2}{3}$ Gr. $= 2$ Thl. $\frac{35}{3}$ Gr.
$= 2$ Thl. $\frac{35}{3.24}$ Thl. $= 2\frac{35}{72}$ Thl.

$67\frac{3}{4}$ Mz.

$67\frac{3}{4}$ Mtz. = 4 Schfl. $3\frac{3}{4}$ Mtz. = 4 Schfl. $\frac{15}{4}$ Mtz.
= 4 Schfl. $\frac{15}{4}\frac{15}{16}$ Schfl. = $4\frac{15}{64}$ Schfl.

Uebungsbeispiele.

646) $\frac{22}{25}$ ℔. wie viel Ct.?
647) $\frac{31}{47}$ ℔. — — Ct.?
648) $\frac{56}{61}$ Gr. wie viel Thl.?
649) $5\frac{11}{15}$ Gr. — — Thl.?
650) $9\frac{3}{17}$ Gr. — — Thl.?
651) $12\frac{5}{19}$ ℔. wie viel Ct.?
652) $192\frac{7}{18}$ ℔. wie viel Ct.?
653) $357\frac{16}{29}$ Schfl. wie viel Wspl.?
654) $579\frac{13}{49}$ Gr. wie viel Thl.?
655) $8016\frac{41}{57}$ Gr. wie viel Thl.?

Man wird auch ohne mein Erinnern wahrnehmen, daß die Aufzählung aller möglichen Fälle, die bei dieser Rechnung vorkommen können, nicht da steht, um das **Gedächtniß** der Anfänger mit so viel Regeln zu belästigen, sondern um den **Verstand** in der Anwendung **einer und derselben Regel** auf verschiedene Fälle zu üben. Denn bei aller Verschiedenheit der Rechnung, besteht doch immer die Arbeit, in allen 5 Fällen, in einer Division des Gegebenen, durch die Eintheilungszahl, so daß jeder, der nur richtig gefaßt hat, wie er jede Zahl, sie sey klein oder groß, ganz oder gebrochen, durch eine ganze Zahl dividiren soll, leicht einsehen muß, was er in jedem Fall zu thun habe. Wir haben noch den Beweis

weis unserer Regel zu geben. Zu diesem Zweck lassen sich die obigen fünf Fälle unter zweie bringen. Das Gegebene ist nemlich entweder eine ganze Zahl (a, b), oder ein Bruch (c, d, e). Von den gemischten Zahlen brauchen wir nicht besonders zu reden, denn diese müssen allezeit vor der Division, durch welche der Name verändert wird, erst ganz (d), oder zum Theil (c), in einen Bruch verwandelt werden.

Ist die gegebene Zahl **ganz**, z. B. 11 Gr.; so darf man sich nur fragen, wie viel **Ein Groschen** unter der Benennung Thaler machen würde? Es ist aber 1 Gr. $= \frac{1}{24}$ Thl.: also müssen 11 Gr. eilfmal so viel, also $\frac{11}{24}$ Thl. betragen. D. h. 11 Gr. müssen durch 24 dividirt werden §. 122.

Ist die gegebene Zahl ein Bruch, z. B. $\frac{5}{8}$ Gr.: so erinnere man sich nur aus dem eben angeführten 122 §., daß dies so viel heißt, als 5 Gr. dividirt durch 8. Nun ist, wie wir eben gesehen haben, 5 Gr. mit $\frac{5}{24}$ Thl. einerlei: also muß es auch einerlei seyn, ob ich 5 Gr., oder ob ich $\frac{5}{24}$ Thl. mit 8 dividire. Das letztere ($\frac{5}{24}$ Thl.) wird nach §. 126 mit 8 dividirt, wenn ich den Nenner mit 8 multiplicire, welches $\frac{5}{192}$ Thl. giebt. Es werden also $\frac{5}{8}$ Gr in Thl. verwandelt, wenn ich den Zähler 5 ungeändert lasse, den Nenner aber mit

mit 24 multiplicire; d. h. wenn ich $\frac{5}{8}$ Thl. mit 24 dividire (§. 126).

Jede Zahl von mehreren Benennungen unter eine einzige Benennung zu bringen.

§. 149.

Vermittelst der in den beiden vorigen §§. erklärten Rechnungen, verbunden mit §. 80 und 81, läßt sich jede, unter mehreren Benennungen gegebene Summe, ganz unter jede dieser einzelnen Benennungen bringen. So lassen sich z. B. 7 Thl. 9 Gr. $6\frac{2}{3}$ Pf. machen

a) zu lauter Pf. Die Rechnung geschieht nach §. 80 b, und giebt $2130\frac{2}{3}$ Pf.

b) Zu lauter Gr. Zu diesem Zweck müssen einerseits die 7 Thl. zu 168 Gr. gemacht, und mit 7 Gr. in Eins zusammengezogen werden, wodurch man 177 Gr. erhält. Anderseits müssen $6\frac{2}{3}$ Pf. nach §. 149 zu $\frac{5}{9}$ Gr. gemacht werden. Unsere ganze Summe beträgt also $177\frac{5}{9}$ Gr.

c) Zu lauter Thalern. Hier müssen erst, wie bei b, $6\frac{2}{3}$ Pf. in $\frac{5}{9}$ Gr. verwandelt werden. Dann werden $7\frac{5}{9}$ Gr. nach §. 149 zu $\frac{17}{54}$ Thalern gemacht. Unsere ganze Summe beträgt also $7\frac{17}{54}$ Thl.

Ue-

Uebungsbeispiele.

656) 12 Thl. 19 Gr. $4\frac{1}{4}$ Pf. wie viel Pf.? wie viel Gr.? wie viel Thl.?

657) 44 Thl. 21 Gr. $6\frac{2}{3}$ Pf. wie viel Pf.? wie viel Gr.? wie viel Thl.?

658) 92 Thl. 10 Gr. $11\frac{3}{5}$ Pf. wie viel Pf.? wie viel Gr.? wie viel Thl.?

659) 76 Ct. 79 ℔. $18\frac{5}{6}$ Lth. wie viel Loth? wie viel ℔.? wie viel Ct.?

Allgemeine Regeln für die Multiplication mehrfach benannter Zahlen mit Brüchen.

§. 150.

Die Rechnung des vorigen §. führt zu einem ganz allgemeinen Weg, jede Multiplication, auch wenn mehrere Benennungen vorkommen, zu verrichten. Man bringt den Multiplicandus unter eine einzige Benennung, und multiplicirt ihn dann nach §. 145. Unter welche Benennung man ihn bringen will, ist an sich willkührlich; nur richtet sich nach der gewählten Benennung allezeit die Benennung des Products. Am bequemsten ist diejenige Benennung, zu der man am schnellsten, besonders durch Kopfrechnung, gelangen kann.

Gesetzt es sollen 3 Thl. 8 Gr. 6 Pf. mit $8\frac{3}{4}$ multiplicirt werden, so läßt sich der ganze Mul-

Multiplicandus nach §. 149 b, sehr leicht in $80\frac{1}{2}$ Gr. verwandeln. Dann multiplicirt man $\frac{161}{2}$ mit $\frac{35}{4}$. Zu dem Ende sind 161 mit 35 durch Zerfällung in 5×7 multiplicirt, und was herauskommt, ist mit den Nennern $2 \times 4 = 8$, dividirt. Es kommen $704\frac{3}{8}$ heraus, und dies sind Gr., weil der Multiplicandus die Benennung Gr. hatte. Endlich werden 704 Gr. durch Division mit 24, in 29 Thl. 8 Gr.; und $\frac{3}{8}$ Gr. durch Multiplication mit 12, in $4\frac{1}{2}$ Pf. verwandelt.

$$\frac{161 \cdot 35}{2 \cdot 4} \text{ Gr.} \qquad \begin{array}{r} 161 \\ \hline 805 \,(5 \\ \hline 5635 \,(7 \end{array}$$

$$8)\ 704\tfrac{3}{8} \text{ Gr.}$$

29 Thl. 8 Gr. $4\frac{1}{2}$ Pf.

Es sollen 132 Thl. 4 Gr. 6 Pf. mit $\frac{8}{9}$ multiplicirt werden., so kann man alles zu Thl. machen. 6 Pf. $= \frac{1}{2}$ Gr.; $4\frac{1}{2}$ Gr. $= \frac{9}{2}$ Gr. $= \frac{9}{48}$ Thl. $= \frac{3}{16}$ Thl. Der Multiplicandus ist also $132\frac{3}{16}$ Thl. Nun richtet man diese gemischte Zahl ein, welches $\frac{2115}{16}$ giebt, und multiplicirt diesen Bruch nach §. 145 mit $\frac{8}{9}$. Man kann mit 8 und 9 heben, und das Product ist $\frac{235}{2}$. Dieser Bruch muß die Benennung Thl. bekommen, weil der Multiplicandus zu Thl. gemacht war.

$$\frac{235 \cdot \cancel{8}}{\cancel{16} \cdot 2 \cdot \cancel{9}} = \frac{235}{2} \text{ Thl.}$$

$= 117$ Thl. 12 Gr.

Ge-

Gemeiniglich pflegt man alles auf die kleinste Benennung zu bringen, nicht weil es die kürzeste Rechnung, sondern weil es das wenigste Kopfbrechen macht. Z. B. 14 Thl. 6 Gr. 9 Pf. sollen mit $\frac{7}{15}$ multiplicirt werden. In der Zeile B sind 14 Thl. durch Multiplication mit 24 zu Gr. gemacht, und 6 Gr. zugezählt worden. Statt 14 Thl. 6 Gr. 9 Pf. haben wir also nun 342 Gr. 9 Pf.

