Lehre

über

geometrische und ökonomische

Zertheilung der Felder

von

Johann Andreas Kirchner.

nebst 8 Kupfertafeln.

Weimar,

in Kommission der Hoffmannischen Buchhandlung, 1796.

(Preis echzehn Groschen.)

Vorrede.

Es ist allzuwohl bekannt, daß Geometer in verschiedenen Staatsgeschäften gebraucht werden; und man verlangt sogar von ihnen, daß sie neben geometrischen Kenntnissen auch noch andere haben sollen. Aber auch schon als Feldmesser haben sie mancherley Kenntnisse nöthig, wenn sie die Figur eines gewissen Theils von der Oberfläche der Erde aufnehmen, sie zu Papiere bringen, und ihren Flächeninhalt bestimmen wollen.

Es ist gar nicht zu läugnen, daß es ein Mensch durch bloße handwerksmäßige Erlernung hierinne nicht ziemlich weit sollte bringen können. Denn man kann ihn auf verschiedene Fälle vorbereiten, und die Uebung verschafft ihm einige Fertigkeit. Die Verschiedenheit der Gegenstände aber, die einem Feldmesser vorkommen können, ist eben so unbestimmt als die Verfahrungsart, die er dabey zu beobachten hat; und es scheint unmöglich zu seyn, einen Menschen ohne theoretische Kenntnisse in allen möglichen Fällen geschikkt zu machen.

Auch wird man für keinen Feldmesser gehalten, wenn man nicht alle Aufgaben, die vorkommen können, auflösen kann; wenn man nicht im Stande ist, sich deutliche Begriffe zu machen, zu erfinden, und überhaupt aus bekannten Größen unbekannte durch Schlüsse herzuleiten.

Die reine Mathematik, die jetzt keinen Mangel an Meister-Werken hat, wird hierinne einen Menschen, der sich der Feldmeßkunst widmet, hinlänglich unterstützen.

Die bekannten Größen setzen aber verschiedene andere Kenntnisse voraus, und man sieht wohl, daß aus bekannten Größen nicht eher unbekannte durch Schlüsse hergeleitet werden können, als biß man weiß, ob, und in wie fern die bekannten Größen richtig sind; wie weit man seinen Händen, seinen Augen, seinen Werkzeugen, und überhaupt seinen Erfahrungen trauen kann.

Diese Kenntnisse muß man sich durch die praktische Geometrie, oder vielmehr durch die Feldmeßkunst erwerben können.

.Demnach ist es nicht genug, wenn die Feldmeßkunst bloß die Instrumente, welche einem Feldmesser nöthig sind, kennen und gebrauchen lehrt; sondern sie muß auch die Fehler zeigen, welche beym Messen der Winkel und Linien, und überhaupt beym Aufnehmen und Auftragen der Figuren entstehen können, und die, welche bey den vollkommensten Werkzeugen nicht zu vermeiden sind, und ihre Größe wenigstens schätzen lehren. Denn hierdurch wird der Feldmesser geschikkt werden zu urtheilen, in wie fern seine Arbrit den Forderungen entspricht, und mit welcher Vorsichtigkeit er zu Werke gehen muß; und dieses ist, was einem Feldmesser, der mit Ueberzeugung nach Pflicht und Gewissen handeln will, zukommt.

Ein Feldmesser, wenn er nicht gleich einem Handwerker seyn will, muß also Hülfsquellen haben um zu erfahren, wie genau in der reinen Mathematik gegangen wird, und mit welcher Genauigkeit man in der Ausübung verfahren kann, d. h. er muß Theorie und Praxis gehörig mit einander verbinden lernen können.

Bey Zertheilung der Felder ist dieses nicht einmahl hinreichend. Es kommen Fälle vor, wo man Kenntnisse von der Güte des Erdreichs nöthig hat. Diese lehrt die Oekonomie.

Was das Messen der Linien und Winkel auf dem Felde, das Aufnehmen und Auftragen der Figuren, und die Fehler betrifft, welche dabey vorfallen können, wird sich gewiß ein jeder in Herrn Tobias Meyers praktischen Geometrie befriedigt finden.

Dieses schätzbaren Werks ungeachtet glaube ich doch, daß man über die Zertheilung der Felder noch manches wird sagen können; vorzüglich über die Zertheilung der Breite nach, und über die Verfahrungsart, nach welcher aus dem Flächeninhalte einer ganzen Lage Felder der einer jeden Abtheilung gefunden wird; zwey Gegenstände, die in Herrn Tobias Meyers praktischen Geometrie und in Herrn Christiani Lehre von Vertheilung der Felder ganz übergangen sind. Herr Tobias Meyer erklärt zwar die Zertheilung der Felder ihrer Breite nach für unbestimmet; ich unterstehe mich aber zu behaupten, daß nach ihr einem jeden Feldbesitzer das Seinige eben so richtig und in manchen Fällen noch bestimmter zugetheilt wird, als nach einer andern, wie man auch im dritten und vierten Kapitel sehen wird, nur daß man sich ihrer da bedienen kann, wo sie schon eingeführt ist. Auch bey Streitigkeiten kann nach ihr leichter und gewisser entschieden wer-

werden. Leichter, weil man nicht erst nöthig hat das Stükk Feld aufzunehmen und sich einer weitläuftigen Rechnung und Arbeit zu unterwerfen; gewisser, weil hier die Willkür wegfällt, die Theilungslinie so oder so zu ziehen. Herr Zollmann äußert daher in seiner Geodäsie mit Recht den Wunsch, daß man die Zertheilung der Felder ihrer Breite nach doch auch andern Orten einführen möchte, wo die Felder noch nicht nach ihr zertheilt wären.

Die Zertheilung der Felder ihrer Breite nach, und die Verfahrungsart, nach welcher aus dem Flächeninhalte einer ganzen Lage Felder der einer jeden Abtheilung gefunden wird, waren die Hauptgegenstände, die mich antrieben, meine Arbeit dem Urtheile des Publikums zu unterwerfen.

Eine ähnliche Verfahrungsart findet man in Herrn geheimen Rath Böhms Feldmeßkunst, uud in Herrn Zollmanns Geodäsie, die aber bloß regelmäßig behandelt, und ohne irgend einen Beweis aufgestellt ist. An solchen Regeln muß man allerdings zweifeln und ich rechnete es auch mir zur Pflicht.

Bey dieser Untersuchung gerieth ich auf die Sätze §. 16, durch welche ich mich in Stand gesetzt sahe zu zeigen, wie und auf welche Art man aus dem Flächeninhalte einer ganzen Lage Felder den einer jeden Abtheilung finden kann. Dieses geschieht freylich in gewissen Fällen auf eine etwas weitläuftige und mühsame Art; ja bißweilen auf eine eben so weitläuftige, als wenn man die Fläche einer jeden Abtheilnng durch Dreyeckke besonders ausmessen wollte.

Eben daher hätte ich bald meine Arbeit aufgegeben, wenn ich mich nicht hätte überzeugen können, daß der Inhalt einer jeden Abtheilung leicht größer oder kleiner gefunden werden kann, wenn man ihn durch Dreyekke ausrechnet, als wenn man ihn aus dem des ganzen Stükk Feldes bestimmet, wie im vierten Kapitel gezeigt worden ist. Auch wird man zugleich sehen bey welchen Figuren und in welchen Fällen die Rechnung weitläuftig ist, oder nicht, und in wie fern die Fehler, welche begangen werden, wenn man die ganze Lage und ihre Abtheilungen als Parallelogramme annimmt, die gleiche Höhen haben, beträchtlich sind oder nicht, d. i. wenn es erlaubt seyn kann den Inhalt der Abtheilungen gerade so zu suchen, als wenn sie Parallelogramme von einerley Höhe wären.

Man darf hier nur wissen, welche Fehler für nichts zu achten sind. Es können bald größere bald

bald kleinere Fehler erlaubt seyn, und bald kommt es auf die äußerste Genauigkeit an. Es wird nicht darnach gefragt, ob auf der Erde die Orte fünf Fuß entfernter sind oder nicht, und es giebt Fälle wo hundert Fuß noch keinen Fehler machen; ist aber ein Flekk Akker fünf Zoll breiter oder schmäler, dieß ist dem Besitzer nicht einerley. Das Verfahren dieses oder jenes zu erlangen ist oftmahls sehr verschieden. Durch das eine können größere oder kleinere Fehler begangen werden als durch das andere; und auf diese oder jene Art kann man diesen oder jenen Fehlern gänzlich ausweichen.

Wie man die Fehler vermeiden kann, welche entstehen, wenn man eine Linie nach einem verjüngten Maßstabe abmißt, d. i. wie der Inhalt einer Figur bestimmt werden kann, und auf welche Art Figuren zertheilt werden können, ohne daß man nöthig hat sie auf ein Blatt Pappier zu tragen, ist im ersten und zweyten Kapitel gezeigt worden. Auch wird man im ersten Kapitel zugleich sehen in wie fern der Einfluß jener Fehler auf den Inhalt einer Figur größer oder kleiner ist. Die Zertheilung einer Figur aus den auf dem Felde gemessenen Linien hat schon, wie Herr Hofrath Kästner (I Theils erste Abtheil. d. math. Anfangsgr. S. 320) meldet Herr Lowitz in einer Vorlesung, welche er in der Göttingischen Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften gehalten hat, gezeigt, und ich glaube, daß diese Art auch in einigen Fällen eine gewisse Bequemlichkeit haben wird.

In der Erklärung und in Ausdrükken über Berechnung des Flächeninhalts habe ich mir Herrn Professor Schulzens reine Mathesis zum Muster gewählt. Denn es wird manchen meine Leser bekannt seyn, daß es Schriftsteller gegeben hat, welche sich so ausgedrukkt haben: der Inhalt

halt eines Rechtekks entstehet, wenn man die Grundlinie durch die Höhe multipliziert. Dieser Ausdrukk könnte ungefähr der Kürze des Vortrags wegen gewählt worden seyn, wenn es einig nur nicht noch weiter getrieben hätten, indem sie zeigen wollten, daß die Multiplikation einer Linie mit einer Linie eine Fläche geben müßte. Diesen Streit, der nur durch dunkle Begriffe entstehen konnte, wird nun gewiß Herr Professor Schulz durch seine reine Mathesis beygelegt haben.

Im sechsten Kapitel, wo von Verhältnissen der Werthe der Grundstükke gehandelt wird, sind über die Ausgaben und Einnahmen, welche bey Grundstükken Statt finden können, keine Formeln gegeben worden. Denn wenn man überlegt, wie verschieden die Grundstükke, und wie unbestimmt die Ausgaben und Einnahmen sind, so wird man es mir für kein Versehen zurechnen.

Die Anzahl der Formeln würde gewiß nicht geringe geworden seyn, wenn ich nur die bekanntesten Fälle als Beyspiele hätte anführen wollen. Aber gerade auch dieß hielt ich für überflüßig. Denn es ist ja einem Oekonomen nicht schwer die Ausgabe von der Einnahme zu unterscheiden, und sowohl Ausgabe als Einnahme zu bestimmen. Und ich glaube alles gethan zu haben, wenn ich bloß als Erfahrung angenommen, was mir in diesem Kapitel nöthig schien, und gewisse Ausgaben und Einnahmen als bekannt vorausgesetzt habe. Nur einige Fälle ausgenommen, die ich zu verwikkelt und zu wichtig hielt, als daß ich sie hätte als Beyspiele übergehen sollen; besonders da sie zu verschiedenen andern Erfindungen Veranlassung geben können. Und dieses Verfahren scheint mir auch der mathematischen Methode desto anpassender zu seyn.

In wie fern ich die Sätze in eine gehörige systematische Ordnung gestellt, und alles mit gehöriger Deutlichkeit und mathematischen Schärfe vorgetragen habe überlasse ich den kritischen Lesern.

Johann Andreas Kirchner.

Einleitung.

§. 1. Wenn man durch einen in der Fläche eines Stükk Feldes DHMBA, Fig. 1 Tab. I, willkührlich angenommenen Punkt B aus dem Mittelpunkte der Erde C, sich einen Zirkel FEG beschrieben denkt, und diesen Zirkel eine Kugel beschreiben läßt: so heißt die Fläche, welche von der Peripherie beschrieben wird, die horizontale Fläche der Erde, und die, welche der Bogen FE beschreibt, die horizontale Fläche des Stükk Feldes DMA.

Anmerkung. Eigentlich zu sagen ist die horizontale Fläche unserer Erde keine vollkommene Kugel-Fläche. Man denke sich die Erde überall mit Wasser umgeben. Das Wasser wird sich vermöge der Schwere unter den Polen etwas zusammedrükken, unter den Aequator erheben, und die Oberflächn desselben um etwas von einer wirklichen Kugel-Fläche abweichen. Diese Oberfläche würde das richtige Bild vone der horizontalen Fläche der Erde geben. Gleichwohl ist die Abweichung so gering, daß man gar nicht nöthig hat hier darauf Rükksicht zu nehmen. Man sehe Herrn Tobias Meyers praktische Geomet. 1sten Theil §. 117.

Die horizontale Fläche eines Stück Feldes ist also ein Theil einer Kugel-Fläche.

In einer krummen Linie läßt sich jederzeit ein so kleiner Theil annehmen dessen Krümmung nicht mehr zu bemerken ist, d. h der nicht mehr von einer geraden Linie unterschieden werden kann. Eben so läßt sich in einer jeden krumme Fläche ein so kleiner Theil für eine Ebene annehmen.

Mann kann also eine horizontale Fläche nur dann für eine Ebene annehmen, wenn sie ein sehr kleiner Theil von der ganzen Kugel-Fläche ist.

Anmerkung. Herr Tobias Meyer sagt im ersten Theile seiner praktischen Geomet. §. 11 S. 39, daß man eine horizontale Fläche von 12 bis 15 Quadratmeilen ohne merklichen Fehler für eben annehmen könne, und im dritten Theile §. 342. S. 332 zeigt er auch wie die Abweichung zu bestimmen ist.

§. 2. Der Theil der praktischen Geometrie, den man Feldmeßkunst nennt, ist eine Wissenschaft der Theile von der Kugel-Fläche der Erde, in so fern sie als Ebenen zu betrachten sind.

Wenn die Theile von der Kugel-Fläche der Erde nicht mehr als Ebenen angenommen werden können, so ist die Feldmeßkunst keine Wissenschaft mehr davon.

Anmerkung. Die Betrachtung der Theile von der Oberfläche der Erde, als Theile von einer Kugel-Fläche, gehört in das Gebiet der mathematischen Geographie, welche in einigen Lehrbüchern den übrigen Theil der praktischen Geometrie ausmacht.

Also wird nach der Feldmeßkunst nicht die krumme Fläche eines Stükk Feldes, denn in der Natur giebt es keine Ebene, sondern die horizontale desselben, wenn sie als eine Ebene betrachtet werden kann, aufgenommen und gezeichnet.

Man denke sich aus jedem Punkte der Fläche eines Stükk Feldes auf die horizontale Ebene desselben eine senk-

senkrechte Linie. Wie nun die Punkte und die Grenzen der Fläche eines Stükk Feldes anf die horizontale Ebene treffen, so werden sie aufgenommen und gezeichnet, d. i. die Fläche, welche man durch jene Perpentikel erhält, und man gemeiniglich die geometrische Projektion nennt.

Folglich ist ein Riß eine ebene Figur, unter der man sich die horizontale Ebene eines Stükk Feldes vorstellt.

Anmerkung. Die Gründe, warum in der Feldmeßkunst die horizontale Ebene eines Stükk Feldes aufgenommen und gezeichnet wird, hat Herr Tobias Meyer in seiner praktischen Geometrie 1ten Theile S. 34 §. 9 gelehrt.

§. 3. Die Lehre über die Zertheilung der Felder ist eine Wissenschaft von der Zertheilung der horizontalen Ebenen derselben.

Und in so fern macht die Lehre über die Zertheilung der Felder einen Theil der Feldmeßkunst aus.

Bey der Zertheilung sieht man entweder zugleich auf die Güte des Erdreichs, oder nicht. Im letztern Falle ist die Zertheilung bloß geometrisch und im erstern geometrisch und ökonomisch zugleich.

Die geometrische Zertheilung geschieht entweder mittelbar oder unmittelbar. Mittelbar wird ein Stükk Feld zertheilt, wenn es vermittelst eines Risses geschieht.

Die mittelbare Zertheilung der Felder setzt also die Zertheilung der ebenen Figuren voraus, und diese ist in verschiedenen Fällen mit der Ausmessung der ebenen Figuren verbunden.

Ist ein Stükk Feld nicht durchaus von gleicher Güte, und soll es geometrisch ökonomisch zertheilt werden: so hat man zuerst das Verhältniß der Werthe, welche die einzelnen Quadratruthen haben zu bestimmen. Bey der geometrisch ökonomischen Zertheilung der Felder hat man auch zugleich auf den Umfang der Theile zu sehen.

Die Lehre über die Zertheilung der Felder zerfällt demnach von selbst in zwey Theile: in den, welcher von der geometrischen, und in den, welcher von der geometrisch ökonomischen Zertheilung handelt.

Der erste zerfällt eigentlich wieder in drey Kapitel: in das, von Ausmessung der ebenen Figuren; in das, von Zertheilung der ebenen Figuren; in das, von Zertheilung der Felder. Diesen drey Kapiteln ist aber noch das hinzugefügt, welches lehrt, wie durch die horizontale Ebene eines zertheilten Stükk Feldes diejenige einer jeden Abtheilung ausgemessen werden kann.

Der andere Theil zerfällt in drey Kapitel: in das, welches zeigt, welche Figuren für die Theile eines Stükk Feldes die vortheilhaftesten sind; in das, welches von Bestimmung des Verhältnisses, das die Werthe zweyer Grundstükke und die der einzelnen Quadratruthen gegen einander haben, handelt; und in das, welches zeigt, wie Grundstükke von verschiedener Güte zertheilt werden können.

Daher besteht die ganze Lehre über Zertheilung der Felder aus sieben Kapiteln.

Erstes Kapitel.

Von Ausmessung einiger ebenen Figuren.

Erklärung.

§. 4. Eine ebene Figur ausmessen heißt, bestimmen, wie viel Mahl eine andere, die man zu ihrem Maße erwählt, entweder ganz oder ein aliquoter Theil derselben mit sich selbst verknüpft und verbunden werden muß, um jene zu erzeugen.

Erklärung.

§. 5. Die zum Maaße der übrigen willkührlich festgesetzte ebene Figur, ist das Quadrat, und zwar die Quadratruthe, wenn jede Seite eine Ruthe; der Quadratfuß, wenn jede Seite ein Fuß; der Quadratzoll, wenn jede Seite ein Zoll; und die Quadratlinie, wenn jede Seite eine Linie lang ist.

Erklärung.

§. 6. Wie viel Mahl eine Figur ihr Maß, oder einen aliquoten Theil desselben in sich enthält heißt ihr Inhalt, oder, welches eben das ist, ihre Quantität (Größe).

Voraussetzung.

§. 7. Die Geometrie lehrt den Flächeninhalt eines Parallelogramms auf folgende Art finden.

Man messe die Höhe DE, Fig. 2 Tab. I, und die Grundlinie AC, und multipliziere die Zahl der Fuß dieser durch die Zahl der Fuß jener Linie. Das erhaltene Produkt zeigt, wie viel Quadratfuß die Fläche enthält

hält, d. i. wenn a die Fuß ausdrukkt, welche AC, und b die, welche DE enthält, ab giebt den Flächeninhalt (§. 6.).

Sie lehrt ferner: der Inhalt eines Dreyekks ADC Fig. 2, oder GFM, Fig. 3, wenn GF = AD, FM = DC, und GM = AC, ist $= b \times \frac{1}{2}a = a \times \frac{1}{2}b = \frac{ab}{2}$.

Anmerkung 1. Wenn man ein Dreyekk ausmessen, oder seinen Inhalt berechnen will, so nehme man, wo mögslich, die längste Seite zur Grundlinie; weil man da aus der gegenüber stehenden Ekke einen Perpendikel darauf fällen kann, ohne sie verlängern zu müssen.

Anmerkung. 2. Durch die Ausmessung der ebenen Figuren will man also keine Fläche haben, denn die Fläche ist gegeben; auch multiplizirt man nicht eine Linie durch eine andere: sondern bloß die Zahl der Fuß der einen durch die Zahl der Fuß der andern Linie; und zwar, um eine Zahl zu finden, welche bestimmt, wie viel Mahl das Maß oder ein aliquoter Theil desselben genommen werden muß, um die gemessene Figur zu erzeugen, d. i. durch welche man den Inhalt oder die Quantität (Größe) der gemessenen Fläche erhält. Auch den Ausdrukk AC × DE kann man keine Fläche nennen, sondern nur sagen er bedeutet das Oblong der Linien AC und DE.

Aufgabe.

§. 8. Den Inhalt eines Trapezoids zu finden, wo die Perpendikel FB und GD, Fig. 4 Tab. I, eine gemeinschaftliche Grundlinie AC haben.

Auflösung. Es enthalte AC a, BF b, und DG c Fuß. Der Inhalt des Dreyekks ABC sey = m, und der des Dreyekks ACD = n. Nun ist $\frac{ab}{2} = m$, und $\frac{ac}{2} = n$ (§. 7.). Folglich $m + n = \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} = \frac{ab + ac}{2} = \frac{a(b+c)}{2} = (b+c) \times \frac{1}{2}a = a \times \frac{1}{2}(b+c)$ = dem Inhalte der ganzen Figur ABCD.

Er.

Exempel. Vermöge dieser Formel kann der Flächeninhalt einer solchen Figur auf eine bequeme Art gefunden werden.

Erster Fall. Wenn a eine Zahl ist, die sich durch 2 dividieren läßt, z. B. $a = 28'$, $b = 11'$, und $c = 8'$, so ist $(b+c) \times \frac{1}{2}a = 14\,(11+8) = 14 \times 19 = 266$ Quadratfuß.

Zweyter Fall. Ist die Summe $b+c$ so beschaffen, daß sie durch 2 dividiert werden kann, z. B. ist $b = 11'$, $c = 9'$, und $a = 29'$; so ist $a \times \frac{1}{2}(b+c) = 29 \times \frac{1}{2}(11+9) = 29 \cdot 10 = 290$ Quadratfuß.

Dritter Fall. Kann weder $b+c$ noch a durch 2 dividiert werden, z. B. ist $b = 8'$, $c = 9'$, und $a = 29'$: so ist $\frac{a(b+c)}{2} = \frac{29(8+9)}{2} = \frac{29 \cdot 17}{2} = \frac{493}{2} = 246\frac{1}{2}$ Quadratfuß $=$ 2 Quadratruthen 46 Quadratfuß und 50 Quadratzoll.

Anmerkung. Es ist hier zwischen Trapezoid und Trapez der Unterschied den Herr Professor Schulz in seiner reinen Mathesis, Herr Berja in seinem selbstlehrenden Geometer und andere mehr gemacht haben; nähmlich ein Trapezoid ist ein Viereck, wo keine Seite der andern parallel ist, sind aber zwey Seiten einander parallel, so wird die Figur ein Trapez genennt.

Aufgabe.

§. 9. Den Inhalt einer jeden geradlinigen Figur zu finden.

Auflösung. Man theile die Figur durch Diagonallinien in Dreyekke.

Haben einige von ihnen eine solche Lage, daß zwey Perpendikel eine gemeinschaftliche Grundlinie haben wie z. B. BG, und HD, Fig. 6 Tab. I, auf EC fallen, so kann ihr Inhalt nach §. 8. gefunden werden. Ist dieses nicht, so muß man den Inhalt eines jeden Dreyekks nach §. 7 suchen. Die Summe von diesem, was so wohl nach §. 8 als nach §. 7 gefunden worden ist, giebt den verlangten Inhalt.

Aufgabe.

§. 10. Den Inhalt eines Trapezes zu finden.

Auflösung. Es seyn AC und BD, Fig. 5 Tab. I, die parallelen Seiten. Also GA als Höhe des Dreyekks ADB = ED, welches die Höhe des Dreyekkes ADC seyn soll. Es sey ferner der Inhalt des Dreyekks ADC = m, und der des Dreyekks ADB = n, AG = DE enthalte a, BD b, und AC c Fuß. Nun ist $a \times \frac{1}{2}b = n$, und $a \times \frac{1}{2}c = m$ (§. 7.). Also $m + n = a \times \frac{1}{2}c + a \times \frac{1}{2}b = \frac{ac}{2} + \frac{ab}{2} = \frac{(c+b)\,a}{2} = a \times \frac{1}{2}(c+b) = (c+b) \times \frac{1}{2}a$ = dem Inhalte der ganzen Figur.

Exempel. Es sey AG = 10′, AC = 19′, und BD = 28′. Demnach ist $(c+b) \times \frac{1}{2}a = (19+28)\,5 = 235$ Quadratfuß.

Ist AG = 11′, AC = 13′, und BD = 15′; so ist $a \times \frac{1}{2}(c+b) = 11 \times \frac{1}{2}(13+15) = 11.\,14 = 154$ Quadratfuß.

Findet der dritte Fall statt, z. B. ist AG = 5′, AC = 8′, und BD = 9′: so ist $\frac{(c+b)a}{2} = \frac{5(8+9)}{2} = \frac{5.\,17}{2} = \frac{85}{2} = 42\frac{1}{2}$ Quadratfuß.

Zusatz 1. Ein jedes reguläres Vielekk von einer geraden Anzahl Seiten, läßt sich in Trapezen zerlegen. Hat das reguläre Vielekk eine ungerade Anzahl Seiten, so muß zu der Summe der Trapezen noch der Inhalt ei-

nes

nes gleichschenkeligen Dreyekks nach §. 7 besonders gerechnet werden.

Zusatz 2. Ein irreguläres Vielekk, daß von lauter geraden Linien umgrenzt ist, und zwey gegenüber stehende parallele Seiten hat, wie AB und DE, Fig. 7 Tab. II, kann in lauter Trapezen zerlegt werden. Denn man ziehe nur aus jeder Ekke F, Q, O, N, M, C Linien welche mit AB oder ED parallel sind. Es sey RW auf DE senkrecht, der Inhalt des Trapezes AFGB $=$ m, FGHQ $=$ n, QHCP $=$ p, PCIO $=$ q, OIKN $=$ h, NKLM $=$ l, und der des Trapezes MLDE $=$ k; ferner es enthalte AB a, FG b, QH c, PC d, OI e, NK f, ML g und ED h Fuß; endlich enthalte RS A, ST B, TZ C, ZV D, VY E, YX F, und XW G Fuß.

Da nun $m = \frac{1}{2}(a+b)A$, $n = \frac{1}{2}(b+c)B$, $p = \frac{1}{2}(c+d)C$, $q = \frac{1}{2}(d+e)D$, $h = \frac{1}{2}(e+f)E$, $l = \frac{1}{2}(f+g)F$, und $k = \frac{1}{2}(g+h)G$: so ist $m+n+p+q+h+l+k = \frac{1}{2}(a+b)A + \frac{1}{2}(b+c)B + \frac{1}{2}(c+d)C + \frac{1}{2}(d+e)D + \frac{1}{2}(e+f)E + \frac{1}{2}(f+g)F + \frac{1}{2}(g+h)G = ((a+b)A + (b+c)B + (c+d)C + (d+e)D + (e+f)E + (f+g)F + (g+h)G) : 2 =$ dem Inhalte des irregulären Vielekks ABCDEPA.

Setzt man nun $RS = A = \alpha$, $RT = A+B = \beta$, $RZ = A+B+C = \gamma$, $RV = A+B+C+D = \delta$, $RY = A+B+C+D+E = \varepsilon$, $RX = A+B+C+D+E+F = \zeta$, und $RW = A+B+C+D+E+F+G = \eta$: so ist

$$A = \alpha$$
$$B = \beta - \alpha$$
$$C = \gamma - \beta$$
$$D = \delta - \gamma$$
$$E = \varepsilon - \delta$$
$$F = \zeta - \varepsilon$$
$$G = \eta - \zeta.$$

Folglich, da nun

$(a+b)\,\alpha \quad = + a\alpha + b\alpha$
$(b+c)(\beta-\alpha) = + b\beta - b\alpha + c\beta - c\alpha$
$(c+d)(\gamma-\beta) = + c\gamma + d\gamma - c\beta - d\beta$
$(d+e)(\delta-\gamma) = - e\gamma - d\gamma + d\delta + e\delta$
$(e+f)(\varepsilon-\delta) = + e\varepsilon + f\varepsilon - f\delta - e\delta$
$(f+g)(\zeta-\varepsilon) = + \zeta f - f\varepsilon + \zeta g - g\varepsilon$
$(g+h)(\eta-\zeta) = + g\eta + h\eta - \zeta g - h\zeta$ ist
$m+n+p+q+h+l+k = (a\alpha - c\alpha + b\beta - d\beta + c\gamma - e\gamma + d\delta - f\delta + e\varepsilon - g\varepsilon + \zeta f - h\zeta + g\eta + h\eta) : 2 = ((a-c)\,\alpha + (b-d)\,\beta + (c-e)\,\gamma + (d-f)\,\delta + (e-g)\,\varepsilon + (f-h)\,\zeta + (g+h)\,\eta) : 2 =$ dem Inhalte der ganzen Figur ABCDEPA.

Zusatz 3. Setzt man $ED = h = ML = g = NK = f = OI = e$, so wird $((a-c)\,\alpha + (b-d)\,\beta + (c-e)\,\gamma + (d-f)\,\delta + (e-g)\,\varepsilon + (f-h)\,\zeta + (g+h)\,\eta : 2 = ((a-c)\,\alpha + (b-d)\,\beta + (c-e)\,\gamma + (d-f)\,\delta + 2h\eta) : 2$.

Zusatz 4. Setzt man auch $OI = e = PC = d = QH = c = FG = b$, so wird
$((a-c)\,\alpha + (b-d)\,\beta + (c-e)\,\gamma + (d-f)\,\delta + 2h\eta) : 2 = ((a-c)\,\alpha + 2h\eta) : 2 = \frac{1}{2}(a-h)\,\alpha + h\eta$.

Hier verwandelt sich Fig. 7, entweder in Fig. 8, oder Fig. 9, je nachdem $AB > ED$, oder $AB < ED$. Vermöge dieser Formel wird der Inhalt eben so gefunden, als wenn man die Zahl der Fuß von RW durch die von DE multiplizierte, und im ersten Falle zu diesem Produkte die Quadratfuß der beyden Dreyekke GAF und BSQ addierte, und im letztern Falle subtrahierte.

Zusatz 5. Sehr selten hat eine auf dem Felde aufgenommene Figur zwey entgegen stehende parallelen Seiten, und kann demnach nicht in lauter Trapezen zertheilt werden. In diesem Falle entstehet entweder oben, wie Fig.

Fig. 13, Tab. II, oder unten ein Dreyekk, oder man erhält wohl gar oben und unten welche, wie FRG, und NKM, Fig. 12. Hier ist $AB = a = 0$, $LM = g = 0$, und der Flächeninhalt der Figur $RGKMOPFR = (-c\alpha + (b-d)\beta + (c-e)\gamma + (d-e)\delta + e\varepsilon + f\zeta) : 2$.

Exempel. Es sey $RS = \alpha = 6'$, $RT = \beta = 14'$, $RZ = \gamma = 17'$, $RV = \delta = 27'$, $RY = \varepsilon = 36'$, $RY + YM = \zeta = 43$, $FG = b = 13'$, $QH = c = 11'$, $PC = d = 12$, $OI = e = 15'$, $NK = f = 14$. Also ist

$(-c\alpha + (b-d)\beta + (c-e)\gamma + (d-f)\delta + e\varepsilon + f\zeta) : 2 = (-6.11 + (13-12)14 + (11-15)17 + (12-14)27 + 15.36 + 14.43) : 2 = (-66 + 14 - 68 - 54 + 540 + 602) : 2 = (1156 - 188) : 2 = 968 : 2 = 484$ Quadratfuß.

Zusatz 6. Nimmt man für die Linien FG, QH, u. s. w. Fig. 13, eben jene Buchstaben an; so wird der Inhalt dieser Figer $= (-c\alpha + (b-d)\beta + (c-e)\gamma + (d-f)\delta + e\varepsilon) : 2$, und wenn $FG = QH = PC = b = c = d$ ist, $= (-c\alpha + (c-e)\gamma + (d-f)\delta + e\varepsilon) : 2$.

Exempel. Es sey $\alpha = RS = 5$, $\gamma = RZ = 21'$, $\delta = RV = 28'$, $\varepsilon = RY = 30'$, $b = c = d = 13'$, $e = OI = 12'$, und $f = 11$. Demnach ist $(-c\alpha + (c-e)\gamma + (d-f)\delta + e\varepsilon) : 2 = (-13.5 + (13-12)21 + (13-11)28 + 12.30) : 2 = (-65 + 21 + 56 + 360) : 2 = (437 - 65) : 2 = 372 : 2 = 186$ Quadratfuß.

Zusatz 7. Ist eine Figur in krumme Linien eingeschlossen, wie Fig. 14 Tab. II, so theile man den Umfang

fang so ein, daß man zwischen zwey Punkten keine merkliche Krümmung mehr gewahr werden kann. Hierauf ziehe man aus jedem Punkte durch die Figur Linien, die mit einander parallel sind. Es seyn hier für die Linien RS, RT u. s. w ebenfalls jene Buchstaben gesetzt. Daher ist der Inhalt dieser Figur $= (-c\alpha + (b-d)\beta + (c-e)\gamma + (d-f)\delta + (e-g)\varepsilon + f\zeta + g\eta : 2.)$

Zusatz 8. Kann man die Parallellinien in gleicher Entfernung ziehen, so erhält die Formel noch eine große Abkürzung. Denn in diesem Falle ist, wenn $RS = A = ST = B = TZ = C = ZV$, u. s. w. gesetzt wied, $((a+b)A + (b+c)B + (c+d)C + (d+e)D + (e+f)E + (f+g)F + (g+h)G) : 2$ (Zusatz 2) $= ((a+b)m + (b+c)m + (c+d)m + (d+e)m + (e+f)m + (f+g)m + (g+h)m) : 2$, wenn nähmlich $m = RS = ST = TZ$, u. s. w. ist, $= (a+b+b+c+c+d+d+e+e+f+f+g+g+h)\frac{m}{2}$ $= (b+c+d+f+g)m + \frac{(a+h)m}{2}$. Folglich da Fig. 14. $a = o$ und $h = o$ ist, so ist auch $\frac{(a+h)m}{2} = o$, und $(b+c+d+e+f+g)m + \frac{(a+h)m}{2} = (b+c+d+e+f+g)m$; oder, wenn man $M =$ der Zahl der Fuß setzt, welche RW enthält, und n die Zahl der Theile RS ist, $(b+c+d+e+f+g)m = (b+c+d+e+f+g)\frac{M}{n} =$ dem Inhalte der Figur RLWMOR.

Exem-

Exempel. Es sey $m = \frac{M}{n} = 1$ Ruthe.

$$\begin{aligned} b &= 780'' \\ c &= 845'' \\ d &= 960'' \\ e &= 975'' \\ f &= 1040'' \\ g &= 1375'' \end{aligned}$$

$$b + c + d + e + f + g = 5975$$

$$\text{Inhalt} = 59\,500\,\Box''$$
$$= 597{,}5'\,\Box = 59\tfrac{3}{4}\,\Box^{\circ}$$

Es sey alles, wie angenommen worden ist, nur $M = 21^{\circ}$, $n = 7$, und $m = \frac{M}{n} = \frac{21}{7} = 3^{\circ}$

Demnach $5975'' \times 300'' = 17925\,\Box' = 179\tfrac{1}{4}\,\Box^{\circ} =$ dem Inhalte der ganzen Figur.

Zusatz 9. Alle krummlinigen Figuren werden durch geradlinige aufgenommen. Diese ist entweder außerhalb der krummlinigen, wie Fig. 11 Tab. I, oder innerhalb, wie Fig. 10. In beyden Fällen kann man erst die Fläche der geradlinigen besonders ausmessen. Bey ABCD suche man vermittelst gegenwärtiger Formel den Inhalt der Stükke ABKGHI, GKLF, FLCDME, MEHI, und ziehe die Summe desselben von jenem ab. Dieses wird deßwegen bequemer seyn, als wenn man bloß den Inhalt der krummlinigen Figur sucht, weil man die Perpendikel aH, bh, cm, dn, ep, fq, gG, und ihre Entfeenungen Aa, Ab, Ac, Ad, Ae, Af, Ag, AB bey Aufnehmung der Figur schon gemessen hat. Bey Fig. 10 muß man den Flächeninhalt der Stükke AIKB, BKFC, FCDG, DGHE, HEAIP zusammen rechnen, und die Summe zu dem der geradlinigen Figur addieren.

Auf-

Aufgabe.

§. 11. Aus allen drey Seiten eines Dreyekks seinen Inhalt zu finden.

Auflösung. Im Dreyekke GFM, Fig. 3 Tab. I, sey $GF = c$, $FM = a$ und $GM = b$ Fuß. Es sey ferner FE auf GM senkrecht. Nun verhält sich wenn man den sin. tot $= 1$ setzt.

$$c : FE = 1 : \sin. \angle FGM$$

$$c \times \sin. \angle FGM = FE. \quad \text{Folglich}$$

der Inhalt $= \dfrac{bc \times \sin. \angle FGM}{2}$

Es verhält sich ferner

$$c : GE = 1 : \cos. \angle FGM$$

$$GE = c \times \cos. \angle FGM$$

$$EM = GM - GE = b - c \times \cos. \angle FGM.$$

Da nun in einem rechtwinkeligen Dreyekke FEM $FM^q = FE^q + EM^q$, so ist

$$a^2 = (c \times \sin \angle FGM)^2 + (b - c \times \cos. \angle FGM)^2$$
$$= c^2 (\sin.^q \angle FGM + \cos^q \angle FGM) + b^2 - 2cb \times \cos. \angle FGM.$$

Weil $\sin. tot_q = \sin^q \angle FGM + \cos^q \angle FGM$ und $\sin. tot. = 1$, so ist

$$1 = \sin^q \angle FGM + \cos^q \angle FGM. \quad \text{Folglich}$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \times \cos. \angle FGM$$

$$0 = c^2 + b^2 - a^2 - 2cb \times \cos. \angle FGM$$

$$2cb \times \cos. \angle FGM = c^2 + b^2 - a^2$$

$$\cos. \angle FGM = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$$

$$1 + \cos \angle FGM = 1 + \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$$
$$= \frac{2cb + c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$$
$$= \frac{(c+b)^2 - a^2}{2cb}$$
$$= \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2cb}$$

und $1 - \cos. \angle FGM = 1 - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$
$$= \frac{2cb - c^2 - b^2 + a^2}{2cb}$$
$$= \frac{a^2 + (b-c)(-b+c)}{2cb}$$
$$= \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{2cb}$$

Weil nun $(1 + \cos. \angle FGM)(1 - \cos. \angle FGM)$
$= 1 - \cos^q \angle FGM = \sin^q \angle FGM$

$$\sin^q \angle FGM = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}$$

Folgl. $\sin \angle FGM = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}}$

$$\frac{bc \times \sin. \angle FGM}{2} = \frac{bc}{2} \times$$
$$\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}}$$
$$= \frac{bc}{2} \times \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-b)(a+b-c)}}{2bc}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$
= dem verlangten Inhalte.

Anmer-

Anmerkung. Wie bekannt läßt sich eine jede geradlinige Figur in Dreyekke zerlegen. Man kann also durch gegenwärtige Formel den Inhalt einer jeden geradlinigen Figur finden, wenn man bey Aufnehmung der Figur zu jedem Dreyekke alle drey Seiten gemessen hat. Diese Formel giebt in diesem Falle nicht nur den Vortheil, daß man nach dem verjüngten Maßstabe keine Linie zu messen braucht, oder wohl gar bißweilen nicht nöthig hat die Figur aufzutragen; sondern verschafft auch einen Weg den Fehlern, welche bey Abmessung der Linien nach einem verjüngten Maßstabe begangen werden, ausweichen zu können. Denn, wie die Erfahrung lehrt, kann niemand wer nur auf dem Risse Linien nach einem verjüngten Maßstabe abmessen will, genau genug verfahren.

Zusatz 1. Sind die Seiten eines Dreyekks sehr lang so werden die Logarithmen einen viel kürzern Weg zur Berechnung des Flächeninhalts geben. Es sey derselbe $= M$. Mithin ist

$$M = \tfrac{1}{2}(\log.(a+b+c) + \log.(b+c-a) + \log.(a+c-b) + \log.(a+b-c)) - \log. 4.$$

Exempel. Es sey $a = 38°$, $b = 21°$, $c = 41°$.

Also a	$=$	$38°$
b	$=$	21
c	$=$	41
$a+b+c$	$=$	$100°$
$b+c-a$	$=$	24
$a+c-b$	$=$	58
$a+b-c$	$=$	18
$\log.(a+b+c)$	$=$	2,0000000
$\log.(b+c-a)$	$=$	1,3802112
$\log.(a+c-b)$	$=$	1,7634280
$\log.(a+b-c)$	$=$	1,2552725
2)		6,3989117
		3,1994558
$\log. 4$	$=$	0,6020600
$\log. M$	$=$	2,5973958
und M	$=$	395,72 Quadratruthen.

Zusatz 2.

Zusatz 2. Ist das Dreyekk gleichseitig, nähmlich $a=b=c$, so ist der Flächeninhalt $= \frac{\sqrt{3a^4}}{4} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. Für ein gleichschenkeliges, wo nähmlich $a=c$ ist, ist derselbe $= \frac{1}{4}\sqrt{((2a+b)(2a-b))b^2}$
$= \frac{1}{4}b\sqrt{(2a+b)(2a-b)}$.

Zusatz 3. Da sich ein jedes reguläres Vielekk in eben so viel gleichschenkelige Dreyekke zertheilen läßt, als es Seiten hat: so ist der Flächeninhalt eines Fünfekks $= \frac{5}{4}b\sqrt{(2a+b)(2a-b)}$; der eines Sechsekks $= \frac{6}{4}b\sqrt{(2a+b)(2a-b)}$, und weil hier $a=b$ ist, $= \frac{3}{2}\sqrt{3a^4} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$; der eines Siebenekks $= \frac{7}{4}b\sqrt{(2a+b)(2a-b)}$; und endlich für ein Vielekke, das n Seiten hat, ist der Inhalt $= \frac{n}{4}b\sqrt{(2a+b)(2a-b)}$.

Allgemeine Anmerkung über dieses Kapitel.

Die Fläche eines Stükk Feldes ganz genau auszumessen, und die Größe derselben anzugeben, setzt erstlich voraus, daß man alle Linien, welche den Umfang, und also die Größe der ebenen Fläche, welche von ihm eingeschlossen wird, bestimmen, auf dem Felde ganz ohne Fehler gemessen habe. Sind alle Linien des Umfangs, und so viel Diagonallinien gemessen worden, daß von ihnen die Figur in Dreyekke zerlegt wird, und alle drey Seiten eines jeden Dreyekks bekannt sind; so kann der Flächeninhalt nach §. 11. bestimmt werden: ist aber die Figur so aufgenommen, daß die Höhe eines jeden Dreyekks trigonometrisch gefunden werden kann, und nicht alle drey Seiten bestimmt sind; so muß man die Fläche derselben nach §. 7. ausmessen. In beyden Fällen ist es möglich den Inhalt ohne Fehler, die Rechnungsfehler, welche man leicht finden und vermeiden kann, ausgenommen, zu bestimmen.

