Johann Friedrich Häselers

Abts von Amelunxborn, Fürstl. Braunschweig-Lüneburg. Consistorialraths, Generalsuperintendenten und Predigers zu Holzmünden, der Königl. Societät der Wissenschaften zu Göttingen, und der Casselschen Societät der Alterthümer Correspondenten.

Anfangsgründe

der

reinen Mathematik

zum eignen Unterricht

vorzüglich für

Hauslehrer und Gelehrte

welche diese Wissenschaft nicht zur Hauptbeschäftigung machen.

Dritter Theil

welcher die sphärische Trigonometrie, etwas von ihrer Anwendung in der Astronomie, etwas von den Funktionen, die Kegelschnitte, und einiges von ihrer Anwendung enthält.

Lemgo,

im Verlage der Meyerschen Buchhandlung, 1790.

Dem

Durchlauchtigsten Fürsten und Herrn

HERRN

Carl Wilhelm Ferdinand

Regierendem Herzoge von Braunschweig und Lüneburg ꝛc.

Dem Vater seiner Unterthanen

widmet dieses Buch

unterthänigst und ehrerbietigst

Der Verfasser.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-812674-p0008-8

Durchlauchtigster Herzog, Gnädigster Herzog und Herr!

Ew. Herzogl. Durchl. bitte ich unterthänigst, dieses Buch, welches ich Ihnen ehrerbietigst zu Füßen lege, gnädigst anzunehmen. Ew. Herzogl. Durchl. verlangen mit dem gröſten Rechte, als Vater

und

und Fürst Ihres Landes, daß einjeder Ihrer Unterthanen seine Zeit gut nutzen, und, so viel er kann, zum allgemeinen Besten beytragen solle, und Sie gehen uns allen hierin mit dem rühmlichsten Beyspiele vor. Ich habe

be die Ehre, Höchstdenenselben hiedurch ehrerbietigst Rechenschaft abzulegen, wie ich die Zeit, die mir meine Amtsgeschäfte übrig ließen, angewendet habe. Ich gebe sie einem billigen Richter, und einem einsichtsvollen Kenner.

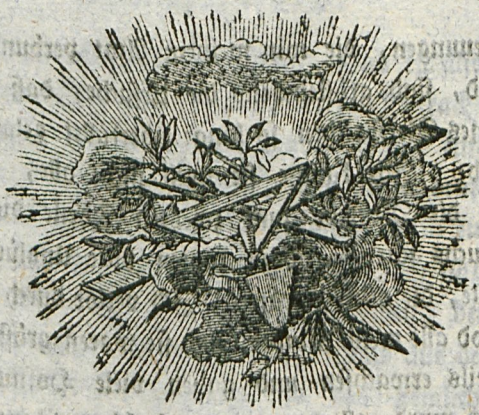
Ich

Ich bin mit der tiefsten Ehrerbietung

Ew. Herzogl. Durchl.

unterthänigster treugehorsamster

Johann Friedrich Häßler.



Vorrede.

Ich hatte in der Vorrede zum zweyten Theile dieses Buchs gesaget, daß ich nicht abgeneigt wäre, den dritten Theil dazu auszuarbeiten. Es ist lange unterblieben, und ich muß mich deswegen entschuldigen. Viele Arbeiten, Verhinderungen und Zer-

streu-

streuungen, die mit meinem Amt verbunden sind, sind gröstentheils die Ursache, daß ich dieses Versprechen so lange unerfüllet gelassen habe. Ich kannte sie noch nicht alle, als ich die Vorrede zum zweyten Theile dieses Buchs schrieb, dazu kamen viele Unglücksfälle, die mich betrafen. Ich verlor durch den Tod alle meine Kinder, und sie waren gröstentheils erwachsen und gaben viele Hofnung. Ich wurde allerdings dadurch sehr erschüttert. Ich wollte auch erst sehen, wie die beyden ersten Theile aufgenommen würden, und ob mein Vortrag so deutlich gewesen wäre, wie er nach dem Titel dieses Buchs seyn muste. Ich habe meine Wünsche erfüllet gesehen, und man ist mit meinem Buche zufrieden gewesen. Indessen würde doch wohl dieser Theil zurückgeblieben seyn, weil ich glaubte, daß man ihn leicht entbehren könnte, und man, was hierin enthalten ist, eben so leicht aus vielen andern Schriften lernen möchte. Man hat aber die Fortsetzung meiner Arbeit verlanget, und ich halte es für Pflicht, solches Verlan-