A)	14 Thl. 6 Gr. 9 Pf.	
B)	342 Gr. 9 Pf.	
C)	7713 Pf.	
D)	53991	(7
E)	3) 17997	
F)	5) 3599$\frac{2}{5}$ Pf.	
G)	299 Gr. 11$\frac{2}{5}$ Pf.	
H)	12 Thl. 11 Gr. 11$\frac{2}{5}$ Pf.	

Die Groschen sind in der Zeile C zu Pf. gemacht, und 9 Pf. zugezählt worden, so verwandelt sich der ganze Multiplicandus in 7713 Pf. Diese Pf. sind nun mit $\frac{7}{15}$ nicht nach §. 145, sondern nach §. 143 multiplicirt worden. Nemlich in der Zeile D, sind sie mit dem Zähler 7 multiplicirt, und in der Zeile E und F durch eine Zerfällung des Nenners ($15 = 3 \times 5$) dividirt. Die Zeile F enthält also das gesuchte Product, aber in Pf., nemlich 3599$\frac{2}{5}$ Pf. Diese Pf. sind in der Zeile G durch Division mit 12 in 299 Gr. 11$\frac{2}{5}$ Pf. verwandelt, woraus endlich in der letzten Zeile 12 Thl. 11 Gr. 11$\frac{2}{5}$ Pf. entstehen — Wer bei dergleichen Rech-

Rechnungen nicht mit den vollen Zahlen 12 und 24 multipliciren und dividiren kann, muß freilich mehr als noch einmal so viele Zahlen schreiben.

Eine andere allgemeine Art jedes Exempel von mehreren Benennungen zu rechnen, besteht darin, daß man es in so viele kleine Exempel zerstückelt, als Benennungen da sind, und jedes Stück für sich, nach §. 143, oder 145 multiplicirt. Z. B. 6 Thl. 8 Gr. 4 Pf. sollen mit $\frac{7}{10}$ multiplicirt werden; so kann man folgende 3 Exempel machen:

				Thl.	Gr.	Pf.
a) 6 Thl. $\times \frac{7}{10}$	$= \frac{42}{10}$ Thl.	$= 4\frac{1}{5}$ Thl.	=	4	4	$9\frac{3}{5}$
b) 8 Gr. $\times \frac{7}{10}$	$= \frac{56}{10}$ Gr.	$= 5\frac{3}{5}$ Gr.	=	—	5	$7\frac{1}{5}$
c) 4 Pf. $\times \frac{7}{10}$	$= \frac{28}{10}$ Pf.	=		—	—	$2\frac{4}{5}$
		Summe . .		4	10	$7\frac{3}{5}$

Die hier erklärten allgemeinen Regeln haben fast mit allen sehr allgemeinen Regeln dieses gemein, daß sie nicht immer die kürzeste und bequemste Rechnung geben. Man würde aber dennoch sich übereilen, wenn man sie deswegen für unbrauchbar und überflüssig halten wollte. Wer gründlich rechnen will, muß allgemeine Regeln in Bereitschaft haben, die ihm auch da aushelfen, wo sich durchaus keine besondern Vortheile und Abkürzungen in einem Exempel darbieten. Im Folgenden werden wir zeigen, wie fast jede Rechnung dieser Art sich kürzer und leichter machen läßt. Vorjetzt noch einige

Uebungsbeispiele.

660) 4 Thl. 8 Gr. 6 Pf. × $\frac{5}{9}$.
661) 6 Thl. 11 Gr. 9 Pf. × $5\frac{2}{7}$.
662) 7 Thl. $3\frac{3}{4}$ Gr. × $\frac{3}{8}$.
663) 4 Thl. 17 Gr. $3\frac{1}{2}$ Pf. × $6\frac{2}{5}$.
664) 3 Ct. 1 ℔. × $5\frac{5}{6}$.
665) 5 Ct. 60 ℔. $3\frac{1}{3}$ Lth. × $4\frac{3}{7}$.

Es folgen nun die besondern Fälle, bei welchen sich die Rechnung bequemer führen läßt.

Eine mehrfach benannte Zahl, die einen Bruch enthält, mit einer ganzen Zahl zu multipliciren.

§. 151.

Die Rechnung wird völlig wie bei benannten Zahlen überhaupt gemacht, nur daß immer zuerst der anhängende Bruch multiplicirt werden muß. Giebt diese Multiplication einen ächten Bruch, so wird derselbe geradezu hingeschrieben, und dann nach Anleitung des zehnten Abschnitts weiter multiplicirt. Kommt aber ein unächter Bruch heraus, so wird er in eine gemischte Zahl verwandelt; dann schreibt man bloß den ächten Bruch hin; die Ganzen aber behält man im Sinn, um sie nach der nächsten Multiplication hinzuzuzählen.

a) Ist der Multiplicator einziffrig, oder doch klein, so geschieht die Rechnung wie §. 102. Z. B.

5 Thl.

5 Thl. 14 Gr. $3\frac{1}{11}$ Pf. × 7.	8 Ct. $34\frac{3}{4}$ ℔. × 9
39 — 3 — $9\frac{7}{11}$ — (7	74 — $92\frac{1}{4}$ — (9

Im ersten Exempel ist zuerst $\frac{1}{11}$ mit 7 multiplicirt. Dies giebt $\frac{7}{11}$, und weil dies ein ächter Bruch ist, so wird er geradezu hingeschrieben, und dann nach §. 102 weiter multiplicirt. — Im 2ten Exempel ist erst $\frac{3}{4}$ mit 9 multiplicirt. Das giebt $\frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$; es werden also $\frac{3}{4}$ hingeschrieben. Dann werden 34 ℔. mit 9 multiplicirt, und zu dem Product 6 ℔. zugezählt u. s. w.

Uebungsbeispiele.

666) 1 ℔. kostet 2 Thl. $8\frac{3}{4}$ Gr. wie viel 6 ℔.?

667) 1 ℔. kostet 1 Thl. $17\frac{3}{8}$ Gr. wie viel 5 ℔.?

668) 1 ℔. kostet 5 Thl. $7\frac{3}{4}$ Gr. wie viel 7 ℔.?

669) 1 Ct. kostet 4 Thl. 23 Gr. $3\frac{1}{2}$ Pf. wie viel 8 Ct.?

670) 1 Ct. kostet 7 Thl. $19\frac{5}{6}$ Gr. wie viel 10 Ct.?

671) 1 Ct. kostet 8 Thl. $20\frac{7}{8}$ Gr. wie viel 9 Ct.?

672) 1 Ct. kostet 19 Thl. 22 Gr. $8\frac{1}{2}$ Pf. wie viel 11 Ct.?

673) 1 Ct. kostet 21 Thl. $18\frac{7}{12}$ Gr. wie viel 12 Ct.?

674) 1 Ct. kostet 15 Thl. $15\frac{9}{10}$ Gr. wie viel 12 Ct.?

675) 1 Ct. kostet 26 Thl. $23\frac{8}{9}$ Gr. wie viel 24 Ct.?

b) Ist der Multiplicator eine größere Zahl, so muß man zuerst sehen, ob er sich zerfällen läßt, und dann rechnet man wie §. 103, nur daß man sich in Ansehung der Brüche wie bei a verhält. Läßt sich der Multiplicator nicht zerfällen, so zerstückelt man ihn auf eine bequeme Art, und rechnet nach §. 105. Eine nähere Auseinandersetzung wird unnöthig seyn, da sie nichts als Wiederholung des Gesagten seyn könnte. Dagegen wollen wir hier noch eine im 10ten Abschnitt nicht erwähnte Art von Zerstückelung erklären, die in vielen Fällen mit Nutzen gebraucht werden kann. Man kann nemlich jede Zahl so zerstückeln, daß jedes Stück immer durch eine leichte Division aus dem nächstvorhergehenden gemacht werden kann. Gesetzt es sollen 9 Gr. $6\frac{2}{3}$ Pf. mit 779 multiplicirt werden, so kann man die Zerstückelung und Rechnung auf folgende Art machen:

	Thl.	Gr.	Pf.	×	779
A	—	9	$6\frac{2}{3}$		1
B	—	9	$6\frac{2}{3}$		1
C	2	18	$10\frac{2}{3}$	(7	7
D	27	20	$10\frac{2}{3}$	(10	70
E	278	16	$10\frac{2}{3}$	(10	700
	310	3	$9\frac{1}{3}$		

Die Zerstückelung des Multiplicators steht rechter Hand unter denselben. Es ist nemlich 779 in 700 + 70 + 7 + 1 + 1 zerstückelt.

Bei

Bei der Rechnung ist aber der Anfang mit den kleinsten Stücken gemacht. In den Zeilen A und B steht nemlich in jeder der Multiplicandus 1mal; in C 7mal, indem B mit 7 multiplicirt ist; in D 70mal, indem C mit 10 multiplicirt ist; in E 700mal, indem D mit 10 multiplicirt ist. Zuletzt sind die Zeilen A bis E addirt worden.

Folgende Uebungsbeispiele kann man sämtlich entweder durch Zerfällungen, oder durch Zerstückelungen auf die eine oder andere Art rechnen.

Uebungsbeispiele.

676) 1 ℔. kostet 17 Gr. $6\frac{1}{3}$ Pf. wie viel 56 ℔.?

677) 1 ℔. kostet $23\frac{5}{8}$ Gr. wie viel 96 ℔.?