Auch bey krummlinigen Figuren geht dieses an. Denn eine jede krummlinige Figur, wird durch eine geradlinige aufgenommen, wie der Theil der praktischen Geometrie, von Aufnehmung der Figuren, lehrt. Man darf nur bey Aufnehmung der Figur entweder alle drey Seiten eines jeden Dreyekks der geradlinigen Figur; oder die Winkel so gemessen haben, daß sich die Höhe eines jeden trigonometrisch finden läßt. In beyden Fällen kann der Inhalt der geradlinigen Figur, und auch der der krummlinigen, wie §. 10 Zusatz 9, gezeigt worden ist, bestimmt werden, ohne daß man nöthig hat die Figur auf das Papier zu tragen. Aber wie gewöhnlich, mißt man die Winkel mit einer Scheibe, oder nimmt die Figur mit einem Meßtische auf. Dieses verlangt, daß man die Figur etliche Mahl verkleinern, sie auf das Papier tragen, und von da die Linien, welche zur Bestimmung des Flächeninhalts nöthig sind, nach dem verjüngten Maßstabe, nach welchem die Figur aufgetragen worden ist, abmessen muß.

Daß in diesem Falle, wenn man die Linien der Dreyekke auf dem Risse abmißt, bey Berechnung des Flächeninhalts große Fehler begangen werden können, ist gewiß leicht einzusehen; daß ferner der Fehler desto größer wird, oder leicht werden kann, je mehr Dreyekke man zu berechnen hat, ist gar nicht zu bezweifeln; und daß endlich der Fehler, ohne Verschulden, am aller größten werden kann, wenn alle Linien, welche zur Berechnung des Flächeninhalts nöthig sind, auf dem Risse abgemessen werden müssen, wird man leicht zugeben: so bald man weiß, daß diese Fehler bloß durch die vielmahlige Verkleinerung der Figur entstehen. Es kann also der Fehler im Verhältnisse der verjüngten Figur zur aufgenommenen seyn, ich sage er kann. Folglich desto größer, je ein kleinerer Theil der verjüngte Maßstab von dem üblichen Feldmaße ist; und würde demnach gänzlich verschwinden, wenn man im Stande wäre eine Figur wieder so groß zu zeichnen, als die aufgenommene.

Gewöhnlich nimmt man von den üblichen Feldmaße einen Zoll für zehen Ruthen des verjüngten Maßstabes an; ja an verschiednen Orten Deutschlands ist ein solches Verhältniß des verjüngten Maßstabes zum üblichen Feldmaße, bey allgemeinen Landesvermessungen festgesetzt wor-

den

den. Dieses ist aber gerade ein Maß, wo man nur bis auf vier oder sechs Zolle richtig messen kann.

Man setze es sey die Höhe eines Dreyekks $= b$, die Grundlinie $= a$ Fuß; und man habe anstatt b die Länge $b + n$ oder $b - n$, und anstatt a die Länge $a + m$ oder $a - m$ gemessen. Dieser Voraussetzung nach, wird man anstatt $\frac{ab}{2}$ entweder

$(ab + an + bm + mn) : 2$
$(ab - an + bm - mn) : 2$
$(ab + an - bm - mn) : 2$ oder
$(ab - an - bm - mn) : 2$ finden.

Läßt man das letzte Glied mn, daß nur im Verhältnisse mit $\frac{1}{2}ab$ sehr klein seyn kann, weg: so ist leicht zu ersehen, daß der Fehler im ersten und letzten Falle am größten ist; und daß er im zweyten und dritten Falle desto kleiner wird, je weniger a und b von einander unterschieden sind. Ist $a = b$, und $m = n$. so wird, wenn man $nm = 0$ setzt, auch der Fehler $= 0$.

Aber auch der Fehler in $(ab + an + bm) : 2$ und in $(ab - an - bm) : 2 = (ab - (an + bm)) : 2$ ist desto kleiner, je kleiner der Unterschied zwischen a und b ist. Um dieses zu zeigen, darf man nur untersuchen in wie fern $a + b$ am kleinsten ist, indem ab sich gleich bleibt. Wenn ab eine unveränderliche Größe seyn soll, so muß a abnehmen, wenn b zunimmt, und b muß so viel Mahl kleiner werden, so viel Mahl a größer wird. Es sey auf diese Art aus b die Höhe $= h$, und aus a die Grundlinie $= g$ geworden. Also verhält sich

$$\frac{a : g = h : b \text{ und}}{ab = gh.}$$

Man setze anstatt g die Größe px, und lasse $\frac{p}{x}$ die Größe h bedeuten. Es sey $px + \frac{p}{x} = P$. Bedeutet x außer 1 irgend eine ganze Zahl, so ist $\frac{p}{x} < p$, und P wächst sobald x zunimmt. Denn px wird so viel Mahl größer und $\frac{P}{x}$ so viel Mahl kleiner, so viel Mahl x größer wird. Da nun $\frac{P}{x}$ kleiner als p ist, so kann durch die Verminderung des $\frac{P}{x}$ die Größe P nicht vermindert werden. Es nimmt also P ab, biß x = 1 wird. Ist x irgend ein ächter Bruch, so ist $\frac{P}{x} > p$. Also nimmt P mit der Verkleinerung des Bruchs zu. Folglich ist P am kleinsten, wenn x = 1 und a = b ist.

Es sey a = 100°, b = 50°, m = 2″ = n. Demnach ist $\frac{1}{2}ab = 2500\,\square°$

$\frac{1}{2}(ab + an + bm) = 2501{,}5\,\square°$

$\frac{1}{2}(ab - an + bm) = 2499{,}5\,\square°$

$\frac{1}{2}(ab + an - bm) = 2500{,}5\,\square°$

$\frac{1}{2}(ab - an - bm) = 2498{,}5\,\square°$

Wenn a = 20°, b = 7°, m = 2″ = n gesetzt wird, so ist

$\frac{1}{2}ab = 70$ Quadratruthen

$\frac{1}{2}(ab + an + bm) = 70{,}27\,\square°$

Nimmt man an, der Akker sey = 140 Quadratruthen, und man habe die Fläche durch zwey gleiche Dreyekke ausgemessen, so kann der Fehler an 140 Quadratruthen = 0, 54 □° ,und also an 1500 Akker = 5 Akker und 110 Quadratruthen betragen. Man sieht daher, daß es wirklich keine leichte Sache ist, so genau zu verfahren, daß, wie Herr Zollmann in seiner Geodäsie im zweyten Abschnitte S. 73 sagt, der Fehler an 1500 Akker nicht über zwey bis drey Akker beträgt.

Wird der Inhalt eines Dreyekks aus allen drey Seiten berechnet, so kann der Fehlrr am größten werden, wenn die Seiten verschieden sind; aber kleiner, wenn das Dreyekk gleichschenkelig, und am kleinsten wenn es gleichseitig ist. Denn im ersten Falle würde man anstatt $\frac{1}{2}\sqrt{}(a+b+c)$

(a +

$(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)$ erhalten $\frac{1}{4}\sqrt{(a \pm m + b \pm n + c \pm p)(b \pm n + c \pm p - a \mp m)(a \pm m + c \pm p - b \mp n)(a \pm m + b \pm n - c \mp p)}$; im zweyten, anstatt $\frac{1}{4} b \sqrt{(2a + b)(2a - b)}$ bekommen $\frac{1}{4}(b \pm n) \times \sqrt{(2(a \pm m) + b \pm n)(2(a \pm m) - b \pm n)}$; und im dritten, anstatt $\frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}$ würde man finden $\frac{1}{4}(a^2 \pm 2am + m^2)\sqrt{3}$. Man sieht hieraus zugleich, daß es nicht rathsam ist, die Linien, wenn man den Inhalt eines Dreyekks aus den Seiten berechnen will, nach einem verjüngten Maßstabe abzumessen. Denn hier kann der Fehler leicht weit beträchtlicher seyn, als der, welchen man begeht, wenn der Inhalt bloß aus der Grundlinie und Höhe bestimmt wird. So bald man bey Berechnung des Flächeninhalts einen verjüngten Maßstab nöthig hat, so wird man diese letztere Art jener auch schon deßwegen vorziehen, weil in diesem Falle durch sie der Inhalt leichter und geschwinder erhalten werden kann.

Das Verhältniß des verjüngten Maßstabes zum üblichen Feldmaße so klein zu nehmen als möglich, wäre freylich der sicherste Weg den Fehlern auszuweichen; aber würde man hierdurch zum Gebrauch nicht oftmahls sehr unbequeme Risse erhalten? Doch, daß alle Linien auf den Risse zu klein oder zu groß gemessen werden sollten, ist nicht leicht der Fall; gewiß, es werden am öftersten einige zu klein und andere zu groß genommen werden. Hierdurch wird der Fehler schon so wichtig nicht; und kann bißweilen wohl gar verschwinden. Wenn man alle Linien, welche zur Bestimmung des Flächeninhalts einer ebenen Figur erforderlich sind auf dem Risse in verschiedenen Zeiten zwey oder mehrere Mahl abmißt; den Inhalt berechnet, und unter allen den mittelsten nimmt: so wäre dieß ungefähr ein Mittel den Genzen des wahren Inhalts so nahe zu kommen als möglich. Z. B. man habe den Flächeninhalt einer ebenen Figur zum ersten Mahl $= 789$ Quadratfuß, zum zweyten Mahle $734 \square'$, und zum dritten $= 745 \square'$ gefunden. Hier ist unter allen dreyen der mittelst $= \frac{789 + 734 + 745}{3} = \frac{2268}{3} = 756$ Quadratfuß.

Zwey-

Zweytes Kapitel.

Von Zertheilung der ebenen Figuren.

Erklärung.

§. 12. Eine ebene Figur zertheilen heißt, ihre Fläche in gewisse Stükke trennen.

Zusatz 1. Diese Stükke sind also Theile von der Fläche der Figur, die zusammen genommen ihr gleich sind, und von welchen zwey immer eine gemeinschaftliche Grenze haben.

Zusatz 2. Es ist aus der Geometrie bekannt, daß eine Fläche von Linien umgrenzt wird. Mithin haben zwey an einander liegenden Theile zu ihrer gemeinschaftlichen Grenze eine Linie.

Zusatz 3. Demnach werden die Theile einer ebenen Figur durch Linien bestimmet. Da nun eine gerade Linie durch zwey Punkte völlig bestimmt ist, so wird das Zertheilen einer Figur sehr erleichtert, wenn man sie durch gerade Linien zertheilt. Dann in diesem Falle hat man nur die Punkte zu bestimmen, welche die Grenzen der Theile begrenzen. Sind sie bestimmt, so sind auch die Linien bestimmt, welche von ihnen begrenzt werden. Folglich auch die Flächen, welche von diesen begrenzt werden, d. i. die Theile der Figur.

Anmerkung. Die Theile einer Figur sollen entweder einander gleich seyn, oder nicht. Im letztern Falle ist sogar das Verhältniß gegeben, das sie gegen einander haben sollen. Man hat also überhaupt, wenn man eine Figur zertheilen will die Punkte zu finden, welche solche Theile bestimmen, wie sie verlangt werden.

§. 13.

Aufgabe.

§. 13. Ein Parallelogramm in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Hier sind, wenn die Theilung durch bloßes Zeichnen verrichtet werden soll, nur drey verschiedene Fälle möglich. Entweder sollen die Theile wieder Parallelogramme, oder Dreyekke, oder Trapezen seyn.

I. Man theile eine Seite, z. B. AC, Fig. 17 Tab. III, in zwey gleiche Theile in G, und ziehe mit AB oder DC die Linie GH parallel.

II. Man ziehe die Diagonallinie AD, Fig. 2 Tab. I.

III. Man theile eine Seite z. B. AC, Fig. 19 Tab. III, nach Willkür in zwey Theile in G, und mache $DH = GC$, oder $HB = AG$.

Beweis. Ueber den ersten und zweyten Fall ist nicht nöthig Beweise zu geben. Denn man findet sie fast in jedem Lehrbuche der reinen Mathematik.

Im dritten Falle sey $DH = GC = x$ Fuß, die Höhe $DE = c$ Fuß. Als Seiten eines Parallelogramms betrachtet, ist $AC = BD$. Es sey $AC = BD = a$ Fuß. Nun ist $AC - GC = AG = BD - HD = HB = a - x$, und $BHGC = \frac{1}{2}c((a-x)+x) = \frac{1}{2}ca = HDAG = \frac{1}{2}ABDC$ (§. 10, 7.).

Zusatz. Ist außerhalb oder innerhalb eines Parallelogramms, oder auch in einer Seite ein Punkt gegeben, durch welchen eine gerade Linie gezogen werden soll, welche die Figur in zwey gleiche Theile theilt: so ziehe man die Diagonallinie AD, Fig. 18 Tab. III, theile sie in zwey gleiche Theile in G, und ziehe durch diesen Punkt und den gegebenen, der hier C seyn soll, die gerade Linie CH.

Denn man darf nur aus der Geometrie wissen, daß, wenn GD = AG, auch FD = AH und BP = HC ist. Also wird auch hier, wie oben bewiesen worden ist, das Parallelogramm in zwey gleiche Theile getheilt.

Aufgabe.

§. 4. Ein Parallelogramm durch gerade Linien, welche aus einem Winkel auf die Seiten gezogen werden, in drey gleiche Theile zu zertheilen.

Auflösung. Es sey das Parallelogramm ABDC, Fig. 20 Tab. III, gegeben, aus dessen Winkel A die Theilungslinien gezogen werden sollen. Man theile die Linien BD und CD eine jede in drey gleiche Theile, bemerke die Theilungspunkte mit den Bubstaben a, b, c, d, und ziehe die Linien Ab, Ac.

Beweis. Zum Beweise ziehe man die Linien Hb und Gc, jene parallel mit DC, und diese mit AC; ferner DE senkrecht auf die verlängerte AC, und FC auf AB. Da nun $FM = \frac{2}{3} FC$ ist, so verhält sich

$$ABbH : ABDC = 2 : 3$$

$$ABbH = \tfrac{2}{3} ABDC.$$ Demnach, da

$$\triangle ABb = \triangle AHb = \tfrac{1}{2} ABbH,$$

$$\triangle ABb = \tfrac{1}{3} ABDC.$$ Auf eben diese Art ist auch erwiesen, daß, weil hE, $\frac{2}{3}$ED, $AGcC = \frac{2}{3} ABDC$, und $\triangle AcC = \frac{1}{2} AGcC$ ist, auch $\triangle AcC = \frac{1}{3} ABDC$. Folglich $AbDc = ABDC - \triangle ABb - \triangle AcC = ABDC - \frac{2}{3} ABDC = \frac{1}{3} ABDC = \triangle ABb = \triangle AcC$.

Zusatz. Wäre diese Forderung gemacht, die Theilungslinien nicht aus einem Winkel, sondern aus der Mitte einer Seite zu ziehen. In diesem Falle theile man BD, Fig. 21 Tab. III, in sechs gleiche Theile, mache BM = GD = einem solchen Theile, und ziehe die Linien HM nnd HG.

Denn

Denn es ist, wenn MN die Höhe und MN, BM, AH, AC die Anzahlen ihrer Fuß vorstellen, $ABMH = MN \times \frac{BM + AH}{2} = MN \times \frac{\frac{1}{2}AC + \frac{1}{6}AC}{2} = MN \times \frac{\frac{4}{6}A}{2} = MN \frac{1}{3}AC = HGDC = MN \frac{GD + HC}{2}$, und $\Delta HMG = \frac{1}{2}MN \times MG = \frac{1}{2}MN \times \frac{4}{6}BD = \frac{1}{2}MN \times \frac{4}{6}AC = MN \frac{1}{3}AC$. Folglich $ABMH = HGDC = \Delta HMG$.

Aufgabe.

§. 15. Ein Dreyekk in vier Theile zu zertheilen, so, daß sie sich unter einander verhalten wie a, b, c, d.

Auflösung. Es sey das Dreyekk ACB, Fig. 15 Tab. III, gegeben. Man zertheile AB so, daß sich verhält

$An : nm = a : b$
$An : mp = a : c$
$An : pB = a : d$
oder
$AB : An = (a + b + c + d) : a$
$AB : nm = (a + b + c + d) : b$
$AB : mp = (a + b + c + d) : c$
$AB : pB = (a + b + c + d) : d$
und ziehe die gerade Linien Cp, Cm, und Cn.

Beweis. Wenn AB so zertheilt worden ist, daß sich verhält
$AB : An = (a + b + c + d) : a$
$AB : nm = (a + b + c + d) : b$
$AB : mp = (a + b + c + d) : c$
$AB : pB = (a + b + c + d) : d$
so verhält sich auch
$An : nm = a : b$
$nm : mp = b : c$
$mp : pB = c : d.$

Man nehme an, die Verhältnisse $a:b$, $a:c$, $a:d$ wären rational. Also auch $An:nm$, $An:mp$, $An:pB$. In diesem Falle läßt sich alle Mahl eine Linie finden, die sie völlig abmißt. Es sey Ab eine solche, und $An = Ab.m$, $nm = Ab.n$, $mp = Ab.p$, $pB = Ab.q$. Dieser Voraussetzung zu Folge ist nun, wenn man als bekannt annimmt, daß alle Dreyekke, die gleiche Grundlinien und Höhen haben einander gleich sind, $\triangle ACn = \triangle ACb.m$. Denn es können, da $An = Ab.m$ ist, aus dem Dreyekke ACn m Dreyekke gemacht werden, von welchen jedes mit ACb gleiche Grundlinie und Höhe hat. Also ist

$$\triangle ACn = m.\triangle ACb$$
$$\triangle nCm = n.\triangle ACb$$
$$\triangle mCp = p.\triangle ACb$$
$$\triangle pCB = q.\triangle ACb \text{ und}$$

$$\triangle ACB = \triangle AnC + \triangle nCm + \triangle mCp + pCB$$
$$= (m + n + p + q)\triangle ACb.$$

Folglich

$$\triangle ACn : \triangle nCm = m.\triangle ACb : n.ACb$$

$$\triangle ACn : \triangle nCm = m:n. \text{ Nun verhält sich}$$
$$m:n = m.Ab : n.Ab = An:nm$$

$$\triangle ACn : \triangle nCm = An:nm.$$

Aus eben diesem Grunde verhält sich auch

$$\triangle ACn : \triangle mCp = An:mp$$
$$\triangle ACn : \triangle pCB = An:pB.$$

Weil nun der Auflösung nach

$$An : nm = a : b$$
$$An : mp = a : c$$
$$An : pB = a : d$$

so verhält sich auch

$$\triangle ACn : \triangle nCm = a : b$$
$$\triangle ACn : \triangle mCp = a : c$$
$$\triangle ACn : \triangle pCB = a : d.$$

Demnach ist die Figur richtig zertheilt worden.

Anmerk.

Anmerkung 1. Dieser Beweis gielt also nur, wenn a, b, c, d rationale Verhältnisse machen. Daß er aber auch dann wahr ist, wenn die Verhältnisse irrational sind, findet man sehr scharf in Herrn Hofrath Kästners 1sten Theils erste Abtheilung der mathematischen Anfangsgründe Geom. S. 224, Satz 24 bewiesen, Wenn a : b ein irrationales Verhältniß ist, und auch An : nm, so wird Ab die Linie nm nicht abmessen, wenn es gleich An abmißt, sondern nm entweder = Ab. k − y oder = Ab. k + x seyn, anstatt man An = Ab. h setzen kann. Es werden aber y und x immer kleiner, je kleiner Ab genommen wird. Denn hier bedeuten y und x Linien, die kleiner als Ab sind. Nun kann Ab so klein, und k und h so groß seyn, als man nur will. Setzt man Ab so klein, daß es im Vergleichung mit jeder möglich endlichen Größe für nichts zu achten ist, so kann man y und x = o setzen. In diesem Verstande würde man sagen: An : nm = Ab. h : Ab. k. Demnach ist es leicht zu ersehen, daß es mit irrationalen Verhältnissen, wie mit rationalen ist, nur daß man sich Ab sehr klein, h und k sehr groß denken muß. Und je kleiner man sich Ab vorstellt, desto näher kommt man der Wahrheit.

Anmerkung 2. Sind a, b, c, d, in Linien gegeben, so lehrt die Geometrie durch die Proportionalität der Linien die Theile der Linie AB finden, a, b, c, d mögen rationale oder irrationale Verhältnisse machen. Hiervon Regeln zu geben, oder es durch Beyspiele zu zeigen, würde nur heißen gegenwärtige Abhandlung unnöthig vergrößern; zumahl da diese Fälle selten sind. Sind aber a, b, c, d in Zahlen gegeben, und machen sie rationale Verhältnisse so können die Theile der Linie AB am leichtesten erhalten werden, wenn man die Zahlen a, b, c, d zusammen addiert, anstatt der Linie AB die Zahl der Fuß nimmt, welche sie enthält, und setzt wie sich verhält

$(a + b + c + d) : a = AB : An$
$(a + b + c + d) : b = AB : nm$
$(a + b + c + d) : c = AB : mp$
$(a + b + c + d) : d = AB : pB.$

Es sey $a = 3$, $b = 5$, $c = 4 = d$, und $AB = 11°$. Um nicht in unnöthige Brüche zu kommen setze man 11°

=

$= 110000''''$. Daher ist $a + b + c + d = 3 + 5 + 4 + 4 = 16$, und

$$(a + b + c + d) : a = AB : An$$

$$16 : 3 = 110000'''' : An$$

$$\underline{330000}$$

$$16)\ 20625'''' = An.$$

Ferner

$$16 : 5 = 110000'''' : nm$$

$$16)\ 550000$$

$$34375'''' = nm$$

Ferner

$$16 : 4 - 110000'''' : mp$$

$$4 : 1 = 110000 \ : mp$$

$$4)\ 27500'''' = mp = pB.$$

Also

$$An = 20625''''$$

$$nm = 34375''''$$

$$An + nm = Am = 55000''''$$

$$mp = 27500''''$$

$$Am + mp = Ap = 82500''''$$

$$pB \ = 27500''''$$

$$Ap + pB = AB = 110000''''.$$

Diese Zahlen aus A und n in m in p getragen, werden diese Theilungspunkte genau angeben.

Zusatz 1. Wenn $a = b = c = d$ ist, so muß auch $An = nm = mp = pB$, Fig. 16 Tab. III, werden; und hierdurch wird das Dreyekk in gleiche Theile getheilt.

Zusatz 2. Gesetzt aber man sollte ein Dreyekk in drey gleiche Vierekke zertheilen. In diesem Falle theile man jede Seite AD, DB, BA, Fig. 59 Tab. VII, in zwey gleiche Theile, und ziehe aus den Theilungspunkten die geraden Linien EB, FD, GA, welche einander in einem Punkte C durchschneiden, und die verlangten Vierekke bestimmen.

Denn

Denn da $ED = EA$, $DG = GB$ ist, so verhält sich $DE : EA = DG : GB$. Mithin ist EG mit AB parallel, der Winkel $GbD = \llcorner CbE = \llcorner AFD$, und verhält sich $DE : DA = EG : BA$, $DE : DA = Eb : FA$. Also ist $EG = \frac{1}{2}AB$, und $Eb = bG = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2}BF$. Da nun auch auch der Winkel $FCB = \llcorner ECb$ ist, so verhält sich $EC : bE = BC : BF$ oder $EC : BC = bE : BF$. Mithin ist $EC = \frac{1}{2}BC$. Eben dieses gielt auch bey den übrigen Linien. Wenn nun BE die Linie GA und FD die Linie BE so schneidet, daß $CE = \frac{1}{2}CB$, $CG = \frac{1}{2}CA$, und $FC = \frac{1}{2}CD$ ist, so schneidet FD die Linie BE in eben diesem Punkte, wo BE die Linie GA schneidet, und die Linien BE, FD, GA theilen das Dreyekk in drey Vierekke. Daß sie einander gleich sind, erhellet daher, weil $\triangle AFD = \triangle FDB = \triangle BAG = \triangle GAD = \triangle DBE = \triangle EAB$, und $\triangle ACF = \triangle FCB$, da beyde gleiche Grundlinien haben und in einem Punkte zusammen stoßen, und eben daher $\triangle BCG = \triangle GCD$, $\triangle DCE = \triangle ECA$ ist: so ist auch $\triangle BAG - \triangle FAC = \triangle ABE - \triangle BFC = BFCG = FCEA = \triangle ADF - \triangle EDC = \triangle GAD - \triangle CEA = GCED$.

Zusatz 3. Sollten die Theile eines Dreyekks wieder Dreyekke werden und die Theilungslinien nicht alle in einem Punkte zusammen stoßen, so theile man, wenn es gleiche Theile werden sollen, QG, Fig. 26 Tab. III, in vier gleiche Theile, mache $QN = \frac{1}{4}QG$, und lege in H und N die gerade Linie HN. Hierauf mache man $HI = \frac{1}{3}HG$, $NM = MG$, und ziehe NI und MI. Denn es verhält sich $\triangle QHN : \triangle QHG = QN \; QG = 1 : 4$

$\triangle QHN = \frac{1}{4}\triangle QHG$. Nun ist

$\triangle HJN = \frac{1}{3}\triangle HNG$, und

$\triangle HNG : \triangle HQG = NG : QG = 3 : 4$

$\triangle HNG = \frac{3}{4}\triangle HQG$, und

$\frac{1}{3}\triangle HNG = \frac{1}{4}\triangle HQG = \triangle HIN$.

Da

Da nun $\triangle NIG = \frac{2}{4} \triangle HQG$ und
$\triangle NIM = \triangle MIG$, so ist

$\triangle MIG = \triangle MIN = \triangle HIN = \triangle QHN.$

Zusatz 4. Wird verlangt, die Theile sollen nicht einander gleich seyn, sondern sich unter einander verhalten, wie die Zahlen m, n, p, q: so theile man QG in $m+n+p+q$ gleiche Theile und nehme m solche Theile zu QN. Hierauf theile man HG so, daß sich verhält
$HI : HG = n : (n+p+q)$ oder
$HI : IG = n : (p+q)$ und NG, daß sich verhält
$NM : NG = p : (p+q)$ oder
$NM : MG = p : q$. In diesem Falle verhält sich
$\triangle QHN : \triangle QHG = m : (m+n+p+q)$
$\triangle NHG : \triangle QHG = (n+p+q) : (m+n+p+q)$
$\triangle HIN : \triangle NHG = n : (n+p+q)$

$\triangle QNH : \triangle HIN = m : n.$

Ferner
$\triangle HIN : \triangle NIG = n : (p+q)$
$\triangle NIM : \triangle NIG = p : (p+q)$
$\triangle MIG : \triangle NIG = q : (p+q)$

$\triangle MIG : \triangle NIM = q : p$
$\triangle NIM : \triangle HIN = p : n.$

Zusatz 5. Soll man das Dreyekk ABC, Fig. 27 Tab. III, aus einem gegebenen Punkte D in der Seite BC in zwey Theile theilen, die sich verhalten $= m : n$; so zertheile man BC so, daß sich verhält $BG : GC = m : n$. Hierauf ziehe man AD, AG, und HG mit AD parallel, wodurch man die Grenze DH bestimmt. Denn da sich verhält
$BG : GC = m : n$, so verhält sich auch
$\triangle BAG : \triangle GAC = m : n$. Nun ist

$\triangle AHG =$

$\triangle AHG = \triangle DHG$, und $\triangle DAG = \triangle AHD$
$\triangle GHC + \triangle AHG = \triangle GAC =$
$\triangle GHC + \triangle DHG = \triangle DHC$ und
$\triangle BAD + \triangle DAG = \triangle BAG =$
$\triangle BAD + \triangle AHD = BAHDB$. Folglich
$\triangle BAG : \triangle GAC = BAHDB : \triangle DHC = m : n.$

Anmerkung. Hieraus ist zugleich zu ersehen, daß, wenn $m = n$ ist, $BG = GC$ werden muß, und daß hierdurch das gegebene Dreyekk in zwey gleiche Theile getheilt wird.

Aufgabe.

§. 16. Ein Trapez in vier Theie zu theilen, so, daß die Theile sich unter einander verhalten, wie m, n, p, q, und zwischen beyden parallelen Linien stehen.

Auflösung. Man zertheile HG und AD, Fig. 23 Tab. III, welches die beyden parallelen Seiten seyn sollen, so, daß sich verhält $Ad : df = m : n = Ha : ab$
$Ad : fg = m : p = Ha : bc$
$Ad : gD = m : q = Ha : cG$, oder
$(m + n + p + q) : m = AD : Ad$
$(m + n + p + q) : n = AD : df$
$(m + n + p + q) : p = AD : fg$
$(m + n + p + q) : q = AD : gD$
$(m + n + p + q) : m = HG : Ha$
$(m + n + p + q) : n = HG : ab$
$(m + n + p + q) : p = HG : bc$
$(m + n + p + q) : q = HG : cG.$
Hierauf ziehe man die geraden Linien ad, df, cg.

Beweis. Sind die Linien HG und AD so zertheilt worden, daß sich verhält
$(m + n + p + q) : m = AD : Ad$
$(m + n + p + q) : n = AD : df$
$(m + n + p + q) : p = AD : fg$
$(m + n + p + q) : q = AD : gD.$

(m +

$(m+n+p+q):m = HG:Ha$
$(m+n+p+q):n = HG:ab$
$(m+n+p+q):p = HG:bc$
$(m+n+p+q):q = HG:cG$

so verhält sich auch

$Ad:df = m:n$
$fg:gD = p:q$
$df:fg = n:p$

$Ha:ab = m:n$
$bc:cG = p:q$
$ab:bc = n:p$

und

$Ad:df = Ha:ab$
$fg:gD = bc:cG$
$df:fg = ab:bc.$

Ist HG = AD, so ist AHGD ein Parallelogramm; ist aber GH kleiner oder größer als AD, so machen die beyden Linien AH und DG verlängert ein Dreyekk. Es sey dieses ACD. Da sich nun der Auflösung nach verhält

$Ha : ab = Ad : df$
$Ha : bc = Ad : fg$
$Ha : cG = Ad : gD$, so müssen alle gerade Linien da, fb, cg verlängert in C zusammen treffen. Denn es ist gleich viel, ob man die Linie GH in das Dreyeck ACD der Grundlinie parallel zieht, und sie durch die Linien Cd, Cf, Cg nach eben den Verhältnissen zertheilen läßt, als die Grundlinie zertheilt worden ist; oder ob man den Theilen Ha, ab, bc, cG der Linie HG eben solche Verhältnisse giebt, als die Theile Ad, df, fg, gD der Linie AD haben, und durch die Punkte a, b, c die geraden Linien dC, fC, gC legt. Jenes beweißt die Geometrie. Mithin ist auch dieses gegründet.

Es verhält sich also

$\triangle ACD : \triangle ACd = AD : Ad$ (§. 15.)

$\triangle ACD : \triangle dCf = AD : df$

$\triangle ACD : \triangle fCg = AD : fg$

$\triangle ACD : \triangle gCD = AD : gD$

ferner

$\triangle HCG : \triangle HCa = HG : Ha$

$\triangle HCG : \triangle aCb = HG : ab$

$\triangle HCG : \triangle bCc = HG : bc$

$\triangle HCC : \triangle cCG = HG : cG.$

Nun verhält sich

$Ad : df = Ha : ab.$ Also auch

$\triangle ACd : \triangle dCf = \triangle HCa : \triangle aCb$

$\triangle ACd : \triangle HCa = \triangle dCf : \triangle aCb$

$(\triangle ACd - \triangle HCa) : (\triangle dCf - \triangle aCb) = \triangle HCa : \triangle aCb$

$AHad : dabf = \triangle HCa : \triangle aCb.$

Es verhält sich ferner

$fg : gD = bc : cG.$ Also auch

$\triangle fCg : \triangle bCc = \triangle gCD : \triangle cCG$

$(\triangle fCg - \triangle bCc) : (\triangle gCD - \triangle cCG) = \triangle bCc : cCG$

$fbcg : gcGD = \triangle bCc : \triangle cCG.$

Da sich nun verhält

$\triangle bCc : \triangle cCG = bc : cG$ und

$\triangle HCa : \triangle aCb = Ha : ab$, ferner

$bc : cG = fg : gD = p : q$

$Ha : ab = Ad : df = m : n$

so verhlät sich auch

$fbcg : gcGD = fg : gD$
$AHad : dabf = Ad : df$ und
$AHad : fbcg = Ad : fg$. Folglich

$AHad : fbcg = m : p$
$AHad : dabf = m : n$
$fbcg : gcGD = p : q$.

Anmerkung. Was §. 15 von rationalen und irrationalen Verhältnissen gesagt worden ist, ferner von der Eintheilung der Linien, gielt auch hier.

Zusatz 1. Wenn $m = n = p = q$ ist, so muß also auch $Ad = df = fg = gD$, $Ha = ab = bc = cG$ werden, und hierdurch wird das Trapez in gleiche Theile getheilt.

Zusatz 2. Es sind demnach nicht nur alle Parallelogramme einander gleich, die gleiche Grundlinien und Höhen haben; sondern auch alle Trapezen, die zwischen Parallellinien stehen, und deren Grundlinien, als auch deren obersten Seiten einander gleich sind.

Zusatz 3. Sind in einer ebenen geradlinigen Figur ABDFEC, Fig. 31 Tab. IV, AB, CD, EF einander parallel, so verhält sich

$A : B = m : n$
$A : C = m : p$
$A : D = m : q$
$A : E = m : s$
$A : F = m : t$

und, setzt man $M = m + n + p + q + s + t$,

$ABDFE : A = M : m$
$ABDFE : B = M : n$
$ABDFE : C = M : p$
$ABDFE : D = M : q$
$ABDFE : E = M : s$
$ABDFE : F = M : t$

wenn

wenn sich verhält

Aa : ab = m : n = Cf : fg = Em : mn
Aa : bc = m : p = Cf : gh = Em : np
Aa : cd = m : q = Cf : hi = Em ; pq
Aa : de = m : s = Cf : ik = Em : qs
Aa : eB = m : t = Cf : kD = Em : sF

oder AB : Aa = CD : Cf = M : m = EF : Em
AB : ab = CD : fg = M : n = EF : mn
AB : bc = CD : gh = M : p = EF : np
AB : cd = CD : hi = M : q = EF : pq
AB : de = CD : ik = M : s = EF : qs
AB : eB = CD : kD = M : t = EF : sF.

Ist m = n = p = q = s = t, so wird A = B = C = D = E = E, wenn man Aa = ab = bc = cd = de = eB, Cf = fg = gh = hi = ik = kD, Em = mn = np = pq = qs = sF macht.

Zusatz 4. Soll sich in einer fünfekkigen Figur ABDEC, Fig. 32 Tab. IV, wo AB mit ED parallel ist

A : B = m : n
A : C = m : p
A : D = m : q, so ziehe man FC mit AB oder ED parallel, und zertheile AB, CF, ED so, daß sich verhält

AB : Aa = CF : Cd = ED : Eg = (m + n + p + q) : m
AB : ab = CF : de = ED : gh = (m + n + p + q) : n
AB : bc = CF : ef = ED : hi = (m + n + p + q) : p
AB : cB = CF : fF = ED : iD = (m + n + p + q) : q.

Ist $Aa = ab = bc = cB$, $Cd = de = ef = fF$, $Eg = gh = hi = iD$: so ist auch $A = B = C = D$.

Aufgabe.

§. 17. Ein Dreyekk in gleiche Theile zu theilen, so, daß die Grenzen auf einer Seite senkrecht stehen, und also unter sich parallel sind.

Auflösung. Man theile die Seite z. B. hier AM, Fig. 33 Tab. IV, in die verlangte Anzahl gleicher Theile z. B. hier in vier, und lasse von der Ekke B einen Perpendikel BC herüber fallen. Nun finden folgende Fälle Statt: entweder ist in C zugleich ein Theilungspunkt, oder nicht; und die Theilungspunkte sind entweder zu beyden Seiten des Perpendikels, oder nur auf einer. Ist jenes, so beschreibe man über AC und CM, Fig. 33, zwey halbe Zirkel; findet aber letzteres Statt, so hat man nur nöthig über diesen Theil AC, Fig. 34, der Linie GA, in welchen sich die Theilungspunkte befinden, einen halben Zirkel zu ziehen, es mag nun in C ein Theilungspunkt seyn oder nicht. Hierauf ziehe man aus den Theilungspunkten Q, N, E, Fig. 33, die Linien QS, NR, ED auf AM senkrecht; mache $AO = AS$, $AG = AR$, $MH = MD$, und ziehe aus O, G, H die Grenzen auf AM senkrecht. Eben so verfahre man mit Fig. 34.

Beweis. Man nehme an, es sey in C, Fig. 33, kein Theilungspunkt. Weil OP der Linie BC parallel ist, so verhält sich

$\triangle AOP : \triangle ACB = AO^q : AC^q = AS^q : AC^q.$

Nun verhält sich

$$AQ : AS = AS : AC.\text{*)}$$

$AS^q =$

*) Man sehe hier Herrn Hofrath Kästners 1sten Theils erste Abtheil. d. math. Anfangsgr. G. S. 244 Satz 31, oder Herrn Professor Schulzens Anfangsgr. d. Math. G. S. 356, §. 172.

$AS^q = AQ \times AC$. Also

$\triangle AOP : \triangle ACB = AQ \times AC : AC^q = AQ : AC$

Da sich $\triangle ACB : \triangle AMB = AC : AM$

$\triangle AOP : \triangle AMB = AQ : AM = \frac{1}{4} : \frac{4}{4}$.

Ferner

$\triangle AGI : \triangle ACB = AG^q : AC^q : AR^q : AC^q$

$AN : AR = AR : AC$

$AR^q = AC \times AN$

$\triangle AIG : \triangle ACB = AC \times AN : AC^q = AN : AC$.

Nun verhält sich

$\triangle ACB : \triangle AMB = AC : AM$

$\triangle AGI : \triangle AMB = AN : AM = \frac{2}{4} : \frac{4}{4}$.

Demnach ist $\triangle AGI = \frac{2}{4} \triangle AMB$

$\triangle AOP = \frac{1}{4} \triangle AMB$

$\triangle AGI - \triangle AOP = OGIP = \frac{1}{4} \triangle AMB$.

Ferner

$\triangle MHF : \triangle MBC = HM^q : MC^q = DM^q : MC_q$

und da $ME : MD = MD : MC$

$MD^q = ME \times MC$, so

$\triangle MHF : \triangle MBC = ME \times MC : MC^q = ME : MC$

Nun verhält sich

$\triangle MBC : \triangle AMB = MC : AM$

$\triangle MHF : \triangle AMB = ME : AM = \frac{1}{4} : \frac{4}{4}$

Folglich $\triangle MAB - \triangle MHF - \triangle AOP - OGIP$

$= GHFI = \triangle HMF = \triangle AOP = OHIP$.

Auf eben diese Art kann bewiesen werden, daß, wenn die Theilungspunkte auf eine Seite des Perpendikels BC, Fig. 34, treffen; die Stükke FAD, FDKI, IKBG einander gleich sind.

Trift eine Grenzlinie in den Perpendikel CB, so lassen sich aus jedem von diesem Dreyekken GCB und

ACB so viele Stükke machen, als jedes Theilungspunkte in seiner Seite hat. Es sey BC, Fig. 34, eine Grenzlinie und in GC wären a und in CA b gleiche Theile. Demnach erhält sich GC : AC = a: b.
Es verhält sich aber auch

$$\triangle GCB : \triangle BCA = GC : CA$$

$$\triangle GCB : \triangle BCA = a : b$$

Folglich ist das Dreyekk ACB so viel Mahl größer oder kleiner als $\triangle$GCB, so viel Mahl b größer oder kleiner ist als a. Da sich nun verhält

$$AG : GC = (a+b) : a$$
$$AG : AC = (a+b) : b$$
$$\triangle GBA : \triangle GCB = AG : GC$$
$$\triangle GBA : \triangle CAB = AG : CA$$

$$\triangle GBA : \triangle GCB = (a+b) : a$$
$$\triangle GBA : \triangle CAB = (a+b) : b$$

so ist klar, daß, wenn aus dem $\triangle$AGB a + b gleiche Theile gemacht werden sollen, das Dreyekk BCA b und das Dreyekk GCB a solche Theile giebt.

Zusatz. Soll ein Dreyekk nicht in gleiche Theile zertheilt werden, sondern so, daß sich verhält $\triangle AOP : OGIP = m : n$, Fig. 33, $\triangle MHF : HFIG = p : q$; so darf man nur AM so zertheilen, daß

$$(m+n+p+q) : m = AM : AQ$$
$$(m+n+p+q) : n = AM : QN$$
$$(m+n+p+q) : p = AM : EM$$
$$(m+n+p+q) : q = AM : EN$$

Denn es verhält sich

$$\triangle AMB : \triangle AOP = MA : QA$$
$$\triangle AMB : \triangle OGIP = MA : QN$$
$$\triangle AMB : \triangle MHF = MA : EM$$
$$\triangle AMB : \triangle GHFI = MA : EN.$$

Also

Also auch

$\triangle AMB : \triangle AOP = (m+n+p+q) : m$

$\triangle AMB : OGIP = (m+n+p+q) : n$

$\triangle AMB : \triangle MHF = (m+n+p+q) : p$

$\triangle AMB : GHFI = (m+n+p+q) : n.$

Folglich

$\triangle AOP : OGIP = m : n$ und

$\triangle MHF : GHFI = p : q.$

Aufgabe.

§. 18. Ein Dreyekk in zwey gleiche Theile zu theilen, so, daß die Grenze mit der Grundlinie parallel ist.

Auflösung. Man suche zu AC und $\frac{1}{2}$AC, Fig. 22 Tab. III, die mittlere Proportionallinie GC, oder zu CE und $\frac{1}{2}$CE die CK, und ziehe aus G oder K mit AB die Linie GH parallel.

Beweis. Man nehme an es sey der Theilungspunkt, aus welchen GH gezogen ist, in der Seite AC bestimmt worden. Nun

$AC : CG = CG : \frac{1}{2}AC$ (der Auflösung nach)

$CG^q = AC^q \times \frac{1}{2}$

$CG = \sqrt{AC^q \times \frac{1}{2}} = AC \times \sqrt{\frac{1}{2}}$; ferner

$AC : CG = AB : GH$

$AC : AC\sqrt{\frac{1}{2}} = AB : GH$

$GH = AB\sqrt{\frac{1}{2}}.$

Es sey nun CE senkrecht auf AB. Mithin die Höhe des Dreyekks ACB. Es verhält sich ferner

$AC : GC = EC : CK$

$AC : AC\sqrt{\frac{1}{2}} = CE : CK$

$CK = CE\sqrt{\frac{1}{2}}.$

Es sey nun $AB = a$ und $EC = b$ Fuß. Also $GH = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, und $CK = b\sqrt{\frac{1}{2}}$. Folglich der Inhalt des Dreyekks $CGH = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}} \times b\sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{ab\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\frac{1}{2}ab}{2} = \frac{1}{4}ab = \frac{1}{2}\triangle ACB = AGHB$ (§. 7).

Auf eben diese Art, wird man leicht beweisen können, daß die Theile einander gleich sind, wenn man den Punkt, durch welchen die Grenze gezogen worden ist in der Linie CE bestimmt hat.