gen,

gen, so gut ich kann, zu erfüllen. Hier ist also der dritte Theil der schon schwerern Betrachtungen, als die erstern beyden Theile enthalten. Ich schmeichle mir, daß ich sie deutlich vorgetragen, und die Wahrheiten in ein gutes Licht gesetzet habe. Man wird auch einige Anwendung dieser Wahrheiten finden, bey der sphärischen Trigonometrie, etwas aus der sphärischen Astronomie, so viel nemlich, wie einem Liebhaber der Mathematik, der kein Astronom werden will, ungefähr zu wissen nöthig ist, und bey den Kegelschnitten das vornehmste aus der Theorie der geworfnen Körper, oder vielmehr die Theorie des Flugs der Bombe- und der Kanonkugel. Ich will mich bemühen, wenn ich irgends so viel Zeit von meinen Amtsgeschäften übrig habe, auch den vierten Theil zu diesem Buche, welcher etwas von den krummen Linien höherer Ordnung, und die Differential- und Integralrechnung enthalten soll, auszuarbeiten, wenn ich erfahren werde, daß man in Ansehung der Deutlichkeit mit diesem Theile, so wie mit den beyden vorherge-

henden

henden zufrieden gewesen ist. Manchen Anfänger einen Stein aus dem Wege zu räumen, der ihn von der Mathematik abschrecket, und wenn es auch noch seyn kann, seinen Weg angenehm zu machen, ist meine einzige Absicht. Ich muste zuweilen weitläuftig seyn, wenn ich diese Absicht erreichen wollte. Anfängern wird dieses nicht allezeit unangenehm seyn, und Mathematiker werden mich entschuldigen. Holzmünden an der Weser den 1sten August 1789.

Johann Friedrich Häseler.



Die sphärische Trigonometrie.

Erstes Capitel.

Allgemeine Betrachtungen über die sphärische Trigonometrie überhaupt und über die sphärischen Triangel.

§. 1.

Die ebene Trigonometrie, womit wir uns am Ende des zweyten Theils dieser Anfangsgründe beschäftiget haben, hatte blos mit geradelinichten Triangeln und ihren Winkeln zu thun, und lehrte uns, wie wir aus einigen gegebenen Seiten und Winkeln dieser Triangel die übri-

gen Seiten und Winkel derselben finden und bestimmen sollten. Die sphärische Trigonometrie, welche sonst vieles mit der ebenen Trigonometrie gemein hat, beschäftiget sich mit krummen Linien, und denen aus ihrer Aneinanderlegung entstehenden Winkeln und Triangeln. Diese krummen Linien sind Stücke von Cirkeln auf einer Kugel, und sie hat daher auch nicht gerade, sondern sphärische Winkel zu betrachten.

§. 2. Es setzet die sphärische Trigonometrie alle die Lehren voraus, welche wir in dem zwölften und dreyzehnten Capitel, vorzüglich in dem 13ten Capitel des 2ten Theils dieser Anfangsgründe vorgetragen haben, ich werde mich in der Folge oft darauf beziehen, und ich ersuche daher meine Leser, selbige wohl innen zu haben.

§. 3. Der Nutzen der sphärischen Trigonometrie ist ungemein ausgebreitet. Außerdem daß es gar nicht möglich ist, in der Astronomie fortzukommen, oder auch nur richtige Begriffe von dem großen Weltgebäude zu haben, auch von unsrer Erde, der Lage und Entfernung der Oerter auf derselben von einander, ihrer Bewegung, Erleuchtung ꝛc., von ihrem Begleiter dem Monde, dessen richtige Kenntniß seiner Bewegung uns bey der Schiffarth und andern Dingen so nöthig ist, so hat sie noch vielfältig ihren Nutzen in der Mathematik, z. E. in der Theorie der Körper und in manchen andern Dingen, welche sie sehr erheitert.