678) 1 ℔. kostet 1 Thl. $4\frac{1}{9}$ Gr. wie viel 120 ℔.?

679) 1 ℔. kostet 1 Thl. $17\frac{2}{5}$ Gr. wie viel 504 ℔.?

680) 1 ℔. kostet 2 Thl. $3\frac{8}{9}$ Gr. wie viel 729 ℔.?

681) 1 ℔. kostet 3 Thl. $14\frac{1}{6}$ Gr. wie viel 67 ℔.?

682) 1 Ct. kostet 6 Thl. $11\frac{4}{11}$ Gr. wie viel 79 C.?

683) 1 Ct. kostet 7 Thl. $4\frac{11}{12}$ Gr. wie viel 97 Ct.?

684) 1 Ct. kostet 8 Thl. $10\frac{7}{8}$ Gr. wie viel 137 C.?

685) 1 Ct. kostet 9 Thl. $19\frac{13}{24}$ Gr. wie viel 383 Ct.?

Eine mehrfach benannte Zahl, die einen Bruch enthält, mit einer ganzen Zahl zu dividiren.

§. 152.

Wir müssen hier eine Aufgabe, die ihrem Inhalt nach in den folgenden Abschnitt gehört, voraus erklären, weil ohne sie das Folgende nicht verständlich seyn würde. Dies hat aber kein Bedenken, weil alles, was zu der Rechnung nöthig ist, schon erklärt ist, und dabei kein anderer Begriff der Division gebraucht wird, als derjenige, der dem Rechner schon aus dem 5ten und 11ten Abschnitt geläufig ist.

Soll also eine mehrfach benannte Zahl, die einen Bruch enthält, durch eine ganze Zahl dividirt werden, so geschieht die Rechnung völlig wie bei benannten Zahlen im 11ten Abschnitt gezeigt worden. Nur in Absicht des Bruchs verhält man sich so: bleibt bei der kleinsten Benennung kein Rest, so wird der Bruch geradezu nach §. 126 dividirt, und der Quotient angehängt; bleibt aber bei der kleinsten Benennung ein Rest, so wird dieser mit dem anhängenden Bruch eingerichtet, und dann der unächte Bruch gleichfalls nach §. 126 dividirt.

a) Ist der Divisor klein, so geschieht die Rechnung wie §. 112. Z. B.

Wspl.

	Wspl.	Schfl.	Mtz.			℔.	Lth.	
	8	3	$9\frac{5}{6}$	: 7		39	$10\frac{7}{8}$	: 8
7)	1	3	$15\frac{5}{42}$		8)	4	$29\frac{23}{64}$	

Im ersten Exempel bleibt bei den 9 Mtz. kein Rest; daher werden $\frac{5}{6}$ Mtz. geradezu mit 7 dividirt, und der Quotient $\frac{5}{42}$ angehängt. — Im 2ten Exempel bleiben bei der Division der Lothe 2 Lth. übrig. Man richtet also $2\frac{7}{8}$ Lth. ein; dies giebt $\frac{23}{8}$, und diese mit 8 dividirt, geben $\frac{23}{64}$.

Uebungsbeispiele.

686) 3 ℔. kosten 11 Thl. $17\frac{1}{3}$ Gr. wie viel 1 ℔.?

687) 6 ℔. kosten 19 Thl. $21\frac{1}{4}$ Gr. wie viel 1 ℔.?

688) 7 ℔. — 20 Thl. $19\frac{3}{4}$ Gr. — — 1 ℔.?

689) 7 ℔. — 31 Thl. $15\frac{7}{8}$ Gr. — — 1 ℔.?

690) 8 ℔. — 35 Thl. $10\frac{7}{12}$ Gr. — — 1 ℔.?

691) 9 Ct. — 41 Thl. $11\frac{5}{6}$ Gr. — — 1 Ct.?

692) 10 Ct. — 49 Thl. $12\frac{3}{4}$ Gr. — — 1 Ct.?

693) 11 Ct. — 67 Thl. $18\frac{7}{9}$ Gr. — — 1 Ct.?

694) 12 Ct. — 93 Thl. $7\frac{5}{12}$ Gr. — — 1 Ct.?

695) 24 Ct. — 147 Thl. $8\frac{5}{24}$ Gr. — — 1 Ct.?

b) Ist der Divisor größer, so sieht man vor allen Dingen zu, ob er sich zerfällen läßt. Ist dies, so rechnet man, wie §. 113, nur daß wir hier nicht wie dort nöthig haben, Brüchen auszuweichen, daher man hier die Zerfällung ohne alle Einschränkung anwenden kann. Da die ein-

zelnen Divisionen völlig wie unter a gemacht werden, so wäre es überflüßig, Beispiele hinzuzusetzen. — Läßt sich aber der Divisor nicht zerfällen, so muß man, da der Divisor nie zerstückelt werden darf, (§. 113. Anm.), geradezu wie §. 114 oder 115 rechnen, nur daß man sich in Ansehung der Brüche so verhält, wie es im Anfang dieses §. bestimmt worden.

Folgende Beispiele wird man sämtlich entweder durch Zerfällungen, oder nach §. 114 ausrechnen können.

Uebungsbeispiele.

696) 32 ℔. kosten 17 Thl. $7\frac{3}{4}$ Gr. wie viel 1 ℔.?
697) 84 ℔. — 139 Thl. $11\frac{1}{2}$ Gr. — — 1 ℔.?
698) 162 Ct. — 351 Thl. $4\frac{2}{3}$ Gr. — — 1 Ct.?
699) 294 Ct. — 702 Thl. $13\frac{8}{9}$ Gr. — — 1 Ct.?
700) 343 Ct. — 1201 Th. $17\frac{5}{7}$ Gr. — — 1 Ct.?
701) 59 ℔. — 67 Thl. $5\frac{1}{2}$ Gr. — — 1 ℔.?
702) 71 ℔. — 100 Thl. $19\frac{1}{8}$ Gr. — — 1 ℔.?
703) 83 ℔. — 233 Thl. $8\frac{1}{12}$ Gr. — — 1 ℔.?
704) 97 ℔. — 506 Thl. $2\frac{7}{16}$ Gr. — — 1 ℔.?
705) 149 Ct. — 7387 Th. $19\frac{19}{24}$ Gr. — — 1 C.?

Multiplicationen, wo der Multiplicator ein Bruch ist.

§. 153.

In allen Fällen, wo der Multiplicator ein Bruch ist, kann man die Rechnung dadurch verrichten, daß

daß man den Multiplicandus mit dem Zähler (nach §. 152 a, oder 153) multiplicirt, und durch den Nenner (nach §. 152 b, oder 154) dividirt. Wobei es willkührlich ist, ob man die Multiplication oder die Division eher machen will. Da jede gemischte Zahl in einen Bruch verwandelt werden kann, so gilt das Gesagte auch auf den Fall, wenn der Multiplicator eine gemischte Zahl ist. Uebrigens liegt der Grund dieser Rechnung ganz unmittelbar im 143sten §.

a) Besteht der gebrochne Multiplicator aus kleinen, oder solchen Zahlen, die sich zerfällen lassen, so bedarf die Rechnung weiter keiner Erläuterung, und man wird ohne Schwierigkeit folgende Exempel verstehen und berechnen können:

Thl.	Gr.	Pf.		
13	4	$8\frac{1}{2}$	$\times$	$\frac{4}{5}$
52	18	10	(4	
5) 10	13	$4\frac{2}{5}$		

Fl.	Kr.	Pf.		
35	34	$2\frac{1}{2}$	$\times$	$\frac{15}{28}$
106	43	$3\frac{1}{2}$	(3	
533	39	$1\frac{1}{2}$	(5	
4) 133	24	$3\frac{3}{8}$		
7) 19	3	$2\frac{11}{56}$		

℔.	Lth.		
12	$18\frac{2}{3}$	$\times$	$4\frac{4}{7}$
50	$10\frac{2}{3}$	(4	32
402	$21\frac{1}{8}$	(8	
7) 57	$16\frac{16}{21}$		

Im 2ten Exempel ist 15 in 3×5, und 28 in 4×7 zerfällt. Im 3ten Exempel ist $4\frac{4}{7}$ in $\frac{32}{7}$

$\frac{32}{7}$ verwandelt, dann ist mit 4 × 8 multiplicirt, und mit 7 dividirt.

Uebungsbeispiele.