Zusatz 1. Wenn der Theilungspunkt G bestimmt ist, wie gegenwärtiger Paragraph zeigt, so kann man H finden, indem gesetzt wird, wie sich verhält $AC : CB = CG : CH$. Wenn man bey Aufnehmung des Dreyekks ACB die Schenkel AC und CB gemessen hat, so kann man also die Theilungspunkte G und H bestimmen, ohne daß man nöthig hat das Dreyekk aufzutragen. Denn man darf nur die Zahl der Fuß, welche AC enthält, mit $\sqrt{\frac{1}{2}}$, um GC zu bekommen, multiplizieren, und hier anstatt AC, CB und CG die gehörigen Zahlen setzen.

Zusatz 2. Durch gegenwärtigen Paragraph ist man auch in Stand gesetzt ein jedes geradliniges Vierekk in zwey gleiche Theile zu theilen, so, daß die Grenze zwischen beyden Theilen mit zwey Seiten parallel ist. Z. B. es sey die Figur ABCD, Fig. 60, Tab. VIII, den Seiten AB und AD parallel in zwey gleiche Theile zu theilen. Hier ziehe man die Diagonallinie AC, suche zwischen AC und $\frac{1}{2}$.AC die mittlere Proportipnallinie FC, und ziehe aus F die Linie FE mit AB die Linie FG mit AD parallel.

Aufgabe.

§. 19. Ein Dreyekk in gleiche Theile zu theilen, so, daß die Grenzen mit der Grundlinie parallel sind.

Auflösung. Erstlich suche man die Theilungspunkte auf der Linie DC, welche die Höhe des zu theilenden Dreyekks ABC, Fig. 24 Tab. III, seyn soll, zu bestimmen. Es werde das Dreyekk z. B. in vier gleiche Theile getheilt, und AB enthalte a, CD b, CL x, CE y, CF z Fuß. Da sich verhält, wenn man HM, NP, QR als die parallelen Grenzen annimmt,

$$\triangle ACB : \triangle HCM = b^2 : x^2$$

$$\triangle ACB : \triangle NCP = b^2 : y^2$$

$$\triangle ACB : \triangle QCR = b^2 : z^2 \text{ und}$$

$$\triangle ACB = \frac{ab}{2} \ (\S. 7)$$

$$\triangle HCM = \frac{ab}{2.4} \ (\text{per hyp.})$$

$$\triangle NCP = \frac{ab}{4}$$

$$\triangle QCR = \frac{3\,ab}{2.4} \text{ ; so verhält sich}$$

$$\frac{ab}{2} : \frac{ab}{2.4} = b^2 : x^2$$

$$1 : \tfrac{1}{4} = b^2 : x^2$$

$$x^2 = \tfrac{1}{4} b^2$$

$$x = \sqrt{b^2 \tfrac{1}{2}} = b\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\frac{ab}{2} : \frac{ab}{4} = b^2 : y^2$$

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = b^2 : y^2$$

$$1 : \frac{2}{4} = b^2 : y^2$$

$$y^2 = \frac{2}{4} b^2$$

$$y = \sqrt{b^2 \tfrac{2}{4}} = b\sqrt{\tfrac{2}{4}}$$

$$\frac{ab}{2} : \frac{3ab}{2:4} = b^2 : z^2$$

$$1 : \frac{3}{4} = b^2 : z^2$$

$$z^2 = \sqrt{\tfrac{3}{4}}\, b^2$$

$$z = \sqrt{b^2 \tfrac{3}{4}} = b\sqrt{\tfrac{3}{4}}.$$

Hieraus folgt: Man multiplizière die Zahl der Fuß, welche CD enthält, mit der Quadratwurzel eines Bruchs, dessen Zähler die Zahl des Theils, und dessen Nenner die Zahl aller Theile ist, in welche das Dreyekk getheilt werden soll. Dieses Produkt giebt die Zahl der Fuß, welche man nach dem Maßstabe, nach welchen die Seiten des Dreyekks bestimmt sind, auf die Linie CD trägt. Hierdurch erhält man die Punkte, durch welche die Theilungslinien mit der Grundlinie parallel gezogen werden müssen.

Zusatz 1. Um diese Art der Theile eines Dreyekks bloß geometrisch zu erhalten, ziehe man AI, Fig. 25 Tab. III, senkrecht an AD. Hierauf verlängere man AI in H, und mache AH = AI = AD. Nun theile man HA in eben so viel gleiche Theile, als das Dreyekk getheilt werden soll, z. B. hier in vier, deren Grenzen d, f, g, H sind, und beschreibe nun dI, fI, gI halbe Zirkel, welche AD durchschneiden und in M, P, Q die Punkte

Punkte angeben, durch welche die Grenzen mit der Grundlinie parallel gezogen werden müssen.

Denn es verhält sich

AI oder $AD : AM = AM : Ad$

$AM^q = AD \times Ad$; ferner

AI oder $AD : AP = AP : Af$

$AP^q = AD \times Af$; ferner

AI oder $AD : AQ = AQ : Ag$

$AQ^q = AD \times Ag$

Da nun $Ad = \frac{1}{4}AD$, $Af = \frac{2}{4}AD$, $Ag = \frac{3}{4}AD$, so ist $AM^q = AD \times \frac{1}{4}AD$, $AP^q = AD \times \frac{2}{4}AD$, $AQ^q = AD \times \frac{3}{4}AD$. Es sey $AD = a$ Fuß. Also $AM = \sqrt{a.\frac{1}{4}a} = a\sqrt{\frac{1}{4}}$, $AP = \sqrt{a \times \frac{2}{4}a} = \sqrt{a^2.\frac{2}{4}} = a\sqrt{\frac{2}{4}}$, $AQ = \sqrt{a.\frac{3}{4}a} = \sqrt{a^2.\frac{3}{4}} = a\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Anmerkung. So, wie §. 18 zeigt, es willkürlich ist die Theilungspunkte in AD oder in AB zu bestimmen, so ist es auch hier gleich viel, ob man AI senkrecht an AD, oder an AB setzt; nur daß im letztern Falle $AH = AI = AB$ seyn muß.

Zusatz 2. Wenn ein Dreyekk in n gleiche Theile getheilt werden soll, so können die Tiefen der Grenzlinien von der Spitze des Dreyekks angerechnet, durch folgende Proportionen gefunden werden, wenn man H die Höhe des ganzen Dreyekks, und h', h'', h''', h'''', h''''', h'''''' die Tiefen der auf einander folgenden Grenzlinien bedeuten läßt:

$$H : h' = h' : \frac{1}{n} H$$

$$H : h'' = h'' : \frac{2}{n} H$$

$$H : h''' = h''' : \frac{3}{n} H$$

$$H : h'''' = h'''' : \frac{4}{n} H$$

$$H : h''''' = h''''' : \frac{5}{n} H.$$

$$H : h'''''' = h'''''' : \frac{6}{n} H.$$

Zusatz 3. Nun wird man auch im Stande seyn ein gegebenes Dreyekk in Theile zu theilen, die gewisse Verhältnisse gegen einander haben, und deren Grenzlinien mit der Grundlinie parallel sind. Es werde z. B. verlangt ein Dreyekk in fünf Theile zu zertheilen, welche sich unter einander verhalten sollten wie die Zahlen p, q, t, y, z. Denn man darf nur das Dreyekk in $p + q + t + y + z$ gleiche Theile zertheilen, oder $n = p + q + t + y + z$ setzen, und p solche Theile zum ersten, q zum zweyten, t zum dritten, y zum vierten, z zum fünften nehmen; oder man lasse h' die Tiefe der Grenzlinie des ersten Stükks, h'' die des zweyten, h''' die des dritten, h'''' die des vierten, h''''' die des fünften, H die Höhe des ganzen Dreyekks bedeuten und setze

$$H : h' = h' : \frac{p}{n} H$$

$$H : h'' = h'' : \frac{p+q}{n} H$$

$$H : h''' = h''' : \frac{p+q+t}{n} H$$

$$H : h'''' = h'''' : \frac{p+q+t+y}{n} H$$

$$H : h''''' = h''''' : \frac{p+q+t+y+z}{n} H.$$

Durch diese Proportionen, deren letzter H giebt, erhält man die Punkte der Höhe H, durch welche die Grenzen der Grundlinie parallel gezogen werden müssen.

Zusatz 4. Soll von einem Dreyekke ACB, Fig. 22 Tab. III ein Stükk AGHB von verlangter Größe abgeschnitten werden, z. B. ein Stükk von a Quadratruthen: so suche man den Inhalt des ganzen Dreyekks, der hier $= b$ Quadratruthen seyn soll. Demnach verhält sich $\triangle ACB : AGHB = b : a$, und $\triangle GCH : \triangle ACB = (b-a) : b$. Da sich nun verhält $\triangle GCH : \triangle ACB = CK^q : CE^q$, so verhält sich auch

$$\frac{CK^q : CE^q = (b-a) : b}{DK^q = CE^q \frac{b-a}{b};}$$

$$CK = \sqrt{CE^q \frac{b-a}{b}}.$$

Setzt man CE enthalte m Fuß, so giebt $\sqrt{m^2 \frac{b-a}{b}} = m\sqrt{\frac{b-a}{b}}$ die Zahl der Fuß, welche die Länge CK bestimmen.

Zusatz 5. Ist man mit Zertheilen eines Dreyekks biß auf einen gewissen Punkt z. B. L, Fig. 24 Tab. III gekommen, so, daß HM die Grenze von dem mten Stükke ist, und das ganze Dreyekk in n gleiche Theile getheilt werden soll: so verhält

$$CD : CL = CL : CD \frac{m}{n} \text{ (Zusatz 3).}$$

Man setze $CL = h'$, $CD = H$, und lasse h'', h''', h'''', h''''' die Tiefen der folgenden Grenzlinien, von der Spitze des Dreyekks angerechnet, bedeuten. Demnach verhält sich

$$H : h' = h' : H\frac{m}{n}$$

$$H : h'' = h'' : H\frac{m+1}{n}$$

$$H \; h''' = h''' : H\frac{m+2}{n} \text{ (Zusatz 3)}$$

$$H : h'''' = h'''' : H\frac{m+3}{n}$$

$$H : h''''' = h''''' : H\frac{m+4}{n}$$

Folglich werden zu $H\frac{m}{n}$ die Brüche $\frac{1}{n}H$, $\frac{2}{n}H$, $\frac{3}{n}H$, $\frac{4}{n}H$ nach und nach addiert, um die Tiefen h'', h''', h'''', h''''', zu erhalten.

Zusatz 6. Es ist aber $H\frac{m}{n} = \frac{h'q}{H}$. Mithin

$$H : h'' = h'' : \left(\frac{h'q}{H} + \frac{1}{n}H\right)$$

$$H : h'' = h'' : \frac{h'q + \frac{1}{n}Hq}{H}$$

$$H \,.\, h''' = h'' : \frac{h'q + \frac{2}{n}Hq}{H}$$

$$H : h'''' = h'''' : \frac{h'q + \frac{3}{n}Hq}{H}$$

$$H : h''''' = h''''' : \frac{h'^q + \frac{4}{n} H^q}{H}$$

Folglich ist, wenn man $h' = b$ und $H = a$ Fuß setzt

$$h'' = \sqrt{}(b^2 + \frac{1}{n} a^2)$$

$$h''' = \sqrt{}(b^2 + \frac{2}{n} a^2)$$

$$h'''' = \sqrt{}(b^2 + \frac{3}{n} a^2)$$

$$h''''' = \sqrt{}(b^2 + \frac{4}{n} a^2)$$

Zsatz 7. Ein Stükk eines Dreyekks, das der Grundlinie parallel abgeschnitten ist, in eine gewisse Anzahl gleicher oder ungleicher Theile zu zertheilen, setzt also alle Mahl ein Verhältniß des Abschnitts zum Dreyekke voraus, d. i. in wie viel gleiche Theile das ganze Dreyekk getheilt werden muß, und wie viel solche Theile der Abschnitt enthält.

Zusatz 8. Wenn man den Abschnitt HMBA, Fig. 24 Tab. III, wo HM mit AB parallel ist, z. B. in drey gleiche Theile zertheilen will, so läßt sich doch alle Mahl annehmen: das ganze Dreyekk wäre in n gleiche Theile getheilt, und x solche Theile geben einen Theil des Abschnitts. Dieser Voraussetzung nach erhält man, wenn $CL = a$ und $CD = b$ Fuß gesetzt wird

$$h'' = \sqrt{}(a^2 + \frac{x}{n} b^2) \text{ (Zusatz 6)}$$

$$h''' = \sqrt{}(a^2 + \frac{2x}{n} b^2).$$

Da

Da der Abschnitt in drey gleiche Theile getheilt werden soll, so machen $3x$ die Theile des Abschnitts aus, deren n das ganze Dreyekk enthält. Es verhält sich also $\triangle ACB : (\triangle ACB - \triangle HCM) = n : 3x$ (Zusatz 4). Es verhält sich aber auch

$$\triangle ACB : \triangle HCM = DCq : LCq$$

$$\triangle ACB : \triangle HCM = b^2 : a^2$$

$$\triangle ACB : (\triangle ACB - \triangle HCM) = b^2 : (b^2 - a^2)$$

$$b^2 : (b^2 - a^2) = n : 3x$$

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2} = \frac{3x}{n}$$

$$\frac{b^2 - a^2}{3b^2} = \frac{x}{n}.$$ Folglich

$$h'' = \sqrt{a^2 + \frac{(b^2 - a^2)b^2}{3b^2}} = \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{3}(b^2 - a^2)} =$$

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}a + \tfrac{1}{3}b^2}$$

$$h''' = \sqrt{a^2 + \frac{2(b^2 - a^2)b^2}{3b^2}} = \sqrt{a^2 + \tfrac{2}{3}(b^2 - a^2)} =$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2 + \tfrac{2}{3}b^2}.$$

Exempel. Es sey $LC = 3$ Fuß, und $DC = 13$ Fuß. Also

$LCq = 9$ $DCq = 169$

$\tfrac{2}{3}LCq = \tfrac{18}{3}$ $\tfrac{1}{3}DCq = \frac{169}{3}$

$$\tfrac{2}{3}LCq + \tfrac{1}{3}DCq = \frac{187}{3}$$

log. $187 = 2{,}2718416$
log. $3 = 0{,}4771213$

log. $\tfrac{187}{3} = 1{,}7947203$

log. $h'' = 0{,}8973601$; $h'' = 7{,}895$ Fuß.

$\frac{1}{3}LC_q = \frac{9}{3}$; $\frac{2}{3}DC_q = \frac{338}{3}$

$\frac{1}{3}LC_q + \frac{2}{3}DC_q = \frac{347}{3}$

log. 347 = 2,5403295
log. 3 = 0,4771213

log. $\frac{347}{3}$ = 2,0632082

log. h''' = 1,0316041 ; h''' = 10,75 Fuß.

Zusatz 9. Wenn man also einen solchen Abschnitt in m gleiche Theile theilen will, so ist überhaupt

$$h'' = r\left(a^2 + \frac{(b^2 - a^2)b^2}{mb^2}\right) = r\left(a^2 + \frac{1}{m}(b^2 - a^2)\right) =$$
$$r\left(\frac{m-1}{m}a^2 + \frac{1}{m}b^2\right)$$

$$h''' = r\left(a^2 + \frac{2(b^2 - a^2)b^2}{mb^2}\right) = r\left(a^2 + \frac{2}{m}(b^2 - a^2)\right) =$$
$$r\left(\frac{m-2}{m}a^2 + \frac{2}{m}b^2\right)$$

$$h'''' = r\left(a^2 + \frac{3(b^2 - a^2)b^2}{mb^2}\right) = r\left(a^2 + \frac{3}{m}(b^2 - a^2)\right) =$$
$$r\left(\frac{m-3}{m}a^2 + \frac{3}{m}b^2\right).$$

$$h''''' = r\left(a^2 + \frac{4(b^2 - a^2)b^2}{mb^2}\right) = r\left(a^2 + \frac{4}{m}(b^2 - a^2)\right) =$$
$$r\left(\frac{m-4}{m}a^2 + \frac{4}{m}b^2\right)$$

Zusatz 10. Nun wird man auch im Stande seyn ein Stükk eines Dreyekks, das durch eine Linie der Grundlinie parallel abgeschnitten ist, in eine jede Anzahl so wohl gleicher als ungleicher Theile zu zertheilen, so daß die Grenzen mit der Grundlinie parallel sind. Im ersten Falle darf man nur m der Anzahl der gleichen Theile gleich setzen; findet aber der zweyte Fall Statt, z. B. es wäre HMBA, Fig. 24 Tab. III, in drey Theile zu theilen, die sich unter einander verhalten sollten, wie die Zahlen p, q, t; so setze man $m = p + q + t$. Es ist also $h'' = r\left(\frac{(p+q+t) - p}{p+b+t} a^2 + \frac{p}{p+q+t} b^2\right)$

$$= r\left(\frac{q+t}{p+q+t} a^2 + \frac{p}{p+q+t} b^2\right)$$

$$h''' = r\left(\frac{(p+q+t) - p + q}{p+q+t} a^2 + \frac{p+q}{p+q+t} b^2\right)$$

$$= r\left(\frac{t}{p+q+t} a^2 + \frac{p+q}{p+q+t} b^2\right)$$

Exempel. Es sey $p = 5$, $q = 3$ und $t = 7$. Also ist $p + q + t = 15$, und $h'' = r\left(\frac{10}{15} a^2 + \frac{5}{15} b^2\right) =$

$r\left(\frac{2}{3} a^2 + \frac{1}{3} b^2\right)$; $h''' = r\left(\frac{7}{15} a^2 + \frac{8}{15} b^2\right)$.

Man nehme an, es sey $LC = 4$ Fuß, und $DC = 18$ Fuß. Also ist $LCq = 16$, $DCq = 324$, $\frac{2}{3} LCq + \frac{1}{3} DCq = \frac{32}{3} + \frac{324}{3} = \frac{356}{3}$.

$$\log.\ 356 = 2{,}5514500$$
$$\log.\ 3 = 0{,}4771213$$

$$\log.\ \frac{356}{3} = 2{,}0743287$$

$$\log.\ h'' = 1{,}0371643,\ h'' = 10{,}89 \text{ Fuß.}$$

$$\frac{7}{15} LC^q = \frac{112}{15}, \quad \frac{8}{15} DC^q = \frac{2592}{15}$$

$$\frac{7}{15} LC_q + \frac{8}{15} DC_q = \frac{112}{15} + \frac{2592}{15} = \frac{2704}{15}$$

$$\log. 2704 = 3,4320067$$
$$\log. \; 15 = 1,1760913$$

$$\log. \frac{2704}{15} = 2,2559154$$

$$\log. h''' = 1,1279577, \; h''' = 13,42 \text{ Fuß.}$$

Anmerkung. Was von der Höhe DC des Dreyekks ACB gesagt worden ist, gielt auch von den Seiten AC und CB, wie man sich es auch leicht aus §. 18 wird erklären können.

Aufgabe.

§. 20. Ein Trapezoid in zwey gleiche Theile zu theilen, so, daß die Theilungslinie mit einer Seite parallel ist.

Auflösung. Es wären z. B die beyden Trapezoiden ABDC, Fig. 36, 35, Tab. IV, in zwey gleiche Theile zu theilen, und die Grenze der beyden Theile sollte mit AB parallel seyn. Man ziehe aus dem nächsten Winkel vom A die Linie CE mit AB parallel, berechne den Inhalt der ganzen Figur, und theile ihn in zwey gleiche Theile. Nun ist das Dreyekk CED entweder selbst schon die Hälfte der Figur; oder es ist größer oder kleiner. Im ersten Falle ist die Grenze zwischen beyden Theilen schon gezogen, und im zweyten darf man nur das, um welches das Dreyekk zu groß ist, nach §. 19 Zusatz 4 abschneiden. Es bleibt also nur der dritte Fall zu untersuchen übrig. Aber auch hier sind zwey verschiedene Fälle möglich. Es ist entweder AB größer als

CE, wie Fig. 35, oder kleiner, wie Fig. 36. In beyden Fällen suche man die Linie EH oder den Punkt H. Denn die Linie HF, aus H mit BD parallel gezogen, wird in AC den Punkt F bestimmen, aus welchen man die Grenze FG der Linie AB parallel ziehen kann.

Man ziehe AM mit BD parallel, und AI auf CE senkrecht. Es sey $AB = ME = LG = a$, $EC = b$, $AI = c$ Fuß, der Inhalt des halben Trapezoids $= m$, und $FG = HE = x$ Fuß. Demnach ist in Fig. 36 $MC = b - a$, $FL = FG - AB = x - a$; und in Fig. 35 $MC = a - b$, und $FL = a - x$. Also ist überhaupt $MC = \pm b \mp a$, $FC = \pm x \mp a$.

Nun verhält sich

$$CM : AI = FL : AK$$

$$(\pm b \mp a) : c = (\pm x \mp a) : \frac{c(\pm x \mp a)}{\pm b \mp a}$$

Daher ist der Inhalt des Dreyekks $FAL = \frac{c(\pm x \mp a)}{\pm b \mp a} \times \frac{1}{2}(\pm x \mp a) = \frac{c(\pm x \mp a)^2}{2(\pm b \mp a)}$, und der des Parallelogramms $ABGL = \frac{ac(\pm x \mp a)}{\pm b \mp a}$. Folglich ist $ABGF = ABGL \pm \Delta FAL =$

$$m = \frac{ac(\pm x \mp a)}{\pm b \mp a} \pm \frac{e(\pm x \mp a)^2}{2(\pm b \mp a)}$$

$$m = \frac{2ac(\pm x \mp a)}{2(\pm b \mp a)} \pm \frac{c(\pm x \mp a)^2}{2(\pm b \mp a)}$$

$$m = \frac{2ac(\pm x \mp a) \pm c(\pm x \mp a)^2}{2(\pm b \mp a)}$$

$m =$

$$m = \frac{\pm 2acx \mp 2a^2c \pm cx^2 \mp 2acx \pm a^2c}{2(\pm b \mp a)}$$

$$m = \frac{\mp a^2c \pm cx^2}{2(\pm b \mp a)} = \frac{(\mp a^2 \pm x^2)\,c}{2(\pm b \mp a)}$$

$$2m(\pm b \mp a) = (\mp a^2 \pm x^2)\,c$$

$$\frac{2m(\pm b \mp a)}{c} = \mp a^2 \pm x^2$$

$$\mp x^2 = \mp a^2 - \frac{2m(\pm b \mp a)}{c}$$

$$-x^2 = -a^2 - \frac{2m(\pm b \mp a)}{c} \text{ oder}$$

$$+x^2 = +a^2 + \frac{2m(\pm b \mp a)}{c} \text{ und}$$

$$+x^2 = +a^2 - \frac{2m(\pm b \mp a)}{c}. \text{ Folglich}$$

$$x = \sqrt{\left(a^2 \pm \frac{2m(\pm b \mp a)}{c}\right)}.$$

Also im ersten Falle $x = \sqrt{\left(a^2 + \frac{2m(b-a)}{c}\right)}$

und im zweyten $x = \sqrt{\left(a^2 - \frac{2m(a-b)}{c}\right)}$.

Exempel. Es sey AB $= a = 145$ Fuß, CE $= b = 164$ Fuß, AI $= c = 20$ Fuß. Also $b - a = 19$ Fuß. Es sey ferner der Flächeninhalt der halben Figur $= 2400$ Quadratfuß $= m$. Demnach ist

log. m = log. 2400	= 3,3802112
log. 2	= 0,3010300
log. 2m	= 3,6812412

 log.

$$\log.(b-a) = \log.19 = 1{,}2787536$$

$$\log.2m(b-a) = 4{,}9599948$$
$$\log.c = \log.20 = 1{,}3010300$$

$$\log.\frac{2m(b-a)}{c} = 3{,}6589648$$

$$\text{und } \frac{2m(b-a)}{c} = 4560$$

$$\log.a = \log.145 = 2{,}1613680$$

$$\log.a^2 = \quad = 4{,}3227360$$

$$a^2 = 21025$$
$$\frac{2m(b-a)}{c} = 4560$$

$$x^2 = 25585$$
$$\log.x^2 = \log.25585 = 4{,}4079854$$
$$\log.x = \quad = 2{,}2039927$$

$$\text{und } x = EH = 159{,}95 \ldots \text{ Fuß.}$$

Im zweyten Falle sey $a = 154$ Fuß, $b = 113$ Fuß. Also $a - b = 41$ Fuß. Es sey ferner $AI = c = 30$ Fuß, und $m = 2500$ Quadratfuß. Daher ist

$$\log.m = \log.2500 = 3{,}3979400$$
$$\log.2 = 0{,}3010300$$

$$\log.2m = 3{,}6989700$$
$$\log.(a-b) = \log.41 = 1{,}6127839$$

$$\log.2m(a-b) = 5{,}3117539$$
$$\log.c = \log.30 = 1{,}4771213$$

$$\log.\frac{2m(a-b)}{c} = 3{,}8346326$$

Also

$$\text{Also } \frac{2m(a-b)}{c} = 6833{,}33 \ldots$$

$$\log. a = \log. 154 = 2{,}1875207$$

$$\log. a^2 = 4{,}3750414$$

$$a^2 = 23716$$

$$\frac{2m(a-b)}{c} = 6833{,}33$$

$$x^2 = 16882{,}67$$

$$\log. x^2 = 4{,}2274311$$

$$\log. x = 2{,}1137155$$

$$\text{und } x = EH = 129{,}93 \ldots \text{ Fuß.}$$

Anmerkung 1. Es ist nicht nöthig die Linie CE, wenn man das Trapezoid ABDC, Fig 35, in zwey gleiche Theile theilen will, zu verlängern. Man kann auch PB = x = HE machen, und PF mit BD parallel ziehen.

Anmerkung 2. Diese Formel paßt nicht nur für Trapezoiden, sondern auch für Trapezen. Denn sie bleibt unverändert, das Dreyekk CED mag an ABEC seyn oder nicht.

Zusatz 1. Wenn man diese hier gefundene Formel geometrisch auflösen oder konstruieren will, so suche man eine Linie $\frac{2m}{c}$. Dieses kann sehr leicht geschehen. Denn man darf nur den Inhalt des Trapezes ABGF, das von ABDC, Fig. 37 Tab. V, abgeschnitten werden soll, mit 2 multiplizieren, und dieses Produkt durch die Zahl der Fuß, welche AI enthält, dividieren. Diese hierdurch bestimmte Länge, welche = p seyn soll, trage man aus B in N, und mache AQ = CF. Hierauf beschreibe man über QN einen halben Zirkel, und ziehe TB auf NQ senkrecht. Auf diese Art erhält man die gerade

rade Linie $AT = x$. Denn es ist $AQ = b$, $BQ = AQ - AB = b - a$, $NB = p$. Also

$$NB : TB = TB : BQ$$
$$p : TB = TB : (b - a)$$

$$TB^q = (b - a)\,p$$
$$AT^q = AB^q + TB^q$$
$$= a^2 + (b - a)\,p$$
$$= a^2 + \frac{(b - a)\,2m}{c}$$

und $AT = \sqrt{\left(a^2 + \frac{(b - a)\,2m}{c}\right)}$.

Ist $x = \sqrt{\left(a^2 - \frac{2m\,(a - b)}{c}\right)}$, so mache man $AB = b$, und $NB = p$. Also ist, da $AQ = a$ gesetzt wird, $TB^q = (a - b)\,p$. Hierauf durchschneide man mit $TS = AQ = a$ die Linie BO. Dieses Verfahren giebt $SB = x$. Denn es ist $SB^q = TS^q - TB^q = a^2 - (a - b)\,p = a^2 - \frac{2m\,(a - b)}{c}$ und $SB = x = \sqrt{\left(a^2 - \frac{2m\,(a - b)}{c}\right)}$.

Zusatz 2. Da der Inhalt des Trapezes ABGF jederzeit $= m$ ist, so kann also überhaupt vermöge dieser Formel von einem Trapezoid ein Stükk $= M$ abgeschnitten werden. Denn man darf nur in die Formel M anstatt m setzen, wenn man versichert ist, daß die Theilungslinie FG wirklich über CE fällt.

Zusatz 3. Also kann man auch ein Trapezoid in zwey Theile zertheilen, die ein bestimmtes Verhältniß gegen einander haben, z. B. man nehme an, es sollte sich ABGF zu FGDC verhalten $= g : h$. Hier berechne man den Inhalt der ganzen Figur, der $= M$ seyn soll, und setze $ABGF = m$. Demnach verhält sich

$$\underline{(g+h)\ :\ g = M\ :\ m}$$

$$m = \frac{gM}{g+h}$$

Hierauf darf man nur die hier bestimmte Größe m in die Gleichung setzen, und, wie gezeigt worden ist, die Linie $FG = HE$ suchen.

Zusatz 4. Wenn man ein Trapez BHFD, Fig. 28 Tab. IV, wo HF und BD die parallelen Seiten sind, in n gleiche Theile theilen will, so berechne man den Inhalt desselben, der hier $= M$ gesetzt seyn soll. Daher giebt $\frac{M}{n}$ den Flächeninhalt eines nten Theils. Es sey $n = 3$. Also $\frac{M}{n} = \frac{M}{3}$. Setzt man in der Formel erst $\frac{M}{3}$ anstatt m, und dann $\frac{2M}{3}$ anstatt m, so erhält man im ersten Falle $x = ED = \sqrt{}(a^2 + \frac{\frac{1}{3}M(b-a)2}{c}) = \sqrt{}(a^2 + \frac{2M(b-a)}{3c})$, und im zweyten $x = GD = \sqrt{}(a^2 + \frac{4M(b-a)}{3c})$.

Nun ist aber $M = \frac{1}{2}(a+b)c$ (§. 10.). Also der Inhalt des ersten Theils $= \frac{1}{3.2}(a+b)c = \frac{1}{6}(a+b)c$, und der des ersten und zweyten zusammen $= \frac{2}{6}(a+b)c$. Mithin $ED = x = \sqrt{}(a^2 + \frac{2M(b-a)}{3c}) = \sqrt{}(a^2 + \frac{1}{6}(a+b)c \times \frac{2(b-a)}{c}) = \sqrt{}(a^2 + \frac{\frac{2}{6}(a+b)(b-a)c)}{c}$

$= \sqrt{(a^2 + \frac{1}{3}(a+b)(b-a))} = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{3}b^2 - \frac{1}{3}a^2)}$ $= \sqrt{(\frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{3}b^2)}$, und $GD = x = \sqrt{(a^2 + \frac{2}{6}(a+b)c \times \frac{2(b-a)}{c})} = \sqrt{(a^2 + \frac{2}{3}(b+a)(a-b))} = \sqrt{(a^2 + \frac{2}{3}b^2 - \frac{2}{3}a^2)} = \sqrt{(\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3}b)}$.

Soll dieses Trapez in drey Theile zertheilt werden, die sich gegen einander verhalten, wie die Zahlen p, q, v; so ist der Inhalt des ersten Theils $= \frac{pM}{p+q+v}$, und der des zweyten $= \frac{qM}{p+q+v}$. Also der des ersten und zweyten zusammen $= \frac{(p+q)M}{p+q+v}$.

Da nun $M = \frac{1}{2}(a+b)c$ ist, so ist $\frac{pM}{p+q+v} = \frac{(a+b)cp}{2(p+q+v)}$, $\frac{(p+q)M}{p+q+v} = \frac{(a+b)c(p+q)}{p+q+v}$. Mithin $ED = x = \sqrt{(a^2 + \frac{p(a+b)(b-a)}{p+q+v})} = \sqrt{(a^2 + \frac{pb \quad pa^2}{p+q+v})} = \sqrt{(a^2 \frac{q+v}{p+q+v} + \frac{p}{p+q+v} b^2)}$ und $GD = \sqrt{(a^2 + \frac{(p+q)b^2 - (p+q)a^2}{p+q+v})} = \sqrt{(a^2 \frac{v}{p+q+v} + \frac{p+q}{p+q+v} b^2)}$.

Anmerkung 1. Will man das Trapez von BD nach HF zu zertheilen, nähmlich das BMND der erste Theil ist, der abgeschnitten wird: so ist, wenn man HF = b und BD = a setzt, $GD = x = \sqrt{(a^2 - \frac{2m(a-b)}{c})}$, wenn nähmlich m den Inhalt des Theils BMND ausdrukt. Uebrigens verfahre man wie gezeigt worden ist.

Anmerk.

Anmerkung 2. Da ein Trapez als ein Stükk eines Dreyekks, das durch eine Linie einer Seite parallel abgeschnitten ist, betrachtet werden kann: so würde es völlig einerley seyn, es vermittelst dieser hier gefundenen Formel, oder nach §. 19 Zusatz 7, 8, 9, wenn man die Höhe des ganzen Dreyekks, von dem das Trapez ein Stükk ist, und die Höhe dieses Dreyekks, das zum Traprz hinzu kommeu muß um jenes zu werden, wüßte, zu zertheilen.

Zusatz 5. Wenn $ED = x = AC$, $BE = BD - ED$, und die Winkel FDB und HBD bekannt sind; so können die Punkte A uud C, oder AB und DC trigonometrisch bestimmt werden. Es sey $BE = f$, der Winkel $HBD = v$, und $\llcorner FDB = u$ Grad.

Da nun AE mit CD parallel, der Winkel $BAE = 180° - u - v = 180° - (u + v)$ ist; so ist auch $\llcorner BAE$ bestimmt. Er sey $= q$. Man setze nun, wie sich verhält

$$\sin. q : \sin. u = f : AB$$

$$AB = \frac{\sin. u \times f}{\sin. q}$$

Man ziehe aus C die Linie CQ mit AB parallel. Hierdurch wird der Winkel $CQD = \llcorner ABD = v$, der Winkel $DCQ = \llcorner EAB = q$, $CQ = AB$, und $BQ = AC = ED$. Also $QD = BD - BQ = BD - AC = BD - ED = f$. Nun verhält sich

$$\sin. q : \sin. v = f : CD$$

$$CD = \frac{\sin. v \times f}{\sin. q}.$$

Exempel. Es sey $AC = ED = 19°$, $BD = 29°$. Also $BE = f = 10°$. Es sey ferner der Winkel $HBD = v = 72°$, und $\llcorner FDB = u = 63°$. Also der Winkel $BAE = q = 180° - (v + u) = 180° - (72° + 63°) = 180° - 135° = 45°$.

Nun

$$\begin{array}{lcl}
\text{Nun ist } \log.\sin.u & = & 9,9498809 \\
\log.f. & = & 1,0000000 \\
\hline
\log.\sin.u \times f & = & 10,9498809 \\
\log.\sin.q & = & 9,8494850 \\
\hline
\log.AB & = & 1,1003959 \\
\text{und } AB & = & 12,60\ldots \text{ Ruthen.}
\end{array}$$

Ferner

$$\begin{array}{lcl}
\log.\sin.v & = & 9,9782063 \\
\log.f & = & 1,0000000 \\
\hline
\log.\sin v \times f & = & 10,9782063 \\
\log.\sin.q & = & 9,8494850 \\
\hline
\log.CD & = & 1,1287213 \\
\text{und } CD & = & 13,44\ldots \text{ Ruthen.}
\end{array}$$

Zusatz 6. Um den Punkt M zu bestimmen, hat man diese trigonometrische Rechnung nicht nöthig. Denn da MG der Linie AE parallel ist, so verhält sich BG : BM = BE : BA. Es sey GD = MN = 25°. Also BD – GD = 29° – 25° = 4°. Nun setze man, wie sich verhält

$$\begin{array}{c}
10 : 12,60 = 4 : BM \\
\hline
1000 : 1260 = 4 : BM \\
\hline
25 : 126 = 1 : BM \\
\hline
BM = \frac{126}{25} = 5\frac{1}{25} = 5,04°.
\end{array}$$

Eben so verfahre man mit N.

Anmerkung. Man kann also ein jedes Vierekk, es sey Trapez oder Trapezoid, zertheilen ohne es aufzutragen. Man darf nur bey Aufnehmung desselben z. B. ABDC, Fig. 37 Tab. V, entweder alle Seiten und die Diagonallinie BC, oder außer diesen Linien zugleich auch die Winkel D und B in Graden gemessen haben. In diesem Falle ist die Rechnung, welche man bey der Zertheilung nöthig

hat

hat leichter und kürzer. Denn im ersten Falle müssen die Winkel erst aus den gemessenen Linien bestimmt werden.

Es seyn bey Aufnehmung der Figur ABDC alle Seiten und die Diagonallinie BC gemessen worden. Man berechne aus den gemessenen Linien die Winkel D und B, und den Flächeninhalt des ganzen Vierekks. Von jenem wird man in einem jeden Lehrbuche der reinen Mathematik unterrichtet, und dieses zeigt §. 11. Da nun CE mit AB parallel ist, so ist der Winkel CED = ∟ ABD. Also in dem Dreyekke CED die Seite CD und die Winkel CED und CDB bekannt; auch der Winkel ECD. Denn man darf nur, da alle drey Winkel eines Dreyekks zusammen zwey rechten gleich sind, die Grad der beyden Winkel CED und EDC addieren, und die Summe von 180 abziehen.

Demnach läßt sich CE und ED trigonometrisch bestimmen. Denn man darf nur setzen, wie sich verhält
sin. ∟ CED : sin. ∟ D = CD : CE und
sin. ∟ CED : sin. ∟ ECD = CD : ED.
Man kann nun, da alle drey Seiten des Dreyekks DCE bestimmt sind, den Inhalt desselben berechnen. Den des Trapezes ABEC erhält man, indem der des Dreyekks DCE von dem des ganzen Vierekks abgezogen wird.

Es ist nun nur noch übrig die senkrechte Linie, oder die Höhe MB des Trapezes ABEC zu bestimmen. Dieses geschieht, wenn man die Fuß der beyden Linien AB und EC zusammen addiert, und den Inhalt des Trapezes ABEC durch die halbe Summe derselben dividiert. Denn da man den Inhalt erhält, wenn man die halbe Summe der Fuß, welche die Linien AB und CE enthalten, in die Anzahl der Fuß der Linie MB multipliziert (§. 10.): so giebt der Quotient, wenn man den Inhalt durch die halbe Summe der Fuß der beyden Linien AB und EC dividiert, die Zahl der Fuß, welche die Linie BM enthält.

Zusatz 7. Setzt man in der Formel $a = 0$, so verwandelt sich das Trapez, Fig. 28 Tab. IV, in ein Dreyekk. Es sey dasselbe ABC, Fig. 38 Tab. V, wo die

die Höhe $BE = c$ Fuß ist. Will man von diesem Dreyekke $GBH = m$ Quadratruthen, durch GH mit AC parallel abschneiden, so giebt $x = \sqrt{\frac{2mb}{c}} = GH = FC$.

Zusatz 8. Es ist leicht zu ersehen, daß vermöge dieser Formel auch ein jedes Dreyekk in gleiche Theile, deren Grenzen mit der Grundlinie parallel sind, zertheilt werden kann. Es sey das Dreyekk ABC, Fig. 38 Tab. V, in vier gleiche Theile zu theilen. Nun ist der Inhalt von $ABC = \frac{cb}{2}$. Also von $\triangle GBH = \frac{1}{4} ABC = \frac{cb}{4.2} = \frac{1}{8} cb$; von $DBM = \frac{2}{4} \triangle ABC = \frac{2}{4.2} cb = \frac{2}{8} cb$; und von $\triangle PBN = \frac{3}{4} \triangle ABC = \frac{3}{4.2} cb = \frac{3}{8} cb$. Folglich muß bey dem ersten Theile $m = \frac{1}{8} cb$, bey dem zweyten $m = \frac{1}{4} cb$, bey dem dritten $m = \frac{3}{8} cb$ gesetzt werden; und man erhält $GH = FC = x = \sqrt{\frac{2mb}{c}} = \sqrt{(\frac{1}{8} bc \times \frac{2b}{c})} = \sqrt{\frac{2b^2c}{8c}} = b\sqrt{\frac{1}{4}}$; $DM = QC = x = \sqrt{\frac{2mb}{c}} = \sqrt{(\frac{1}{4} bc \times \frac{2b}{c})} = \sqrt{\frac{2b^2c}{4c}} = b\sqrt{\frac{2}{4}}$; $PN = RC = \sqrt{\frac{2mb}{c}} = \sqrt{(\frac{3}{8} bc \times \frac{2b}{c})} = \sqrt{\frac{6b^2c}{8c}} = b\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Anmerkung. Wenn man diesen Satz mit dem, was §. 19 gesagt worden ist, vergleicht, so wird man sehen, daß hier und dort die unbekannte Größe auf einerley Art gefunden wird.

Aufgabe.

§. 21. Ein Dreyekk in ein Trapez, das einen gemeinschaftlichen Winkel mit ihm hat, zu verwandeln.

Auflösung. Es sey ACB, Fig. 39 Tab. V, ein solches Dreyekk wo das Trapez AFGB = $\triangle$ ACB werden soll. Man ziehe CE mit AB, AM und FH mit der Linie EB, die mit AB einen gegebenen Winkel macht, parallel, und IA auf CE senkrecht.

Setzt man $\triangle ACB = AFGB = m$, so ist $FG = HE = x = \sqrt{(a^2 + \frac{2m(b-a)}{c})}$ (§. 20.). Zieht man IB, halbiert AB in P, und zieht PQ auf AB senkrecht also AI parallel: so ist $\triangle ACB = \triangle AIB = AIQP = m$, $PA = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a = \frac{m}{c}$. Demnach ist $HE = x = \sqrt{(a^2 + a(b-a))} = \sqrt{(a^2 + ab - a^2)} = \sqrt{ab}$. Folglich darf man nur zwischen a und b die mittlere Proportionallinie suchen. Dieses kann arithmetisch oder geometrisch geschehen. Arithmetische indem die Linien AB und CE in Zahlen ausgedrukkt werden, und aus dem Produkte derselben die Quadratwurzel gezogen wird; um aber HE geometrisch zu erhalten, ziehe man Aa der Linie EB, Fig. 40, parallel, beschreibe über CE einen halben Zirkel, ziehe Ka auf CE senkrecht und mache EH = EK. Denn es verhält sich

$$\frac{aE : KE = KE : CE}{\frac{a : KE = KE : b}{KE = \sqrt{ab}.}}$$

Aufgabe.

§. 22. Ein Trapezoid in n gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Es sey ABCE, Fig. 29 Tab. IV, ein Trapezoid, das in n gleiche Theile getheilt werden soll. Man ziehe BG mit AE parallel, und CF auf AE senkrecht. Man suche den Flächeninhalt des Dreyekks BCG, und den des Trapezes BGEA. Jener sey $= N$, und dieser $= M$. Mithin ist der Inhalt der ganzen Figur $= N + M$, und der eines nten Theils $= \frac{N+M}{n}$. Man untersuche wie viel Mahl dieser nähmlich $\frac{N+M}{n}$ in N und M enthalten ist, um zu erfahren, wie viel Theile aus dem Dreyekke BCG, und wie viel aus dem Trapez BGEA gemacht werden können.

Es sey $\frac{N+M}{n}$ in M x Mahl enthalten. Also ist $\frac{(M+N)x}{n} = M$, und $x = \frac{Mn}{M+N}$. Da aus der ganzen Figur n gleiche Theile gemacht werden sollen, so muß N noch $n - x$ gleiche Theile geben, oder es ist $\frac{M+N}{n}$ in N noch $n - x$ Mahl enthalten. Also ist $\frac{Nn}{M+N} = n - x$.