706) 33 Thl. $7\frac{3}{4}$ Gr. × $\frac{5}{8}$.
707) 48 Thl. $11\frac{1}{2}$ Gr. × $\frac{7}{8}$.
708) 29 Thl. $13\frac{2}{3}$ Gr. × $3\frac{3}{4}$.
709) 58 Thl. $12\frac{1}{5}$ Gr. × $5\frac{5}{6}$.
710) 36 Thl. $15\frac{5}{8}$ Gr. × $\frac{45}{56}$.
711) 63 Ct. $21\frac{1}{2}$ ℔. × $\frac{36}{49}$.
712) 17 Ct. 13 ℔. $11\frac{1}{3}$ Lth. × $3\frac{22}{81}$.
713) 26 Ct. 17 ℔. $9\frac{5}{8}$ Lth. × $6\frac{24}{77}$.

b) Besteht der Bruch aus Zahlen, die zum Multipliciren und Dividiren unbequem sind, so kann man zwar das Exempel immer noch auf diese Art rechnen, wenn man nur auf das Rücksicht nimmt, was §. 153 und 154 über dergleichen Multiplicationen und Divisionen gesagt ist: indessen giebt es doch Fälle, wo man kürzer und bequemer rechnen kann. Dahin gehören besonders alle diejegen Fälle, wo wenigstens der Nenner eine bequeme Zahl, d. h. entweder klein ist, oder sich zerfällen läßt. In diesem Fall kann man nemlich allezeit eine solche Zerstückelung mit dem ganzen gebrochnen Multiplicator vornehmen, daß man lauter leichte Divisionen erhält. Man muß nemlich den Zähler des Multiplicators so zerstükkeln, daß das erste Stück ganz, oder zum Theil gegen den Nenner aufgeht, die übrigen Stücke aber

aber, jeder aus den nächstvorhergehenden durch eine leichte Division entstehe. Es sollen z. B. 416 Thl. 12 Gr. 6 Pf. mit $\frac{23}{32}$ multiplicirt werden, so zerstückle und rechne man wie folgt:

$$\frac{23}{32} = \frac{16}{32} + \frac{4}{32} + \frac{2}{32} + \frac{1}{32}$$

wo das erste Stück, mit 16 gehoben, $\frac{1}{2}$ giebt; das 2te Stück aber ist $\frac{1}{4}$ des ersten; das 3te die Hälfte des 2ten, und das 4te die Hälfte des 3ten. Die Rechnung ist demnach folgende:

416 Thl. 12 Gr. 6 Pf. $\frac{16}{32}$

2)	208	=	6	=	3	=		$\frac{16}{32}$ oder $\frac{1}{2}$
4)	52	=	1	=	$6\frac{3}{4}$	=	4 12	$\frac{4}{32}$
2)	26	=	—	=	$9\frac{1}{8}$	=	2 6	$\frac{2}{32}$
2)	13	=	—	=	$4\frac{11}{16}$	=	1 11	$\frac{1}{32}$
	299	=	8	=	$11\frac{13}{16}$	=	29	

Die Zahlen vorne vor den Zeilen sind die Divisoren, womit allezeit die unmittelbar vorhergehende Zeile dividirt ist. Ganz hinten rechter Hand stehn, um mehrerer Deutlichkeit willen, die Brüche, welche anzeigen, was für ein Stück des Multiplicandus in derselben Zeile enthalten sey. Da diese 4 Brüche zusammen $\frac{23}{32}$ machen, so muß die Summe der 4 Zeilen das verlangte Product seyn. Was bei der Addition der Brüche zu beobachten, ist im 13ten Abschnitt erklärt. Nur bemerke ich, daß wenn die Zerstückelung regelmäßig gemacht ist, der Hauptnenner nicht

lange

lange gesucht werden darf, weil allezeit der Nenner des letzten Bruchs dazu tauglich ist.

Auch wenn der Multiplicator eine gemischte Zahl ist, findet dieser Vortheil statt. Dann multiplicirt man zuerst mit den Ganzen, die man, wenn die Zahl unbequem ist, zerstückeln kann, darauf auch mit dem Bruch vermittelst der eben erklärten Zerstückelung. Z. B. 143 Thl. 18 Gr. 3 Pf. sollen mit $29\frac{17}{24}$ multiplicirt werden.

$$29\tfrac{17}{24} = 24 + 5 + \tfrac{12}{24} + \tfrac{4}{24} + \tfrac{1}{24}.$$

A		143 Thl.	18 Gr.	3 Pf.				
B		3450 =	6 =	— =	(24	24		
C		718 =	19 =	3 =	(5	5		
D	2)	71 =	21 =	$1\frac{1}{2}$ =		$\frac{12}{24}$	oder $\frac{1}{2}$	
E	3)	23 =	23 =	$\frac{1}{2}$ =		$\frac{4}{24}$		
F	4)	5 =	23 =	$9\frac{1}{8}$ =		$\frac{1}{24}$		
		4270 =	21 =	$2\frac{1}{8}$ =				

Die Zeile B ist aus der Multiplication der der Zeile A mit 24 entstanden. Die Zeile C ist auch aus A durch Multiplication mit 5 entstanden. Die Zeile D ist auch aus A durch Division mit 2 entstanden. Die Zeile E ist aus D durch Division mit 3; die Zeile F aus E durch Division mit 4. Den Grund aller Divisionen sieht man leicht ein, wenn man nur die hinten rechter Hand stehenden Stücke des Multiplicators unter einander vergleicht. Endlich sind die Zeilen B bis F addirt, wozu es nicht nöthig ist, die

die Brüche unter einerlei Nenner zu bringen, weil $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Auch durch minus (—) kann man zerstükkeln. Z. B. es sollen 5 Wspl. 14 Schfl. 8 Mtz. mit $7\frac{43}{55}$ multiplicirt werden.

A	5 Wspl.	14 Schfl.	8 Mtz. ×	$7\frac{43}{55}$	
B	44 =	20 =	— =	8	
C	1 =	2 =	$14\frac{2}{5}$ =	$-\frac{11}{55}$	oder $\frac{1}{5}$
D	— =	2 =	$7\frac{7}{55}$ =	$-\frac{1}{55}$	
E	1 =	5 =	$5\frac{29}{55}$ =		
	43 =	14 =	$10\frac{26}{55}$ =		

Die Zerstückelung des Multiplicators steht rechter Hand, unter $7\frac{43}{55}$. Nemlich $7\frac{43}{55} = 8 - \frac{11}{55} - \frac{1}{55}$. In der Zeile B ist also A mit 8 multiplicirt. Die Zeile C soll $\frac{11}{55}$ von A, d. i. $\frac{1}{5}$ enthalten, es ist also A mit 5 dividirt worden. Endlich soll die Zeile D, $\frac{1}{55}$ von A enthalten. Da dies der 11te Theil von $\frac{11}{55}$ ist, so ist C mit 11 dividirt worden. Da das 2te und 3te Stück minus hat, so sind sie in der Zeile E zusammenaddirt worden (wobei man $\frac{2}{5}$ leicht im Kopfe in $\frac{22}{55}$ verwandelt), und diese Summe ist endlich von B subtrahirt worden, wodurch man das verlangte Product erhält.

Folgende Beispiele wird man zum Theil auf die vorher erwähnten Arten, oder durch Zerstückelungen dieser Art rechnen können.

Ue-

Uebungsbeispiele.

714) 23 Thl. $1\frac{2}{5}$ Gr. $\times$ $\frac{19}{28}$.
715) 41 Thl. $7\frac{5}{6}$ Gr. $\times$ $\frac{37}{56}$.
716) 37 Thl. $14\frac{2}{3}$ Gr. $\times$ $4\frac{13}{50}$.
717) 66 ℔. $7\frac{1}{8}$ Lth. $\times$ $6\frac{41}{64}$.
718) 94 ℔. $17\frac{1}{6}$ Lth. $\times$ $9\frac{73}{294}$.
719) 35 ℔. $9\frac{3}{4}$ Lth. $\times$ $\frac{23}{29}$.
720) 84 Thl. $7\frac{5}{9}$ Gr. $\times$ $\frac{61}{95}$.
721) 79 Thl. $21\frac{4}{5}$ Gr. $\times$ $\frac{29}{101}$.
722) 63 Ct. $91\frac{7}{8}$ ℔. $\times$ $7\frac{2}{13}$.
723) 96 Ct. $107\frac{11}{16}$ ℔. $\times$ $9\frac{53}{83}$.

Sech-

Sechzehnter Abschnitt.

Vom Zersetzen oder Dividiren der Brüche.

Ueber die Division im Allgemeinen.

§. 154.

Bei der Division der Brüche haben wir nicht, so wie bei der Multiplication nöthig, einen Zusatz zur Erklärung dieser Rechnungsart zu machen. Denn da wir oben §. 48 die Erklärung der Division auf die Erklärung der Multiplication gegründet haben; so wird der Begriff des Dividirens von selbst allgemeiner, sobald der Begriff des Multiplicirens gehörig erweitert ist. Dividiren wird also auch hier so viel heißen, als: **eine Zahl finden, die mit dem Quotienten multiplicirt, den Dividendus giebt.** Nur dies eine bemerken wir hier noch: daß, so wenig als die Multiplication bei Brüchen, als eine **Vervielfältigung** Divisor

des

des Multiplicandus angesehen werden kann, eben so wenig kann man sich die Division als eine Theilung des Dividendus vorstellen. Denn wenn z. B. 16 (Dividendus), durch $\frac{1}{4}$ (Divisor) dividirt werden soll, so kommt 64 heraus, denn dies ist die Zahl, die mit dem Divisor ($\frac{1}{4}$) multiplicirt, 16 giebt. Man muß sich also lediglich an den oben gegebenen Begriff der Division halten.

Allgemeine Divisionsregel für Brüche.

§. 155.

Wer die Multiplication der Brüche gut gefaßt und geübt hat, darf für die Division nichts als diese einzige Regel begreifen und merken:

Sobald in einem Divisionsexempel Brüche vorkommen, so schreibe man den Divisor (wofern er nicht schon an sich ein einfacher Bruch ist) in Gestalt eines Bruchs (§. 124, 125), aber verkehrt, den Nenner oben, den Zähler unten; dann multiplicire man mit diesem umgekehrten Divisor.

Sollen also z. B. $\frac{3}{4}$ Thl. durch $\frac{5}{7}$ dividirt werden; so multiplicire man statt dessen $\frac{3}{4}$ Thl. mit $\frac{7}{5}$, welches $\frac{21}{20}$ Thl. giebt. Eben so, wenn

3 Thl.

3 Thl. durch $4\frac{1}{2}$ dividirt werden sollen, so richte man den Divisor ein, dies giebt $\frac{9}{2}$, und nun multiplicire man 3 Thl. mit $\frac{2}{9}$, welches $\frac{6}{9}$ oder $\frac{2}{3}$ Thl. giebt.