Sind x und $n - x$ ganze Zahlen, sie mögen gerade oder ungerade seyn, so kann das Trapez ABGF nach §. 20 Zusatz 4, und das Dreyekk nach §. 19 in diese bestimmten Theile zerlegt werden. Wann aber x und $n - x$ gebrochne Zahlen sind, z. B. $x = m + \frac{s}{p}$, d. h. das

Tra=

Trapez ABGE gäbe m ganze Theile, und noch ein Stükk zu einem: so theile man das Trapez ABGE in xp oder mp + s, und das Dreyekk BCG in p(n — m) — s gleiche Theile, und nehme je p solche Theile zu einem verlangten; oder, welches besser ist, man schneide nach §. 20 Zusatz 4 von dem Trapez nach und nach die m gleichen Theile ab. Mithin bleibt ein $\frac{s}{p}$ Theil, oder ein Stükk $= \frac{(M+N)s}{pn}$ übrig, und muß also zu diesem, um einen verlangten Theil zu erhalten, von dem Dreyekke ein Stükk $= \frac{M+N}{n} - \frac{(M+N)s}{pn}$ abgeschnitten werden.

Man setze diesen Ausdrukk = Q. Es verhält sich also das ganze Dreyekk zum Abschnitte = N : Q, d.h. wenn man das ganze Dreyekk in N gleiche Theile zertheilt, so geben Q solche Theile den Abschnitt. Folglich bestimmt, wenn man CD = a Fuß gesetzt, $a\sqrt{\frac{N-Q}{N}}$ (§. 19 Zusatz 4) in CD den Punkt, durch welchen das Stükk der Grundlinie parallel abgeschnitten werden kann. Hierauf hat man nur noch den Ueberrest des Dreyekks = N — Q in n — (m + 1) gleiche Theile zu theilen.

Exempel. Ist x eine gebrochene Zahl, und auch n — x, weil n eine ganze Zahl seyn soll, so sey n = 7, p = 3, s = 1, m = 4. Also x = 4 + $\frac{1}{3}$, und 3x = 13, n — x = 7 — 4$\frac{1}{3}$, und 3(n — x) = 21 — (4 + $\frac{1}{3}$) 3 = 21 — 13 = 8. Daher kann M in 13 und N in 8 gleiche Theile getheilt werden, von welchen je drey einem verlangten Theile gleich sind. Denn es ist $\frac{3(n-x)+3x}{3} = n$. Oder man schneide von dem Trapez 4 gleiche Theile ab, und zu diesem Ueberreste von dem Dreyekke $\frac{2}{5}$ eines Theils, indem man es so zertheilt, daß sich das ganze Dreyekk zum Abschnitte verhält $= N : Q$ oder $= 8 : 2 = 4 : 1$. Hierauf darf man nur noch den Ueberrest in $7 - (4 + 1) = 2$ gleiche Theile zertheilen.

Zusatz 1. Soll dieses Trapezoid, z. B. in fünf Theile zertheilt werden, die sich gegen einander verhalten, wie die Zahlen p, q, t, v, x: so giebt $\frac{(M+N)p}{p+q+t+v+x}$ den Inhalt des ersten, $\frac{(M+N)q}{p+q+t+v+x}$ den des zweyten, $\frac{(M+N)t}{p+q+t+v+x}$ den des dritten, $\frac{(M+N)v}{p+q+t+v+x}$ den des vierten, und $\frac{(M+N)x}{p+q+t+v+x}$ den des fünften Theils. Man untersuche, welche Theile das Trapez BGEA und welche das Dreyekk giebt. Es sey $M = \frac{(M+N)p}{p+q+t+v+x} + \frac{(M+N)q}{p+q+t+v+x}$ $= \frac{(M+N)(p+q)}{p+q+t+v+x}$. In diesem Falle giebt das Dreyekk die übrigen drey Theile. Ist aber $M > \frac{(p+q+t)(M+N)}{p+q+t+v+x}$ oder $M < \frac{(p+q+t)(M+N)}{p+q+t+v+x}$; so giebt im ersten Falle M die ersten drey Theile und zum vierten noch ein; im andern aber nur die ersten zwey und zum dritten noch ein Stükk. Uebrigens verfahre man wie gezeigt worden ist.

Zu-

Zusatz 2. Eine jede geradlinige ebene Figur von einer geraden Anzahl Seiten läßt sich in Vierekke zerlegen. Wie ein Viereck in eine gewisse Anzahl gleicher oder ungleicher Theile zertheilt werden kann, ist jetzt gezeigt worden. Man wird nun auch im Stande seyn eine jede geradlinige ebene Figur zu zertheilen. Es werde verlangt, man sollte eine sechsekkige Figur in n gleiche Theile zertheilen. Man zerlege die Figur in zwey Vierekke, und ein jedes Viereck in ein Trapez und ein Dreyekk, wenn die Vierekke, in welche die Figur zerlegt ist, nicht selbst schon Trapezen sind. Man suche den Inhalt der ganzen Figur, und den eines jeden Vierekks. Es sey der Flächeninhalt des einen Vierekks $= M$, und der des andern $= N$. Also der Inhalt der ganzen Figur $= M + N$, und der eines nten Theils $= \frac{M+N}{n}$.

Hirauf untersuche man wie viel aus M und wie viel aus N Theile gemacht werden können. Es sey $\frac{M+N}{n}$ in M x Mahl enthalten, d. i. es gäbe M x Theile. Also ist $\frac{(M+N)x}{n} = M$, $(M+N)x = nM$, und $x = \frac{Mn}{M+N}$.

Da die ganze Figur n gleiche Theile geben soll, und die Anzahl der Theile die aus M gemacht werden können $= x$ ist, so giebt N noch $n - x$ Theile. Uebrigens verfahre man wie gezeigt worden ist. Auch über diesen Fall wenn x und $n - x$ gebrochne Zahlen sind, wird das nöthige gesagt seyn.

Anmerkung 1. Es sey z. B. ABEF, Fig. 45 Tab. VI, gegeben. Es sey der Inhalt eines nten Theils $= m$, oder

$m = \frac{M+N}{n}$. Man zerlege die Figur in die beyden Vierekke ABDC und CDEF, und ein jedes in ein Trapez, wenn entweder ABDC oder CDEF noch kein Trapez ist, und in ein Dreyekk, so, daß die Dreyekke an CD kommen. Hierauf hat man nur von AB nach CD zu erst ein Stück $= m$, dann ein anderes $= 2m$, u. s. w. und eben so von FE nach CD zu nach §. 20 Zusatz 4 abzuschneiden.

Sind die beyden Dreyekke zusammen genommen $= m$ oder kleiner als m, so wird, indem man von AB und EF nach CD zu ein Stükk nach dem andern abschneidet, ein Theil $= m$ übrig bleiben. Sind sie aber größer als m, so ist schon gezeigt worden, wie man von einem Dreyekke ein Stükk abschneiden kann. Es sey cbDd das von dem Dreyekke dCD abgeschnittene Stükk. Da es nicht alle Mahl wohl schikklich ist die Grenze cb in CD stoßen zu lassen, so verändere man sie, wenn sie in DE stoßen soll, auf folgende Art: Man ziehe die gerade Linie cD, mit ihr aus b die Linie ab parallel, und hierauf die Grenze aD. Denn es ist $\triangle caD = \triangle cbD$, weil beyde einerley Grundlinie cD haben, und zwischen den Parallellinien ab und cD stehen. Da ab mit cD parallel ist, so verhält $CD : Cb = Cc : Ca$. Man kann also auch den Punkt a arithmetisch bestimmen, indem man für CD, Cb, und Cc die gehörigen Zahlen setzt.

Anmerkung 2. Ist die Figur regulär, so läßt sie sich, wenn sie eine gerade Anzahl Seiten hat, in lauter Trapezen zerlegen. Soll sie in Dreyekke zertheilt werden, die in ihrer Mitte zusammen stoßen, so darf man nur aus jeder Ekke der regulären Figur in ihren Mittelpunkt gerade Linien ziehen, wie schon aus der theoretischen Geometrie bekannt ist. Soll sie auf diese Art in pn gleiche Theile zertheilt werden, wo n die Anzahl ihrer Seiten ausdrukkt: so hat man nur nöthig nach §. 15 Zusatz p gleiche Theile aus einem jeden Dreyekke zu machen.

Aufgabe.

§. 23. Eine ebene Figur, die von lauter krummen Linien umgrenzt ist, zu zertheilen.

Auflösung. Man zertheile den Umfang der gegebenen Figur so, daß man zwischen zwey Punkten keine merkliche Krümmung mehr gewahr werden kann, und ziehe aus jedem Punkte durch die Figur Linien, die mit einander parallel sind. (Es sey Fig. 14 Tab. II gegeben. Man berechne noch §. 7 den Inhalt des Dreyekks MLW, nach §. 10 den eines jeden Trapezes, und nach §. 10 Zusatz 9 den der ganzen Figur.

Es sey $\triangle MLW = a$, $MNKL = b$, $NOIK = c$, $OPCI = d$, $PQHC = e$, $QFGH = f$, $FRG = g$. Es sey $a + b + c + d + e + f + g = M$, und die Anzahl der gleichen Theile $= n$. Also der Inhalt eines nten Theils $= \frac{M}{n}$.

Nun ist entweder $\frac{M}{n} = a$, oder $\frac{Mm}{n} = a$, oder $\frac{Mm}{n} + \frac{Ms}{np} = a$. Im ersten Falle giebt MLW einen verlangten Theil, im zweyten darf man nur MLW nach §. 19 in m gleiche Theile theilen, und im dritten von MLW ein Stükk $= \frac{Ms}{pn}$ abschneiden, und den Ueberrest in m gleiche Theile zerlegen.

Es sey . . . $a = (m + \frac{s}{p}) \frac{M}{n}$

$$a + b = (m' + \frac{s'}{p'}) \frac{M}{n}$$

$$a + b + c = (m'' + \frac{s''}{p''}) \frac{M}{n}$$

$$a + b + c + d = (m''' + \frac{s'''}{p'''}) \frac{M}{n}$$

$$a + b + c + d + e = (m'''' + \frac{s''''}{p''''}) \frac{M}{n}$$

$$a + b + c + d + e + f = (m''''' + \frac{s'''''}{p'''''}) \frac{M}{n}$$

$$a + b + c + d + e + f + g = n \times \frac{M}{n} = M.$$

Also

$$\frac{an}{M} = m + \frac{s}{p}$$

$$\frac{(a+b)n}{M} = m' + \frac{s'}{p'}$$

$$\frac{(a+b+c)n}{M} = m'' + \frac{s''}{p''}$$

$$\frac{(a+b+c+d)n}{M} = m''' + \frac{s'''}{p'''}$$

$$\frac{(a+b+c+d+e)n}{M} = m'''' + \frac{s''''}{p''''}$$

$$\frac{(a+b+c+d+e+f)n}{M} = m''''' + \frac{s'''''}{p'''''}$$

Diesen Bedingungen nach muß von dem Dreyekke MLW erst nach §. 19 Zusatz 4 ein Stükk $= \frac{s}{p} \times \frac{M}{n}$

von

von ML nach W zu abgeschnitten, und dann der Ueberrest in m gleiche Theile zertheilt werden. Zu diesem Abschnitte muß von dem Trapez ein Stükk $= \frac{M}{n} - \frac{sM}{pn} = (1 - \frac{s}{p}) \frac{M}{n}$ noch hinzu kommen.

Wenn $\frac{(a+b)n}{M} = m' + \frac{s'}{p'}$ ist, so ist $\frac{bn}{M} = (m' + \frac{s'}{p'}) - (m + \frac{s}{p})$. Man schneide erst von dem Trapez NKLM nach ML zu nach §. 20 Zusatz 4 ein Stükk $= \frac{Ms'}{np'}$ ab, und hierauf nach und nach $m' - (m+1)$ gleiche Theile. Auf diese Art wird, wenn richtig verfahren worden ist, ein Stükk $= (1 - \frac{s}{p}) \frac{M}{n}$ von selbst übrig bleiben, das mit $\frac{s}{p}\frac{M}{n}$ einen verlangten Theil giebt. Eben so verfahre man auch bey den übrigen Trapezen. Findet man, daß aus dem Dreyekke kein ganzer Theil gemacht werden kann, so ist $m = 0$.

Exempel. Es sey	ΔMLW	$= a =$	$10\,\square^\circ$
das Trapez	NKLM	$= b =$	$8\,\square^\circ$
— —	OIKN	$= c =$	$6\,\square^\circ$
— —	PCIO	$= d =$	$6\,\square^\circ$
— —	QHCP	$= e =$	$4\,\square^\circ$
— —	FGHQ	$= f =$	$4\,\square^\circ$
das Dreyekk	FGR	$= g =$	$2\,\square^\circ$

Also $a + b + c + d + e + f + g = 40\,\square^\circ = M$

Es sey $n = 5$. Also $\frac{M}{n} = \frac{40}{5} = 8$. Hier ist

 dem

demnach $m + \frac{s}{p} = \frac{10}{8} = 1 + \frac{1}{4}$, $m' + \frac{s'}{p'} = \frac{18}{8} = 2 + \frac{1}{4}$, $m'' + \frac{s''}{p''} = \frac{24}{8} = 3$, $m''' + \frac{s'''}{p'''} = \frac{30}{8} = 3 + \frac{3}{4}$, $m'''' + \frac{s''''}{p''''} = \frac{34}{8} = 4 + \frac{1}{4}$, $m''''' + \frac{s'''''}{p'''''} = \frac{38}{8} = 4 + \frac{3}{4}$. Also wird hier von dem Dreyekke MLW ein Stükk $= \frac{Ms}{np} = \frac{40}{5.4} = 2\square°$, und von dem Trapez NKLM ein Stükk $= \frac{Ms'}{np'} = \frac{40}{5.4} = 2\square°$ abgeschnitten. Da nun $m' - (m + 1) = 2 - (1 + 1) = 0$ ist, so zeigt dieses an, daß der Ueberrest keinen ganzen Theil giebt, sondern daß er, $= (1 - \frac{s}{p}) \frac{M}{n} = (1 - \frac{1}{4}) \frac{40}{5} = 6\square°$, wie jenem Stükke, das von dem Dreyekke MLW von ML nach W zu abgeschnitten worden ist, einen erlangten Theil ausmacht. Dieses von dem Trapez abgeschnittene Stükk, macht mit dem Trapez IOKN $= 6\square°$ einen verlangten Theil aus, und man erhält von W bis QI drey gleiche Theile. Denn es ist $\frac{s''}{p''} = 0$, und $m'' - (m' + 1) = 3 - (2 + 1) = 0$. Da PCIO $= 6\square°$ ist, so muß von dem Trapez QHCP ein Stükk $= 2\square°$ noch hinzu kommen, und hierdurch hat man alle fünf Theile der Figur bestimmt.

Anmerkung. 1. Wenn man M aus den auf dem Felde gemessenen Linien, und a, b, c u. s. w. mit Hülfe eines verjüngten Maßstabes berechnet, so wird selten $a + b + c + d + e + f + g = M$, sondern entweder größer oder kleiner

kleiner seyn. Es sey $a + b + c + d + e + f + g = m < M$. Hier schließen einige, um das wahre a, b, c u. s. w. zu finden, so: wie sich verhält $m : M = a : x$. Gesetzt aber, es sey a schon zu groß und b desto kleiner. In diesem Falle wird zwar der Fehler bey b durch gegenwärtige Proportion etwas verbessert, der bey a aber desto mehr vergrößert. Und man sieht, daß diese Regel in keinem Falle, es sey denn, daß a, b, c u. s. w. entweder durchaus zu groß oder zu klein wären, zum richtigen a, b, c u. s. w. führt. Hier ist nun freylich kein anderes Mittel, wenn man a, b, c u. s. w. nicht auch aus den bey Aufnehmung der Figur gemessenen Linien berechnen will, als man sucht vermittelst des verjüngten Maßstabes und des Handzirkels die Fehler auf.

Anmerkung 2. Wenn eine krummlinige ebene Figur in Theile, die bestimmte Verhältnisse gegen einander haben, zertheilt werden soll: so hat man nur aus dem Flächeninhalte der ganzen Figur den Inhalt eines jeden Theils, wie schon gezeigt worden ist, zu bestimmen, und hierauf wie im gegenwärtigen Paragraph zu verfahren.

Anmerkung 3. Nach gegenwärtigem Paragraph kann eine auf dem Felde aufgenommene krummlinige Figur aufgetragen, und von da nach dem verjüngten Maßstabe, nach welchem sie aufgetragen worden ist, die zur Theilung nöthigen Linien abgemessen werden. Man kann aber auch, wenn man sonst von der weitläuftigen Rechnung nicht abgeschrekkt wird, jede krummlinige ebene Figur bloß durch die auf dem Felde gemessenen Linien zertheilen. Es sey bey Aufnehmung der Figur HIFG, Fig. 10 Tab. I, AE, EH, AI, Ac, tc, pm, qn, der Winkel AED, der Winkel EAB, alle Abschläge an IH u. s. w. gemessen worden. Man ziehe aus den Punkten m und n, in welche die Abschläge pm und qn treffen, die Linien mc und nd mit AE parallel.

Es sey der Winkel AED von einem rechten so wenig unterschieden, daß man ihn, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, für einen rechten annehmen kann. Mithin fällt cm in den Abschlag pm, und dn in den qn. Es sey bh senkrecht auf AE, und fg senkrecht auf cm. Also ist hb = Ep, gf = pq, und hb, gf, als Entfernungen der Parallellinien, da die Entfernungen Ep, pq der Abschläge pm, qn gemessen sind, bekannt.

Nun kommt es bloß darauf an, aus den auf dem Felde gemessenen Linien und Winkeln die Längen der Linien cm und dn zu bestimmen.

Da die Winkel Ahb und bgf in den Dreyekken hAb und gbf rechte sind, der Winkel gbf = ∟ hAb ist, weil man dn, cm der Linie IH parallel gezogen hat, und die Seiten hb, gf bekannt sind: so kann Ah durch folgende Proportion gefunden werden, als

$$\tan. \llcorner hAb : \sin. tot. = hb : Ah$$

und die Seite bg, indem man setzt

$$hb : Ah = gf : bg$$

Zieht man von AE die Linie Ah ab, so bleibt bp übrig und von dieser bg abgezogen giebt fg. Addiert man zu bp den Abschlag pm, und zu fq den qn so erhält man fn und bm.

Es ist also noch übrig die Linien cb und df zu bestimmen. Da cm und dn mit IH parallel sind, so ist der Winkel Bfq = ∟ fbg = ∟ bAh. Es mögen Ac und te Abschläge seyn, die man in einem rechten Winkel an ihre Abscissenlinie AB gesetzt hat. Nun ist in dem rechtwinkligen Dreyekke cAb der rechte Winkel cAb, der Winkel Abc = ∟ gbf = ∟ bAh, und die Seite Ac bekannt. Mithin findet man cb, indem gesetzt wird, wie sich verhält

$$\sin. \llcorner Abc : \sin. tot. = Ac : bc.$$

Es sey Ac = te, oder zum wenigsten ihr Unterschied für Nichts zu rechnen. Es sey, wie bekannt, ce für eine gerade Linie anzunehmen. Diesen Bedingungen nach kann ce und Af als parallel, fd = bc, da fd mit bc parallel ist, angenommen werden. Und man erhält mc = bm + bc, dn = fn + fd.

Da nun die Parallellinien IH, cm, dn, und ihre Entfernungen bestimmt sind, so kann der Inhalt von PIH und der dieser Trapezen nach §. 10 bestimmt, und die

Figur

Figur nach gegenwärtigem Paragraph in die verlangten Theile zerlegt werden.

Anmerkung 4. Man hat aber nicht alle Mahl nöthig so viele Linien zu bestimmen. Es sey z. B diese gegebene Figur in zwey gleiche Theile zu zertheilen. In diesem Falle hat man nur auf dem Felde die Linie KM, welche die Figur ungefähr in zwey gleiche Theile theilt, zu messen. Der Inhalt des Stükks IKMH, und der des Stükks KFGM kann nach §. 10 Zusatz 9 berechnet werden. Hierauf ziehe man von dem größern den kleinern ab. Den halben Unterschied nehme man von dem größern weg, und gebe ihn dem kleinern. Es sey KsvM das abzuschneidende Stükk. Man dividiere diesen halben Unterschied durch die Anzahl der Fuß, welche KM enthält. Der Quotient giebt die Größe der Entfernung zx der Parallellinien KM und sv, in so fern KsvM für ein Parallelogramm angenommen werden kann. Ob der Fehler, wenn man KsvM als ein Parallelogramm annimmt, und die Höhe desselben auf vorgeschriebene Art bestimmt, beträchtlich ist, oder nicht, kann man leicht erfahren. Man darf nur vr = MK machen, und den Inhalt des Dreyekks Ksr, um welches das abgeschnittene Stükk zu groß ist, berechnen. Sollte KsvM für kein Parallelogramm, aber doch für ein Trapez angenommen werden können, so muß zx algebraisch bestimmt werden.

Anmerkung 5. Bey krummlinigen Figuren läßt sich die §. 20 gefundene Formel nicht wohl brauchen, besonders wenn man die Figur zertheilen will, ohne sie aufzutragen. Es sey von dem Trapez ABEC, Fig. 36 Tab. IV, ein Trapez ABGF = m Quadratruthen abzuschneiden. Man suche die senkrechte Linie AK zu bestimmen. Es sey, wie §. 20, AB = a, CE = b, AI = c Fuß, nur hier AK = x Fuß. Daher ist CM = b − a. Nun verhält sich

$$AI : AK = CM : FL$$

$$c : x = (b - a) : FL$$

$$\frac{x(a-b)}{c} = FL.$$

x²

$$\frac{x^2(b-a)}{2c} = \triangle FAL$$

$$ax = ABGL.$$ Also

$$ABGF = m = ax + \frac{x^2(b-a)}{2c}$$

$$2cm = 2acx + x^2(b-a)$$

$$\frac{2cm}{b-a} = \frac{2acx}{b-a} + x^2$$

$$\frac{2mc}{b-a} + \left(\frac{ac}{b-a}\right)^2 = \left(\frac{ac}{b-a}\right)^2 + \frac{2acx}{b-a} + x^2$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{2mc}{b-a} + \left(\frac{ac}{b-a}\right)^2\right)} = \frac{ac}{b-a} + x$$

$$-\frac{ac}{b-a} \pm \sqrt{\left(\frac{2mc}{b-a} + \left(\frac{ac}{b-a}\right)^2\right)} = x$$

$$-\frac{ac}{b-a} \pm \sqrt{\left(\frac{2mc(b-a)}{(b-a)^2} + \frac{a^2c^2}{(b-a)^2}\right)} = x$$

$$\frac{-ac \pm \sqrt{(2mc(b-a) + a^2c^2)}}{b-a} = x.$$

Es sind hier also zwey x möglich:

Das eine ist $= \frac{-ac - \sqrt{(2mc(b-a) + a^2c^2)}}{b-a}$

und das andere $= \frac{-ac + \sqrt{(2mc(b-a) + a^2c^2)}}{b-a}$

Beyde geben, wenn man zur Probe aus x, a, b, c, die Linie FG sucht, und den Flächeninhalt des Trapezes ABGF berechnet, zum Flächeninhalte m. Gleichwohl kann aber hier die negative Wurzel nicht gebraucht werden. Denn $\frac{-ac - \sqrt{(2mc(b-a) + a^2c^2)}}{b-a}$ bedeutet eine Linie die

AK entgegengesetzt ist. Also $x = \frac{-ac \mp \sqrt{(2mc(b-a) + a^2c^2)}}{b-a}$

Gesetzt, man sollte von dem Trapez MKiu, Fig. 10 Tab. I, das Trapez KsvM abschneiden. Man suche vermöge dieser hier gefundenen Formel die senkrechte Linie zx, oder, welches einerley ist, die Entfernung der Parallellinien KM und sv. Wenn nun in dem rechtwinkligen Dreyekke zxB außer dem rechten Winkel Bzx der Winkel zBx und die Seite zx bekannt ist, so läßt sich Bx trigonometrisch bestimmen.

Sollte von dem Teapez KiuM das siuv abgeschnitten werden, so ziehe man den Inhalt des Trapezes siuv von dem des Trapezes KiuM ab. Der Ueberrest wird den Inhalt des Trapezes KsvM geben, nach welchem das Trapez KsvM von KiuM abgeschnitten werden kann. Hier hat man den Vortheil, das die Formel, da iu > KM, unverändert bleibt.

Aufgabe.

§. 24. Von einem Parallelogramme ein Stükk von verlangter Größe abzuschneiden.

Auflösung. Es sey das Verhältniß des abzuschneidenden Stükks zum Ueberreste der ganzen Figur = n : m.

I. Soll das Stükk, welches man abschneiden soll, auch ein Parallelogramm seyn, so zertheile man die Grundlinie so, daß sich die beyden Theile gegen einander verhalten = n : m, und ziehe aus diesem erhaltenen Theilungspunkte eine Linie mit einer Seite parallel.

II. Soll es aber ein Dreyekk seyn, so nehme man jenen I bestimmten Theil der Grundlinie gedoppelt, und ziehe aus diesem erhaltenen Punkte in eine Ekke eine gerade Linie.

Beweis. Es sey das Parallelogramm ABCD, Fig. 30 Tab. IV, gegeben. Im ersten Falle sey FCDE und im zweyten ΔGCD das abgeschnittene Stück. Daß $FCDE : BFEA = n : m$ ist leicht zu ersehen. Denn die beyden Parallelogramme haben gleiche Höhen, und verhalten sich, wie $ED : AE$. Folglich auch wie $n : m$.

Im zweyten Falle verhält sich $AG : GD = (m - n) : 2n$, und $AD = AG + GD = BC$ verhält sich zu $GD = (m + n) : 2n$. Nun verhält sich auch, wenn man die gemeinschaftliche Höhe $= a$ setzt

$$ABCG : \Delta GCD = \tfrac{1}{2}(BC + AG)a : \tfrac{1}{2}GD \times a$$
$$= (BC + AG) : GD$$
$$= ((m + n) + (m - n)) : 2n$$
$$= m : n$$

Anmerkung. Bedeutet n eine Anzahl Quadratruthen, die vom Parallelogramme ABCD abgeschnitten werden sollen, so darf man nur den Flächeninhalt des Parallelogramms suchen, von ihm die gegebene Anzahl Quadratruthen abziehen, und, da dieser Ueberrest unter m gedacht werden kann, wie gezeigt worden ist verfahren.

Zusatz Wäre verlangt von einem Dreyekke, Fig. 56 Tab. VII, n Quadratruthen abzuschneiden, so, daß die Theilungslinie DF in einen Winkel desselben gezogen werden sollte: so berechne man den Inhalt des gegebenen Dreyekks, den man $= m$ setzen kann, und bestimme die Länge der Linie EF durch folgende Proporzion, als.

$$m : n = EB : EF \text{ (§. 15.)}.$$

Demnach kann auch von einer vielseitigen Figur eine verlangte Anzahl von Quadratruthen abgeschnitten werden. Gesetzt, man sollte von BEDA ein Stükk $= n$ Quadratruthen abschneiden. Hier hat man nur den Inhalt des Dreyekks BDE und den des Dreyekks ABD zu berech-

berechnen. Jener sey $= m$ und dieser $= p$. Ist $m > n$ so wird das verlangte Stükk von dem Dreyekke BDE, wie gezeigt worden ist, abgeschnitten; ist aber $m < n$, so ziehe man m von n ab, und setze wie sich verhält $p : (n - m) = AD : DC$. Nach dieser Proportion kann DC und der verlangte Theil DCBE bestimmt werden.

Aufgabe.

§. 25. Von einem Trapez ein Stükk von verlangter Größe abzuschneiden.

Auflösung. Es sey ACDB, Fig. 41 Tab. IV, das gebene Trapez, dessen Seiten AC und BD parallel sind. Es verhalte sich ACDB zum abzuschneidenden Stükke $= m : n$.

I. Wenn die Theilungslinie ab nicht mit AB parallel seyn soll, so theile man AC und BD so ein, daß sich verhält $AC : Aa = BD : Bb = m : n$, und ziehe die gerade Linie ab. Diesem Verfahren nach verhält sich $ACDB : AabB = m : n$ (§. 16.).

II. Soll aber ab mit AB parallel seyn, so setze man den Inhalt des Trapezes $= M$. Demnach ist $AabB = \frac{Mn}{m}$. Denn es soll sich verhalten $ACDB : AabB = m : n$. Es enthalte die Höhe AE h, AC a, BD b Fuß. Daher ist

$$M = \tfrac{1}{2} h (a + b) \quad (\S.\ 10.)$$

$$\frac{Mn}{m} = \frac{nh(a + b)}{2m}$$

Nun setze man $\frac{Mn}{m} = hx$, d. i. gleich einem Parallelogramme, das zur Höhe h und zur Grundlinie x Fuß hat. Daher ist $hx = \frac{nh(a+b)}{2m}$

$$x = \frac{n(a+b)}{2m}$$

Diese hier bestimmte Länge trage man aus A in a, aus B in b, und ziehe ab.

Aufgabe.

§. 26. Von einer ebenen geradlinigen Figur m Quadratruthen abzuschneiden.

Auflösung. Gesetzt die Fläche von m Quadratruthen sollte an die Linie GB, Fig. 42 Tab. V, kommen. Nun kann sie ein Dreyekk, oder ein Viereck seyn. In beyden Fällen nehme man GB für die Geundlinie eines Dreyekks an, dessen noch unbekannte Höhe = x Fuß seyn soll. Es enthalte GB a Fuß. Mithin,

$$\tfrac{1}{2}xa = m \text{ (§. 7)}$$

$$x = 2m$$

$$x = \frac{2m}{a} = \frac{m}{\tfrac{1}{2}a}$$

Diese Länge x nehme man mit einem Handzirkel auf dem verjüngten Maßstabe, nach welchem die Figur aufgetragen worden ist; mache aus G und B die Bogen xy und pq, ziehe eine gerade Linie gh, welche das Aeußerste dieser Bogen berührt, und die Seiten AG und DB der Figur in f und c schneidet. Hierauf ziehe man entweder die gerade Linie Gc oder fB. Im ersten Falle wird GcB und im zweyten GfB das verlangte Dreyekk seyn, Denn so wohl △GfB als auch △GcB hat GB zur Grundlinie, und Bb = Gd = x zur Höhe.

Soll das abzuschneidende Stükk kein Dreyekk sondern ein Viereкk seyn, so nehme man, wenn das Dreyekk GcB bestimmt ist, einen Punkt N an, der auch wohl gegeben seyn kann; ziehe aus G eine gerade Linie GM, die Nc parallel ist, und hierauf die Grenze NM. Denn es ist $\triangle GNM = \triangle GcM$, weil beyde eine gemeinschaftliche Grundlinie GM haben, und zwischen zwey parallelen Linien Nc und MG stehen.

Anmerkung. Bißweilen ist m so groß, daß der Perpendikel bB über D hinaus reicht. In diesem Falle muß das Stükk GNMB durch zwey Dreyekke abgeschnitten werden, von welchen das erste GB und das zweyte GM zur Grundlinie bekommt. Das erste wird, wie oben bestimmt nur daß es $= \frac{1}{2}$m ist. Um das zweyte zu erhalten, dividiere mnn $\frac{1}{2}$m durch die Anzahl der Fuß $= \frac{1}{2}$GM, oder, welches eben das ist, m durch die Zahl der Fuß, welche GM enthält. Dieser Quotient giebt, wie im gegenwärtigen Paragraph, die Länge, mit welcher aus G und M Bogen gemacht werden müssen. Uebrigens verfahre man wie gezeigt worden ist.

Zusatz 1. Ist von AGFIM, Fig. 43 Tab. V, ein Stükk von m Quadratruthen oder Quadratfuß abzuschneiden, so, daß es an FG kommen soll: so berechne man den Inhalt des Dreyekks AGF, den man hier $=$ N setzen kann. Dieser ist entweder $=$ m, oder $<$ m, oder $>$ m. Im ersten Falle ist das Dreyekk AGF schon der verlangte Theil, der nur nach Gefallen in ein Viereкk verwandelt werden darf, wie schon gezeigt worden ist. Ist aber N $<$ m, so lehrt §. 24 Zusatz, wie man den Ueberrest, um welchen m größer ist als N, von dem Dreyekke AGF abschneiden kann. Im letztern Falle, wenn nähmlich N $>$ m, bestimme man nach gegenwärtigem Paragraph das Dreyekk AFh $=$ N $-$ m. Solle das nach §. 24 Zusatz bestimmte Dreyekk kein Dreyekk bleiben, so wird es leicht in bGFf verwandelt werden können.

Zusatz 2. Gesetzt es sollten zwey Stükke von einer geradlinigen ebenen Figur abgeschnitten werden, z. B. eins von m und eins von n Quadratruthen, so, daß das erste GF, Fig, 44 Tab. V, zur Grundlinie bekommen sollte. Es sey wieder der Flächeninhalt des Dreyekks AGF $=$ N, der entweder $=$ m, oder $>$ m, oder $<$ m ist. Im ersten Falle darf man nur noch n entweder durch zwey oder durch ein Dreyekk von MAFH abschneiden, und AGF in eine vierekkige Figur verwandeln. Ist aber N $>$ m, so schneide man von AGF das Dreyekk AaF $=$ N $-$ m ab. Den Inhalt dieses Dreyekks ziehe man von n ab, und bestimme das Dreyekk AFh $=$ n $-$ (N $-$ m). Hierauf verändere man aGF nach Verlangen in das Vierekk bGFf, wobey n unverändert bleibt. Denn wenn bF mit af parallel ist, so ist Δ abf $= \Delta$ aFf. Also auch AaFh $=$ Abfh. Im leztern Falle, wenn N $<$ m, bestimme man das Dreyekk AFh $=$ m $-$ N, und schneide hierauf noch Ahmn $=$ n ab.

Aufgabe.

§. 27. Eine ebene geradlinige Figur in m gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man suche erstlich den Flächeninhalt von CABD, Fig. 45 Tab. VI, und von CDEF. Jener soll $=$ M und dieser $=$ N seyn. Man setze die Zahl der Quadratfuß, welche auf einen Theil kommen $=$ n. Also $\frac{N + M}{m} = n$. Nun giebt M entweder p, oder $p + \frac{s}{q}$ Theile. Mithin N im ersten Falle m $-$ p, und im zweyten $m - p - \frac{s}{q}$. Ist das erste, so schneide man p $-$ 1 Stükke von ABDC und m $-$ (p $+$ 1) von CDEF nach §. 26 ab. Denn die lezten Stükke müssen, wenn richtig

tig verfahren worden ist, von selbst an CABD und CDEF übrig bleiben. Findet aber das letztere Statt, so schneide man von ABDC nach CD zu nach und nach p Stükke ab. Auf diese Art wird von ABDC an der Seite CD ein Stükk $= \frac{ns}{q}$ übrig bleiben, es sey denn, daß nicht recht verfahren worden wäre. Hierauf schneide man von FCDE von FE nach CD zu nach und nach $n - (p+1)$ Stükke ab. Ist hier kein Fehler begangen worden, so wird von FCDE an CD ein Stükk $= n - \frac{sn}{q}$ übrig geblieben seyn. Also ein Stükk, das mit jenem, welches von ABDC übrig geblieben ist, einen verlangten Theil giebt.

Exempel. Im ersten Falle sey $M = 24$ Quadratfuß $N = 12$ Quadratfuß, $m = 6$. Also $\frac{M+N}{m} = n = \frac{36}{6} = 6$ Quadratfuß. Hier ist demnach $p = \frac{M}{n} = \frac{24}{6} = 4$, und $m - p = 2$. Folglich müssen von CABD $p - 1$, d. i. 3, und von CDEF $m - p - 1 = m - (p+1)$ d. i. 1 Stükk abgeschnitten werden.

Im zweyten Falle sey $M = 35$ Quadratruthen, $N = 21$ Quadratruthen, $m = 7$. Also $\frac{M+N}{m} = \frac{56}{7} = 8$ Quadratruthen $= n$. Daher ist $\frac{M}{n} = \frac{35}{8} = 4 + \frac{3}{8} = p + \frac{s}{q}$, $m - (p + \frac{s}{q}) = 7 -$

$(4+\frac{3}{8})=2+\frac{5}{8}$. Demnach müssen von ABDC vier ganze Theile abgeschnitten werden. Nun ist $pn=32$ Quadratruthen, $M-pn=35-32=3=\frac{ns}{q}$. Also bleibt an ABDC ein Stükk von 3 Quadratruthen übrig. Schneidet man von DEFC von EF nach DC zu $m-(p+1)$ Stükke ab, so sind von DEFC $(m-(p+1))n=(7-(4+1))8=2.8=16$ Quadratruthen weggenommen worden. Mithin ist $N-(m-(p+1))n=21-16=5$ Quadratruthen. Folglich bleibt von DEFC ein Stükk $=5$ Quadratruthen an der Linie CD übrig. Also ein Stükk, das mit jenem, welches von ABDC übrig geblieben ist, einen verlangten Theil ausmacht.

Anmerkung. Durch die bloße Zertheilung erhalten die Stükke oftmahls eine unansehnliche Gestalt, welche man aber nach §. 24 leicht verändern kann, indem den Grenzlinien andere Richtungen gegeben werden.

Aufgabe.

§. 28. Eine geradlinige ebene Figur in die Stükke A, B, C, D, E zu zertheilen, so, daß sie sich gegen einander verhalten wie die Zahlen a, b, c, d, e.

Auflösung. Es sey m der Inhalt von A, oder $A=m$, $B=n$, $C=p$, $D=q$, $E=z$. Da sich verhalten soll

$$a:b=m:n$$
$$b:c=n:p$$
$$c:d=p:q$$
$$d:e=q:z;$$ so verhält sich auch

(a+b

$$(a+b) : b = (m+n) : n$$
$$(a+b) : c = (m+n) : p$$

$$(a+b+c) : c = (m+n+p) : p$$
$$(a+b+c) : d = (m+n+p) : q$$

$$(a+b+c+d) : d = (m+n+p+q) : q$$
$$(a+b+c+d) : e = (m+n+p+q) : z$$

$$(a+b+c+d+e) : e = (m+n+p+q+z) : z$$
$$(a+b+c+d+e) : a = (m+n+p+q+z) : m$$

Setzt man den Flächeninhalt der ganzen Figur = M, so ist $m+n+p+q+z = M$, und man wird durch folgende Proportionen den Inhalt eines jeden Theils finden:

$$(a+b+c+d+e) : a = M : m$$
$$(a+b+c+d+e) : b = M : n$$
$$(a+b+c+d+e) : c = M : p$$
$$(a+b+c+d+e) : d = M : q$$
$$(a+b+c+d+e) : e = M : z.$$

Nun hat man nur noch nöthig von der gegebenen Figur nach §. 26 m, n, p, q, z nach und nach abzuschneiden.

Exempel. Es sey die gegebene Figur ABDEFC, Fig. 45 Tab. VI, der Inhalt von ABDC = P, = 2455 Quadratruthen, der von FCDE = N = 1560 Quadratruthen. Also $M = N + P = 1560 + 2455 = 4015$ Quadratruthen. Es sey nun $a = 3$, $b = 5$, $c = 2$, $d = 6$, $e = 4$. Demnach $a+b+c+d+e = 20$. Folglich

$$(a+b+c+d+e) : a = M : m$$
$$20 : 3 = 4015\,\square^{\circ} : m$$
$$20 : 3 = 40150000\,\square'' : m$$

$$20)\ 120450000\ (3$$

$$6022500\,\square'' = m$$

$$\begin{array}{rcl}
20 & : & 5 = 40150000\square'' : n \\
\hline
4 & : & 1 = 40150000 \quad : n \\
\hline
 & 4) & 10037500\square'' = n \\
\\
20 & : & 2 = 40150000\square'' : p \\
\hline
10 & : & 1 = 40150000\square'' : p \\
\hline
 & 10) & 4015000\square'' =: p \\
\\
20 & : & 6 = 40150000\square'' : q \\
\hline
10 & : & 3 = 40150000\ '' : q \\
\hline
 & 10) & 120450000\square'' \quad (3 \\
\hline
 & & 12045000\square'' = q \\
\\
20 & : & 4 = 40150000\square'' : z \\
\hline
5 & : & 1 = 40150000\square'' : z \\
\hline
 & 5) & 8030000\square'' = z
\end{array}$$

Mithin ist

$$\begin{array}{r}
m = \ 6022500\square'' \\
n = 10037500 \\
\hline
m + n = 16060000 \\
p = \ 4015000 \\
\hline
m + n + p = 20075000\square''
\end{array}$$

Da nun $P - (m + n + p) = 24550000 - 20075000 = 4475000$ Quadratzoll ist, so giebt ABDC die Stükke A, B, C, und 4475000 Quadratzoll zu D'. D' aber soll 12045000 Quadratzoll erhalten. Folglich muß ihm noch $12045000 - 4475000 = q - (P - (m + n + p)) = 7570000$ Quadratzoll von CDEF gegeben werden. Hierauf hat man nur noch nöthig zu untersuchen, ob wirklich für E 8030000 Quadratzoll von CDEF übrig geblieben sind.

Anmerk.

Anmerkung 1. Bißweilen sind a, b, c, d, e keine ganzen Zahlen, sondern Brüche, die entweder einerley oder nicht einerley Nenner haben. Im letztern Falle müssen sie unter einerley Nenner gebracht werden. Es sey z. B. $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{2}{3}$. $e = \frac{5}{6}$. Also

$$a = \tfrac{1}{2} = \tfrac{6}{12}$$
$$b = \tfrac{3}{4} = \tfrac{9}{12}$$
$$c = \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{12}$$
$$d = \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{12}$$
$$e = \tfrac{5}{6} = \tfrac{10}{12}$$

$a + b + c + d + e = \frac{37}{12}$. Daher verhält sich

$$\tfrac{37}{12} : \tfrac{6}{12} = M : m$$

$$37 : 6 = M : m.$$

Und folglich ist es hier eben so als wenn a, b, c, d, e ganze Zahlen wären.

Anmerkung 2. In diesem hier gegebenen Beyspiele kann man auch setzen

$$\tfrac{37}{12} : \tfrac{1}{12} = M : x$$

$37 : 1 = M : x$, und man erhält

$$x \times 6 = m$$
$$x \times 9 = n$$
$$x \times 4 = p$$
$$x \times 8 = q$$
$$x \times 10 = z.$$

Anmerkung 3. Ist eine Figur, welche zertheilt werden soll, es sey nun in gleiche oder in ungleiche Theile, nicht von geraden, sondern von krummen Linien umgrenzt, wie z. B. RLWMR, Fig. 14 Tab. II: so zerlegt man sie in Trapezen, berechne ihren Inhalt und auch den der ganzen Figur. Aus diesem bestimme man, wie gezeigt worden ist, wie viel ein jeder Theil an Flächeninhalte bekommt. Machen ein, zwey, oder mehrere Trapezen einen verlangten Theil aus, so ist die Grenzlinie schon gezogen. Ist dieses nicht, so sind entweder ein, zwey, oder mehrere Trapezen größer oder kleiner, als ein verlangter Theil der Figur. Findet jenes Statt, so wird man den

den Ueberrest leicht abschneiden können; im letztern Falle aber muß der verlangte Theil durch das Fehlende ergänzt werden. Es kann sich auch zutragen, daß aus einem Trapez mehrere Theile gemacht werden können, und ein Ueberrest bleibt, der für einen Theil zu klein ist. Auch in diesem Falle wird das nöthige gesagt worden seyn.