Um den Sinn und Gebrauch dieser Regel geläufig zu machen, lasse man Anfänger viele kleine Exempel von solcher Art im Kopfe rechnen.

Der Beweis dieser Regel ist nicht schwer. Vermöge der Erklärung der Division (§. 154), darf man nur überlegen, ob man nach unserer Regel nothwendig, und in allen Fällen eine Zahl erhalte, die mit dem Divisor multiplicirt den Dividendus giebt. Nun sey der Dividendus, was man wolle, z. B. $\frac{8}{9}$ ℔., der Divisor sey $\frac{5}{7}$, so muß $\frac{8}{9}$ mit $\frac{7}{5}$ multiplicirt werden: und um zu sehen, ob dies der richtige Quotient sey, muß das, was herauskommt, wieder mit dem Divisor, also mit $\frac{5}{7}$ multiplicirt werden. Diese beiden Multiplicationen erst mit $\frac{7}{5}$, dann wieder mit $\frac{5}{7}$ heben offenbar einander auf, so daß am Ende nichts anders als der Dividendus wieder herauskommen kann. Sehr anschaulich wird dies, wenn man die Multiplicationen nicht wirklich macht, sondern nur andeutet. So giebt $\frac{8}{9}$ mit $\frac{7}{5}$ multiplicirt $\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{5}$, wird nun dies wieder mit $\frac{5}{7}$ multiplicirt, so erhält man $\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7}$, wo sich 5 und 7 offenbar im Zähler und Nenner heben, so

daß nichts als $\frac{8}{9}$ herauskommen kann. Diese Art zu schließen aber läßt sich auf alle mögliche Divisionsexempel anwenden, weil wir wissen, daß sich jede Zahl, sie sey ganz oder gemischt, einfach oder mehrfach benannt, in die Gestalt eines einzigen Bruchs bringen läßt.

Anm. In vielen Rechenbüchern wird die Regel für die Division zweier Brüche so ausgedrückt: man solle übers Kreuz multiplicieren, den Zähler des Dividendus mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividendus mit dem Zähler des Divisors. Dies giebt allerdings den richtigen Quotienten, wenn man das erste Product zum Zähler, das andere zum Nenner des Quotienten macht. Allein wenn man nicht sehr aufmerksam ist, so kommt man in Gefahr, im Quotient, das was der Zähler seyn sollte, unten, und den Nenner oben zu schreiben, wodurch sehr große Fehler entstehn können; wie wenn z. B. Jemand $\frac{1}{10}$ Thl. durch $\frac{1}{10000}$ dividiren sollte, und so rechnete

$$\frac{1}{10} : \frac{1}{10000} = \frac{10}{10000}$$

so bekömmt er $\frac{1}{1000}$ Thl. heraus, statt daß er 1000 ganze Thl. herausbringen sollte. Eine solche Verwechselung wird vermieden, wenn man nur den Anfänger wiederholt darauf aufmerksam macht, daß der Divisor, nicht der Dividendus umgekehrt werden müsse.

Ueber

Ueber die verschiedenen Fälle, die bei der Division mit Brüchen vorkommen können.

§. 156.

Der Divisor ist nach §. 52 nicht immer eine unbenannte Zahl. Daher entstehen zwei Hauptklassen von Exempeln: nemlich 1) wenn der Divisor unbenannt, 2) wenn er benannt ist. In der ersten Klasse finden alle die Fälle statt, die wir im vorigen Abschnitt bei der Multiplication gehabt haben, weil nach unserer allgemeinen Regel jedes Divisionsexempel geradezu in ein wirkliches Multiplicationsexempel verwandelt wird. Aber eben deswegen werden wir uns hier kurz fassen können, weil eine vollständige Durchlaufung aller möglichen Fälle nichts als eine Wiederholung des vorigen Abschnitts seyn würde.

Divisionen durch einen unbenannten Divisor.

§. 157.

Der Divisor sey in einem solchen Exempel eine ganze Zahl, oder ein ächter Bruch, oder eine gemischte Zahl, so ist das erste, was man zu thun hat, daß man demselben die Form eines einzigen Bruchs giebt, wenn er sie nicht schon von selbst hat. Das andere ist, daß

man ihn verkehrt schreibt. Und nun hat man ein völliges Multiplicationsexempel, zu dessen Berechnung die Regeln im vorigen Abschnitt vollständig erklärt sind. Die Benennung des Quotienten richtet sich bei den Exempeln dieser Klasse allezeit nach dem Dividendus. Wir haben also nichts zu thun, als einige Beispiele hinzuzusetzen.

Es sollen $\frac{7}{8}$ Ct. durch $3\frac{1}{2}$ dividirt werden; $\frac{\cancel{7}.\ \cancel{2}.1}{\cancel{1}.4.\cancel{7}} = \frac{1}{4}$ Ct. so verwandelt man zuerst $3\frac{1}{2}$ in den unächten Bruch $\frac{7}{2}$. Diese kehrt man um, und multiplicirt damit $\frac{7}{8}$ Ct., so kommt $\frac{1}{4}$ Ct. heraus.

Es sollen 12 Thl. durch $\frac{8}{11}$ dividirt werden: so multiplicire man $\frac{12}{1}$ mit $\frac{11}{8}$. $\frac{\cancel{12}.\ 3.\ 11}{1.\ \ 8.\ 2} = 16$ Thl. 12 Gr. Es kommen $\frac{32}{2}$ Thl. heraus, d. i. $16\frac{1}{2}$ Thl. oder 16 Thl. 12 Gr.

Anm. Kleinere Exempel, wie diese beiden ersten, lassen sich im Kopfe rechnen, und man sieht, ohne mein Erinnern, daß es nöthig ist, recht viele auf diese Art zu rechnen.

Es sollen $729\frac{3}{4}$ ℔. mit $\frac{5}{8}$ dividirt werden: d. h. man soll sie mit $\frac{8}{5}$ multipliciren. Man könnte nun $729\frac{3}{4}$ einrichten, und dann wie vorher rechnen. Allein man kommt leichter

weg,

$729\frac{3}{4}$ ℔. $\times \frac{8}{5}$
5838 (8
5)1167$\frac{3}{5}$ ℔.

weg, wenn man wie §. 152 mit 8 multiplicirt und mit 5 dividirt. $\frac{3}{4}$ mit 8 multiplicirt, giebt 6 Ganze. Diese werden im Sinn behalten; dann sagt man, 8 mal 9 ist 72, und 6 dazu ist 78, u. s. w.

Es sollen 19 Gr. 6 Pf. durch $\frac{8}{17}$ dividirt werden: d. h. sie sollen durch $\frac{17}{8}$ multiplicirt werden. Man könnte mit 17 multipliciren, und mit 8 dividiren. Besser aber verwandelt man $\frac{17}{8}$ in $2\frac{1}{8}$. In der nächsten Zeile unter dem Strich sind 19 Gr. 6 Pf. mit 2 multiplicirt, in der folgenden Zeile sind sie (19 Gr. 6 Pf.) mit 8 dividirt. Der gesuchte Quotient ist also 1 Thl. 17 Gr. $5\frac{1}{4}$ Pf.

	19 Gr.	6 Pf.	$\times 2\frac{1}{8}$
1 =	15 =	— =	
	2 =	$5\frac{1}{4}$ =	
1 =	17 =	$5\frac{1}{4}$ =	

Es sollen 137 Thl. 18 Gr. 4 Pf. durch $13\frac{11}{15}$ dividirt werden. Man richte den Divisor ein, so verwandelt er sich in $\frac{206}{15}$. Es muß also die obige Geldsumme mit $\frac{15}{206}$ multiplicirt werden. Dies ist ein unbequemer Multiplicator, weil sich der Nenner bloß in 2 × 103 zerfällen läßt. Indeß thut man doch am besten nach der allgemeinen Regel §. 153 zu multipliciren; indem man den Dividendus erst mit

$13\frac{11}{15}$
65
13
206

15 = 3 × 5 multiplicirt, und dann mit 206 = 2 × 103 dividirt. D. h. man muß den Dividendus erst mit 3, was herauskommt, mit 5 multipliciren; was hier herauskommt, erst mit 2, und was nun herauskommt, mit 103 dividiren.

137 Thl. 18 Gr. 4 Pf. × $\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 103}$

413 = 7 = — = (3

2066 = 11 = — = (5 Thl. Gr. Pf.

2)1033 = 5 = 6 = | 10 — $9\frac{3}{103}$

103

3

77

930

927

3

Uebungsbeispiele.

724) $\frac{18}{25}$ Ct. : $\frac{117}{150}$.
725) $19\frac{1}{5}$ Thl. : $\frac{35}{36}$.
726) $11\frac{7}{12}$ Wspl. : $98\frac{5}{6}$.
727) 3 Ct. : $14\frac{5}{18}$.
728) $\frac{5}{8}$ Thl. : $4\frac{4}{29}$.
729) 12 Thl. 16 Gr. 8 Pf. : $\frac{1}{18}$.
730) 243 Thl. 18 Gr. : $\frac{1}{41}$.

731)

731) 5 Ct. $14\frac{1}{8}$ ℔. : $\frac{1}{56}$.
732) 31 Wspl. $18\frac{3}{4}$ Schfl. : $\frac{1}{163}$.
733) 13 Thl. 8 Gr. 4 Pf. : $\frac{15}{7807}$.
734) 5 Thl. 19 Gr. 9 Pf. : $\frac{24}{25}$.
735) 13 ℔. $27\frac{1}{2}$ Lth. : $\frac{18}{101}$.
736) 15 Gr. $7\frac{1}{2}$ Pf. : $3\frac{3}{19}$.
737) 314 Thl. $14\frac{1}{2}$ Gr. : $31\frac{7}{12}$.
738) 314 Fl. 28 Kr. 3 Pf. : $\frac{28}{59}$.
739) 13 Mrk. 4 ß. 2 Pf. : $34\frac{1}{9}$.
740) 20 ℔. $12\frac{3}{4}$ Lth. : $105\frac{1}{3}$.
741) 14 Ct. $76\frac{3}{8}$ ℔. : $\frac{1}{420}$.
742) 3461 Thl. 21 Mgl. : $\frac{75}{233}$.
743) 34 Thl. 24 Sgr. $3\frac{1}{2}$ D. : $5\frac{51}{52}$.

Divisionen wo Divisor und Dividendus benannt sind.

§. 158.

In diesem Fall muß Dividendus und Divisor nach §. 52 **einerlei Benennung** haben. Haben sie diese nicht, so muß man sie ihnen geben. Dies setzt aber voraus, daß beide Sachen von einerlei Art anzeigen; beide Geld, beide Gewicht, beide Getreidemaaß, u. s. w. Kommt Jemanden der Fall vor, daß Geld durch Gewicht dividirt werden soll, so wird er bei näherer Untersuchung finden, daß die Benennung des Divisors nichts zur Rechnung beiträgt, daß er also eigentlich unbenannt ist, und das Exempel in den vorigen §. gehört. In unse-

ren gegenwärtigen Fall ist der Quotient im Allgemeinen unbenannt (§. 52.), ob er gleichwohl durch die besondern Umstände der Rechnung eine Benennung erhalten kann, die aber von der Benennung des Dividendus und Divisors ganz unabhängig ist.

Kommen nun in Exempeln dieser zweiten Art Brüche vor, so ist folgendes zu beobachten.

Entweder sind Dividendus und Divisor unmittelbar in einerlei Benennung gegeben, und zwar jeder in einer einzigen. Dann läßt sich geradezu die allgemeine Divisionsregel §. 155 anwenden. Z. B. Es sollen $14\frac{1}{2}$ ℔. durch $3\frac{3}{4}$ ℔. dividirt werden; so verwandelt man den Dividendus in $\frac{29}{2}$, und den Divisor in $\frac{15}{4}$; und multiplicirt das erste mit $\frac{4}{15}$; so kommen $\frac{58}{15}$, oder $3\frac{13}{15}$ heraus. Der Sinn der Rechnung ist: es sey $3\frac{3}{4}$ in $14\frac{1}{2}$ ℔. dreimal ganz enthalten, und überdem seyen noch $\frac{13}{15}$ des Divisors im Dividendus. —

$$\frac{29.\ 4.\ 2}{2.\ .15} = \frac{58}{15} = 3\frac{13}{15}.$$

Desgleichen sollen $4\frac{1}{2}$ Thl. durch $10\frac{4}{5}$ Thl. dividirt werden: so werden erst beide eingerichtet, und dann $\frac{9}{2}$ mit $\frac{5}{54}$ multiplicirt. Es kommen $\frac{5}{12}$ heraus. Der Sinn ist: daß bloß $\frac{5}{12}$ des Divisors im Dividendus enthalten sind.

$$\frac{9.\ 5}{2.\ 54.\ 6} = \frac{5}{12}$$

Oder

Oder es sind Dividendus und Divisor unter ungleichen Benennungen gegeben. Dann muß man sie unter einerlei Benennung bringen. Z. B. Es sollen $3\frac{3}{4}$ Gr. durch $3\frac{1}{2}$ Thl. dividirt werden, so macht man $3\frac{1}{2}$ Thl. zu 84 Gr. und multiplicirt dann $\frac{15}{4}$ mit $\frac{1}{84}$.

$$\frac{15.\ 5.\ 1}{4.\ 84.\ 28} = \frac{5}{112}$$

Oder es kommen mehrere Benennungen im Divisor, oder Dividendus, oder beiden zugleich vor. Dann bringt man jeden unter eine einzige, und zwar beide unter einerlei Benennung. Z. B. 3 Ct. $28\frac{1}{2}$ ℔, sollen durch 1 Ct. $20\frac{1}{4}$ ℔. dividirt werden. Man mache beides zu ℔. Der Dividendus beträgt $358\frac{1}{2}$ ℔., der Divisor $130\frac{1}{4}$ ℔. Beide werden eingerichtet, und dann $7\frac{17}{2}$ mit $\frac{4}{521}$ multiplicirt. Weil ein unächter Bruch $\frac{1434}{521}$ herauskommt, so wird er durch Division in eine gemischte Zahl verwandelt.

$$\frac{717.\ 4.\ 2}{2.\ 521} = \frac{1434}{521}$$

$$\begin{array}{l|l} 1434 & 2\frac{392}{521} \\ (521) & \\ \underline{1042} & \\ 392 & \end{array}$$

Wie der Quotient durch die Umstände der Frage eine Benennung erhalten könne, wird folgendes Beispiel zeigen.

Wenn ich $2\frac{1}{4}$ ℔. Zucker für 1 Thl. kaufe; was wird 1 Ct. 70 ℔. kosten? Er wird so

viel Thl. kosten, als vielmal $2\frac{1}{4}$ ℔. in 1 Ct. 70 ℔. enthalten sind. Der Quotient erhält also die Benennung Thl. Um die Rechnung zu machen, verwandelt man 1 Ct. 70 ℔. in 180 ℔., und multiplicirt diese mit $\frac{4}{9}$. —

$$\frac{\overset{20}{\cancel{180}}.\ 4}{1.\ \cancel{9}.\ 1} = 116 \text{ Thl.}$$

Desgleichen: wenn ich für 1 ℔. Kaffee $10\frac{1}{2}$ Gr. bezahle, wieviel kann ich für 100 Thl. kaufen? Ich kann so viel ℔. kaufen, als vielmal $10\frac{1}{2}$ Gr. in 100 Thl. enthalten sind; also erhält der Quotient die Benennung ℔. Um die Rechnung zu machen, muß man entweder 100 Thl. zu 2400 Gr. machen, und dann mit $\frac{2}{21}$ multipliciren: oder man macht $10\frac{1}{2}$ Gr. (nach §. 148) zu $\frac{7}{16}$ Thl. und multipliciret $\frac{100}{1}$ mit $\frac{16}{7}$. Dies letzte giebt den unächten Bruch $\frac{1600}{7}$, der sich durch Division in $228\frac{4}{7}$ ℔. verwandelt. Die ganzen Pfunde betragen 2 Ct. 8 ℔.; und der Bruch $\frac{4}{7}$ ℔. giebt nach §. 147, $18\frac{2}{7}$ Lth.

$$\frac{100.\ 16}{1.\ 7} = \frac{1600}{7}$$

$$= 228\tfrac{4}{7} \text{ ℔.}$$

$$= 2 \text{ Ct. } 8 \text{ ℔. } 18\tfrac{2}{7} \text{ Lt.}$$

Uebungsbeispiele.

744) $3\frac{1}{2}$ ℔. : 3 Ct. $31\frac{1}{4}$ ℔.
745) 4 Thl. $8\frac{1}{2}$ Gr. : $21\frac{3}{4}$ Thl.
746) 3 Ct. $28\frac{1}{2}$ ℔. : 2 Ct. $58\frac{3}{4}$ ℔.

747)

747) Wie viel ℔. Lichter kann man für 30 Thl. kaufen, wenn das ℔. $5\frac{1}{2}$ Gr. kostet?

748) Was kosten $2\frac{1}{2}$ Stein (Taf. 9. Anm 2.) Seife, wenn man für 1 Thl. $5\frac{1}{4}$ ℔. bekommt?

749) In einer Rechnung steht: es seyen 82 Thl. $21\frac{1}{2}$ Gr. an Arbeitsleute ausgezahlt worden, und jeder habe 3 Thl. $14\frac{1}{2}$ Gr. bekommen. Ihre Anzahl ist aber nicht angezeigt. Wie viel waren ihrer?

Beschluß der einfachen Rechnungsarten mit Brüchen.

§. 159.

Wir haben nun in diesen und den vorhergehenden Abschnitten gezeigt, wie man Brüche addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren müsse. Aber es ist nöthig, hier noch etwas über die schon im sechsten Abschnitt berührte Frage hinzuzufügen: wo soll jede dieser Rechnungsarten gebraucht werden?