Anmerkung 4. Da die Zertheilungsart, welche §. 26, 27, 28 vorgetragen worden ist, bloß durch Hülfe eines verjüngten Maßstabes geschehen kann: so wird man leicht begreifen, daß auf diese Art nur der Riß eines Stükk Feldes zertheilt werden kann. Es können auch hier die Fehler begangen werden welche, überhaupt Statt finden, so bald man eine Linie nach einem verjüngten Maßstabe abmißt. Diese Fehler können noch sehr beträchtlich vergrößert werden, wenn man auch die zur Berechnung des Flächeninhalts nöthigen Linien nach einem verjüngten Maßstabe abgemessen hat. Denn ist der Flächeninhalt einer zu zertheilenden Figur zu groß oder zu klein gefunden worden: so werden bloß hierdurch die letztern Theile, welche übrig bleiben, indem man ein Stükk nach dem andern abschneidet, zu klein oder zu groß, und die abgeschnittenen Theile zu groß oder zu klein, je nachdem der Inhalt der Figur zu groß oder zu klein ist. Der Fehler wird an dem letzten Theile desto größer, je mehr Theile man abgeschnitten hat.

Es lassen sich aber alle mögliche ebene Figuren, so wohl krummlinige als geradlinige zertheilen, ohne daß man, wie gezeigt worden ist, nöthig hat eine Linie nach einem verjüngten Maßstabe abzumessen. Dieses ist zwar ein Weg allen Fehlern, welche durch den verjüngten Maßstab entstehen können, auszuweichen: in einigen Fällen wohl ein bequemer, weil man die zu zertheilende Figur nicht auftragen darf; aber auch in einigen Fällen, der weitläuftigen Rechnung wegen, ein sehr mühsamer.

Ist der Inhalt einer zu zertheilenden Figur weder zu groß noch zu klein, oder ist wenigstens der Fehler für Nichts zu rechnen: so kann bey der Zertheilung, die vermittelst eines verjüngten Maßstabes verrichtet wird, weiter kein Fehler vorfallen, als, indem man die Höhen

und

und die Grundlinien der zu bestimmenden Dreyekke zu groß oder zu klein auf dem verjüngten Maßstabe nimmt. Dieser Fehler kann sich bey den folgenden Theilen sehr vergrößern. Man muß sich also hüten zu viele Theile nach einander abzuschneiden. Z. B. es wäre eine vierekkige Figur in sechs gleiche Theile zu theilen, so thut man wohl wenn man sie erstlich in zwey und jede Hälfte in drey gleiche Theile zertheilt.

Man muß überhaupt die Fehler, welche durch den verjüngten Maßstab entstehen, kennen und sie zu schätzen wissen. Ist der verjüngte Maßstab im Verhältnisse mit dem üblichen Feldmaße so groß, daß man biß auf einen oder zwey Zoll richtig messen kann; so kann höchstens ein Fehler von drey Zoll, indem man die Breite der Theile auf dem Felde bestimmt, vorfallen. Denn gesetzt die Zahl der Quadratzoll, welche durch ein Dreyekk abgeschnitten werden sollten, wäre richtig, die Grundlinie dieses Dreyekks aber um einen Zoll zu klein genommen: so wird der Quotient, indem man mit der Anzahl der Zoll, welche für die Länge der Grundlinie gefunden sind, in jene Zahl der Quadratzoll dividiert, die Höhe desselben um einen Zoll zn groß angeben. Gesetzt man nähme diese Höhe auf dem verjüngten Maßstabe noch um ein Zoll zu groß, so wird doch, wenn man die Seite dieses Dreyekks auf dem Felde bestimmt, der Fehler ungefähr nur drey Zoll betragen. Diese Fehler können noch sehr verkleinert werden, wenn man eine Figur etliche Mahl zertheilt, und aus den verschiedenen Breiten eines jeden Theils ein Mittel nimmt. Solche Fehler sind einem jeden Feldmesser sehr wohl zu verzeihen. Kann aber durch den verjüngten Maßstab an jeder geraden Linie ein Fehler von drey biß vier Zoll entstehen, so muß man wissen, daß, wenn man die Theile auf dem Felde bestimmt, jede Linie, welche auf das Feld von der zertheilten Figur abgetragen wird, um sechs bis acht Zoll zu groß oder zu klein angegeben werden kann. Dies sind allerdings Fehler von Wichtigkeit. Denn es kann einem Feldbesitzer nicht einerley seyn, ob sein Stück um sechs oder acht Zoll breiter oder schmäler ist.

Aufgabe.

§. 29. Die Theilungslinien einer Figur so zu ändern, daß sie mit einer Seite parallel sind.

Auflösung. Es sey ABFE, Fig. 46 Tab. VI, die gegebene Figur, und CD die Theilungslinie, welche mit AB parallel seyn soll. Man ziehe Cb und gD mit AB parallel, und verändere das Dreyeck CDb in das Trapez Ccdb, d. i. man mache nach §. 21 das Trapez Ccdb = △CDb.

Zusatz. Wenn die Theilungslinie GH auch mit AB parallel seyn soll, so ziehe man ebenfalls die Linien KH und Gh mit AB parallel. Da aber hier zwischen G und K der Winkel M ist, so bringe man GH erst in Mn, indem aus G die Linie Gn mit MH parallel gezogen wird. Denn daher ist △GMn = △GHn. Hierauf ziehe man mn und Mp der Linie AB parallel, und mache das Trapez MqNp = △Mnp.

Drittes Kapitel.

Von Zertheilung der Felder.

Erklärung.

§. 30. Ein Stükk Feld geometrisch zertheilen heißt, seine horizontale Ebene durch gerade Linien in gewisse Stükke trennen.

Zusatz. In so fern die horizontale Fläche eines Stükk Feldes für eine Ebene angenommen werden kann, ist es mit der Zertheilung der Felder wie mit der Zertheilung der ebenen Figuren. Denn so wohl in diesem als in jenem Falle, sind die Theile wieder Eben, die durch ihre Grenzen, d. i. durch gerade Linien bestimmt werden. Man hat also, wenn man ein Stükk Feld zertheilen will, bloß die Punkte zu bestimmen, welche die Grenzen der Theile bestimmen.

Erklärung.

§. 31. Die Zertheilung eines Stükk Feldes geschieht entweder dem Inhalte nach, oder der Breite nach. Jenes heißt, ein Stükk Feld seinem Inhalte nach, und dieses seiner Breite nach zertheilen.

Zusatz Wenn man ein Stükk Feld seinem Inhalte nach zertheilen soll, so muß man also die Größe seiner horizontalen Ebene wissen. Man muß also das Stükk Feld aufgenommen und seinen Inhalt berechnet haben. Hingegen, soll ein Stükk Feld seiner Breite nach zertheilt werden, so hat man nicht nöthig es erst aufzunehmen, es sey denn, daß der Flächeninhalt desselben bestimmt

wer=

werden sollte; sondern man zertheilt nur die geraden Linien, welche von einem Winkel zum andern quer über die horizontale Ebene des Feldes gezogen werden, entweder in gleiche oder ungleiche, d. i. in solche Theile, die gewisse Verhältnisse gegen einander haben.

Aufgabe.

§. 32. Ein Stükk Feld dem Inhalte nach so wohl in gleiche, als auch in solche Theile zu zertheilen, die bestimmte Verhältnisse gegen einander haben.

Auflösung. Man nehme das Stükk Feld auf, bringe die Figur desselben auf ein Blatt Papier, und verfahre wie im vorigen Kapitel. Wenn die Entfernungen der Theilungslinien Ab, Ac, Ad, Fig. 47 Tab. VI, ferner Cg, Ch, Cm, ferner Fn, Fo, Fp, ferner Dq, Dt, Dy bestimmt sind, so schreibe man die gefundene Zahlen dabey, und messe auf dem Felde von A nach C, von C nach E, von F nach D, und von D nach B. Auf diese Art kann man die Punkte b, c, d, g, h, m, n, o, p, q, t, y abstekken, und die Theile bestimmen.

Anmerkung. Sind die Punkte A, C, E, F, B nicht bestimmt, d. h. soll eine zertheilte Figur irgend wo abgestekkt werden, so geschieht dieses vermittelst eines Winkelmessers. Man sehe hierüber Herrn Tobias Meyers praktische Feldmeßkunst II Theil S. 484, §. 242.

Zusatz. Soll ein Stükk Feld in dessen Mitte sich ein Teich befindet, wie ABCDEF, Fig. 50 Tab. VIII, zeigt, so zertheilt werden, daß alle Theile an den Umfang des Teiches stoßen: so nehme man es auf, berechne nach §. 10 Zusatz 9 den Inhalt desselben, und den eines jeden Stükks ABad, BafC, u. s w. in welche die ganze Figur bey Aufnehmung zerlegt worden ist, um zu erfahren, was für ein Stükk zu einem solchen Theile ein solches Stükk z. B. ABad giebt. Ist irgend eins von diesen Stükken so beschaffen, daß es etliche Theile giebt, wie z. B. BafC und af noch merkliche Krümmung hat, so zerlege man ein solches Stükk in mehrere, und suche auch den Inhalt eines jeden. Hierauf schneide man, wie im vorigen Kapitel gezeigt worden ist, den Ueberrest ab, wenn es größer, und thue hinzu, wenn es kleiner ist, als ein verlangter Theil der Figur. Sobald die Theilungspunkte bestimmt sind, können sie, wie im gegenwärtigen Paragraph gezeigt worden ist, auf dem Felde abgestekkt werden.

Aufgabe.

§. 33. Ein Stükk Feld seiner Breite nach zu zertheilen, so, daß die Stükke A, B, C, D, E sich ihrer Breite nach verhalten, wie die Zahlen p, q, t, v, y.

Auflösung. Man messe die Breiten AB, FC, ED, Fig. 48 Tab. VIII. und theile eine jede so ein, daß sich verhält

$$(p+q+t+v+y) : p = AB : Aa$$
$$(p+q+t+v+y) : q = AB : ab$$
$$(p+q+t+v+y) : t = AB : bc$$
$$(p+q+t+v+y) : v = AB : cd$$
$$(p+q+t+v+y) : y = AB : dB$$

ferner

$$(p+q+t+v+y) : p = FC : Fe$$
$$(p+q+t+v+y) : q = FC : ef$$
$$(p+q+t+v+y) : t = FC : fg$$
$$(p+q+t+v+y) : v = FC : gh$$
$$(p+q+t+v+y) : y = FC : hC$$

ferner

ferner

$(p+q+t+v+y) : p = ED : Ek$
$(p+q+t+v+y) : q = ED : Km$
$(p+q+t+v+y) : t = ED : mn$
$(p+q+t+v+y) : v = ED : ni$
$(p+q+t+v+y) : y = ED : iD$

Denn wenn sich verhält

$(p+q+t+v+y) : p = AB : Aa$
$(p+q+t+v+y) : q = AB : ab$
$(p+q+t+v+y) : t = AB : bc$
$(p+q+t+v+y) : v = AB : cd$
$(p+q+t+v+y) : y = AB : dB$

so verhält sich auch

$Aa : ab = p : q$
$Aa : bc = p : t$
$Aa : cd = p : v$
$Aa : dB = p : y$ und
$ab : bc = q : t$
$bc : cd = t : v$
$cd : dB = v : y$

Eben so ist es auch mit den Linien FC und ED.

Wenn die Theile Aa, ab, bc, cd, dB bestimmt sind, so addiere man, um die Punkte a, b, c, d auf dem Felde bequem abstekken zu können, die Stükke Aa, ab, ferner hierzu bc, zu dieser Summe cd, und zur Probe auch noch dB hinzu. Hierauf messe man auf dem Felde von A nach B und stekke die Linien Aa, Ab, Ac, Ad ab. Eben so verfahre man mit FC und ED.

Exempel. Es sey $AB = 456$ Fuß, $p = 3$, $q = 5$, $t = 4$, $v = 2$, und $= y = 7$. Also $p+q+t+v+y = 21$. Folglich $(p+q+t+v+y) : p = AB : Aa$
$21 : 3 = 456 : Aa$

oder

oder um keine Brüche zu erhalten

$$\frac{21 : 3 = 456000'''' : Aa}{7 : 1 = 456000'''' : Aa}$$

$$7) \quad 65143'''' = Aa$$

ferner

$$21 : 5 = 456000'''' : ab$$

$$21) \; \frac{2280000 \quad (5}{108571'''' = ab}$$

ferner

$$21 : 4 = 456000'''' : bc$$

$$1824000 \quad (4$$

$$21) \quad 86857'''' = bc$$

ferner

$$21 : 2 = 456000'''' : cd$$

$$21) \; \frac{912000 \quad (2}{43428'''' = cd}$$

ferner

$$\frac{21 : 7 : 456000'''' : dB}{3 : 1 = 456000'''' : dB}$$

$$3) \quad 152000'''' = dB$$

Also ist $Aa = 65143''''$
$ab = 108571''''$

$Aa + ab = Ab = 173714''''$
$bc = 86857''''$

$Ab + bc = Ac = 260571''''$
$cd = 43428''''$

$Ac + cd = Ad = 303999''''$
$dB = 152000''''$

$Ad + dB = AB = 455999'''' = 455$ Fuß — 1 Punkt.

Es sey $FC = 406$ Fuß. Also
$21 : 3 = 406000'''' : Fe$

$7 : 1 = 406000'''' : Fe$
$7)\quad 58000'''' = Fe$

ferner
$21 : 5 = 406000'''' : ef$

$2030000 \quad (5$
$21)\quad 96667'''' = ef$

Weil $t = 4 = \frac{1}{2}(p + q)$ so ist auch $fg = \frac{1}{2}(Fe + ef)$. Also
$Fe = 58000''''$
$ef = 96667''''$

$Fe + ef = 154667''''$

$\frac{1}{2}(Fe + ef) = 77333'''' = fg$

Weil $v = \frac{1}{2}t$, so ist auch $gh = \frac{1}{2}\,fg$.

Weil

Also $fg = 77333''''$

$\frac{1}{2}fg = 38666'''' = gh.$

Weil $y = t + p$, so ist auch $hC = Fe + fg$.

Also $Fe = 58000''''$

$fg = 77333''''$

$Fe + fg = 135333'''' = hC.$

Folglich $Fe = 58000''''$

$ef = 96667''''$

$Fe + ef = Ff = 154667''''$

$fg = 77333''''$

$Ff + fg = Fg = 232000''''$

$gh = 38666''''$

$Fg + gh = Fh = 270666''''$

$hC = 135333''''$

$Fh + hC = FC = 405999'''' = 406$ Fuß — 1 Punkt.

Es sey $ED = 258$ Fuß. Also

$21 : 3 = 258000'''' : EK$

$7 : 1 = 258000'''' : EK$

$7)\ 36857'''' = EK$

ferner

$21 : 5 = 258000'''' : Km$

$1290000''''\ (5$

$21)\ 61429'''' = Km$

$$EK = 36857''''$$
$$Km = 61429''''$$
$$\overline{EK + Km = 98286''''}$$
$$\overline{\tfrac{1}{2}(EK + Km) = 49143'''' = mn}$$
$$\tfrac{1}{2}mn = 24571'''' = ni$$

$$mn = 49143''''$$
$$EK = 36857''''$$
$$\overline{EK + mn = 86000'''' = iD.}$$

Folglich $EK = 36857''''$

$$Km = 61429''''$$
$$\overline{EK + Km = Em = 98286''''}$$
$$mn = 49143''''$$
$$\overline{Em + mn = En = 147429''''}$$
$$ni = 24571''''$$
$$\overline{En + ni = Ei = 172000''''}$$
$$iD = 86000''''$$
$$\overline{Ei + iD = ED = 258000''''.}$$

Anmerkung 1. Am öftersten sind p, q, t, v, y Brüche, die entweder gleiche, oder verschiedene Nenner haben. Ist dieses so müssen sie unter einerley Nenner gebracht werden. Es sey z. B. $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $t = \frac{3}{4}$, $v = \frac{5}{6}$. $y = \frac{2}{3}$. Also

$$p = \tfrac{1}{2} = \tfrac{6}{12}$$
$$q = \tfrac{1}{2} = \tfrac{6}{12}$$
$$t = \tfrac{3}{4} = \tfrac{9}{12}$$
$$v = \tfrac{5}{6} = \tfrac{10}{12}$$
$$y = \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{12}$$
$$\overline{p + q + t + v + y = \tfrac{39}{12}.}$$ Folglich

(p +

$$(p+q+t+v+y) : p = AB : Aa$$
$$\frac{39}{12} : \frac{6}{12} = AB : Aa$$
$$39 : 6 = AB : Aa.$$

Es ist also nun eben so, als wenn p, q, t, v, y ganze Zahlen wären.

Anmerkung 2. Man kann auch setzen

$$\frac{39}{12} : \frac{1}{12} = AB : x$$

$39 : 1 = AB : x$, und man erhält

$$Aa = x \times 6 = ab$$
$$bc = x \times 9$$
$$cd = x \times 10$$
$$dB = x \times 8$$

Anmerkung. 3. Ist $p = q = t = v = y$ so darf man nur die Zahl der Fuß einer jeden von den Linien AB, FC, ED durch die Zahl der Stükke, in welche das Feld zertheilt werden soll, dividieren.

Anmerkung 4. Die geraden Linien, auf welchen ein Stükk Feld seiner Breite nach zertheilt wird, heißen Durchschläge. Ihre Länge, d. h. die Breite des Stükk Feldes, ist mehrentheils durch Steine oder andere Merkmahle bestimmt, die nur etwa verlohren gegangen seyn können Ist dieses, so muß sie, ehe die Zertheilung vorgenommen werden kann, bestimmt werden.

Anmerkung 5. Ein Fluhr, d. i. ein Bezirk von Wiesen, Aekkern, Gärten, u. d. g. mehr, welche zu einem Dorfe oder zu einer Stadt gehören, wird gemeiniglich in gewisse Abtheilungen getheilt, die Verrainungen oder Vereinigungen genennt werden. Verrainungen werden sie deßwegen genennt, weil ehemals eine solche Abtheilung eines Fluhrs von einem Raine umgrenzt war, wie man auch noch an verschiedenen Orten findet. Vereinigungen (Tractus Strekken Landes) heißen sie, weil da mehrere Stükke zusammen in einer Verbindung sind. Eine solche Abtheilung eines Fluhrs, wird entweder bloß dem Inhalts halte nach, oder der Breite nach, oder theils dem Inhalte und theils der Breite nach zertheilt.

Die Zertheilung der Felder ihrer Breite nach, eine Zertheilungsart, die vorzüglich in Thüringen gebräuchlich ist, hat ohne Zweifel ihren Anfang genommen, ehe man in Deutschland von mathematischen Kenntnissen etwas wußte. Denn die Geschichte lehrt, daß damahls, als man in Deutschland anfing die Erde urbar zu machen, noch keine Geometer da gewesen sind, welche das um ein Dorf oder Stadt liegende Land den Einwohnern hätten zutheilen können. Und es war damahls auch nicht nöthig — Der Anbau des Landes entstand nach und nach; es nahm ein jeder, es sey mit oder ohne Erlaubniß seiner Vorgesetzten, so viel als er bebauen konnte, und machte dieß zu seinem Eigenthume. Die bebaueten Felder hätten nun freylich auf eine bestimmte Art zertheilt werden sollen. Aber auch da konnte man es nicht so genau nehmen, weil man noch keine mathematischen Kenntnisse hatte; und vermuthlich war man auch so eigennützig nicht, daß man es auf 10 oder 20 Quadratruthen hätte sollen ankommen lassen. Denn der Feldbau war noch nicht in der jetzigen Vollkommenheit, und der Handel des Getreides noch nicht so hoch gestiegen. Natürlicher Weise mußte man bey allen diesen Umständen auf eine so leicht, bequeme und sehr in die Sinne fallende Zertheilungsart kommen, bey welcher man sich folgender Nahmen bediente, als: Strichel oder Streil, Sottel, Dreygerthe, Gelenge, durch welche man ohne Zweifel eine gewisse Akker-Größe ausdrukkte.

Eine solche Abtheilung einer Verrainung, die der Breite nach zertheilt wird, auch wohl die Verrainung selbst, wenn man sie durchaus der Breite nach zertheilt, heißt heut zu Tage eine Lage; der schmälste Theil einer Lage, wird ein Strichel genennt. Auf eine Sottel rechnet zwey, auf eine Dreygerthe drey und auf eine Gelenge vier Strichel. Bißweilen findet man auch ganze Lagen, die bloß in Stricheln, Sotteln, Dreygerthen oder Gelengen getheilt sind.

Wo die Eintheilung der Breite nach üblich ist, wird eine Sottel zwey Mahl so breit, als ein Strichel, eine Dreygerthe drey, und eine Gelenge vier Mahl so breit gemacht

gemacht, Wenn z. B. eine Lage 11 Ruthen breit ist, und aus drey Sotteln und fünf Stricheln besteht, so macht man eine Sottel 2 und eine Strichel 1 Ruthe breit.

Theil man z. B. einen Strichel oder eine Sottel wieder Breite nach ein, so wird ein solcher Theil ein halber Strichel, wenn er in zwey, und eine Drittel-Sottel genennt, wenn die Sottel in drey Theile zertheilt ist.

Außer diesen findet man in den Akker-Verzeichnissen auch noch andere Nahmen, als: Gebreite, Gehren. Eine Gebreite ist meisten Theils eine Abtheilung einer Vereinigung, die sich nicht, besonders, wenn ihre Größe durch die übrigen Abtheiluugen nicht bestimmt ist, z. B. eine Gebreite von 10 Stricheln, oder 8 Sotteln, mit den übrigen breitet; und ein Gehren ist ein Flekk, der eine ganz irreguläre Figur hat, besonders an einem, oder an beyden Enden spitzig ist, oder zum wenigsten spitzig zuläuft.

Als man anfing die Abgaben nach Verhältniß der Akker-Größe auszutheilen, so war ebenfals noch an keine geometrische Ausmessung der Felder gedacht; sondern man schätzte die Größe eines Akkers nach der Aussaat. Einen Flekk, auf welchen ein Scheffel Korn gesät wurde, nahm man für einen Akker an. Ein Garten, eine Wiese, ein Flekk Holz wurde ebenfalls für einen Akker angenommen, wenn der Garten oder die Wiese ungefähr so groß war, als ein Flekk Ahrtland, auf welchen man einen Scheffel Korn säte. Woher auch die Nahmen Scheffelholz, Scheffelwiese kommen mögen. Bißweilen nahm man eine ganze Lage, schätzte sie nach der Aussaat, und theilte den gefundenen Akkergehalt nach den obigen Benennungen der Stükke, wenn sie in der Länge nicht allzu merklich absetzten, ein; z. B. wenn eine Lage aus zwey Dreygerthen und vier Sotteln bestand, und ihre Größe auf vierzehen Akker gerechnet wurde, so kam auf eine Sottel zwey und auf eine Dreygerthe drey Akker. Daher mag es kommen, daß man in einem Fluhre Akker von so verschiedener Größe findet, daß neben einem Akker von zwey hundert und mehren Quadratruthen, ein anderer ist, der kaum hundert und mehrere Quadratruthen enthält *). Wenn die Akker-Größe der Benennung der Stükke proportionirt ist, so ist es gleich viel, ob man die Breiten der ganzen Lage nach Verhältniß der Akker-Größen, oder nach Verhältniß der Benennung eintheilt. Auch wenn die Grenzen einer Lage nicht bestimmt sind, so kann man sie erfahren, so bald die Benennungen mit der Akker-Größe verglichen werden. Denn es sey

A =	1 Strichel	=	$\frac{7}{8}$	Akker
B =	$2\frac{1}{2}$ Sottel	=	5	Akker
C =	$\frac{1}{2}$ Strichel	=	$\frac{1}{2}$	Akker
D =	$2\frac{1}{2}$ Dreygerthe	=	$7\frac{1}{2}$	Akker
E =	3 Sotteln	=	6	Akker
F =	1 Dreygerthe	=	3	Akker
G =	$1\frac{1}{2}$ Strichel	=	$1\frac{1}{2}$	Akker
H =	3 Stricheln	=	3	Akker
I =	2 Sotteln	=	$3\frac{7}{8}$	Akker.

Hieraus ist zu ersehen, daß die Akker-Größe nur von B biß H mit der Benennung in Proportion steht. Mithin kann

*) Herr Zollmann sagt in seiner Geodäsie S. 52, §. 215, daß die Akker-Größe in einer guten Lage immer größer sey als in einer andern, die einen schlechtern Boden habe. Dieses soll nach seiner Meinung daher kommen, weil auf ein Stükk Feld von guten Boden weniger gesät würde, als auf ein anderes, das eben die Größe, aber einen schlechtern Boden habe. Herr Christiani behauptet in seiner Lehre von der geometrischen und ökonomischen Vertheilung der Felder S. 49 das Gegentheil, nähmlich auf ein Stükk Feld von guten Boden müßte der Same dichter gestreut werden, als auf das von einem geringern. Man muß aber wissen, daß ein Samenkorn in einem guten Boden zwey drey und mehre Stengel treibt, welches bey einem schlechtern der Fall nicht ist. Gemeiniglich sät man daher auf einen Boden den Samen so dichte, als auf einen andern. Daß die Akker-Größe eines Stükk Feldes, das einen guten Boden hat, größer ist als eines andern von einem geringern Boden, mag mehr eine richtig verhältnißmäßige Austheilung der Abgaben zum Grunde gehabt haben. Denn wurde beschlossen, daß ein Akker eine gewisse Abgabe geben sollte z. B. einen Groschen, so konnte man einem Stükk Felde, daß einen guten Boden hatte, immer eine größere Akker-Größe geben, als dem dessen Erdreich geringer war.

kann A und I nicht mit zu der Lage gehören. Dieses ist aber freylich nur in so fern ein Hülfsmittel, als die Stükke in Ansehung ihrer Länge nicht allzu merklich absetzen. Ist dieses so können mehre Stükke zu einer Lage gehören, die sich aber, wenn keine andere Nachrichten vorhanden sind, nicht bestimmen lassen, und man muß sich begnügen, nur diese zu einer Lage zu rechnen, deren Akker-Größe mit der Benennung proportional ist.

Es ist wahr, daß diese Art, die Felder ihrer Breite nach zu zertheilen, nicht an allen Orten Deutschlands gebräuchlich ist *). Wo man sie aber eingeführt hat, ist es billig, daß man sie auch behält. Sogar der Landmann weiß sich sehr gut darein zu finden, und kann selbst ohne irgend einen Kostenaufwand die Grenzen seiner Felder bestimmen. Es würde auch in der That viel Schwierigkeiten kosten, wenn man sie da, wo sie Statt findet, abbringen, und die Felder nach der von ungefähr angenommenen Akker-Größe, oder nach irgend einer andern zertheilen wollte. Denn die Besitzer der Abtheilungen einer Lage haben ihre Stükke nicht nach Ruthengehalt gekauft, sondern so, daß sie sich mit einander breiten; und hierdurch sind die Quadratruthen, welche jeder gekauft hat, bestimmt. Z. B. A und B hätten ein jeder in einer Lage einen Akker gekauft, so, daß der des B eben so breit seyn müßte als der des A; nach einer geometrischen Ausmessung fände man, daß der erste 150 und der zweyte 200 Quadratruthen enthielte. Mithin hat B einen Akker von 150 und A einen von 200 Quadratruthen gekauft, obgleich ihr Kaufkontrakt nicht darauf gerichtet war. Wollte man die Breite der Stükke verändern, so würde man auch den Flächeninhalt verändern. Folglich auch das Eigenthum der Besitzer, und es würde wieder alles Eigenthumsrecht seyn, wenn man den Akker des B eben so groß machen wollte als den des A. Gesetzt auch, man wollte die Abtheilungen einer Lage nach geometrischen Gründen so bestimmen, daß einer jeden ihr bestimmter Ruthengehalt bliebe; was würde man aber Gewinnen? gewiß weiter nichts, als eine mühsamere und kostbarere Zertheilungsart.

*) Herrn Zollmanns Geodäsie S. 69, §. 260.

Es ist wohl außer allen Zweifel, sagt Zollmann *), daß die schöne, simble, und zugleich bestimmte Eintheilung der Felder, nach welcher bey Streitigkeiten leicht zu entscheiden ist, manchen sonderbar und unbegreiflich vorgekommen seyn muß. Dieß kann vielleicht Veranlassung gegeben haben, daß die alte Benennung und auch wohl gar die einfache Zertheilung der Felder an verschiedenen Orten abgekommen ist. Ist bloß die Benennung abgekommen, so muß man sich mit der Akker-Größe behelfen, wenn man eine Lage zertheilen will.

Daß die Abgaben eines Staats nach Verhältniß der alten willkührlich angenommenen Akker-Größe entrichtet werden mußten, war nun freylich keine verhältnißmäßige Vertheilung. Es mußte mancher eben so viel zu den öffentlichen Bedürfnissen beytragen, der wenig Güter als ein anderer, der mehrere hatte: auf einen Akker mußte man eine gewisse Abgabe geben er mochte größer, kleiner, besser oder geringer seyn, als ein anderer. Eine richtig verhältnißmäßige Vertheilungen der Abgaben hat man an verschiedenen Orten Deutschlands dadurch herzustellen gesucht, daß man die Felder geometrisch hat ausmessen lassen, und die Abgaben nach Verhältniß des Ruthengehalts mit Rücksicht auf die Güte des Erdreichs und auf die Lage des Orts vertheilt hat.

Einen Flekk Akker so theilen, daß die Grenze von beyden Theilen quer über denselben gezogen wird, wie ab, Fig. 58 Tab VIII, heißt den Flekk Akker strümpfen; wird die Theilungslinie der Länge nach gezogen, wie fg, so nennt man das Theilen spalten. Im ersten Falle wird jeder Theil eine Strümpfung, der Ort, wo die Theilungslinie ist, ein Strumpfgewende genennt; und im andern heißt jeder Theil das Gespalte. Stoßen etliche Stükke irgend wo in gerader Linie ab, wie bey hk, so heißt der Ort ein Hauptgewende; und ein Angewende nennt man diesen, wo ein Akker quer vor dem andern ist, wie mqpn.

*) Zollmanns Geodäsie S. 53, §. 218.

Vier-

Viertes Kapitel.

Von Bestimmung des Flächeninhalts gewisser Abtheilungen eines Stükk Feldes.

Erklärung.

§. 34. Den Flächeninhalt der Abtheilungen eines Stükk Feldes bestimmen, heißt aus dem Flächeninhalte eines Stükk Feldes, das in gewisse Theile zertheilt ist, finden, wie viel ein jeder Theil davon erhält.

Zusatz Die Theile eines Stükk Feldes, daß seinem Inhalte nach zertheilt worden ist, sind entweder einander gleich oder nicht. In beyden Fällen hat der Inhalt eines jeden zu dem der ganzen Figur ein bestimmtes Verhältniß. Ganz anders aber ist es mit den Theilen eines Stükk Feldes, daß seiner Breite nach zertheilt worden ist. Denn hier steht bloß die Breite eines jeden mit der Breite des ganzen Stükk Feldes in einem bestimmten Verhältnisse. Dort, wenn ein Stükk Feld seinem Inhalte nach zertheilt ist, nimmt man auf die Größe der horizontalen Fläche, hier aber nur auf ihre Breite Rükksicht. Es finden also hier in diesem Kapitel zwey verschiedene Fälle Statt.

Aufgabe.

§. 35. Den Flächeninhalt der Theile A, B, C, D, E, des Stükk Feldes H, die sich der Quantität ihrer Fläche nach verhalten, wie die Zahlen a, b, c, d, e, zu finden.

Auflösung. Die ganze Auflösung über diesen Fall ist schon in §. 28 enthalten.

Anmerkung. Im ersten Kapitel ist gezeigt worden, daß der Inhalt einer jeden ebenen Figur gefunden werden kann, ohne sie aufzutragen. Dieses geschieht freylich auf eine etwas mühsame Art, zumahl, wenn die Fläche, welche man ausmessen will, in krumme Linien eingeschlossen ist. Ist aber diese Schwierigkeit überstanden, so zeigt gegenwärtiger Paragraph offenbar einen sehr kurzen und bequemen Weg, wie man zum Inhalte der Abtheilungen eines Stükk Feldes gelangen kann. Und man wird leicht verstehen, wie genau derselbe gefunden wird, besonders wenn man den des ganzen Stükk Feldes bloß aus den auf dem Felde gemessenen Linien und Winkeln berechnet hat. Es ist wahr, daß, wenn man auf diese Art, wie im gegenwärtigen Paragraph gezeigt worden ist, aus dem Inhalte einer ebenen Figur den einer jeden Abtheilung sucht, der Fehler, welcher vorfallen kann, wenn man den Flächeninhalt vermittelst eines Risses berechnet, nach eben diesen Verhältnissen geringer wird, nach welchen man den Inhalt der Abtheilungen der Figur bestimmt; aber man wird leicht einsehen, daß er an einer Abtheilung noch ziemlich beträchtlich seyn kann, besonders wenn das Verhältniß derselben zur ganzen Figur nicht allzu groß ist. Es möchte also leicht die Frage seyn, in wie fern es besser sey, den Inhalt einer Abtheilung vermittelst eines Risses durch Dreyekke besonders auszurechnen, oder ihn nach gegenwärtigem Paragraph zu bestimmen.

Man setze es sey der wahre Flächeninhalt eines Stükk Feldes $= M$, und der einer Abtheilung $= m$; man habe aber anstatt M, indem die Fläche vermittelst eines Risses ausgemessen worden ist, N, und auf eben diese Art anstatt m den $= n$ gefunden. Es sey $N = \frac{1}{2}(a \pm p)(b \mp q) = \frac{1}{2}(ab \pm aq \pm bp \mp pq)$, und $n = \frac{1}{2}(g \pm p)(h \pm q) = \frac{1}{2}(gh \pm gq \pm hp \pm qp)$, d. i. die Fläche des Stükk Feldes sey ein Dreyekk, das a zur Grundlinie und b zur Höhe habe, und die Abtheilung deſſelben habe g zur Grundlinie und h zur Höhe. Man laſſe pq als eine unbeträchtliche Größe aus der Rechnung weg und setze $N = \frac{1}{2}ab \pm \frac{1}{2}(aq \mp bp)$, $n = \frac{1}{2}gh \pm \frac{1}{2}(gq \mp hp)$. Demnach ist $M = \frac{1}{2}ab$, $m = \frac{1}{2}gh$, $\frac{1}{2}(aq \pm bp)$ der Unterschied zwischen M und N, und $\frac{1}{2}(gq \pm hp)$ der zwischen m und n. Man setze es verhalte sich $M : m = f : d$. Also

$$\frac{1}{2}ab : \frac{1}{2}gh = f : d$$
$$ab : gh = f : d \text{ und}$$
$$\frac{abd}{f} = gh$$
$$\frac{abd}{fh} = g.$$

Wird aus N der Flächeninhalt der Abtheil. nach gegenwärtiger Aufgabe berechnet, so erhält man, wenn er = P gesetzt wird, $P = \frac{abd}{2f} \pm \frac{(aq \pm bp)\,d}{2f}$. Nun ist der Voraussetzung nach $n = \frac{1}{2}gh \pm \frac{1}{2}(gq \pm hp) = \frac{abd}{2f} \pm \frac{1}{2}(gq \pm hp)$. Also $n - P = \frac{1}{2}(gq \pm hp) - \frac{(aq \pm bp)d}{2f}$.

Setzt man $h = b$, so ist $\frac{ad}{f} = g$. Also $n - P = (\frac{adq}{2f} \pm \frac{1}{2}hp) - (\frac{adq}{2f} \pm \frac{bdp}{2f})$. Da nun $f > d$, so ist auch $\frac{adq}{2f} \pm \frac{1}{2}hp$ größ. od. klein. $\frac{adq}{2f} \pm \frac{bdp}{2f}$. In diesem Falle ist n größer oder kleiner als P, und größer oder kleiner als m je nachdem die Zeichen + oder — sind.

Eben dieses gielt auch, wenn $a = g$ gesetzt wird. Denn ist $g = a$, so ist $h = \frac{bd}{f}$, $\frac{1}{2}hp = \frac{bdp}{2f}$, und $n - P =$

($\frac{1}{2}gq$

$(\frac{1}{2}gq \pm \frac{bdp}{2f}) - (\frac{adq}{2f} \pm \frac{bdp}{2f})$. Also n größer oder kleiner als P, und zugleich größer oder kleiner als m, je nachdem die Zeichen + oder − sind.

Ist $a = b$, und h größer oder kleiner als g, so ist schon aus der Anmerkung über das erste Kapitel zu ersehen, daß n größer oder kleiner ist als P, und größer oder kleiner als m. Es bleiben also nur noch folgende Fälle zu untersuchen übrig: 1) Wenn $a = b$ und $g = h$; 2) wenn $g = h$ und a größer oder kleiner ist als b; 3) wenn a, b, g, h ganz verschieden sind.

Im ersten Falle kann man a anstatt b, und g anstatt h setzen, und es ist $\frac{aad}{2f} \pm \frac{adq}{2f} \pm \frac{adp}{2f} = P$; $\frac{1}{2}gg \pm \frac{1}{2}gq \pm \frac{1}{2}gp = n$. Da nun der Voraussetzung nach $\frac{aad}{2f} = \frac{1}{2}gg$, $g = \sqrt{\frac{aad}{f}} = a\sqrt{\frac{d}{f}}$, und $\frac{1}{2}g = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{d}{f}}$: so ist $n = \frac{aad}{2f} \pm \frac{1}{2}aq\sqrt{\frac{d}{f}} \pm \frac{1}{2}ap\sqrt{\frac{d}{f}}$. Folglich n größer oder kleiner als P, und zugleich größer oder kleiner als m. Denn es ist hier $f > d$, und $\frac{d}{f}$ ein ächter Bruch. Also $\sqrt{\frac{d}{f}} > \frac{d}{f}$.

Wenn $g = h$, und a größer oder kleiner ist als b, so ist $\frac{abd}{f} = gg$, $g = \sqrt{\frac{abd}{f}}$, und $n = \frac{abd}{f} \pm \frac{1}{2}q\sqrt{\frac{abd}{f}} \pm \frac{1}{2}p\sqrt{\frac{abd}{f}}$. Es verhalte sich $a : b = f : d$, und sey demnach $a = \frac{bf}{d}$, $b = \frac{ad}{f}$; oder, welches hier einer-

sey

ley ist, es verhalte sich $a : b = d : f$, so, daß $\frac{abd}{f}$ immer $= gh$ ist, und sey daher $a = \frac{bd}{f}$, $b = \frac{af}{d}$. Diesen Bedingungen nach ist

$$p = \frac{abd}{2f} + \frac{aqd}{2f} + \frac{bpd}{2f}$$

$$= \frac{abd}{2f} + \frac{bf}{d} \times \frac{qd}{2f} + \frac{bpd}{2f}$$

$$= \frac{abd}{2f} + \tfrac{1}{2}bq + \frac{bpd}{2f}, \text{ oder}$$

$$= \frac{abd}{2f} + \frac{aqd}{2f} + \frac{pd}{2f} \times \frac{af}{d}$$

$$= \frac{abd}{2f} + \frac{aqd}{2f} + \tfrac{1}{2}ap, \text{ oder}$$

$$= \frac{abd}{2f} + \frac{qd}{2f} \times \frac{bd}{f} + \frac{bpd}{2f}$$

$$= \frac{abd}{2f} + \frac{bqd^2}{2f^2} + \frac{bdp}{2f}, \text{ oder}$$

$$= \frac{abd}{2f} + \frac{aqd}{2f} + \frac{dp}{2f} \times \frac{da}{f}$$

$$= \frac{abd}{2f} + \frac{aqd}{2f} + \frac{apd^2}{2f^2}.$$ Und $r \frac{abd}{f} =$ $b = a\frac{d}{f} = b\frac{d}{f} = a$. Also

$$n = \frac{abd}{2f} + \tfrac{1}{2}bq + \frac{bpd}{2f}$$

$$= \frac{abd}{2f} + \frac{aqd}{2f} + \tfrac{1}{2}ap$$

=

$$= \frac{abd}{2f} \pm \frac{adq}{2f} \pm \frac{bdp}{2f}$$

$$= \frac{abd}{2f} \pm \frac{qd}{2f} \times \frac{bd}{f} \pm \frac{bdp}{2f}$$

$$= \frac{abd}{2f} \pm \frac{bqd^2}{2f^2} \pm \frac{bdp}{2f}$$

$$= \frac{abd}{2f} \pm \frac{aqd}{2f} \pm \frac{bpd}{2f}$$

$$= \frac{abd}{2f} \pm \frac{aqd}{2f} \pm \frac{pd}{2f} \times \frac{da}{f}$$

$$= \frac{abd}{2f} \pm \frac{aqd}{2f} + \frac{apd^2}{2f^2}.$$

Hieraus folgt:
Wenn das Verhältniß $a : b$ kleiner ist, als das $f : d$, und $g = h$ ist: so kann der Flächeninhalt der Abtheilung eines Stükk Feldes größer oder kleiner gefunden werden, wenn man ihn durch Dreyekke besonders ausrechnet, als wenn man ihn nach gegenwärtigem Paragraph bestimmt. Dieses findet Statt biß das Verhältniß $a : b$ dem $f : d$ gleich wird. Hier können durch beyde Arten gleich große Fehler begangen werden.

Ist also das Vtrhältniß $a : b = f : d$, oder $a : b = d : f$, und g nicht $= h$: so kann aus dem Flächeninhalte des ganzen Stükk Feldes der einer jeden Abtheilung nach gegenwärtigem Paragraph richtiger bestimmt werden, als wenn man ihn durch Dreyekke besonders ausrechnet.

Dieses findet aber nur unter diesen hier gemachten Bedingungen Statt, wenn nähmlich M der Inhalt eines Dreyekks und m der eines andern ist. Was aber von einem Dreyekke gielt, gielt auch von mehreren. Wenn also die ganze Figur ein Viereck oder ein Sechsekk ist, und jede Abtheilung auch, wie es mehren Theils der Fall ist, so finden ebenfalls die gemachten Schlüsse Statt.

Wollte

Wollte man den Inhalt einer jeden Abtheilung vermittelst eines Risses besonders berechnen, und den des ganzen Stükk Feldes durch die Summe dieses gefundenen bestimmen: so würde er also ebenfalls leicht größer oder kleiner gefunden werden können, als wenn man ihn selbst berechnet. Folglich ist es nicht nur bequem, wenn man den Flächeninhalt eines ganzen Stükk Feldes berechnet, und den einer jeden Abtheilung daraus bestimmt; sondern letzterer kann auch unter diesen hier bestimmten Fällen richtiger erhalten werden.

Aufgabe.

§. 36. Den Flächeninhalt der Abtheilungen eines Stükk Feldts, daß bloß der Breite nach zertheilt worden ist, zu bestimmen.

Auflösung. Hier können folgende Fälle vorkommen. Es sind entweder alle Linien, auf welchen die Abtheilungen sich breiten, einander parallel, wie z. B. Fig. 31 Tab. IV, AB, CD, EF; oder es sind bloß zwey auf einander folgende parallel, wie z. B. Fig. 48 Tab. VIII, AB und FC; oder die mittelste zwischen zwey Parallelen ist mit keiner parallel, wie z. B Fig. 51 Tab. VII, AB und DF parallel sind, aber EC werden mit dieser noch mit jener; oder es ist keine der andern parallel, wie z. B. Fig. 52 Tab. VII.

I. Im ersten Falle berechne man den Flächeninhalt der Figur ABFE, der hier = M seyn soll, und zertheile ihn nach den Verhältnissen, nach welchen die Linien AB, CD, EF zertheilt worden sind. Die Theile Aa, ab, bc, cd, de, eB mögen solche Verhältnisse unter sich haben, wie die Zahlen m, n, p, q, t, y. Also darf man nur setzen

$$(m+n+p+q+t+y) : m = M : A$$
$$(m+n+p+q+t+y) : n = M : B$$
$$(m+n+p+q+t+y) : p = M : C$$
$$(m+n+p+q+t+y) : q = M : D$$
$$(m+n+p+q+t+y) : t = M : E$$
$$(m+n+p+q+t+y) : y = M : F.$$

Denn die Stükke A, B, C, D, E, F stehen der Quantität ihrer Fläche nach in eben den Verhältnissen, weil AB, CD, EF mit einander parallel seyn sollen, als ihre Breiten (§. 16 Zusatz 3). Und wenn diese solche Verhältnisse gegen einander haben, wie die Zahlen m, n, p, q, t, y, so muß also M nach den Verhältnissen der Zahlen m, n, p, q, t, y unter die Abtheilungen A, B, C, D, E, F vertheilt werden.

II. Im zweyte Falle sey also AB mit FC parallel. Hier läßt sich entweder mit FC zwischen FC und DE die Linie EL parallel ziehen, oder nicht, wie Fig. 49 Tab. VI.

A.

Ist dieses, so berechne man den Flächeninhalt des Trapezes ABCE, und verfahre damit nach I. Hierauf berechne man den Flächeninhalt von Edg, dehg, efih, fCDi, und addiere den des Dreyekks Edg zu dem, welcher nach I für AadE gefunden worden ist, u. s. w.

B.

Ist aber die Linie ED von FC, Fig. 48 Tab. VIII so entfernt, daß von EFCD durch eine Linie EL, welche FC parallel gezogen wird, ein Trapez EFCL abgeschnitten werden kann, so berechne man den Flächeninhalt der beyden Trapezen FABC und FCLE, und zertheile ihn nach

den

den Verhältnissen, nach welchen die Linien AB, FC, ED zertheilt worden sind. Es mögen die Linien AB, FC, ED nach solchen Verhältnissen zertheilt worden seyn, wie die Zahlen m, n, p, q, v gegen einander haben. Also

$$(m+n+p+q+v) : m = ABLE : AauE$$
$$(m+n+p+q+v) : n = ABLE : abvu$$
$$(m+n+p+q+v) : p = ABLE : bcxv$$
$$(m+n+p+q+v) : q = ABLE : cdyx$$
$$(m+n+p+q+v) : v = ABLE : dBLy.$$

Denn es muß hier wohl erwogen werden, daß die Theile Ep, pq, qs, st, tL der Linie EL nicht mit den Ek, km, mn, ni, iD der Linie ED, sondern diese mit Eu, uv, vx, xy, yL, welche man erhält, wenn die Linien ku, mv, nx, iy mit DL parallel gezogen werden, in Proportion stehen; und daß man durch gegenwärtige Proportionen nicht den Inhalt der Stükke AapE, abqp besq, cdts, dBLt, sondern den der Stükke AauE, abvu bcxv, cdyx, dBLy erhält (§. 16 Zusatz 3).

Nun sind aber die Linien pu, qv, sx, ty desto größer, je größer entweder der Winkel DEL oder der Unterschied der beyden Linien EL und FC ist.

Man ziehe aus D die Linie αD mit EL oder FC, parallel, und zertheile αD so, daß sich verhält $\alpha\beta$: Ek, $= \beta\gamma$: km $= \gamma\delta$: mn $= \delta\varepsilon$: ni $= \varepsilon$D : iD. Der Winkel EDα wird $=$ o, entweder wenn E in α, oder D in L fällt. Ist E in α, so trifft EL und ED auf αD, k auf β, m auf γ, n auf δ, i auf ε; und fällt D in L, so kommt k in u, m in v, n in x, i in y. In beyden Fällen E mag in α oder D in L treffen, wird pu $=$ qv $=$ sx $=$ ty $=$ o.

Man hat nur nöthig die Veränderung von D biß n L anzunehmen. Denn kommt D über L z. B. in R, so ziehe man aus R mit FC die Linie TR parallel; und man wird ebnfalls diese Betrachtungen nöthig haben.

Durch die Veränderung des Winkels LED werden die Linien pu, qv, sx, ty, nur entweder größer oder kleiner, je nachdem der Winkel groß oder klein ist; aber niemahls wird u auf Ep, v auf pq, x auf qs, y auf st treffen, wenn man nicht auch FC oder EL verändert.

Bleibt ED unverändert und nimmt FC ab, so daß FC $=$ EL wird, so wird pu $=$ qv $=$ sx $=$ ty $=$ o. Denn man verlängere ku in d′, mv in c′, nx in b′, iy in a′. Wenn nun FC $=$ EL ist, so fällt e in d′, f in c′, g in b′, h in a′, und p in u, q in v, s in x, t in y. Ist FC $<$ EL. so trifft u auf Ep, v auf pq, x auf qs, y auf st. Es ist also überhaupt

$$\begin{aligned}
AapE &= AauE \mp \Delta peu \\
abqp &= abvu \pm \Delta peu \mp \Delta qfv \\
bcsq &= bcxv \pm \Delta qfv \mp \Delta sgx \\
cdts &= cdyx \pm \Delta sgx \mp \Delta thy \\
dBLt &= dBLy \pm \Delta thy.
\end{aligned}$$

Es sey FC $>$ EL. Ist pq $>$ uv, qs $>$ vx, und st $>$ xy, so ist pu $=$ pq $-$ uq $>$ qv $=$ uv $-$ uq, qv $>$ sx, sx $>$ ty, und

$$\begin{aligned}
AapE &= AauE - \Delta peu \\
abqp &= abvu + \Delta peu - \Delta qfv \\
bcsq &= bcxv + \Delta qfv - \Delta sgx \\
cdts &= cdyx + \Delta sgx - \Delta thy \\
dBLt &= dBLy + \Delta thy.
\end{aligned}$$

Ist aber pq $<$ uv, qs $<$ vx, und st $<$ xy, so ist pu $<$ qv, qv $<$ sx, sx $<$ ty, und

$$\begin{aligned}
AapE &= AauE - \Delta peu \\
abqp &= abvu + \Delta peu - \Delta qfv
\end{aligned}$$

bcsq $=$

$bcsq = bcxv + \Delta qfv - \Delta sgx$
$cdts = cdyx + \Delta sgx - \Delta thy$
$dBLt = dBLy + \Delta thy.$

Es sey $FC < EL$. Ist $pq > uv$, $qs > vx$, und $st > xy$, so ist $pu > qv$, $qv > sx$, $sx > ty$ und

$AapE = AauE + \Delta peu$
$abqp = abvu - \Delta peu + \Delta qfv$
$bcsq = bcxv - \Delta qfv + \Delta sgx$
$cdts = cdyx - \Delta sgx + \Delta thy$
$dBLt = dBLy - \Delta thy.$

Ist aber $pq < uv$, $qs < vx$, und $st < xy$, so ist auch $pu < qv$, $qv < sx$, $sx < ty$, und

$AapE = AauE + \Delta peu$
$abqp = abvu - \Delta peu + \Delta qfv$
$bcsq = bcxv - \Delta qfv + \Delta sgx$
$cdts = cdyx - \Delta sgx + \Delta thy$
$dBLt = dBLy - \Delta thy.$

Also wird im ersten Falle der Unterschied der beyden Dreyekke peu und qfv addiert, wenn $\Delta peu > \Delta qfv$, oder $pu > qv$, und subtrahiert, wenn $pu < qv$, oder $\Delta peu < \Delta qfv$. Im andern Falle aber ist es gerade umgekehrt. Folglich ist überhaupt

$AapE = AauE \mp \Delta peu$
$abqp = abvu \pm (\Delta peu - \Delta qfv)$
$bcsq = bcxv \pm (\Delta qfv - \Delta sgx)$
$cdts = cdyx \pm (\Delta sgx - \Delta thy)$
$dBLt = dBLy \pm \Delta thy.$

Die obersten Zeichen finden Statt, wenn $FC > EL$, und die untersten, wenn $FC < EL$.

Weil ku, mv, nx, iy mit CD parallel sind, so verhält sich

$$\begin{aligned} Ek &: Eu = ED : EL \\ mn &: ni = vx : xy \\ ni &: iD = xy : yL. \end{aligned}$$

Mithin können die Linien Eu, uv, vx, xy, yL durch folgende Proportionen gefunden werden

$$\begin{aligned} (m+n+p+q+v) &: m = EL : Eu \\ (m+n+p+q+v) &: n = EL : uv \\ (m+n+p+q+v) &: p = EL : vx \\ (m+n+p+q+v) &: q = EL : xy \\ (m+n+p+q+v) &: v = EL : yL. \end{aligned}$$

Man darf nur für LE, m, n, p, q, v die gehörigen Zahlen setzen.

Hierauf messe man Ep, pq, qs, st; ziehe Ep von Eu ab, wenn $Ep < Eu$; ferner pq von uv, oder uv von pq, je nachdem $pq <$ oder $> uv$, u. s. w. Denn es ist

$$\begin{aligned} pq &= pu + uq \\ uv &= uq + qv \\ \hline pq - uv &= pu - qv \text{ oder} \\ \hline uv - pq &= -pu + qv. \end{aligned}$$

Also entweder

$$\begin{aligned} Eu - Ep &= +pu \\ uv - pq &= -pu + qv \\ vx - qs &= -qv + sx \\ xy - ts &= -sx + ty \\ tL - yL &= +ty \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} Ep - Eu &= +pu \\ pq - uv &= +pu - qv \\ qs - vx &= +qv - sx \end{aligned}$$

$st - xy = + sx - ty$
$yL - tL = + ty.$

Nun ist $-(-pu + qv) = + pu - qv = + (pu - qv)$, und $+(-pu + qv) = -(+pu - qv) = -(pu - qv)$. Also muß $- pu + qv$ als eine subtrahierende Größe gesetzt werden, wann $FC > EL$, und als eine addierende, wenn $FC < EL$.

Es sey HL die Höhe des Trapezes FCLE. Es sey $HL = h$, $pu = a$, $qv = b$, $sx = c$, $ty = d$ Fuß. Es sey $AauE = N$, $abvu = O$, $bcxv = P$, $cdyx = Q$, $dBLy = R$, und die Fläche $ABLE = M$ Quadratfuß. Also

$(m+n+p+q+v) : m = M : N$
$(m+n+p+q+v) : n = M : O$
$(m+n+p+q+v) : p = M : P$
$(m+n+p+q+v) : q = M : Q$
$(m+n+p+q+v) : v = M : R$ und
$AapE = N \pm \frac{1}{2}ah$
$abqp = O \pm \frac{1}{2}(a - b)h$
$bcsq = P \pm \frac{1}{2}(b - c)h$
$cdts = Q \pm \frac{1}{2}(c - d)h$
$dBLt = R \pm \frac{1}{2}dh.$
Ist aber $qv = pu$, so ist $\Delta peu = \Delta qfv$, $\Delta peu - \Delta qfv = 0$, und $abqp = abvu$.

Hat man den Flächeninhalt der Stükke AapE, abqp, bcsq, cdts, dBLt erhalten, so addiere man zu dem des Stükks AapE den des Dreyekks Epk, zu dem von abqp den des Vierekks pqmk, zu dem von bcsq den des Vierekks snmq, u. s. w.

Es ist aber
$tLDi = \Delta ELD - \Delta Eti$
$stin = \Delta Eti - \Delta Esn$

qsnm = △Esn − △Eqm
pqmk = △Eqm − △Epk.

Man setze die Höhe des Dreyekks Eti = x, die des Dreyekks Esn = y, die des Dreyekks Emq = z die des Dreyekks Epk = v°, und MD, welches die Höhe des Dreyekks LED seyn soll, = g Fuß. Nun verhält sich

$$ED : DM = EK : v^\circ$$

$$(m+n+p+q+v) : m = g : v^\circ$$

$$\frac{gm}{m+n+p+q+v} = v^\circ$$

$$v^\circ : z = m : (m+n)$$

$$m : (m+n) = \frac{gm}{m+n+p+q+v} : z$$

$$\frac{g(m+n)}{m+n+p+q+v} = z$$

$$z : y = (m+n) : (m+n+p)$$

$$(m+n) : (m+n+p) = \frac{g(m+n)}{m+n+p+q+v} : y :$$

$$\frac{g(m+n+p)}{m+n+p+q+v} = y$$

$$y : x = (m+n+p) : (m+n+p+q)$$

$$(m+n+p) : (m+n+p+q) = \frac{g(m+n+p)}{m+n+p+q+v} : x$$

$$\frac{g(m+n+p+q)}{m+n+p+q+v} = x.$$

Folglich, wenn man Ep = α, Eq = β, Es = γ, Et = δ, EL = ε Fuß setzt

△Epk

$$\triangle Epk = \frac{\alpha g m}{2(m+n+p+q+v)}$$

$$\triangle Eqm = \frac{\beta g(m+n)}{2(m+n+p+q+v)}$$

$$\triangle Eqm - \triangle Epk = pqmk = \frac{(\beta(m+n) - \alpha m)g}{2(m+n+p+q+v)}$$

$$\triangle Esn = \frac{\gamma g(m+n+p)}{2(m+n+p+q+v)}$$

$$\triangle Esn - \triangle Eqm = qsnm = \frac{(\gamma(m+n+p) - \beta(m+n))g}{2(m+n+p+q+v)}$$

$$\triangle Eti = \frac{\delta g(m+n+p+q)}{2(m+n+p+q+v)}$$

$$\triangle Eti - \triangle Esn = stin = \frac{(\delta(m+n+p+q) - \gamma(m+n+p))g}{2(m+n+p+q+v)}$$

und $\triangle ELD - \triangle Eti = tLDi = \frac{1}{2}\varepsilon g - \frac{\delta(m+n+p+q)g}{2(m+n+p+q+v)}$

III. Wenn AB mit FD parallel ist, so ziehe man auch EH und GC mit AB oder FD parallel. Man berechne den Flächeninhalt der Trapezen ABHE und GCDF, und verfahre damit wie gezeigt worden ist. Hierauf berechne man den Inhalt der Dreyekke eai, fbk, gcl, hdm, Muv, Ntx, Psy, rQz, rqC, Een, und den der Vierekke noNM, opPN, pPrq, qCHh, hqpg, gpof, foni, wie schon II zeigt, und zugleich auch das weitere Verfahren lehrt.

IV. Was die Berechnung des Flächeninhalts der Abtheilung von Fig. 52 Tab. VII betrifft, ist die Verfahrungsart mit der III völlig einerley; nur daß hier EH nicht mit EG parallel ist, weil AB und FD nicht parallel seyn sollen, und also die Dreyekke EHC und ECG nicht einerley Höhe haben.

Exempel. Man setze die Linien AB, EC, FD wären so eingetheilt, daß ihre Theile mit den Zahlen m, n, p, q, v in Proportion ständen. Es sey der Flächen-Inhalt der beyden Trapezen ABHE und EGDF = M = 100789, cdhg + rzys = D, AaeE + uvFE = A, abfe + txvu = B, bcgf + syxt = C, dBHh + GDzr = E Quadratruthen. Es sey m = 2, n = 3, p = 5, q = 4, und v = 2. Also m + n + p + q + v = 16. Mithin

$$(m+n+p+q+v) : q = M : D$$
$$16 : 4 = 100789\square^{\circ} : D$$
$$4 : 1 = 100789\square^{\circ} : D$$
$$4)\quad 25197{,}25\square^{\circ} = D$$
$$2)\quad 12598{,}625\square^{\circ} = A = E$$
$$37795{,}875\square^{\circ} = A + D = 2\,B$$
$$2)\quad 18897{,}9375\square^{\circ} = B.$$
$$31496{,}5625\square^{\circ} = A + B = C.$$

Es sey EH = 510 Ruthen. Also

$$(m+n+p+q+v) : q = EH : gh$$
$$16 : 4 = 510^{\circ} : x$$
$$4 : 1 = 510^{\circ} : x$$
$$4)\quad 127{,}5^{\circ} = x = gh$$
$$2)\quad 63{,}75^{\circ} = hH = Ee$$

gh =

$gh = 127,5$
$Ee = 63,75$

$191,25 = gh + Ee = 2.\,ef$

2) $95,625° = ef$
$63,75 = Ee$

$159,375° = fg.$

Es sey nun $Ei = 64$ Ruthen, $ik = 96°$, $kl = 159,6°$, $lm = 127,6°$, $mH = 62,8°$. Daher weil $ik > ef$, $kl > fg$, $lm > gh$, so ist auch $fk > ei$, $gl > fk$, $hm > gl$, und $Ei - Ee = 64 - 63,75 = + ei = + 0,25°$, $ik - ef = 96 - 95,625 = -(ei - fk) = + 0,375°$, $kl - fg = 159,6 - 159,375 = -(fk - gl) = + 0,225°$, $lm - gh = 127,6 - 127,5 = -(gl - hm) = + 0,1°$, $hH - mH = 63,75 - 62,8 = - hm = - 0,95°$.

Es sey der Perpendikel $BL = 120°$. Also

$+ \Delta eai = + 0,25 \times 60 = + 15 \square°$
$-(\Delta eai - \Delta fbk) = + 0,375 \times 60 = + 22,5 \square°$
$-(\Delta fbk - \Delta gcl) = + 0,225 \times 60 = + 13,5 \square°$
$-(\Delta gcl - \Delta hdm) = + 0,1 \times 60 = + 6,0 \square°$
$- \Delta hdm = - 0,95 \times 60 = - 57,0 \square°$

Es sey $EG = 520$ Ruthen. Demnach
$(m+n+p+q+v) : q = EG : sr$
$16 : 4 = 520° : x$

$4 : 1 = 520° : x$

4) $130° = sr$

2) $65° = rG = Eu$

$195° = rG + sr = 2.\,ut$

2) $97,5 = ut$
$65,0 = Eu$

$162,5° = ut + Eu = ts.$

Es sey nun EM $=$ 65,8°, MN $=$ 97,8°, NP $=$ 162,6°, PQ $=$ 130,2, QG $=$ 63,6. Also ist tN $>$ uM, sP $>$ tN, rQ $>$ sP, und EM $-$ Eu $=$ 65,8° $-$ 65,0 $= +$ uM $= +$ 0,8°, MN $-$ ut $=$ 97,8° $-$ 97,5° $= -$ (uM $-$ tN) $= +$ 0,3°
NP $-$ ts $=$ 162,6 $-$ 162,5 $= -$(tN $-$ sP) $= +$0,1°
PQ $-$ rs $=$ 130,2 $-$ 130 $= -$ (sP $-$ rQ) $= +$0,2°
rG $-$ QG $=$ 65 $-$ 63,6 $= +$ rQ $= +$ 1,4°

Es sey der Perpendikel TD $=$ 100°. Also
$+ \Delta uvM = +0,8 \times 50 = +40,0\Box°$
$-(\Delta uvM - \Delta txN) = +0,3 \times 50 = +15,0\Box°$
$-(\Delta txN - \Delta syP) = +0,1 \times 50 = +5,0\Box°$
$-(\Delta syP - \Delta rzQ) = +0,2 \times 50 = +10,0\Box°$
$- \Delta rzQ = -1,4 \times 50 = -70,0\Box°$

Es sey die Höhe CO des Dreyekks EHC $=$ 12 Ruthen, die Höhe CR des Dreyekks ECG $=$ 10 Ruthen. Also der Flächeninhalt des Dreyekks EHC $=$ 3060 Quadratruthen, und der des Dreyekks ECG $=$ 2600 Quadratruthen.

Setzt man nun die Höhe des Dreyekks Ein $=$ u, die des Dreyecks Eko $=$ x, die des Dreyecks Elp $=$ y, und die des Dreyekks Emq $=$ z; so ist

$$u = \frac{12m}{m+n+p+q+v} = \frac{12.2}{16}$$
$$x = \frac{12(m+n)}{m+n+p+q+v} = \frac{12.5}{16}$$
$$y = \frac{12(m+n+p)}{m+n+p+q+v} = \frac{12.10}{16}$$
$$z = \frac{12(m+n+p+q)}{m+n+p+q+v} = \frac{12.14}{16}$$

Setzt

Setzt man nun u, x, y, z für die Höhen der Dreyekke EnM, EoN, EpP, EqQ: so ist

$$u = \frac{10m}{m+n+p+q+v} = \frac{10.2}{16}$$

$$x = \frac{10(m+n)}{m+n+p+q+v} = \frac{10.5}{16}$$

$$y = \frac{10(m+n+p)}{m+n+p+q+v} = \frac{10.10}{16}$$

$$z = \frac{10(m+n+p+q)}{m+n+p+q+v} = \frac{10.14}{16}$$

Nun ist $Ei = 64$ Ruthen, $Ek = Ei + ik = 64^\circ + 96^\circ = 160^\circ$; $El = Ek + kl = 160^\circ + 159{,}6^\circ = 319{,}6^\circ$, $Em = El + lm = 319{,}6^\circ + 127{,}6^\circ = 447{,}2^\circ$. Ferner $EM = 65{,}8^\circ$, $EN = EM + MN = 65{,}8^\circ + 97{,}8^\circ = 163{,}6^\circ$, $EP = EN + NP = 163{,}6^\circ + 162{,}6^\circ = 326{,}2^\circ$ $EQ = EP + PQ = 326{,}2 + 130{,}2 = 456{,}4^\circ$.

Demnach

$$\tfrac{1}{2}u.\ 64 = \tfrac{1}{2}64.\ \frac{12.2}{16} = \frac{64.12}{16} = 48\,\square^\circ$$

$$\tfrac{1}{2}x.\ 160 = \tfrac{1}{2}160.\ \frac{12.5}{16} = \frac{80.12.5}{16} = 300\,\square$$

$$\tfrac{1}{2}y.\ 319{,}6 = \tfrac{1}{2}319{,}6.\ \frac{12.10}{16} = \frac{319{,}6.6.10}{16} = 1198{,}5\,\square^\circ$$

$$\tfrac{1}{2}z.\ 447{,}2 = \tfrac{1}{2}447{,}2.\ \frac{12.14}{16} = \frac{447{,}2.6.14}{16} = 2347{,}8\,\square^\circ$$

ferner

$$\tfrac{1}{2}u.\ 65{,}8 = \tfrac{1}{2}\ 65{,}8.\ \frac{10.2}{16} = \frac{65{,}8.10}{16} = 41{,}12.\,\square^\circ$$

$\tfrac{1}{2}x.$

$\frac{1}{2}x.\ 163,6 = \frac{1}{2}\ 163,6.\frac{10.5}{16} = \frac{163,6.5.5}{16} = 255,62.\square$

$\frac{1}{2}y.\ 326,2 = \frac{1}{2}\ 326,2.\frac{10.10}{16} = \frac{32620}{32} = 1019,37..\square^{\circ}$

$\frac{1}{2}z.\ 456,4 = \frac{1}{2}\ 456,4.\frac{10.14}{16} = \frac{456,4.10.7}{16} = 1996,75\ \square^{\circ}$

Also

ΔEin		=	$48\square^{\circ}$
ΔEok — ΔEin	= inok	=	$252\square^{\circ}$
ΔElp — ΔEok	= klpo	=	$898,5\square^{\circ}$
ΔEmq — ΔElp	= lmqp	=	$1149,3\square^{\circ}$
ΔEAC — ΔEmq	= mHCq	=	$712,2\square^{\circ}$
ΔEnM		=	$41,12..\square^{\circ}$
ΔEoN — ΔEnM	= onMN	=	$214,\ 5..\square^{\circ}$
ΔEpP — ΔEoN	= opPN	=	$763,75..\square^{\circ}$
ΔEqQ — ΔEpP	= pqQP	=	$977,38..\square^{\circ}$
ΔECG — ΔEqQ	= qCGQ	=	$603,25..\square$

Folglich

12598,625 = AaeE + uvFE
+ 15,000 = Δeai
+ 40,000 = ΔuMv
+ 48,000 = ΔEin
+ 41,12.. = ΔEnM

12742,745 Quadratruthen = AanvFE

ferner

18897,9375 = abfe + txvu
+ 22,5000 = — (Δeai — Δfbk)
+ 15,0000 = — (ΔvuM — ΔtxN)
+ 252,0000 = inok
+ 214,5000 = noNM

19401,9375 Quadratruthen = aboxvn

ferner

ferner

31496,5625 = bcgf + syxt
+ 13,5000 = (Δfbk − Δgcl)
+ 5,0000 = (ΔtxN − ΔsyP)
+ 898,5000 = klpo
+ 763,7500 = opPN

33177,3125 Quadratruthen = bcpyxo.

ferner

25197,25 = cdhg + rzys
+ 6,00 = (Δgcl − Δmdh)
+ 10,00 = (ΔsyP − ΔrzQ)
+ 1149,30 = lmqp
977,38 = pqQP

27339,93 Quadratruthen = cdqzyp

ferner

12598,625 = dBHh + GDzr
− 57,000 = − Δhdm
− 70,000 = − ΔrzQ
+ 712,200 = mHCq
+ 603,250 = CqQG

13787,075 Quadratruthen = dBCDzq

Folglich

12742,745 □ = AanvFE
19401,9375 □ = aboxvn
33177,3125 □ = bcpyxo
27339,93 □ = cdqzyp
13787,075 □ = dBCDzq

106449 Quadratruthen = dem Inhalte der ganzen Figur.

Anmer-

Anmerkung. 2. Ob dieses Verfahren, welches im gegenwärtigen Paragraph gezeigt worden ist, weitläuftiger oder eben so weitläuftig ist, als wenn man den Inhalt einer jeden Abtheilung ausrechnet, mag an seinen Ort gestellt seyn. In wie fern aber durch dieses hier gezeigte Verfahren der Inhalt einer jeden Abtheilung bestimmter gefunden wird, als wenn man die Fläche einer jeden Abtheilung durch Dreyekke besonders ausmißt, kann die zu §. 35 gegebene Anmerkung zeigen.

Denn man berechnet den Inhalt der ganzen Figur, den eines jeden Trapezes ABHE und EGDF, Fig. 52 Tab. VII, und den eines jeden Dreyekks EHC und ECG entweder vermittelst eines Risses, oder aus den auf dem Felde gemessenen Linien. Im ersten Falle kann der Fehler, wenn man den Inhalt einer jeden Abtheilung nach gegenwärtigem Paragraph bestimmt, nur unter gewissen Bedingungen kleiner seyn, als wenn man den Flächeninhalt einer jeden Abtheilung durch Dreyekke besonders ausrechnet; im zweiten Falle aber kann weiter kein Fehler vorfallen, die Rechnungsfehler, und die, welche man bey Aufnehmung der Figur begangen hat, ausgenommen, als die, welche entstehen, wenn man die Linien Ei, ik, u.s.w. nach dem verjüngten Maasstabe abmißt, nach welchem die Figur aufgetragen worden ist.

Diese Fehler können nur sehr klein seyn, und bloß auf den Inhalt der Abtheilungen, nicht aber auf den der ganzen Figur einigen Einfluß haben. Wollte man auch diese Fehler vermeiden, und auch die Linien Ei, iK trigonometrisch bestimmen, so würde man die Sache ohne Zweifel zu weit treiben, und die Rechnung fast eben so weitläuftig machen, als wenn man in einem jeden Vierekke aus den auf dem Felde gemessenen Linien und Winkeln die Diagonallinie An, die Perpendikel $a\alpha$, $E\beta$ trigonometrisch berechnen, und daraus den Inhalt einer jeden Abtheilung und den der ganzen Figur bestimmen wollte. Und bey aller dieser weitläuftigen Rechnung würde man sich doch nur rühmen können, keinen beträchtlichen Fehler begangen zu haben.

Wie man aus den bey Aufnehmung der Figur gemessenen Linien den Inhalt eines jeden Vierekks ABCE und ECDF berechnen kann, zeigt §. 11; wie man ferner den eines Dreyekks EHC, ECG, den eines jeden Trapezes ABHE, EGDF die Anzahl der Fuß eines jeden Perpendikels BL, TD finden kann, ist schon in der Anmerkung zu §. 20 Zusatz 6 gezeigt worden.

Fünftes Kapitel.

Von Bestimmung der Figuren, die bey gleichem Flächeninhalte den kleinsten Umfang haben.

Satz.

§. 37. Wenn man das Quadrat mit einem Oblonge vergleicht, das gleichen Umfang mit ihm hat, so ist das Quadrat größer als dieses.

Beweis. Es sey a die Zahl der Fuß der langen, und $a - e$ die der kurzen Seite eines Oblongs, und der Flächeninhalt $= M$. Mithin ist $M = a \times (a - e)$ $= a^2 - ae$. Nun wird M desto größer, je kleiner e und am größten, wenn $e = o$ wird. In diesem Falle ist $M = a^2$, gleich dem Flächeninhalte eines rechtwinkeligen Parallelogramms, dessen Höhe der Grundlinie gleich ist, d. i. eines Quadrats. Da a eben so viel wachsen mußte als e abnahm, wenn der Umfang sich gleich bleiben sollte (per hyp.): so folgt, daß das Quadrat unter allen rechtwinkeligen Parallelogrammen, die gleichen Umfang mit ihm haben, die größte Fläche hat.

Zusatz. Also hat auch unter allen Oblongen, die gleichen Umfang haben, das die größte Fläche, wo e, d. i. der Unterschied der langen und kurzen Seite, am kleinsten ist.

Satz.

§. 38. Unter allen Dreyekken gleichen Umfangs ist das gleichseitige das größte.

Beweis. Wenn die Seiten eines Dreyekks a, b, c Fuß lang sind, so ist der Inhalt $= \frac{1}{4} \surd (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$ (§. 11.). Weil der Umfang sich gleich bleiben soll, d. i. $a+b+c$, so nenne man ihn p, und setze den Inhalt M. Daher ist $M = \frac{1}{4} \surd (p(p-2c)(p-2b)(p-2a)$. Hier ist p eine beständige Größe, a, b, c aber veränderliche, von denen die Größe M abhängt.

Es sey nun $p-2c = \alpha$, $p-2b = \beta$, $p-2a = \gamma$. Demnach $M = \frac{1}{4} \surd (p.\alpha.\beta.\gamma)$. Mithin wächst M, wenn das veränderliche Produkt $\alpha\beta\gamma$ zunimmt, und wird am größten, wenn $\alpha\beta\gamma$ am größten ist.

Man setze es sey $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$, und $\alpha - e = \beta$, $\alpha - f = \gamma$. Also ist $\alpha\beta\gamma = \alpha^3 - \alpha^2(e+f) + \alpha ef$. Nun ist $\alpha^2(e+f) > \alpha ef$. Denn es ist $\alpha > f$, $f > e$, Also $\alpha f > ef$, $\alpha e + \alpha f = \alpha(e+f) > ef$, und $\alpha^2(f+e) > \alpha ef$, und $\alpha^2(f+e) > \alpha ef$. Mithin $\alpha^3 - \alpha^2(f+e) + \alpha fe < \alpha^3$. Folglich wächst M, wenn e und f abnehmen, uud wird am grüßten, wenn $e = f = o$ wird.

Ist dieses, so ist $M = \frac{1}{4} \surd \alpha^3 p$. Nnn ist $\alpha = \beta = \gamma$ geworden. Also auch $p - 2c = p - 2b = p - a = c = b = a$. Also ist $M = \frac{1}{4} \surd (3a \times a^3) = \frac{1}{4} \surd \alpha^4 . 3 = \frac{1}{4} \alpha^2$

$= \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. Es ist aber $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ der Inhalt eines gleichseitigen Dreyekks (§. 11 Zusatz 2), und zwar eines solchen das mit jedem andern gleichen Umfang hat (per hyp.). Folglich hat es unter dieser Bedingung die größte Fläche.

Zusatz 1. Wenn das gleichseitige Dreyekk unter allen andern, die gleichen Umfang mit ihm haben, die größte Fläche hat; so hat es auch bey gleichem Flächeninhalte den kleinsten Umfang. Denn man setze, es sey der Umfang eines gleichseitigen Dreyekks $= P$, sein Inhalt $= M$, der Umfang eines ungleichseitigen $= p$, und sein Inhalt $= m$. Wenn also $P = p$ ist, so ist $M > m$. Folglich muß $P < p$ seyn, wenn M abnimmt und $= m$ wird.

Eben daher hat auch das Quadrat unter allen rechtwinkeligen Parallelogrammen, die gleichen Inhalt mit ihm haben, den kleinsten Umfang (§. 37.).

Zusatz 2. Der Flächeninhalt eines gleichschenkeligen Dreyekks ist $= \frac{1}{4}b\sqrt{(2a+b)(2a-b)}$ (§. 11 Zusatz 2) $= \frac{1}{4}\sqrt{(2a+b)(2a-b)b^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(4a^2-b^2)b^2}$. Ist der Inhalt eines gleichschenkeligen Dreyekks größer, als der eines ungleichseitigen, das mit ihm gleichen Umfang hat, oder wo $a+c = 2\alpha$, d. i. der Summe der beyden gleichen Schenkel: so muß $(2\alpha+b)(2\alpha+b)b^2 = (4\alpha^2-b^2)b^2 > (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$.

Nun ist $(a+b+c)(a+c-b) = (a+c)^2 - b^2$, $(a+b-c)(b+c-a) = (b+a-c)(b-a+c) = (b+(a-c))(b-(a-c)) = b^2 - (a-c)^2$. Also $(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(b+a-c) = ((a+c)^2 - b^2)(b^2 - (a-c)^2) = (a+c)^2b^2 - b^4 - (a+c)^2(a-c)^2 +$

$(a-c)^2b^2$. Zieht man hiervon $(4\alpha^2 - b^2)\,b^2$ ab, so bleibt übrig $-(a+c)^2(a-c)^2 + (a-c)^2b^2$.

Denn es ist $(a+c)^2 - b^2 = 4\alpha^2 - b^2$, und $(a+c)^2b^2 - b^4 = (4\alpha^2 - b^2)\,b^2$. Ist der Ueberrest $-(a+c)^2(a-c)^2 + (a-c)^2b^2$ jederzeit eine abzuziehende Größe, so ist erwiesen, daß ein gleichschenkeliges Dreyekk unter allen ungleichseitigen, die mit ihm gleichen Umfang haben und auf einer Grundlinie b stehen, die größte Fläche hat.

Es ist $-(a+c)^2(a-c)^2 + (a-c)^2b^2 = (a-c)^2b^2 - (a+c)^2(a-c)^2 = (a-c)^2(b^2 - (a+c)^2)$. Nun ist, als Seiten eines Dreyekks betrachtet, $(a+c) > b$. Mithin $(a+c)^2 > b^2$. Und, da $(a-c)^2$ jederzeit positif ist, es mag $a > c$, oder $c > a$, so ist $-(a+c)^2(a-c)^2 + (a-c)^2\,b^2$ jederzeit eine negatife oder abzuziehende positife Größe.

Zusatz 3. Also wächst der Flächeninhalt der Dreyekke, indem sich bey gleichem Umfange der Unterschied ihrer Seiten vermindert, und wird am größten, wenn dieser o wird.

Zusatz 4. Da sich ein jedes Vielekk in Dreyekke zerlegen läßt, so hat also auch bey gleichem Umfange das die größte Fläche, welches in lauter gleichseitige Dreyekke zerlegt werden kann. Es giebt aber nur eins von dieser Art, nähmlich das reguläre Sechsekk. Uebrigens kann ein jedes reguläres Vielekk in eben so viel gleichschenkelige Dreyekke zerlegt werden als es Seiten hat. Folglich haben auch die regulären unter allen andern bey gleichem Umfange eine größere Fläche (Zusatz 2).

Zusatz 5. Wenn man ein Oblong ABDC, Fig. 53 Tab. VII, verschiebt, so entsteht ein Rhomboid CEFD, das mit ihm gleichen Umfang hat. Hierdurch wird die Höhe DB vermindert, und das Rhomboid hat nur Dq zur Höhe. Nun ist aus der Geometrie bekannt, daß sich verhält ABDC : CEFD = DB : Dq. Folglich hat das Oblong eine größere Fläche als ein Rhomboid, das gleichen Umfang mit ihm hat. Unter eben dieser Bedingung ist auch das Quadrat größer als ein Rhombus.

Zusatz 6. Folglich ist das Quadrat unter allen Parallelogrammen, wenn sie gleichen Umfang haben, das größte (Zusatz 5 und §. 37).

Zusatz 7. Wenn a Fuß die Seite eines gleichseitigen Dreyekks hat, so ist $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ der Flächeninhalt. Soll ein Quadrat mit ihm bleichen Umfang haben, so ist derselbe $= 3a$. Also eine Seite $= \frac{3}{4}a$, und der Inhalt $= \frac{9}{16}a^2$. Nun ist $\frac{9}{16}a^2 > \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. Denn es ist $\frac{48}{256}a^4 < \frac{81}{256}a^4$, $\frac{3}{16}a^4 < \frac{81}{256}a^4$, $\frac{1}{16}a^4 . 3 < \frac{81}{256}a^4$, $\sqrt{\frac{1}{16}a^4 . 3} < \sqrt{\frac{81}{256}a^4}$, $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3} < \frac{9}{16}a^2$.

Also ist das Quadrat größer als ein gleichseitiges Dreyekk, das mit ihm gleichen Umfang hat. Folglich ist es auch unter allen Dreyecken und Parallelogrammen, wenn sie gleichen Umfang haben, die größte Figur. Denn das gleichseitige Dreyekk ist unter allen andern, die gleichen Umfang mit ihm haben, das größte (§. 38), und mit dieser Bedingung ist unter allen Parallelogrammen es das Quadrat (Zusatz 6).

Zusatz 8. Es ist aber auch ein Quadrat größer als ein Trapez oder Trapezoid (Zusatz 4). Folglich ist das Quadrat unter allen Dreyekken und Vierekken, die einerley Umfang haben, die größte Figur.

Zusatz 9. Es sey der Halbmesser eines Zirkels = R Fuß. Also $R \times 3,14 \ldots$ der Umfang und $R^2 \times 3,14 \ldots$ der Inhalt desselben. Nimmt man $R \times 3,14 \ldots$ als eine gerade Linie an, und läßt $\frac{R \times 3,14 \ldots}{n}$ die Seite eines regulären Vielekks bedeuten, so ist, wenn man den Perpendikel, der aus dem Mittelpunkte auf eine Seite gezogen wird Z Fuß setzt, $Z \times R \times 3,14 \ldots$ der Inhalt desselben.

Man sieht schon hieraus, daß der Inhalt eines regulären Vielekks zunimmt, wenn Z wächst, und am größten wird, wenn Z = R wird, wo das Vielekk sich in dem Zirkel verliert, in welchem es beschrieben ist. Nimmt aber Z zu, so nimmt R ab, wenn der Umfang sich gleich bleiben soll, und die Zahl der Seiten wird vergrößert. Denn es ist der Umfang eines Zirkels jederzeit größer als der eines in ihm beschriebenen Vielekks, und dieser nähert sich jenem, wenn die Seite abnimmt und die Anzahl derselben sich vermehrt *).

Ist also der Umfang eines regulären Vielekks unveränderlich, und haben zwey reguläre Vielekke einerley Umfang: so hat der Zirkel, in welchem dasjenige, welches eine größere Anzahl von Seiten hat, beschrieben ist, einen kleinern Halbmesser, als dieser, in welchem dasje-nige

*) Man sehe Herrn Hofrath Kästners Iten Theils erste Abtheilung d. math. Anfangsgründe S. 43 Satz Zusatz 4. VIIII S. 309.

nige von einer kleinern Anzahl von Seiten beschrieben ist; und wenn ein Zirkel mit irgend einem regulären Vielekke gleichen Umfang hat: so ist also der Halbmesser desselben kleiner als der dieses Zirkels, in welchem das Vielekk beschrieben ist.

Es sey Cp, Fig. 55 Tab VIII, der Halbmesser des erstern, CB der des zweiten Zirkels. Es sey AB eine Seite eines regulären Vielekks, CH=Z auf AB senkrecht. Es ist also $Cp \geq CH$, wenn der Umfang des Vielekks weder größer noch kleiner ist als der des Zirkels pnmgq; und H nähert sich p, wenn CB abnimmt; CB wird kleiner, wenn AB kleiner wird, und die Anzahl der Seiten sich vermehrt, so, daß $AB \times n$ eine beständige Größe ist.

Folglich ist in einem regulären Sechsekke CH größer als in einem regulären Fünfekke, und in einem regulären Achtekke größer als in einem regulären Siebenekke, wenn sie gleichen Umfang haben. Folglich ist unter dieser Bedingung das reguläre Fünfekk größer, als das reguläre Vierekk, d. i. das Quadrat, und das reguläre Neunekk größer als das reguläre Achtekk. Endlich wird $Z \times R \times 3,14 \ldots$ am größten, wenn $Z = R$ wird. Also hat der Zirkel unter allen regulären Figuren die gleichen Umfang mit ihm haben die größte Fläche.

Zusatz 10. Da die regulären Vielekke größer sind als die irregulären, wenn sie gleichen Umfang haben (Zusatz 4): so hat also überhaupt unter dieser Bedingung der Zirkel eine größere Fläche als irgend ein Vielekk.

Zusatz 11. Unter gleichem Umfange wächst also die Fläche der Figuren, je mehr sie sich in Ansehung ihrer

Qualität der Regularität nähern, und der regulären mit der Anzahl der Seiten (Zusatz 9). Also ist überhaupt unter allen möglichen Figuren, die gleichen Umfang haben, der Zirkel die größte.

Aufgabe.

§. 39. Den Umfang eines gleichseitigen Dreyekks, eines Quadrats und eines Ablongs zu bestimmen, wenn ihre Flächen einander gleich sind.

Auflösung. Es sey die Seite eines gleichseitigen Dreyekks $= a$. Also der Inhalt desselben $= \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ (§. 11 Zusatz 2). Mithin die Seite eines Quadrats, das $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ zum Inhalte hat, $= \sqrt{\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}a\sqrt[4]{3}$.

Ist $ab = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, so ist $b = \frac{\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}}{a}$, und $\frac{\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}}{b} = a$. Also $2a + 2b = 2(a+b) =$ dem Umfange des Oblongs.

Aufgabe.

§. 40. Ein Oblong, das mit einem gegebenen Dreyekke gleichen Umfang und Inhalt hat, zu machen.

Auflösung. Die Seiten des Dreyekks mögen a, b, c Fuß lang seyn. Also der Umfang $a+b+c =$ dem des Oblongs, und $\frac{a+b+c}{2}$ die Summe der Grundlinie und Höhe. Es sey der Unterschied dieser Linien $= x$ Fuß.

Dem-

Demnach die Grundlinie $= \frac{a+b+c}{4} + \frac{1}{2}x$, und die Höhe $= \frac{a+b+c}{4} - \frac{1}{2}x$. Der Flächeninhalt sey $= M$.

Also

$$M = \left(\frac{a+b+c}{4} + \frac{1}{2}x\right)\left(\frac{a+b+c}{4} - \frac{1}{2}x\right)$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{16} - \frac{1}{4}x^2$$

$$M + \frac{1}{4}x^2 = \frac{(a+b+c)^2}{16}$$

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{(a+b+c)^2}{16} - M$$

$$x^2 = \frac{(a+b+c)^2}{4} - 4M$$

$$= \left(\frac{(a+b+c)^2}{4}\right)\left(1 - \frac{16M}{(a+b+c)^2}\right)$$

$$x = \frac{a+b+c}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{16M}{(a+b+c)^2}\right)}$$

Aufgabe.