Es läßt sich auch hier im Allgemeinen nichts weiter über diese Frage sagen, als was im sechsten Abschnitt gesagt worden. Man muß auf der einen Seite die Begriffe von den Rechnungsarten bei sich vollkommen deutlich, und durch häufige Anwendung geläufig zu machen suchen,

suchen, und auf der andern Seite muß man sich Mühe geben, bei jeder vorgelegten Rechnungsfrage alle Umstände vollständig und aufs deutlichste und richtigste zu begreifen. So lange man bloß mit ganzen Zahlen zu thun hat, begreifen doch selbst Kinder ziemlich leicht, wo sie zusammenzählen, wo sie abziehen, wo sie eine Zahl vielfach nehmen, oder theilen müssen. Allein wenn Brüche in den Aufgaben vorkommen, besonders wenn Multiplicationen und Divisionen mit Brüchen vorkommen, dann ist die Beurtheilung etwas schwieriger, weil die Begriffe dieser beiden Rechnungsarten für Brüche allgemeiner, und eben deswegen schwieriger anzuwenden sind. Wir haben daher auch in den letztern Abschnitten überall, wo die eingeschränkten Erklärungen des Multiplicirens und Dividirens anwendbar waren, die Uebungsbeispiele, nicht in die Gestalt bloßer Rechnungsfragen, sondern wirklicher kleiner Rechnungsfälle eingekleidet. Dagegen wird man in denen §§., wo der erweiterte Begriff des Multiplicirens und Dividirens gebraucht wurde, bloße Rechnungsfragen finden: d. h. in den Uebungsbeispielen wird bloß gefragt, was kommt heraus, wenn die und die Zahl, mit dem oder jenen Bruch multiplicirt oder dividirt wird? Die Absicht war, daß der Lehrling nur zuerst die nöthige Fertigkeit in der Rechnung selbst erlangen sollte; ehe wir über

die

die Anwendung auf wirkliche Fälle etwas sagten. Dies ist es nun, was wir hier noch nachzuholen haben. Wir werden uns aber hier hauptsächlich auf Multiplication und Division einzuschränken haben, weil bloß diese Begriffe in den beiden letzten Abschnitten eine Erweiterung erhalten haben.

Die Hauptregel sollte auch hier diese seyn, daß man sich den erweiterten Begriff von beiden Rechnungsarten vollkommen deutlich, anschaulich, und durch Uebung geläufig zu machen suche. Indessen ist nicht zu läugnen, daß die Anwendung dieser, wie aller sehr allgemeiner Begriffe, dem Anfänger Schwierigkeit mache. Es giebt aber verschiedene kleine Hülfsmittel, durch welche die Untersuchung erleichtert wird, und diese wollen wir hier kürzlich auseinander setzen.

a) Zuerst bemerken wir, daß doch die allermeisten wirklichen Rechnungsfälle, die im gemeinen Leben vorkommen, nicht in Brüchen, sondern in ganzen Zahlen gegeben werden, und daß meistens erst der Rechner freiwillig die Brüche hineinbringt, um die Rechnung kürzer zu machen. Denn es ist z. B. leicht einzusehen, daß es weit leichter ist, $\frac{1}{2}$ Thl. mit 158, als 12 Gr. mit eben der Zahl zu multipliciren. Daher weiß man gewöhnlich schon voraus, welche Rechnungsart

nungsart anzuwenden ist, ehe noch die Brüche da sind. Wenn ich $66\frac{3}{4}$ Ellen Leinwand, die Elle zu 8 Gr. kaufen will, so weiß ich, daß ich 8 Gr. $66\frac{3}{4}$ mal zahlen, d. h. 8 Gr. mit $66\frac{3}{4}$ multipliciren muß. Nun wird aber die Rechnung kürzer und leichter, wenn ich $\frac{1}{3}$ Thl. statt 8 Gr. setze. Hier weiß ich also schon voraus, daß $\frac{1}{3}$ Thl. mit $66\frac{3}{4}$ multplicirt werden muß, wodurch ich sogleich $22\frac{1}{4}$ Thl., d. i. 22 Thl. 6 Gr. erhalte.

b) Kommen indessen in Rechnungsfällen gleich unmittelbar Brüche vor, so kann man oft aus den Umständen der Aufgabe leicht übersehen, was man mit dem Zähler und was man mit dem Nenner des Bruchs machen müßte, um das Gesuchte zu finden. Sieht man, daß mit dem **Zähler multiplicirt**, und mit dem **Nenner dividirt** werden müßte, so hat man ein Multiplicationsexempel, im umgekehrten Fall, ein Divisionsexempel vor sich. Z. B. Wenn Jemand weiß, was 1 Ct. Messing kostet, und nun den Preis von $\frac{3}{8}$ Ct. ausrechnen will; so müßte er den 8ten Theil dessen, was 1 Ct. kostet, 3mal bezahlen. Er hat also ein **Multiplicationsexempel.** Wäre der Fall umgekehrt, und er wüßte, wie viel er für $\frac{3}{8}$ Ct. bezahlt hätte, und wollte ausrechnen, wie viel 1 ganzer Ct. kosten würde, so müßte er den 3ten Theil des bezahlten Geldes

des ausrechnen (d. i. der Preis von $\frac{1}{8}$ Ct.), und diesen 8mal nehmen. Er hat also ein **Divisionsexempel.** — Aber, könnte vielleicht Jemand fragen, wozu noch lange überlegen, in welchen Abschnitt des Rechenbuchs mein Exempel gehört, wenn ich schon weiß, wie ichs rechnen soll? Dazu, daß ich die vortheilhafteste Art der Rechnung finden kann. Weiß ich im zuletzt angeführten Fall, daß der Preis von $\frac{3}{8}$ Ct. durch $\frac{3}{8}$ **dividirt** werden muß, so weiß ich, daß ich statt dessen mit $\frac{8}{3}$ **multipliciren** kann. $\frac{8}{3}$ aber ist $= \frac{9}{3} - \frac{1}{3} = 3 - \frac{1}{3}$. D. h. ich werde das Gesuchte finden, wenn ich den 3ten Theil meines gezahlten Geldes vom Dreifachen desselben abziehe, welches offenbar kürzer und leichter ist, als wenn ich erst mit 3 dividire, und das was herauskommt, mit 8 multiplicire. Bei größern Zahlen würde der Unterschied oft noch viel auffallender werden.

c) Auch der eingeschränkte Begriff vom Multipliciren und Dividiren, mit dem man bei ganzen Zahlen ausreicht, läßt sich doch oft auch da, wo Brüche vorkommen, anwenden. — Gesetzt, ich wüßte, daß man $1\frac{3}{4}$ ℔. von einer Waare mit 1 Thl. bezahlte, und ich wollte ausrechnen, wie viel 1 Ct. kostet, so sieht man leicht ein, daß ich ausrechnen muß, wie viel mal $1\frac{3}{4}$ ℔. in 1 Ct. enthalten sind.

sind. D. h. ich habe ein Divisionsexempel. — Oder ich wüßte, daß 1 ℔. $7\frac{1}{3}$ Thl. kostete, und ich wollte den Preis von 47 ℔. ausrechnen, so muß ich das Geld 47mal bezahlen, also **multipliciren**. — Oder ich hätte für $12\frac{1}{2}$ ℔. bezahlt $9\frac{3}{4}$ Thl., und wollte den Preis von 1 ℔. wissen, so muß ich das Geld in $12\frac{1}{2}$ Theile theilen, also **dividiren**.

d) Endlich besteht ein Hülfsmittel bei dergleichen Untersuchungen darin, daß man statt der Brüche, die in dem Exempel vorkommen, beliebige ganze Zahlen setzt, und überlegt, was mit diesem zu machen wäre. — Z. B. wenn ich weiß, daß 1 Sgr. $= \frac{4}{5}$ Ggr., d. h. gute oder gewöhnliche Gr. (Taf. 5), so müssen sich mit Hülfe dieses Bruchs Ggr. in Sgr., und umgekehrt, verwandeln lassen. Es frägt sich wie? Man setze statt $\frac{4}{5}$ eine beliebige ganze Zahl, z. B. 4, als ob 1 Sgr. gleich wäre mit 4 Ggr., d. h. als ob 4 Ggr. auf einen Sgr. giengen: so sieht man leicht ein, daß Sgr. in Ggr. durch Multiplication mit 4, und Ggr. in Sgr. durch Division mit 4 verwandelt werden müßten. Eben das findet nun auch bei dem Bruch statt: und Sgr. werden in Ggr. durch Multiplikation mit $\frac{4}{5}$ (oder $1 - \frac{1}{5}$) verwandelt: und umgekehrt werden Ggr. in Sgr. durch Division mit $\frac{4}{5}$, d. h. durch Multiplication mit $\frac{5}{4}$ (oder mit $1 + \frac{1}{4}$)

ver-

verwandelt werden. Und diese Betrachtungen führen gleich auf die allervortheilhafteste Art der Rechnung.

Wir liefern nun noch zum Beschluß des ersten Theils, eine kleine Sammlung von Exempeln, bei denen es nicht so wohl auf die Uebung im Rechnen selbst, als auf die Beurtheilung ankommt, welche Rechnungsart in dem Exempel anwendbar sey. Zeit und Raum erlauben nicht, sie zahlreich zu machen. Aber man wird gewissermaßen den ganzen zweiten Theil, der die Anwendungen der Rechnungsarten, auf Fälle des gemeinen Lebens enthalten soll, als eine Fortsetzung dieser Sammlung ansehen können.

A) Wenn der Preis von einem Pfund einer Waare bekannt ist, wie findet man den Preis von jeder andern Quantität, sie mag durch ganze, oder gemischte, oder gebrochne Zahlen ausgedrückt seyn? z. B.

750) 1 ℔. Thee kostet $3\frac{3}{4}$ Thl. was kosten 19 ℔.? = 71 Thl 6 gr

751) 1 ℔. — kostet $3\frac{2}{3}$ Thl. was kosten $3\frac{1}{8}$ ℔.? = 11 Thl 11 gr

752) 1 ℔. — kostet $3\frac{5}{6}$ Thl. was kosten $\frac{5}{8}$ ℔.?