§. 41. Das Verhältnis zu bestimmen, welches die Seiten eines Oblongs zu einander haben müssen, wenn der Umfang desselben m Mahl so groß seyn soll, als der eines Quadrats, das mit ihm gleichen Inhalt hat.

Auflösung. Es seyn die Seiten eines Oblongs x und y Fuß. Also der Inhalt xy. Der Inhalt des Qua-

Quadrats sey $= a^2$. Also $xy = a^2$ (per hyp.), $x = \frac{a^2}{y}$, $2(x+y) = 4ma$ (per hyp.), $x + y = 2ma$.

Also

$$2ma = \frac{a^2}{y} + y$$

$$2may = a^2 + y^2$$

$$o = a^2 - 2yma + y^2$$

$$a^2m^2 - a^2 = a^2m^2 - 2yma + y^2$$

$$\pm \surd(a^2m^2 - a^2) = am - y$$

$$\pm a\surd(m^2 - 1) = am - y$$

$$y = am \mp a\surd(m^2 - 1).$$

Exempel. Ist $m = 2$, so ist die eine Seite des Oblongs $= y = 2a \mp a\surd 3 = a(2 \mp \surd 3)$, und die andere $x = 2ma - y = 4a - a(2 \mp \surd 3) = 4a - 2a \pm \surd 3 = 2a \pm \surd 3 = a(2 \pm \surd 3)$. Also

$x : y = a(2 \pm \surd 3) : a(2 \mp \surd 3)$
$= (2 \pm \surd 3) : (2 \mp \surd 3)$

Folglich sind die beyden Seiten des Oblongs darinne verschieden, daß, wenn man bey der ersten $+\surd 3$ genommen hat, bey der zweyten $-\surd 3$ gesetzt werden muß; und so auch umgekehrt. Also kann man x oder y für die Grundlinie, oder für die längste Seite annehmen. Daher finden folgende Verhältnisse Statt, als

$x : y = (2 - \surd 3) : (2 + \surd 3)$
$= 0,268 \ldots : 3,732 \ldots$
$= 1 : 13\frac{12}{13}.$

Folg-

Folglich muß das Oblong beynahe vierzehen Mahl so lang als breit seyn.

Anmerkung. Die Erfahrung lehrt, daß die Ländereyen auf ihren Grenzen immer am ersten beschädigt werden. Der Schade kann für den Besitzer eines Stükk Landes desto beträchtlicher seyn, je größer bey einerley Flächeninhalte der Umfang des Stükk Landes ist. Auch der Kostenaufwand, der bey Verzäunung der Ländereyen gemacht wird, ist desto größer, je mehr ein Stükk Land bey gleichem Flächeninhalte Umfang hat. Es ist also nöthig, daß man bey Zertheilung des Feldes den Theilen bey gleichem Flächeninhalte den kleinsten Umfang zu geben sucht; und zwar allen Theilen. Denn man wird nun nicht mehr zweifeln, daß ein Stükk Land bey gleichem Flächeninhalte den kleinsten Umfang hat, wenn es ein Zirkel ist; was werden aber die übrigen Theile, welche es umgeben, in diesem Falle für eine Gestalt haben? und wie wird der Umfang eines jeden, wenn man ihn mit der Fläche vergleicht, beschaffen seyn? Wie gezeigt worden ist haben unter allen Figuren, die gleichen Inhalt haben, die regulären den kleinsten Umfang. Man muß also die Theile eines Stükk Feldes so viel als möglich regulär zu machen suchen.

Sechs=

Sechstes Kapitel.

Von Verhältnissen der Grundstükke und der einzelnen Quadratruthen derselben.

Erklärung.

§. 42. Unter Grundstükk versteht man einen gewissen Theil von der Oberfläche der Erde, in so fern er irgend jemands Eigenthum ist.

Zusatz 1. Also sind gewisse Abtheilungen eines Fluhrs oder überhaupt Bezirks, z. B. Wiesen, Aekker, Gärten, Holz u. d. gl. mehr, Grundstükke. Denn sie gehören jemanden eigenthümlich zu. Und ein gewisser Bezirk, der ein Eigenthum einer ganzen Gemeinde ist, ist also auch ein Grundstükk derselben.

Zusatz 2. Die Grundstükke sind demnach nicht nur verschieden in ihrer Größe, sondern auch in ihrer Brauchbarkeit. Denn zwey Grundstükke sind in Ansehung ihrer Größe einander gleich, wenn ihre horizontalen Ebenen einander gleich sind; in ihrer Brauchbarkeit aber verschieden, wenn das eine Wiese und das andere Ahrtland ist.

§. 43.

Erfahrung.

§. 43. Die Oberfläche der Erde ist nicht an allen Orten von gleicher Güte, d. h. an einem Orte bringt sie Früchte von der Art, von der Güte, und in der Menge hervor; an einem andern Orte sind ihre Produkte von einer andern Art, von einer andern Güte, und in einer andern Menge.

Zusatz. Also können Grundstükke, die in Ansehung ihrer Fläche und ihrer Brauchbarkeit einander gleich sind, dennoch verschieden seyn.

Erfahrung.

§. 44. Zwey Dinge haben einerley Werth, in so fern es uns einerley ist dieses oder jenes zu wählen.

Anmerkung. Der Werth eines Dinges ist relatif. Er entsteht, indem wir ein Ding in Ansehung seiner Güte mit einen andern vergleichen; und wir können nur sagen: ein Ding ist so und so viel Mahl mehr werth als ein anderes. Je größer die Vortheile sind, die wir von einer Sache genüßen; je reiner und je glänzender eine Sache ist: desto mehr ziehen wir sie einer andern vor, und desto größer ist auch der Werth den wir ihr beylegen. Die Bedürfnisse und der Luxus können machen; daß wir eine Sache höher schätzen, als eine andere; sie können sie aber auch in einen größern Werth bringen, und in einen desto größern je seltener sie wird. Kann ein Mensch eine Sache besser brauchen als ein anderer, sieht er die Vortheile derselben mehr ein als ein anderer: so wird er sie auch mehr zu schätzen wissen, und ihr einen größern Werth zueignen. Niemand wird für einen Diamant so vieles Geld zahlen, als der, welcher ihn zum Luxus anwenden kann.

Das Geld dient uns beym Einkauf und Verkauf der Dinge gleichsam zum Maasstabe, um die Größe ihrer Werthe

Werthe zu beurtheilen. Wir nennen den Werth eines Dinges groß, wenn wir viel, und klein, wenn wir wenig zahlen. Aber auch der Werth des Geldes ist nicht an allen Orten, auch nicht immer an einem Orte einerley, und wenn wir die Werthe zweier Dinge in verschiedenen Ländern mit einander vergleichen wollen, so müssen wir erst die Verhältnisse der Werthe bestimmen, welche die Münzen in diesen verschiedenen Ländern haben.

Alles was gekauft oder verkauft wird, sind Dinge von denen wir entweder jährlich gewisse Einkünfte ziehen, die wir zu unsern Bedürfnissen und Bequemlichkeiten anwenden; oder die wir selbst dazu brauchen. Zur ersten Klasse gehören Grundstükke, und zur zweyten alles was zur Erhaltung des Lebens nöthig ist; ferner Kleidung, Hausgeräthe, Wohnung u d. g. Aber auch alle unsere Arbeiten haben zum Endzwekk unser Leben zu erhalten und zu verschönern. Der Kauf- und Handelsmann kauft Waaren, der Künstler der Handwerker Materialien der Gutsbesitzer Grundstükke. Der Kaufmann rechnet alle Ausgaben zusammen, und betrachtet den wirklichen Gewinn als Zins eines Kapitals. Eben so bestimmen auch die Künstler und Handwerker den Werth ihrer Produkte. Der Gutsbesitzer giebt ein gewisses Kapital für Grundstükke hin, berechnet jährlich die Einnahme und Ausgabe, und so auf mehrere Jahre, weil, wie bekannt ein Grundstükk manches Jahr viel, manches Jahr wenig, und manches Jahr gar nichts einträgt, und der Kostenaufwand in einem Jahre groß in einem andern geringe ist; nimmt aus allen ein Mittel, zieht die Ausgabe von der Einnahme ab, und betrachtet den Ueberrest, welchen er den wirklichen Gewinn nennt, als Zins eines Kapitals, das den Werth seiner Grundstükke bestimmt. Der Gutsbesitzer, der Künstler, der Handwerker, der Kaufmann, alle rechnen den wirklichen Gewinn für ihre Arbeiten, und bestimmen ihn zu ihren Bedürfnissen und zur Veredlung ihres Lebens; und der Tagelöhner arbeitet um sein Leben zu erhalten und sich Vortheile zu verschaffen.

Der Gutsbesitzer sieht stets, wenn er den Werth eines Grundkstükks bestimmt, auf die Gewährschaft eines Kapitals

pitals und auf die Fortdauer des Grundstükks. Er überlegt, in wie fern er für seine Person an dem Grundstükke mehr Arbeit hat, als bey seinem Gelde. Dieß schlägt er mit zum Kostenaufwande, und bestimmt hiernach den wirklichen Gewinn. Vergleicht er die Werthe zweyer oder mehrerer Grundstükke, so sieht er zugleich auch ihre Lage und in wie fern er selbst an dem einem mehr Arbeit hat als an dem andern. Denn wenn er den wirklichen Gewinn eines Grundstükks, mit dem Zinse eines Kapitals vergleicht, und ihn für seine Arbeit rechnet, so betrachtet er sich zugleich als Oekonome und als Kapitalist, und setzt sich nur wie der Tagelöhner größern Arbeiten aus, wenn er durch sie gewinnen kann.

Aber der Gutsbesitzer setzt einen kleinern Zins fest als der Kapitalist; weil dieser befürchten muß sein Kapital zu verlieren, jener aber nicht. Und wer erlaubt nicht dem Kaufmanne, wenn er ein stärkeres Risko als der Kapitalist hat, einen höhern Zins anzunehmen, als dieser? Auch rechnet der Oekonome einen geringern Zins, wenn er ein gewisses Kapital so anwendet, daß ihm nicht nur jährlich Einkünfte bleiben, sondern auch ein gewisser Grund, der ihm allezeit sein verwendetes Kapital wiedergiebt; als wenn sein verwendetes Kapital mit allen Einkünften einmahl verlohren ist. Er nimmt sogar die Zeit in Anschlag, in welcher es verlohren gehen kann, und bestimmt einen geringern Zins wenn sie groß, und einen größern wenn sie klein ist. Dieser Zins soll ihm nicht nur sein verwendetes Kapital wieder einbringen, sondern auch die jährlichen Zinsen desselben geben.

Wir suchen zugleich unser Eigenthum so zu verändern, daß es uns die mehrsten Vortheile verschaft. Der Kaufmann wird nicht handeln, wenn ihm sein Geld an Zinsen mehr einbringt, als er durch seinen Handel verdienen kann. Der Oekonome kauft Grundstükke, so bald sie ihm jährlich einen größern Gewinn geben, als ihm sein Kapital, welches er für dieselben gegeben hat, an Zinsen einbringt. Aber in diesem Falle setzt er auch in seine Grundstükke einen größern Werth. Ist die Gewährschaft seines Kapitals mißlich, so rechnet er, wenn er es für Grundstükke hingiebt, einen geringern Zins, und geht

wohl

wohl gar in der Kaufsumme so weit, biß der bestimmte Zins mit den wirklichen Gewinn, den er von den Grundstükken haben kann, einerley ist. In diesem Falle ist es ihm einerley sein Geld zu verleihen, oder es für die Grundstükke zu geben, und sein Vermögen wird hierdurch weder verkleinert noch vergrößert. Die Grundstükke sind das Geld und dieses ist die Grundstükke werth. Eben daher wird er in zwey Grundstükke einerley Werth setzen, wenn sie ihm jährlich einerley wirklichen Gewinn geben.; und es wird ihm einerley seyn dieses oder jenes zu wählen oder zu verlieren.

Der Werth der Grundstükke wird also größer, wenn man jährlich mehr wirklichen Gewinn von ihnen ziehen kann. Der wirkliche Gewinn hängt von dem Preise ihre Produkte und von dem Kostenaufwande ab; der Kostenaufwand ist groß, wenn Tagelöhner, Handwerker u. d. g. mehr Arbeitslohn verlangen; dieser steigt wenn das, was sie zu ihrem Lebensunterhalte nöthig haben, teuerer wird. Man sieht also, daß der Werth der Grundstücke nur Bedingungsweise bestimmt werden kann.

Erfahrung.

§. 45. Zwey Grundstükke haben einerley Werth, wenn eins jährlich so viel wirklichen Gewinn giebt als das andere; und wir zahlen für ein Grundstükk eine gewisse Summe Geldes, wenn die Vortheile, welche wir von dem Grundstükke haben, mit denen des Geldes einerley sind.

Anmerkung. Dieses ist freylich nur in so fern wahr, als weder die Person, welche kauft, noch die, welche verkauft, gewinnt; oder als das Grundstükk die Summe Geldes, und diese das Grundstükk werth ist. Und man sieht wohl, daß weder der einen noch der andern Person in diesem Falle ein Grund übrig bleibt, warum sie kauft oder verkauft. Hier läßt sich aber auch der Werth der Grundstükke nicht anders betrachten. Denn es soll hier nicht gezeigt werden,

werden, wie viel irgend jemand bey Ankaufung der Grundstükke gewinnen kann, und welches im Grunde auch nicht zu bestimmen ist; sondern das Verhältniß der Werthe derselben. Durch diese Betrachtungen ist man aber auch zugleich in Stand gesetzt zu finden, wie viel gewonnen oder verlohren ist, wenn man ein Grundstükk gekauft oder verkauft hat.

Zusatz 1. Also sind zwey Grundstükke ihrem Werthe nach einander gleich, wenn beyde jährlich einerley wirklichen Gewinn geben. Ist dieses nicht, so erhält man durch den wirklichen Gewinn die Glieder des Verhältnisses, in dem sie als Grundstükke betrachtet stehen. Denn das Grundstükk, das jährlich zwey Mahl so viel wirklichen Gewinn giebt, als ein anderes, ist auch so viel Mahl mehr werth.

Zusatz 2. Folglich heißt das Verhältniß der Grundstükke bestimmen, das Verhältniß ihrer Werthe bestimmen. Hierzu gehört, daß man weiß, wie viel ein jedes jährlich Kostenaufwand erfordert, und an Produkten oder was man sonst von ihm erhält, einbringt. Denn jenes von diesem abgezogen giebt den wirklichen Gewinn auf ein Jahr.

Zusatz 3. Wenn also zwey Grundstükke A und B, das erste m und das zweyte n Quadratruthen enthält; bey beyden aber jährlich gleicher Kostenaufwand nöthig ist und die Werthe ihrer Produkte einerley sind: so haben diese Grundstükke einerley Werthe. Denn man hat von dem einem jährlich nicht mehr wirklichen Gewinn als von dem andern.

Zusatz 4. Wenn bey dem Grundstükke A jährlich ein eben so großer Kostenaufwand nöthig ist, als bey B; wenn A und B Produkte von einer Art und ungleicher

Güte

Güte, oder von verschiedener Art, oder von einerley Art einerley Güte aber in verschiedenen Mengen liefern, d. h. die Produkte, welche A in einer gewissen Zeit liefert, m Thaler, und die, welche B in eben dieser Zeit giebt, n Thaler werth wären; so verhalten sich die Werthe von A und B, wie $(m - q) : n - q)$, wenn nähmlich q den Kostenaufwand ausdrukt, welcher so wohl an das Grundstükk A als an das B in eben der Zeit verwendet wird, in welcher A m und B n Thaler einbringt. Läßt man A und B die Werthe selbst bedeuten, und setzt $m - q = p$ und $n - q = v$: so verhält sich $A : B = p : v$. Denn in einer gewissen Zeit hat man von dem Grundstükke A den wirklichen Gewinn p, und in eben dieser Zeit von dem Grundstükke B den $= v$. Es sey die Zeit $= t$. Also ist der wirkliche Gewinn von A auf ein Jahr gerechnet $= \frac{p}{t}$ und von $B = \frac{v}{t}$. Mithin verhält sich $A : B = \frac{p}{t} : \frac{v}{t} = p : v$ (Zusatz 1, 2).

Zusatz 5. Die Werthe zweyer Grundstükke A und B, wenn an das erste in einer gewissen Zeit p und an das zwente q Thaler verwendet werden müssen, und wenn jenes in eben der Zeit m Thaler wie dieses an Produkten einbringt, verhalten sich wie $(m - p) : (m - q)$, oder, wenn A und B die Werthe selbst bedeuten, $A : B = (m - p) : (m - q)$. Denn so viel Mahl als $m - p$ größer ist, als $m - q$, eben so viel Mahl ist B geringer A (Zusatz 4).

Zusatz 6. Wenn zwey Grundstükke A und B, das erste in der Zeit t die Einkünfte m und das andere in der Zeit T die Einkünfte n giebt; der Kostenaufwand eines jeden in eben den Zeiten p ist: so verhält sich der jährliche wirkliche

liche Gewinn von A zu dem von B $= \frac{m - p}{t} : \frac{n - p}{T}$, und lößt man A und B die Werthe selbst bedeuten, A:B $= \frac{m - p}{t} : \frac{n - p}{T} = (m - p)\,T : (n - p)\,t$ (Zusatz 4).

Zusatz 7. Hat man an ein Grundstükk in der t Zeit p und an ein anderes in der T Zeit q Thaler verwendet, und bedeutet A den Werth des erstern und B den des zweyten: so verhält sich, wenn jenes in der t und dieses in der T Zeit m Thaler einbringt, $A : B = \frac{m - p}{t} : \frac{m - q}{T} = (m - p)\,T : (m - q)\,t$ (Zusatz 4).

Zusatz 8. Beträgt der Werth der Produkte von einem Grundstükke in der t Zeit m von einem andern in eben der Zeit n Thaler; hat man an jenes in eben dieser Zeit p und an dieses q Thaler verwendet; bedeutet A den Werth des erstern und B den des zweyten: so verhält sich $A:B = \frac{m - p}{t} : \frac{n - q}{t} = (m - p) : (n - q)$ (Zusatz 4).

Zusatz 9. Ist der Kostenaufwand an ein Grundstükk in der t Zeit p, und erhält man von ihm in eben dieser Zeit m Thaler; hat man an ein anderes in der T Zeit q Thaler verwendet, und von ihm die Einnahme n; und bedeutet A den Werth des erstern und B den des zweyten: so verhält sich $A : B = \frac{m - p}{t} : \frac{n - q}{T} = (m - p)\,T : (n - q)\,t$ (Zusatz 4).

Aufgabe.

§. 46. Das Verhältniß zweyer Grundstükke zu bestimmen, wenn das eine A in der Zeit t an Produkten m Thaler liefert, in der Zeit T zum Kostenaufwande p Thaler verlangt; das andere B in der Zeit z durch seine Produkte n Thaler einbringt, und an dasselbe in der Z Zeit q Thaler verwendet werden müssen.

Auflösung. Bringt das Grundstükk A in der t Zeit an Produkten m Thaler ein, so hat man von ihm in einem Jahre $\frac{m}{t}$ Thaler Einnahme. Eben so ist der Kostenaufwand auf ein Jahr gerechnet $= \frac{p}{T}$ Thaler. Mithin der wirkliche Gewinn in einem Jahre $= \frac{m}{t} - \frac{p}{T}$ $= \frac{mT - pt}{Tt}$ Thalern.

Eben daher ist jährlich der wirkliche Gewinn von dem andern Grundstükke $= \frac{nZ - qz}{Zz}$.

Man setze A und B für die Werthe dieser Grundstükke. Also $A : B = \frac{mT - pt}{Tt} : \frac{nZ - qz}{Zz} = (mT - pt)Zz : (nZ - qz)Tt$ (§. 45 Zusatz 4). Folglich auch das erste Grundstükk zum zweyten $(mT - pt)Zz : (nZ - qz)Tt$ (§. 45 Zusatz 2).

Zusatz 1. Es sey die Anzahl der Quadratruthen des Grundstükks $A = a$, die des Grundstükks $B = b$, und der

der Werth einer Quadratruthe vom ersten $=$ A, vom zweyten $=$ B. Also verhält sich $A : B = \frac{mT - pt}{Tta} : \frac{nZ - qz}{Zzb}$. Denn wenn a Quadratruthen jährlich $\frac{mT - pt}{Tt}$ Thaler wirklichen Gewinn geben, so hat man von einer Quadratruthe $\frac{mT - pt}{Tta}$ Thaler.

Eben daher ist in einem Jahre der wirkliche Gewinn von einer Quadratruthe des andern Grundstükks $= \frac{nZ - qz}{Zzb}$.

Es sey $\frac{mT - pt}{Tta} < \frac{nZ - qz}{Zzb}$, und $\frac{(mT - pt)\,x}{Tta} = \frac{nZ - qz}{Zzb}$. Also

$$(mT - pt)\,xZzb = (nZ - qz)\,Tta$$

$$x\,(mT - pt)\,Zzb = (nZ - qz)\,Tta$$

$$x = \frac{(nZ - qz)\,Tta}{(mT - pt)\,Zzb}.$$

Vermöge dieser Formel kann man finden, wie viel Mahl der Werth einer Quadratruthe des Grundstükks B den Werth einer Quadratruthe des Grundstükks A übertrifft; oder, welches einerley ist, wie viel Quadratruthen dieses Grundstükks einer von jenem am Werthe gleich sind.

Zusatz 2. Ist $z = t$, so wird $x = \frac{(nZ - qt)\, aT}{(mT - pt)\, bZ}$. Ist auch $Z = T$, so wird $x = \frac{(nT - qt)\, a}{(mT - pt)\, b}$. Ist $a = b$, so ist $x = \frac{nT - qt}{mT - pt}$. Wenn zwey Grundstükke gleichen Ruthengehalt haben, so verhalten sich die Werthe der einzelnen Quadratruthen eben so wie die der ganzen Grundstükke. Denn $\frac{nT - qt}{mT - pt}$ bestimmt zugleich, wie viel Mahl der Werth des Grundstükks B größer ist, als der des Grundstükks A.

Zusatz 3. Setzt man $T = t$, so ist $x = \frac{(n - q)\, t}{(m - p)\, t} = \frac{n - q}{m - p}$. Wird $n = q$, so wird $x = \frac{n - q}{m - p} = \frac{o}{m - p} = o$, d. h. der Werth einer Quadratruthe vom Grundstükke A verhält sich zu dem einer Quadratruthe des Grundstükks B, wie $(m - p) : o$.

Zusatz 4. Ist aber $m = p$, und n nicht $= q$, so ist $x = \frac{n - q}{m - p} = \frac{n - q}{o} = \infty$, d. i. der Werth einer Quadratruthe des Grundstükks B ist unendlich viel Mahl größer, als der einer Quadratruthe des Grundstükks A; und da die beyden Grundstükke der Voraussetzung nach gleichen Flächeninhalt haben, so verhält sich auch der Werth des ersten Grundstükks A zu dem des zweyten $B = o : (n - q)$.

Anmer-

Anmerkung. Alles was hier von zwey Grundstükken gesagt worden ist, gielt auch von einem das nicht durchaus einerley Güte hat.

Aufgabe.

§. 47. Den Werth eines leeren Platzes zu bestimmen, der mit Holz besät worden ist.

Auflösung. Es sey der Werth dieses Platzes $= x$, das auf demselben gesäte Holz brauche m. Jahre, um zur gehörigen Reife zu kommen, und sey dann n Thaler werth. Demnach ist n ein Kapital, das während m Jahren nach und nach zu dieser Größe gekommen, und nach m Jahren von x zu ziehen ist. Es muß also x von der Größe seyn, daß es dem Käufer einerley ist, x zu verleihen, und die jährlichen Zinsen zu seinem Vortheile anzuwenden, oder von Jahr zu Jahr auch zu verleihen, und wieder Zins davon zu nehmen, oder es für diesen Platz zu geben. Folglich ist n ein Kapital, zu dem x in m Jahren mit Zins und Zinseszinsen kommt. Es sey der Zinsfuß $= r$ d. h. 1 Thaler sey nach einem Jahre $= r$ geworden. Also

$1 : r = x : xr$ im ersten

$1 : r = xr : xr^2$ im zweyten

$1 : r = xr^2 : xr^3$ im dritten

$1 : r = xr^3 : xr^4$ im vierten, und endlich im mten Jahre xr^m. Folglich

$$xr^m = n$$

$$x = \frac{n}{r^m}.$$

Exem-

Exempel. Es sey $r = 1{,}04$; $m = 150$; und $n = 8000$ Thaler. Also $\frac{n}{r^m} = x = \frac{8000}{1{,}04^{150}} = 8000 \times \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{150} = 8000 \left(\frac{100}{104}\right)^{150}$,

$$\log. x = \log. \frac{n}{r^m} = \log. 8000 + 150 \log. 100 - 150 \log. 104.$$

log. 100 =	2,0000000
150 log. 100 =	300,0000000
log. 8000 =	3,9030900
log. 8000 + 150 log. 100 =	303,9030900
150 log. 104 =	302,5549950
log. x =	1,3480950
und x = 22,289 . . . Thaler.	

Anmerkung. Die Bestimmung des Werthes von einem Flekk Holze unterscheidet sich von der eines andern Grundstükks nur darinne, daß man bey dem Flekk Holze nicht nur auf den wirklichen Gewinn sieht, den er jährlich giebt, sondern auch auf die Fortdauer desselben. Man hat hier zu untersuchen, ob auch das Holz wieder so herauf wächst, wie es abgeschlagen wird; ob man alle Jahre den wirklichen Gewinn haben kann, oder ob man einige Zeit fristen muß; ob der Boden durchaus von gleicher Güte, und das Holz von einerley Dichtigkeit und Größe ist, oder nicht. Ist das letztere, so muß man die Plätze mit einander vergleichen können; man muß wissen, wie viel Quadratruthen ein jeder enthält; wie viel Holz auf ihm geschlagen werden kann, und wann es geschlagen werden kann.

Aufgabe.

§. 48. Den Werth eines Torfmoors zu bestimmen.

Auflö-

Auflösung. Es sey die Größe der ganzen Fläche desselben = a Quadratruthen, die Tiefe = b Ruthen, und die Zahl der Jahre, in welchen der Torf wieder nachwächst = c. Also können in einer Zeit von c Jahren ab und in jedem Jahre $\frac{ab}{c}$ Kubikruthen ausgestochen werden ohne fristen zu dürfen. Ist der Werth von einem Fuder, das m Kubikruthen enthält = n, so verhält sich m : $\frac{ab}{c}$ = n : $\frac{abn}{cm}$. Also ist die jährliche Einnahme = $\frac{abn}{cm}$. Gesetzt, es wäre hier keine Ausgabe. Demnach giebt $\frac{abn}{mc}$ den wirklichen Gewinn auf ein Jahr, der als Zins eines Kapitals zu betrachten ist, das den Werth dieses Torfmoors bestimmt (§. 45).

Exempel. Es sey a = 25000 Quadratruthen, b = 2 Ruthen, c = 200 Jahre, m = 5, und n = $1\frac{1}{3}$ = $\frac{4}{3}$ Thaler. Also $\frac{abn}{cm} = \frac{4.2.25000}{3.5.200} = \frac{4.2.50}{3.2} = \frac{4.50}{3} = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$ Thaler. Gesetzt, man erhielt von 100 Thalern jährlich 5 Thaler Zins, man könnte aber, wenn man die Fortdauer dieses Torfmoors mit der Gewährschaft eines Kapitals vergleicht, hier, wenn man das Kapital für den Torfmoor giebt, nur 3 Thaler Zins rechnen. Demnach ist der Torfmoor 2222 Thaler werth.

Zusatz 1. Ist jährlich der wirkliche Gewinn von einem Flekk Akker = a, und der von einem Torfmoore = b, so verhält sich der Werth des Flekk Akkers zu dem des Torfmoors wie a : b.

Zusatz 2. Sollte es sich zutragen, daß ein Torfmoor alle c Jahre auf ein Mahl gänzlich ausgestochen werden müßte, und daß er alle Mahl ein Kapital $= R$ gäbe: so ist R als eine Summe Geldes zu betrachten, zu der ein gewisses Kapital in c Jahren mit Zins und Zinseszinsen gewachsen ist. Es sey der Werth dieses Torfmoors, oder das Kapital, welches nach c Jahren mit Zins und Zinseszinsen R giebt, $= x$. Also $x = \frac{R}{r^c}$, wenn r wieder den Zinsfuß bedeutet. Aber wieder nach c Jahren erhält man R. Also ist der Werth von diesem R, als ein Kapital betrachtet, das man erst nach 2c Jahren benutzen aber sogleich bezahlen soll, $= \frac{R}{r^{2c}}$. Mithin $x = \frac{R}{r^c} + \frac{R}{r^{2c}}$. Da nun nach 3c Jahren wieder ein Kapital $= R$, nach 4c Jahren wieder und so ohne Ende fort erhalten wird, und die Werthe derselben mit zu x gerechnet werden müssen: so ist

$$x = \frac{R}{r^c} + \frac{R}{r^{2c}} + \frac{R}{r^{3c}} + \frac{R}{r^{4c}} + \frac{R}{r^{5c}} + \frac{R}{r^{6c}} + \frac{R}{r^{7c}} + \ldots\ldots + \frac{r}{r^{\infty c}}$$

$$\frac{x}{R} = \frac{1}{r^c} + \frac{1}{r^{2c}} + \frac{1}{r^{3c}} + \frac{1}{r^{4c}} + \frac{1}{r^{5c}} + \frac{1}{r^{6c}} + \frac{1}{r^{7c}} + \ldots\ldots + \frac{1}{r^{\infty c}}$$

$$\frac{x}{R} \times \frac{1}{r^c} = \frac{1}{r^{2c}} + \frac{1}{r^{3c}} + \frac{1}{r^{4c}} + \frac{1}{r^{5c}} + \frac{1}{r^{6c}} + \frac{1}{r^{7c}} + \frac{1}{r^{8c}} + \ldots\ldots + \frac{1}{r^{\infty c}}$$

$$\frac{x}{R} - \frac{x}{Rr^c} = \frac{1}{r^c}$$

$$\frac{x}{R} - \frac{x}{Rr^c} = \frac{1}{r^c}$$

$$x\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{Rr^c}\right) = \frac{1}{r^c}$$

$$x = \frac{\frac{1}{r^c}}{\frac{1}{R} - \frac{1}{Rr^c}}$$

$$x = \frac{\frac{1}{r^c}}{\frac{r^c - 1}{Rr^c}}$$

$$x = \frac{Rr^c}{(r^c - 1)r^c}$$

$$x = \frac{R}{r^c - 1}.$$

Siebentes Kapitel.

Von Bestimmung der Theile eines Grundstükks von verschiedenen Erdarten, oder der Grundstükke von ungleicher Güte.

Erklärung.

§. 49. Grundstükke von ungleicher Güte sind solche wo jährlich von dem einem ein größerer oder kleinerer wirkliche Gewinn erhalten wird als von dem andern; und unter einem Grundstükke von verschiedenen Erdarten versteht man ein solches, das aus Theilen besteht, von welchen jährlich einer mehr wirklichen Gewinn giebt als der andere.

Satz.

§. 50. Sind zwey Grundstükke A und B von ungleicher Güte gegeben; ist ein Quadratruthe von B mehr werth als eine von A: so muß ein gewisser Theil von A größer seyn als einer von B, wenn beyde einerley Werthe haben sollen.

Beweis. Man setze, es wären a Quadratruthen von A eben so viel werth als b Quadratruthen von B. Wenn nun der Werth einer Quadratruthe von A geringer ist, als der einer Quadratruthe von B, so haben auch a Quadratruthen von A einen geringern Werth als

a Quaa Quadratruthen von B. Also muß a bey dem letztern Grundstükke kleiner werden; wenn der Werth dieser Quadratruthen = dem der Quadratruthen b werden soll. Folglich drukt b weniger Quadratruthen aus als a.

Zusatz 1. Ist A und B in solche Theile getheilt worden, die einerley Werthe unter sich haben; so muß also jeder Theil von A am Flächeninhalte größer seyn als einer von B.

Zusatz 2. Wenn man also zwey Grundstükke von verschiedener Güte ihrem Werthe nach in gleiche Theile theilen will; so muß man erstlich das Verhältniß der Werthe einzelner Quadratruthen kennen. Man setze es verhalte sich der Werth einer Quadratruthe von A zu dem einer Quadratruthe von B = f : c, oder, welches einerley ist c Quadratruthen von B wären f Quadratruthen von A am Werthe gleich. Also sind auch ac Quadratruthen von B eben so viel werth als af Quadratruthen von A.

Zusatz 3. Folglich müssen ac Quadratruthen von B abgeschnitten werden, so bald man af Quadratruthen von A weggenommen hat, nnd af Quadratruthen von A, so bald ac Quadratruthen von B weggenommen sind: wenn beyde Theile einerley Werth haben sollen.

Zusatz 4. Also verhält sich a : b = f : c, und $b = \frac{ac}{f}$; a aber $= \frac{bf}{c}$.

Aufgabe.

§. 51. Die Zahl der Quadratruthen für solche Theile zweyer Grundstükke von verschiedener Güte, die einerley Werth haben sollen, zu bestimmen.

Auflösung. Es sey das eine Grundstükk A das andere B; der Werth einer Quadratruthe von A verhalte sich zu dem von B $= f : c$; A enthalte a, B b Quadratruthen; die Anzahl der Theile, die aus beyden Grundstükken gemacht werden sollen: sey $= n$, und der Flächeninhalt eines jeden von $A = x$. Also ist der Flächeninhalt einer jeden Abtheilung von $B = \frac{cx}{f}$ (§. 50 Zus 4)

Man setze die Anzahl der Theile die aus A gemacht werden können $= y$. Also ist die Anzahl der Theile, in welche B zertheilt werden muß, $= n - y$; $xy = a$, und $(n - y)\frac{cx}{f} = b$. Mithin $y = \frac{a}{x}$. Folglich

$$\left(n - \frac{a}{x}\right)\frac{xc}{f} = b$$

$$\frac{nxc}{f} - \frac{ac}{f} = b$$

$$nxc - ac = bf$$

$$nxc = bf + ac$$

$$x = \frac{bf + ac}{nc}.$$

Exempel. Es sey $a = 20$ Quadratruthen, $b = 30$ Quadratruthen, $c = 2$, $f = 1$, und $n = 5$. Also $x = \frac{bf + ac}{nc} = \frac{30 + 40}{2.5} = 7$ Quadratruthen.

Folglich ist der Inhalt einer Abtheilung von $B = \frac{xc}{f} = \frac{7 \cdot 2}{1} = 14$ Quadratruthen. Mithin hat man aus $A \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$ Theile, d. i. zwey ganze und $\frac{6}{7}$ eines Theils, zu dem noch von B hinzu kommen muß. Von B hat man $\frac{30}{14} = 2\frac{1}{7}$ Theile, d. i. zwey ganze und noch ein Stükk, das mit jenem $\frac{6}{7}$ Theile auch ein verlangten Theil ausmacht. Also geben beyde Grundstükke fünf Theile die ihrem Werthe nach einander gleich sind.

Anmerkung. So bald bestimmt ist wie viel Quadratruthen auf einen Theil des einen, und wie viel auf einen des andern Grundstükks genommen werden müssen: so können die Grundstükke nach dem zweyten und dritten Kapitel zertheilt werden.

Zusatz 1. Also ist der Flächeninhalt eines nten Theils der beyden Grundstükke A und B, desjenigen der von A genommen werden soll $= \frac{bf + ac}{nc}$, und der eines solchen Theils, den man von B abschneiden will $= \frac{bf + ac}{nc}$ $\times \frac{c}{f} = \frac{(bf + ac)c}{ncf} = \frac{bf + ac}{nf}$ (§. 50 Zusatz 4).

Zusatz 2. Demnach ist der Inhalt einer Abtheilung von dem Grundstükke A $= \frac{bf + ac}{n} : c$ und der einer Abtheilung vom Grundstükee B $= \frac{bf + ac}{n} : f$. Da c Quadratruthen von B eben so viel Werth haben als f Quadratruthen des Grundstükks A so ist $\frac{ac}{f}$ die Zahl der Quadratruthen, die von B genommen, eben so viel Werth haben, als a Quadratruthen des Grundstükks A. Also $b + \frac{ac}{f} = \frac{bf + ac}{f}$ der Inhalt einer Fläche, die

eben

eben so viel Werth hat, als die beyden Grundstükke A und B zusammen genommen. Eben daher ist auch $\frac{bf}{c}$ die Zahl der Quadratruthen, die, von A genommen, b Quadratruthen des Grundstükks B am Werthe gleich sind. Also ist auch $\frac{bf}{c} + a = \frac{bf + ac}{c}$ der Inhalt eines Grundstükks, das durchaus von gleicher Güte ist und mit A und B zusammen genommen einerley Werth hat.

Hieraus folgt, daß man bey Zertheilung zweyer Grundstükke von verschiedener Güte den Flächeninhalt derselben auf den eines Grundstükks, das durchaus von gleicher Güte ist, bringt. Eine jede Quadratruthe dieses dritten Grundstükks hat entweder mit einer Quadratruthe von A, wie die erste, oder von B, wie die zweyte Formel giebt, einerley Werth. Ist dieses, so giebt die Zahl aller Quadratruthen durch n dividiert die Zahl der Quadratruthen eines Theils von B; ist jenes, so giebt der Quotient die Zahl der Quadratruthen einer Abtheilung des Grundstükks A.

Zusatz 3. Wenn man die beyden Grundstükke A und B in Theile M, N, V, P, Q zertheilen, deren Werthe sich verhalten sollen, wie die Zahlen m, n, v, p, q, so darf man nur m+n+v+p+q anstatt jenes n setzen. Denn $\frac{bf+ac}{m+n+v+p+q}$ ist = der Zahl der Quadratruthen eines (m+n+v+p+q) ten Theils der beyden Grundstükke A und B, oder von (bf + ac) (Zusatz 2). Also giebt $\frac{(bf+ac)m}{m+n+v+p+q}$ die Zahl der Quadratruthen des Theils M; $\frac{(bf+ac)n}{m+n+v+p+q}$ die Zahl der

Qua-

Quadratruthen des Theils N; $\frac{(bf+ac)v}{m+n+v+p+q}$ die Zahl der Quadratruthen von V; $\frac{(bf+ac)p}{m+n+v+p+q}$ die Zahl der Quadratruthen von P; und $\frac{(bf+ac)q}{m+n+v+p+q}$ die Zahl der Quadratruthen von Q. Nun ist $\frac{(bf+ac)m}{(m+n+v+p+q)c}$ der Inhalt des Stükks M, und $\frac{(bf+ac)n}{(m+n+v+p+q)c}$ der Flächeninhalt des Stükks N, wenn beyde Stükke Abtheilungen von A werden sollen (Zusatz 2). Eben daher ist $\frac{(bf+ac)v}{(m+n+v+p+q)c}$ der Flächeninhalt von V, $\frac{(bf+ac)p}{(m+n+v+p+q)c}$ der von P, und $\frac{(bf+ac)q}{(m+n+v+p+q)c}$ der von Q, wenn V, P, Q Abtheilungen des Grundstükks A werden sollen; sollen aber M, N, V, P Abtheilungen von B werden, so giebt $\frac{(bf+ac)m}{(m+n+v+p+q)f}$ die Zahl der Quadratruthen des ersten, $\frac{(bf+ac)n}{(m+n+v+p+q)f}$ die des zweyten, $\frac{(bf+ac)v}{(m+n+v+p+q)f}$ die des dritten, $\frac{(bf+ac)p}{(m+n+v+p+q)f}$ die des vierten (Zusatz 2).

Anmerkung. Ist $a = \frac{(bf+ac)m}{(m+n+v+p+q)c}$ so giebt b die Theile N, V, P, Q. Ist aber $a > \frac{(bf+ac)m}{(m+n+v+p+q)c}$

$\frac{(bf+ac)n}{(m+n+v+p+q)c}$ und $< \frac{(bf+ac)m}{(m+n+v+p+q)c} + \frac{(bf+ac)n}{(m+n+v+p+q)c} + \frac{(bf+ac)v}{(m+n+v+p+q)c}$: so werden M, N Theile von A. P, Q Theile von B und V ein Theil von beyden Grundstükken.

Exempel. Es sey $a = 150\square^\circ$, $b = 300\square^\circ$, $c = 3$, $f = 1$, $m = 2$, $n = 4$, $v = 3$, $p = 5$, $q = 1$. Also $\frac{(bf+ac)m}{(m+n+v+p+q)c} = \frac{(300+450)2}{(2+4+3+5+1)3} = \frac{1500}{3 \cdot 15} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$ Quadratruthen = dem Inhalte von M; ferner $\frac{(bf+ac)n}{(m+n+v+p+q)c} =$

$\frac{(300+450)4}{(2+4+3+5+1)3} = (33\frac{1}{3})2 = 66\frac{2}{3}$ Quadratruthen = dem Inhalte von N; ferner $\frac{(bf+ac)v}{(m+n+v+p+q)c}$

$\frac{(300+450)3}{(2+4+3+5+1)3} = \frac{300+450}{2+4+3+5+1} = \frac{750}{15} = \frac{150}{3} = 50$ Quadratruthen = dem Inhalte von V.

Nun ist $33\frac{1}{3} + 66\frac{2}{3} + 50 = 150$ Quadratruthen. Demnach giebt A die Theile M, N, V, und B, die P, Q.

Aufgabe.

§. 52. Die Theile einer Gemeinweide zu bestimmen, an der mehrere Dorfschaften Antheil haben und unter sich theilen wollen.

Auf-

Auflösung. Der Nutzen, den jede Dorfschaft von der Weide zu ziehen hat, steht mit der Zahl des Viehes, das sie darf weiden lassen, im Proportion. Also auch der Werth ihrer Triftgerechtigkeiten. Es mögen die Dorfschaften A, B, C seyn; A habe das Recht a, B b, C c Kühe weiden zu lassen. Es mögen A, B, C der Werthe der Triftgerechtigkeiten selbst bedeuten. Also verhält sich

$$A : B = a : b$$
$$B : C = b : c.$$

Es habe die Gemeinweide M Quadratruthen.

Man zertheile M nach den Verhältnissen der Zahlen a, b, c. Denn es muß der Werth einer jeden Abtheilung dem der Triftgerechtigkeit proportional seyn.

Anmerkung. Besteht die Gemeinweide aus verschiedenen Erdarten, so wird §. 51 Zusatz 3 das nöthige gesagt seyn.

Aufgabe.

§. 53. Es soll gefunden werden, wie viel jemanden Land anstatt eines Grundstükks, das aus dreyerley Erdarten besteht, zugemessen werden muß.

Auflösung. Es mögen die drey verschiedenen Erdarten des Grundstükks A, B, C heißen; eine Quadratruthe von A verhalte sich in Ansehung ihres Werthes zu einer von B = m : n, und eine von B zu einer von C = n : p; A enthalte a, B b, C c Quadratruthen, die Zahl der Quadratruthen des Flekk Landes, den diese Person für ihr Grundstükk erhalten soll, sey = x, und der Werth einer jeden Quadratruthe, verhalte sich zu dem einer Quadratruthe von A = q : m. Also verhält sich

$$m : q = a : \frac{aq}{m}$$

$$n : q = b : \frac{bq}{n}$$

$$p : q = c : \frac{cq}{p}.$$ Folglich

$$\frac{aq}{m} + \frac{bq}{n} + \frac{cq}{p} = \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p}\right) q = x.$$

Aufgabe.