B) Wenn wieder wie vorher, der Preis von 1 ℔. bekannt ist, die Frage aber Centner und Pfund enthält, wie rechnet man dann?

753) 1 ℔. Eisen kostet $4\frac{1}{2}$ Gr. was kosten 3 Ct. 50 ℔.? = 71 rh 16 gh

754) 1 ℔. — kostet $4\frac{1}{4}$ Gr. was kosten 4 Ct. $20\frac{1}{2}$ ℔. = 81 rh $13\frac{1}{8}$ gh

C) Wie muß man in eben dem Fall rechnen, wenn die Frage bloß Ct. enthält?

755) 1 ℔. Messingdrath $6\frac{1}{2}$ Gr. was kosten 5 Ct.? = 148 rh 23 gh

756) 1 ℔. — $6\frac{3}{4}$ Gr. was kosten $3\frac{1}{8}$ Ct.?

757) 1 ℔. — $6\frac{1}{4}$ Gr. — — $\frac{5}{8}$ Ct.? = 17 rh $21\frac{11}{16}$ gh.

D) Wie müssen die Exempel der beiden vorigen Nummern gerechnet werden, wenn das Gesuchte gleich in der Benennung Thaler herauskommen soll?

E) Wie muß man bei gleichen Voraussetzungen als bisher rechnen, wenn in der Frage Lothe vorkommen?

758) 1 ℔. Seide kostet $8\frac{1}{3}$ Thl. was kosten 2 ℔. 32 Lth.? = $24\frac{23}{48}$ rh

759)

759) 1 ℔. Seide kostet $8\frac{2}{3}$ Thl. was kosten 3 ℔. 17 Lth.? = $30\frac{29}{48}$ rtl.

760) 1 ℔. — kostet $7\frac{5}{6}$ Thl. was kosten 9 Lth.?

761) 1 ℔. — kostet $8\frac{1}{4}$ Thl. was kosten $5\frac{1}{2}$ Lth.?

F) Wie müssen die Exempel der vorigen zwei letzten Nummern gerechnet werden, wenn das Gesuchte gleich unmittelbar in Groschen herauskommen soll?

G) Wenn Jemand von einer Waare eine Anzahl Pfunde für ein gewisses Geld gekauft hat, und nun ausrechnen will, wie viel ihm 1 ℔. kostet, wie muß er rechnen? Z. B.

762) 20 ℔. Kaffee kosten $9\frac{3}{4}$ Thl. was kostet 1 ℔.? = $\frac{39}{80}$ rtl.

763) $3\frac{1}{2}$ ℔. — kosten $1\frac{5}{8}$ Thl. was kostet 1 ℔.? = $\frac{13}{28}$ rtl

764) $\frac{5}{8}$ ℔. — kosten $\frac{1}{3}$ Thl. was kostet 1 ℔.?

H) Wie müssen die Exempel der vorigen Nummern gerechnet werden, wenn unmittelbar Groschen herauskommen sollen?

I) Wenn das Gekaufte in Centnern besteht, und man den Preis von 1 ℔. ausrechnen will, wie rechnet man denn?

765) 3 Ct. Zucker kosten $148\frac{1}{2}$ Thl. was kostet 1 ℔.? $= \frac{99}{220}$ Rl

766) 1 Ct. 40 ℔. — kosten $74\frac{3}{4}$ Thl. was kostet 1 ℔.?

767) $\frac{5}{8}$ Ct. — kosten $32\frac{2}{3}$ Thl. was kostet 1 ℔.?

K) Wie müssen die Exempel der vorigen Nummer gerechnet werden, wenn gleich unmittelbar Groschen herauskommen sollen?

L) Wenn das Gekaufte in Lothen gekauft ist, wie rechnet man dann den Preis von 1 ℔. aus?

768) 8 Lth. Gewürznelken kosten $1\frac{1}{8}$ Thl. was kostet 1 ℔.? $4\frac{2}{3}$ Rl

769) $5\frac{1}{2}$ Lth. — kosten $19\frac{1}{2}$ Gr. was kostet 1 ℔.?

770) $\frac{3}{4}$ Lth. — kosten $2\frac{1}{2}$ Gr. was kostet 1 ℔.?

M) Wenn in den Exempeln der zwei letzten vorigen Nummern das Gesuchte unmittelbar

bar unter der Benennung Thaler herauskommen soll, wie ist die Rechnung zu führen?

N) Wie müssen folgende Exempel gerechnet werden?

771) $3\frac{1}{2}$ Wspl. Waizen kostet 150 Thl. was 1 Schfl.? $= 1\frac{11}{14}$ rtl.

772) 1 lth. Zimmt $2\frac{1}{2}$ Gr. was $1\frac{1}{2}$ ℔.? $= 5$ rtl.

773) 1 Schfl. Hafer $\frac{2}{3}$ Thl. was $5\frac{3}{4}$ Wspl.?

774) 1 lth. Ingwer $\frac{1}{4}$ Gr. was $\frac{1}{8}$ Ct.?

775) $3\frac{1}{4}$ Elle Taffent 3 Thl. was 1 Elle?

776) 1 Elle Tuch $3\frac{1}{4}$ Thl. was $4\frac{3}{4}$ Elle? $= 15\frac{7}{18}$ rtl.

777) $1\frac{1}{2}$ Ballen Papier 50 Thl. was 1 Bch.?

778) 1 Bch. Papier $3\frac{1}{2}$ Gr. was $5\frac{1}{2}$ Rieß?

779) 1 lth. Muskatblumen $\frac{5}{12}$ Thl. was $4\frac{1}{4}$ ℔.?

780) 1 Ct. Pfeffer 64 Thl. 12 Gr. was $\frac{3}{8}$ Ct.?

781) 1 Elle Leinwand $\frac{1}{3}$ Thl. was $2\frac{1}{2}$ Schck.?

O) Da 1 Fl., wenn er zu 16 Gr. gerechnet wird, gerade $\frac{2}{3}$ Thl. beträgt, so müssen sich Thl. und Fl. in einander durch Multiplication und Division mit $\frac{2}{3}$ verwandeln lassen. Es fragt sich wie?

782) 3810 Fl. wie viel Thaler? $= 2540$

783) 500 Fl. wie viel Thl.?

784) 2720 Thl. — — Fl.? = 4080 fl.

785) 879 Thl. — — Fl.?

P) Wenn an Exempeln wie 784 und 785 noch Gr. hängen, wie ist dann die Rechnung zu machen?

786) 1412 Thl. 16 Gr. wie viel Fl.? = 2119 fl.

787) 788 Thl. 11 Gr. — — Fl. u. Kr.? 1182 fl 41 $\frac{1}{4}$ Kr.

Q) Wenn an Exempeln, wie 782 und 783, Kr. hingen, wie ist dann zu rechnen?

788) 86 Fl. 20 Kr. wie viel Thl. u. Gr.?

789) 75021 Fl. 40 Kr. — — Thl. u. Gr.? 50014 Thl. 10 $\frac{2}{3}$ gr.

R) Vermischte Exempel.

790) Von einer Erbschaft, die 1753 Thl. 18 Gr. beträgt, soll einer der Erben $\frac{3}{5}$ haben, wie viel bekommt er? 1052 Thl 6 gr.

791) Wie viel ist $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ Elle? $\frac{1}{2}$ Elle.

792) Ein Berliner Quart soll halten an Raum $65\frac{7}{18}$ Rheinländische (12theilige) Kubik-

Kubikzolle (Taf. 18). Wie viel Kubikzolle gehn also auf $\frac{2}{3}$ Quart? $43\frac{85}{123}$

793) Wie viel Leinewand braucht man zu einem Dutzend Hemden, wenn zu jedem Hemde $4\frac{7}{8}$ Elle nöthig sind?

794) Ein Sohn erbt $\frac{3}{4}$ von dem Vermögen seines Vaters. Vom Sohne erbt wieder der Enkel $\frac{3}{4}$ von diesen Dreivierteln. Nun fragt sich, a) was für einen Bruch von dem Vermögen des Großvaters beträgt das Erbtheil des Enkels? und b) wenn der Großvater 80000 Thl. hinterlassen hat, wie viel bekommt der Enkel? a) $\frac{9}{16}$ b) 45000 Thl.

795) In Berlin beträgt ein Haufen Holz $4\frac{1}{2}$ Klafter. Wie viel Klaftern sind $13\frac{1}{2}$ Haufen?

S) Wie kann man in folgenden Exempeln, auch da wo keine Brüche sind, mit Vortheil Brüche anbringen, oder wo solche da sind, weglassen?

796) 1 Quart Bier kostet 9 Pf. wie viel 800 Qrt.?

797) 1 ℔. Rauchtoback 16 Gr. was kostet $\frac{1}{2}$ Ct.?

798) 1 Lth. Gewürznelken 9 Gr. was kostet 1 ℔.?

799) $\frac{1}{4}$ Ct. Zucker kostet 10 Thl. was 1 ℔.?

800) 1 ℔. Zucker 12 Gr., was kostet 1 Hut, der $16\frac{3}{4}$ ℔. wiegt?

Ende des ersten Theils.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-707314-p0446-3

W 9040

(1)

V578

ULB Halle 3
006 302 22X

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-707314-p0447-8

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-707314-p0448-4

u ch

Leben

rer

st selbst zu

cher

Gymnasium

SCHUL-BIBLIOTHEK
DES
K. DOMGYMN.
ZU
HALBERSTADT.

unbenann-
enthält.

ngern.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-707314-p0449-3