§. 54. Die Grenze CE, Fig. 54 Tab. VII, welche zwischen zwey Grundstükken von verschiedener Güte ist, so zu verändern, daß sie mit AB parallel wird.

Auflösung. Es sey DF die parallele Grenze, welche so gezogen werden muß, daß der Eigenthümer dieses Grundstükks weder gewinnt noch verliert. Weder dieses noch jenes geschieht, wenn die Fläche ABDF mit ABEC einerley Werth hat, oder wenn das Dreyekk FCG in Ansehung seines Werthes dem Dreyekke GDE gleich ist. Es verhalte sich die Erdart unter CE in Ansehung ihrer Güte zu der über CE, oder der Werth einer Quadratruthe von jener verhalte sich zu dem einer Quadratruthe von dieser $= a : b$. Es sey AF und BE auf AB senkrecht. Also CF und DE auf FD. Daher der Inhalt des Dreyekks CFG, wenn man CF, FG, GD und DE zugleich die Anzahlen ihrer Fuß bedeuten läßt, $CF \times \frac{1}{2}FG$, und der des Dreyekks $GDE = GD \times \frac{1}{2}DE$. Nun verhält sich $1\,\square : GD \times \frac{1}{2}DE = b : GD \times \frac{1}{2}DE \times b$ und $1\,\square : GF \times \frac{1}{2}CF = a : GF \times \frac{1}{2}CF \times a$. Folglich

$$GF \times \tfrac{1}{2}CF \times a = GD \times \tfrac{1}{2}DE \times b \text{ (per hyp.)}$$

$$\overline{GF \times \tfrac{1}{2}CF \quad = GD \times \tfrac{1}{2}DE \times b : a.}$$

Es

Es sey DE $=$ x Fuß. Nun ist AF $=$ BD, BE und AC bekannt. Jene Linie sey $=$ g und diese $=$ f Fuß. FC $=$ y Fuß. Also AF $=$ f $+$ y, und BD $=$ g $-$ x $=$ f $+$ y. Demnach y $=$ g $-$ x $-$ f. Folglich FG $\times$ $\frac{1}{2}$FC $= \frac{GD \times \frac{1}{2}DE \times b}{a}$, FG $\times$ (g $-$ x $-$ f) $= \frac{GD \times bx}{a}$

und FG $\times$ (g $-$ x $-$ f) a $=$ GD $\times$ bx.

Da nun der Winkel CGF $=$ ∟ DGE, und der Winkel CFG $=$ ∟ GDE $=$ einem rechten ist, so verhält sich

$$FC : FG = DE : GD$$
$$(g-x-f) : FG = x : GD$$

$$\frac{FG \times x}{g-x-f} = GD. \text{ Folglich}$$

$$FG \times (g-x-f)a = bx\frac{FG \times x}{g-x-f}$$

$$FG \times (g-x-f)^2 a = bx^2 \times FG$$

$$(g-x-f)^2 a = bx^2$$

$$\frac{(g-x-f)^2}{x^2} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{g-x-f}{x} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$g-x-f = x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$g-f = x + x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$g-f = x\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

$$\frac{g-f}{1+\sqrt{\frac{b}{a}}} = x.$$

Exem=

Exempel. Es sey $b = 1$, $a = 4$, $f = 3^{\circ}$, $g = 5^{\circ}$. Also $\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$; $g - f = 5^{\circ} - 3^{\circ} = 2^{\circ}$;

$$\frac{g-f}{1+\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{2}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3} = 1{,}333 \ldots$$

Ruthen. Demnach $BD = BE - DE = BE - x = 5^{\circ} - 1\frac{1}{3}^{\circ} = 3\frac{2}{3}^{\circ} = AF$, $FC = AF - AC = 3\frac{2}{3} - 3^{\circ} = \frac{2}{3}^{\circ}$. Also $\Delta FCG : \Delta GDE = FC^q : DE^q = (\frac{2}{3})^2 : (\frac{4}{3})^2 = 4 : 16 = 1 : 4 = a : b$.

Zusatz. Ist $a = b$, so ist $\sqrt{\frac{b}{a}} = 1$, und $\frac{g-f}{1+\frac{b}{a}} = \frac{g-f}{2} = x$.

Aufgabe.

§. 55. Anstatt der Grenze EF, Fig. 57 Tab. VIII, aus dem gegebenen Punkte D die GD zu ziehen, wenn zwischen ED und GF Erdarten von verschiedener Güte sind.

Auflösung. Damit weder der eine noch der andere Eigenthümer der Grundstükke, welche von EF getrennt sind, verliert: so muß der Werth des Dreyekks EDF dem des Dreyekks DGF gleich seyn. Die Linien ED, NI, MH, und GF, welche die verschiedenen Erdarten begrenzen, lassen sich für parallel annehmen. Denn wenn sie es nicht sind, so kann man sie nach §. 54 in eine solche Lage bringen. Man ziehe EP auf PF senkrecht. Daher ist EO die Höhe des Dreyekks KDI, EQ die des Dreyekks MDH, EP die Höhe des Dreyekks GDF, und auch zugleich die des Dreyekks DEF. Da ED, EO, EQ, EP für bekannt angenommen werden können, so setze man $ED = a$, $EO = b$, $EQ = c$, $EP = d$ Fuß. Also $OP = d - b$, $OQ = c - b$, $QP = d - c$. Es sey fer-

ferner GF $= x$ Fuß, und die Werthe der einzelnen Quadratruthen von den Erdarten A, B, C mögen sich nach der Reihe verhalten wie die Zahlen m, n, p. Nun verhält sich

$$QP : LH = EP : ED$$

$$\frac{(d-c)\,a}{d} = LH, \text{ und}$$

$$\frac{(d-c)\,a\,(d-c)}{2d} = \frac{(d-c)^2 a}{2d} = \text{dem Inhalte des}$$

Dreyekks LHF; ferner

$$OP : NI = EP : ED$$

$$(d-b) : NI = d : a$$

$$\frac{(d-b)\,a}{d} = NI, \text{ und}$$

$$\frac{(d-b)\,a\,(d-b)}{2d} = \frac{(d-b)^2 a}{2d} = \text{dem Inhalte des Dreyekks}$$

NIF. Also NIHL $= \triangle NIF - \triangle LHF = \frac{(d-b)^2 a}{2d} - \frac{(d-c)^2 a}{2d}$

$= \frac{(d-b)^2 - (d-c)^2\,a}{2d}$. Der Inhalt des Dreyekks EDF ist $= \frac{1}{2}ad$. Also der Inhalt des Trapezes EDIN $= \frac{1}{2}ad - \frac{(d-b)^2 a}{2d} = \frac{(d^2 - (d-b)^2)\,a}{2d}$.

Nun verhält sich der Werth einer Quadratruthe von der Erdart C zu dem einer Quadratruthe von der Erdart A $= p : m$; oder, welches einerley ist, m Quadratruthen von der Erdart A haben mit p Quadratruthen von der Erdart C einerley Werth. Also $p : m = \frac{(d-c)^2 a}{2d}$: $\frac{(d-c)^2 am}{2dp}$, d. i. $\frac{(d-c)^2 am}{2dp}$ ist die Zahl der Quadratruthen, die von der Erdart A eben den Werth haben, als $\frac{(d-c)^2 a}{2d}$ Quadratruthen von der Erdart C.

Eben daher ist die Zahl der Quadratruthen des Trapezes NIHL, wenn es bey gleichem Werthe mit EDIN einerley Erdart in sich faßte,

$$\frac{(d-b)^2-(d-c)^2 a}{2d}\times\frac{m}{n}=\frac{((d-b)^2-(d-c)^2)am}{2dn}.$$

Folglich ist der Inhalt des Dreyekks EDF, wenn es ohne seinen Werth zu verändern, durchaus die Erdart A einschlösse

$$=\frac{(d^2-(d-b))a}{2d}+\frac{((d-b)^2-(d-c)^2)am}{2dn}+\frac{(d-c)^2 am}{2dp}$$

$$=\frac{(d^2-(d^2-2db+b^2))a}{2d}+\frac{((d^2-2db+b^2)-(d^2-2dc+c^2))am}{2dn}+\frac{(d-c)^2 am}{2dp}$$

$$=\frac{(d^2-d^2+2db-b^2)a}{2d}+\frac{(d^2-2db+b^2-d^2+2dc-c^2)am}{2dn}+\frac{(d-c)^2 am}{2dp}$$

$$=\frac{(2db-b^2)a}{2d}+\frac{(-2db+b^2+2dc-c^2)am}{2dn}+\frac{(d-c)^2 am}{2dp}$$

$$=\frac{(2d-b)ba}{2d}+\frac{((c-b)2d+(b+c)(b-c))am}{2dn}+\frac{(d-c)^2 am}{2dp}$$

Man setze diesen Ausdrukk $= M$. Es verhält sich ferner

$$EO : KI = EP : GF$$

$$b : KI = d : x$$

$$\frac{bx}{d}=KI, \text{ und}$$

$\frac{b^2x}{2d}=$ dem Inhalte des Dreyekks DKI; ferner

$$EQ : MH = EP : GF$$

$$c : MH = d : x$$

$\frac{c^2x}{2d}=$ dem Inhalte des Dreyekks MHD. Also der Inhalt

halt des Trapezes KIHM $= \Delta MDH - \Delta KDI = \frac{c^2x - b^2x}{2d}$

$= \frac{(c^2 - b^2)x}{2d} = \frac{(c+b)(c-b)x}{2d}$.

Endlich der Inhalt des Dreyeks GDF $= \frac{dx}{2}$, und der Inhalt des Trapezes GMHF $= \frac{dx}{2} - \frac{c^2x}{2d} = \frac{d^2x - c^2x}{2d}$

$= \frac{(d+c)(d-c)x}{2d}$. Wenn nun MKIH und GMHF mit KDI bey gleichem Werthe Erdarten von einerley Güte in sich faßten, so würde die Zahl der Quadratruthen des ersten $= \frac{(c+b)(c-b)x}{2d} \times \frac{m}{n} = \frac{(c+b)(c-b)xm}{2dn}$, und des zweyten $= \frac{(d+c)(d-c)x}{2d} \times \frac{m}{p} = \frac{(d+c)(d-c)xm}{2dp}$.

Also $\frac{b^2x}{2d} + \frac{(c+b)(c-b)xm}{2dn} + \frac{(d+c)(d-c)xm}{2dp} =$ dem Inhalte des Dreyeks GDF, wenn es bey einerley Werthe durchaus die Erdart A einschlösse. Folglich

$$\frac{b^2x}{2d} + \frac{(c+b)(c-b)xm}{2dn} + \frac{(d+c)(d-c)xm}{2dp} = M$$

$$\frac{b^2xpn + (c+b)(c-b)xmp + (d+c)(d-c)xmn}{2dpn} = M$$

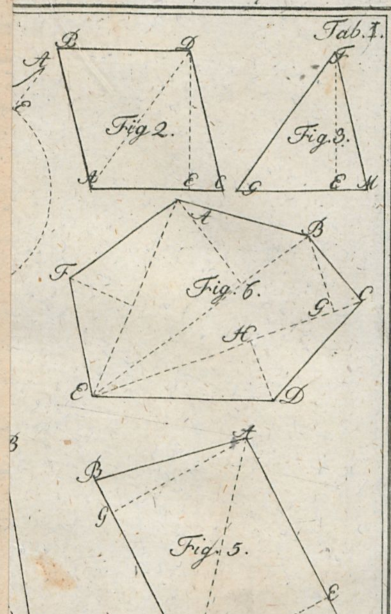
$$b^2xpn + (c+b)(c-b)xmp + (d+c)(d-c)xmn = 2Mdpn$$

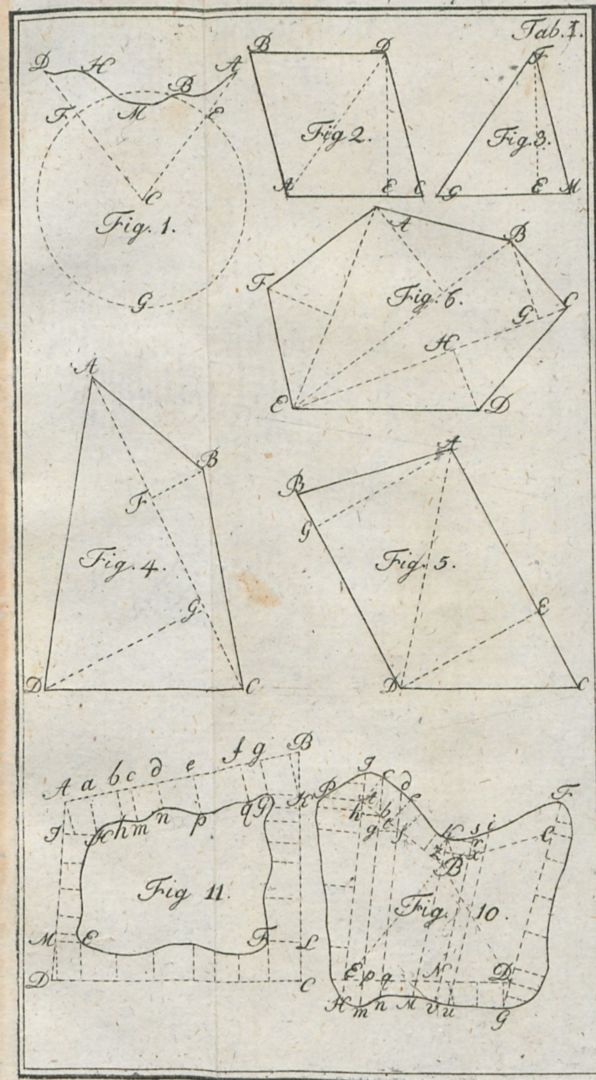
$$(b^2pn + (c+b)(c-b)mp + (d+c)(d-c)mn)x = 2Mdpn$$

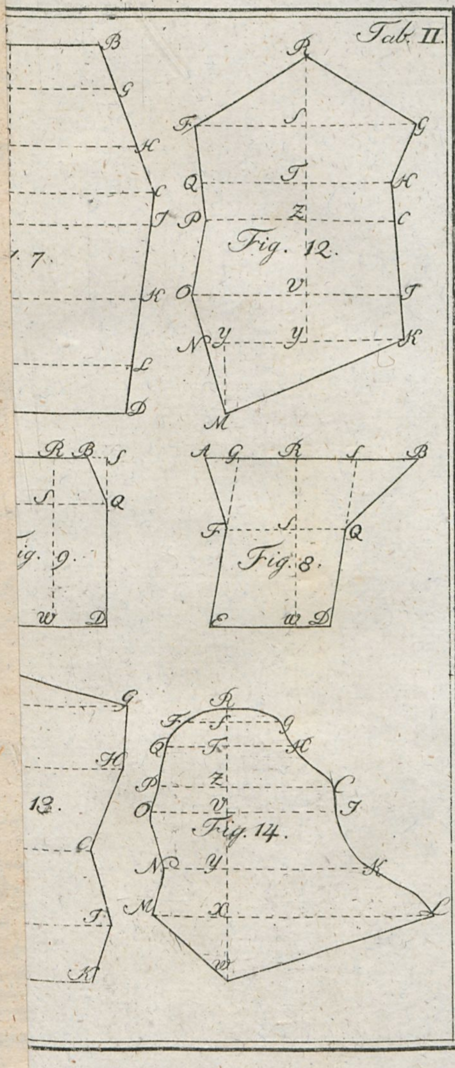
$$x = \frac{2Mdpn}{b^2pn + (c+b)(c-b)mp + (d+c)(d-c)mn}$$

Verzeichniß der Drukkfehler in der Vorrede

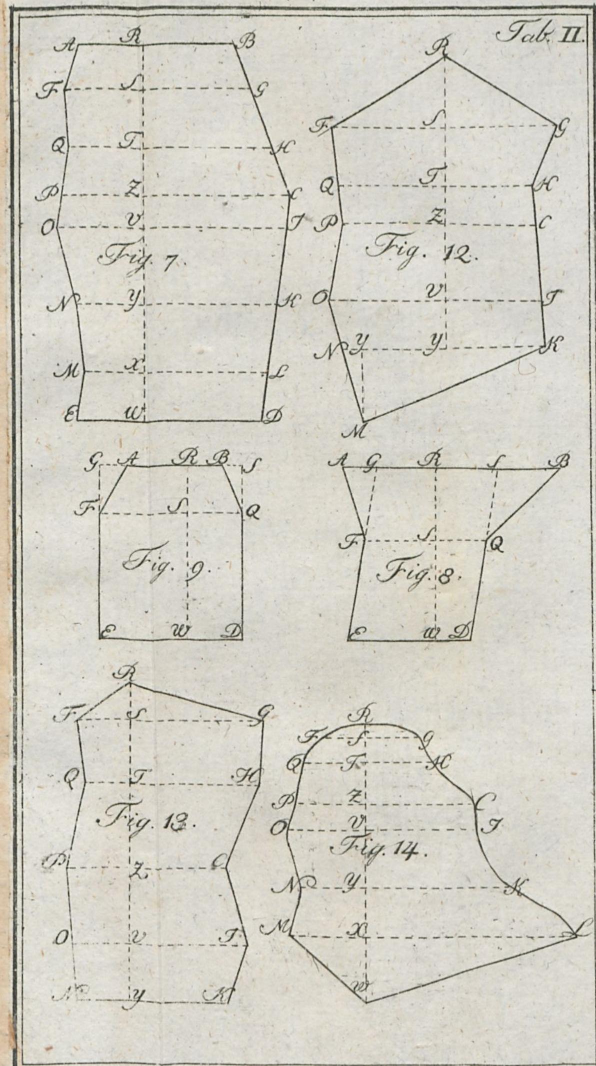
Seite	9	Zeile	8	andern	anstatt	an andern
„	12	„	4	Orte	„	Oerter
„	15	„	5	einig	„	einige
				und übrigens		
„	19	„	11	$-mn$	„	$+mn$
„	21	„	33	Genzen	„	Grenzen
„	22	„	18	Dann	„	Denn
„	24	„	23	$hE, \frac{2}{3}ED$	„	$hE = \frac{2}{3}ED$
„	28	„	23	nnd	„	in
„	29	„	3	$\llcorner AFD$	„	$\llcorner BFD$
„	31	„	27	df	„	bf
„	36	„	17	in welchen	„	in welchem
„	37	„	6	:	„	$=$
„	37	„	25	OHIP	„	OGIP
„	37	„	31	diesem	„	diesen
„	38	„	30	$\triangle$OGIP	„	OGIP
„	38	„	32	$\triangle$GHFI	„	GHFI
„	39	„	5	$: n$	„	$: q$
„	39	„	17	auswelchen		aus welchem
„	41	„	21	$x = \surd b^2 \frac{1}{2} = b \surd \frac{1}{2}$	„	$x = \surd b^2 \frac{1}{4} = b \surd \frac{1}{4}$
„	42	„	15	nach weichen	„	nach welchem
„	42	„	26	nun	„	über
„	50	„	10	$-p+q$	„	$-p-q$
„	52	„	4	aus welchen		aus welchem
„	52	„	12	FC	„	FL
„	58	„	4	$\surd(\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3}b)$	„	$\surd(\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3}b^2)$
„	58	„	11	$\frac{(a+b)c(p+q}{p+q+v}$		$\frac{(a+b)c(p+q)}{2(p+q+v)}$
„	58	„	18	$x \quad \surd($	„	$x = \surd($
„	62	„	17	$\frac{2mb}{c}$	„	$\surd\frac{2mb}{c}$
„	72	„	16	QI	„	OI
„	75	„	36	$\frac{x(a-b)}{c}$	„	$\frac{x(b-a)}{c}$
„	80	„	16	x	„	ax
„	87	„	28	zerlegt	„	zerlege
„	96	„	6	$= 455$	„	$= 456$
„	108	„	20	$\frac{abd}{f}$	„	$\frac{abd}{2f}$
„	118	„	14	$y :$	„	$: y$
„	122	„	8	$+rQ = +1,4°$	„	$-rQ = -1,4°$
„	124	„	9	$\triangle$EAC	„	$\triangle$EHC
„	128	„	29	$a =$	„	$2a =$

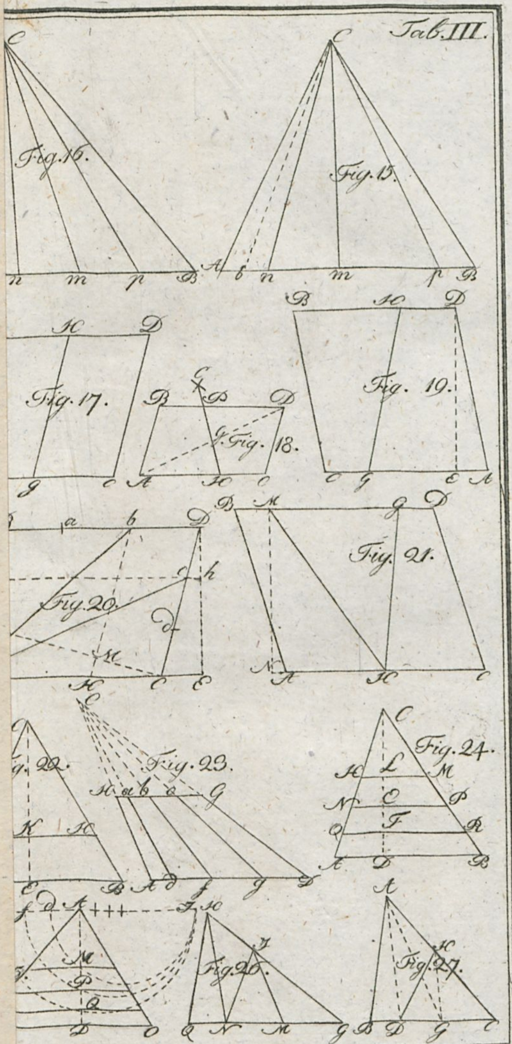

Tab. I.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 6.
Fig. 5.
Fig. 10.

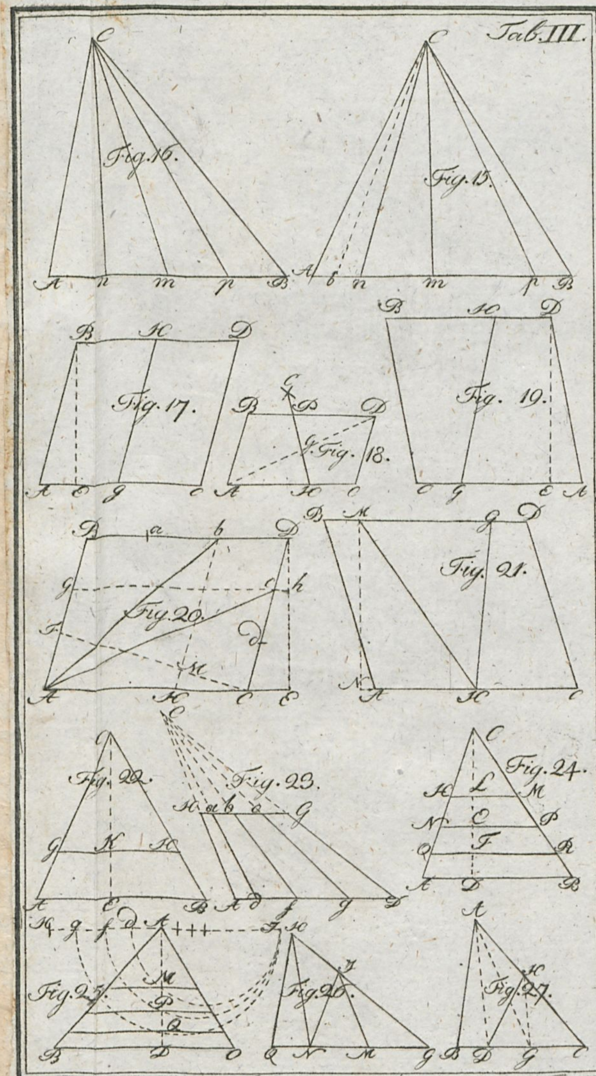

Tab. I.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 6.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig 11.
Fig. 10.


Tab. II.
Fig. 12.
. 7.
ig. 9.
Fig. 8.
13.
Fig. 14.

Tab. II




Tab. III.
Fig. 16.
Fig. 15.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 26.
Fig. 27.


Tab. III.
Fig. 16.
Fig. 15.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.

Tab. IV.

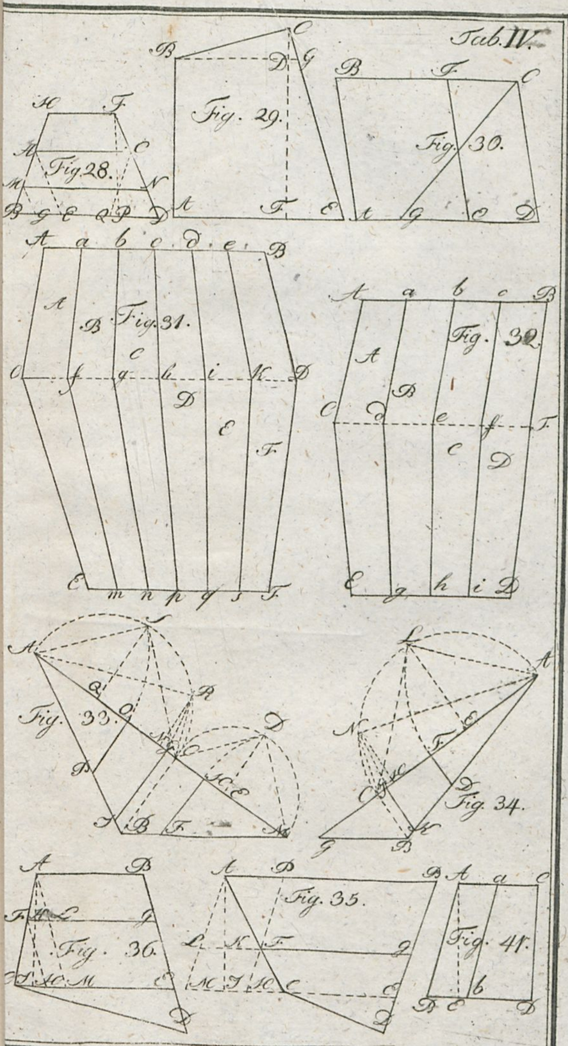
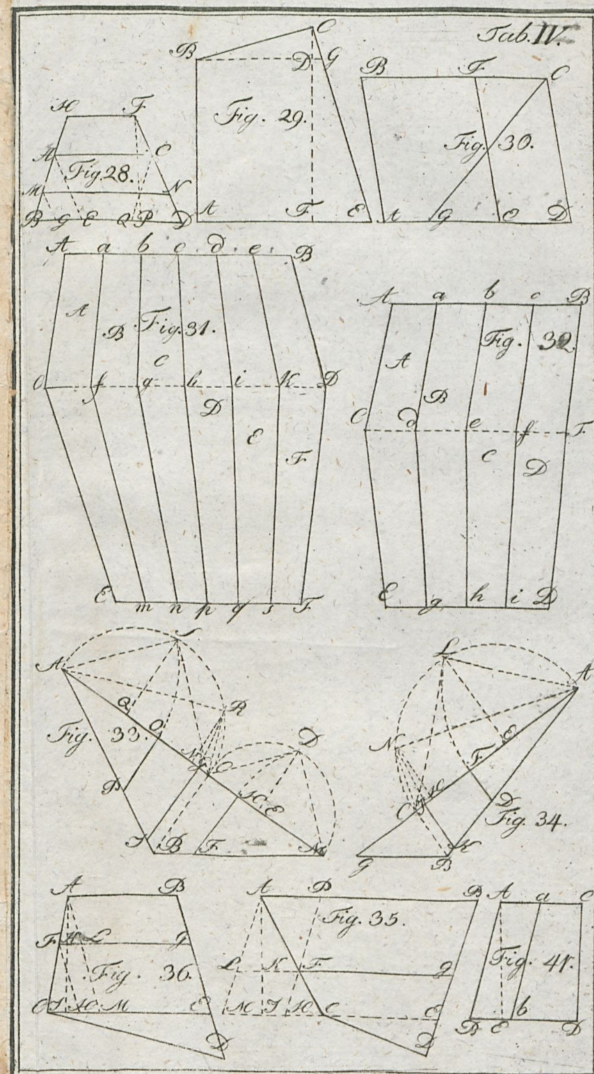
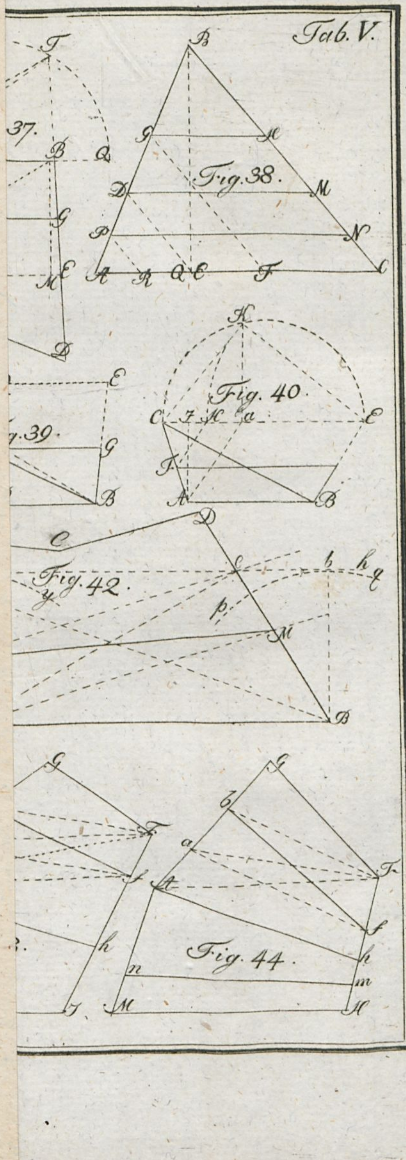
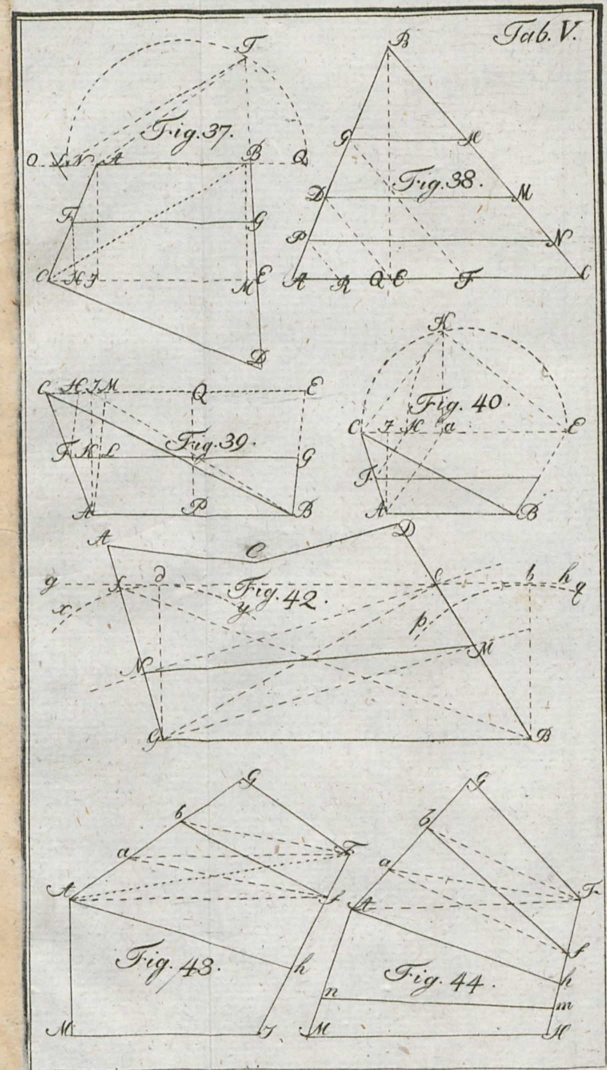


Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 41.


Tab. IV.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 41.

Tab. V.




Tab. V.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.

Tab. VI.

Fig. 45.

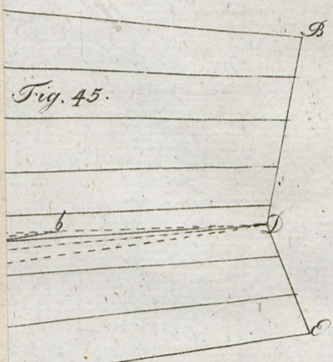


Fig. 49.

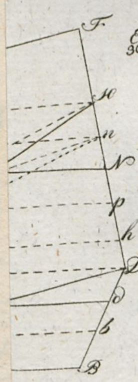
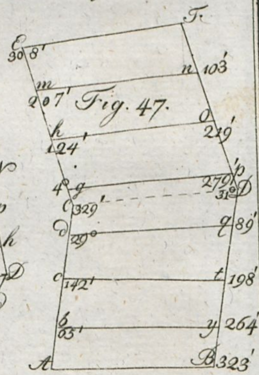


Fig. 47.



Tab. VI.

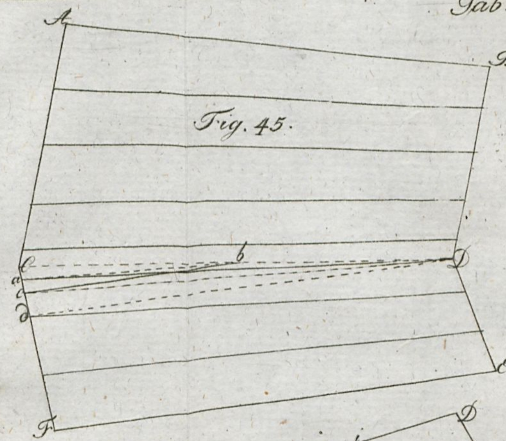


Fig. 45.

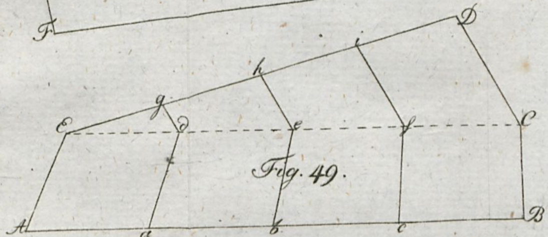


Fig. 49.

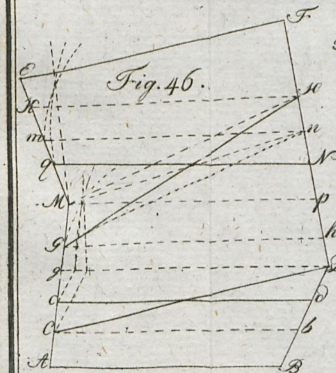


Fig. 46.

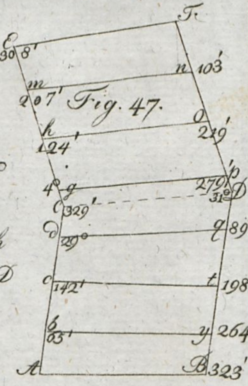
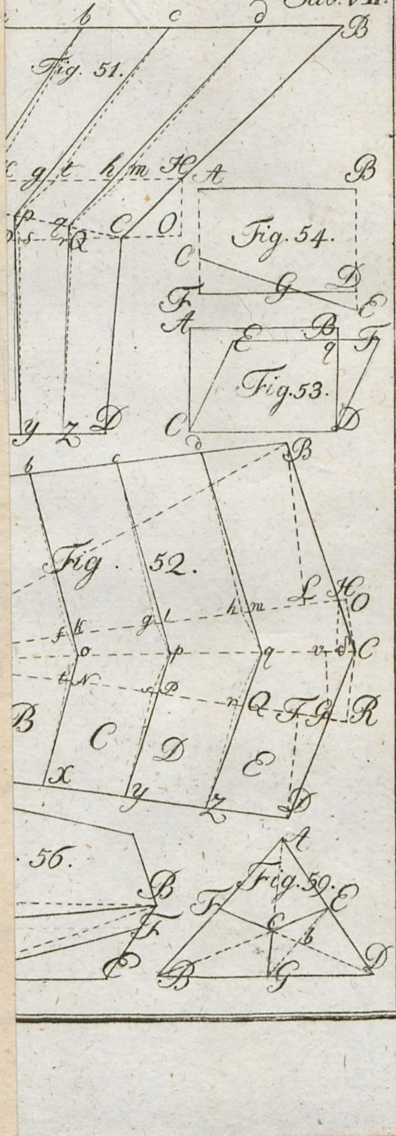
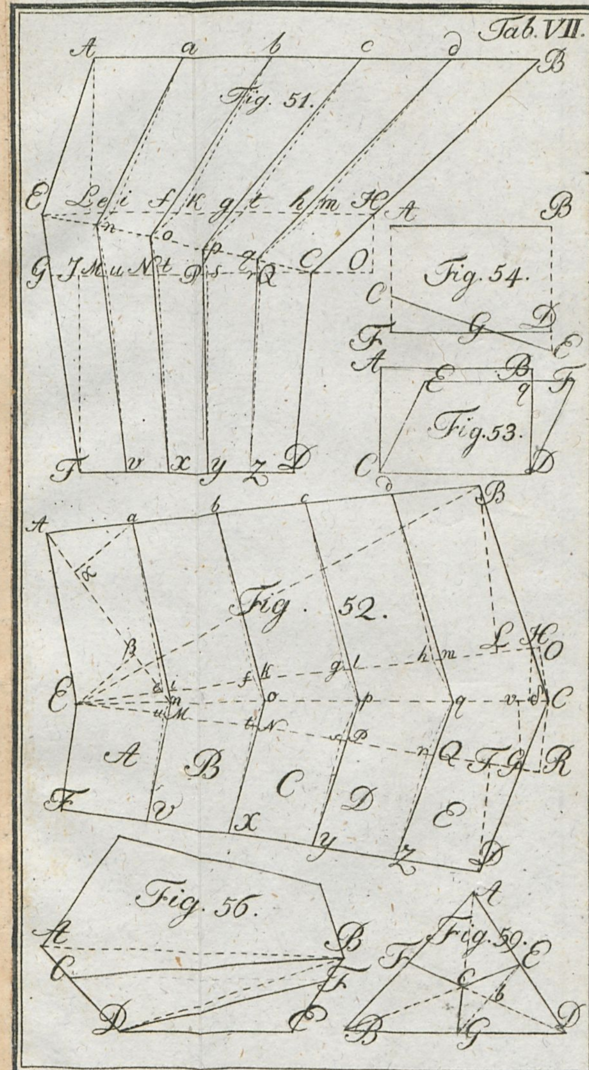
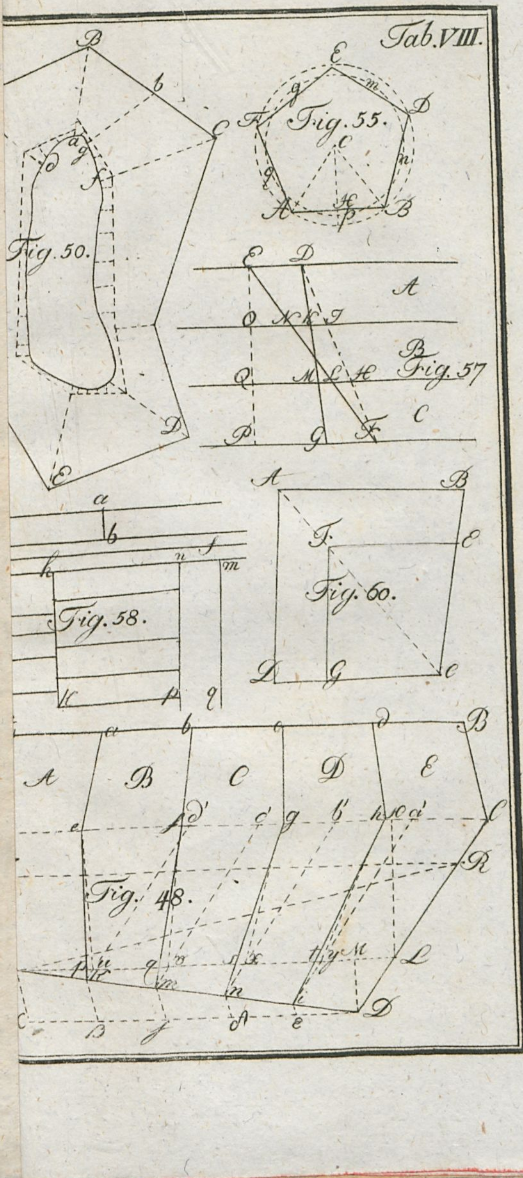


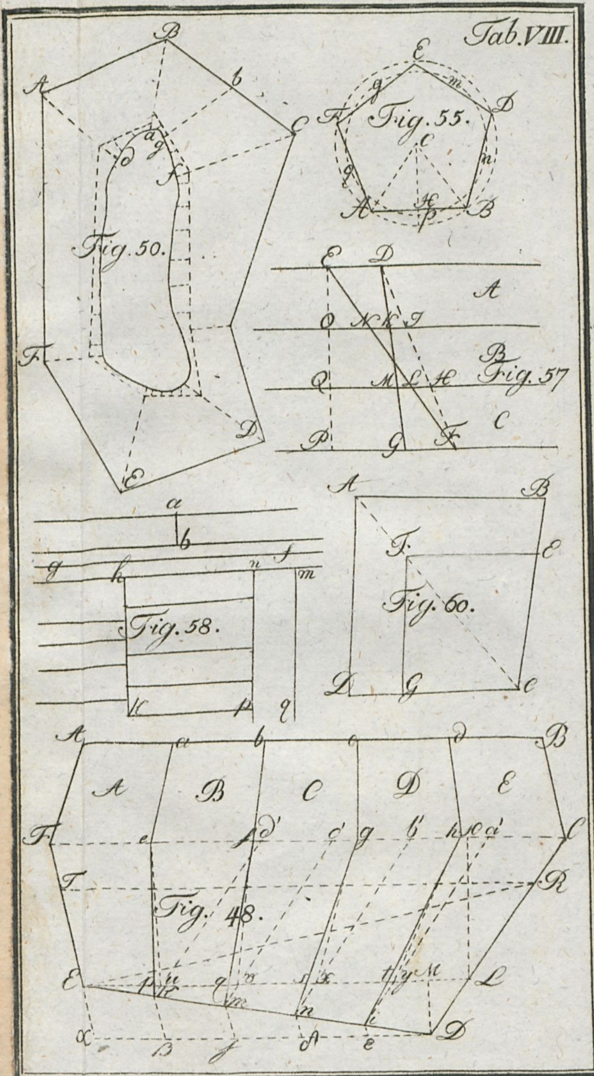
Fig. 47.

Tab. VII.




Tab. VII.
Fig. 51.
Fig. 54.
Fig. 53.
Fig. 52.
Fig. 56.
Fig. 59.


Tab. VIII.
Fig. 50.
Fig. 55.
Fig. 57
Fig. 58.
Fig. 60.
Fig. 48.


Tab. VIII.
Fig. 50.
Fig. 55.
Fig. 57
Fig. 58.
Fig. 60.
Fig. 48.

11404 1

Lehre

über

geometrische und ökonomische

Zertheilung der Felder

---

von

Johann Andreas Kirchner.

---

nebst 8 Kupfertafeln.

Weimar,

in Kommission der Hoffmannischen Buchhandlung, 1796.

(Preis echzehn Groschen.)