§. 4.

§. 4. Zur Sache selbst: Man stelle sich eine Kugel Fig. 1. vor, auf welcher drey Circuli maximi (§. 382. Geom.) in verschiednen Lagen gezogen sind, die sich also einander schneiden, aber auf die Art schneiden, daß ein Raum auf der Kugel von ihnen also begränzet wird, daß ein **Dreyeck** dadurch entstehet, so heißet ein solches Dreyeck, als ABD oder ADF, oder DFE oder BDE ist, ein **sphärisches** oder ein **Kugeldreyeck**. In diesem Dreyecke, z. E. in ABD, sind AB, AD, und BD seine Seiten, und bey A, B und D, sind seine Winkel. Man kann sich nun leicht vorstellen, daß es unendlich viele sphärische Dreyecke auf einer Kugel geben kann, weil sich die Circuli maximi in unendlich viele Lagen legen lassen. Fig. 1.

§. 5. Aus §. 445. Geom. ist uns bekannt, daß die kürzeste Linie, welche man zwischen zwey gegebenen Punkten auf einer Kugel ziehen kann, allezeit ein Bogen eines Circuli maximi sey. Wenn also drey Punkte auf einer Kugel gegeben sind, die nicht **alle drey** in eben demselben größern Kreise liegen, so kann man durch diese drey Punkte die Bogen eines sphärischen Dreyecks ziehen; §. 4. denn man darf nur zwischen je zwey und zwey Punkte den Bogen eines Circuli maximi legen.

§. 6. Fig. 2. Es sey ABFE eine Sphäre, man nehme auf derselben die Punkte ABD, oder andre an, lege denn durch AB, durch AD, BD, Circulos maximos, so hat man, wie wir schon Fig. 2.

gesagt haben, ein sphärisches Dreyeck. Man ziehe nach den Punkten ABD die Radios AC, BC, und DC, und lege durch das Centrum C der Kugel und zugleich durch A und B, ingleichen durch A, durch D und C, ferner durch D, durch B und C Ebenen, so wird ein Raum begränzet, dessen Spitze in C sich endiget, oder in C eine Ecke machet. Dieses heißt ein solides Dreyeck. Da die Lagen dieser Ebenen einerley sind, mit den Lagen, welche die Bogen gegen einander haben, die das sphärische Dreyeck ausmachen, so sind auch die Winkel des soliden Dreyecks, welche durch die Lage der Ebenen gegen einander stehen, einerley mit den Winkeln des sphärischen Dreyecks, und auch umgekehrt. Gleichfalls sind die Bogen des sphärischen Dreyecks die Maaßen, unter welchem Winkel sich jede Seitenfläche des soliden Dreyecks endiget. Man kennet also die Seiten und Winkel des sphärischen Dreyecks in Graden, wenn man die Flächenwinkel an C, und die Neigungswinkel des soliden Dreyecks kennet; und auch umgekehrt, man kennet die Flächenwinkel an C und die Neigungswinkel des soliden Dreyecks, wenn man die Seiten und Winkel des sphärischen weis. Man kann also jedes sphärische Dreyeck auch zugleich als ein solides Dreyeck, und auch umgekehrt, jedes solide als ein sphärisches betrachten. Man thut gut, wenn man, um diese Betrachtungen und die folgenden sich zu erleichtern, ein solches Dreyeck von Chartenpapier machet, wozu wir jetzt die Anleitung geben wollen.

§. 7.

§. 7. Wir hatten Fig. 2. ein solches Drey Fig. 2.
eck in der Kugel vorgestellet. Man nehme nun den Radium, CD = CA = CB, so groß als man will, und ziehe den Fig. 3. auf Chartenpapier, Fig. 3.
auch kann man die Bogen AB, BD, DA, so groß annehmen als man will, nur thut man noch itzt wegen unsrer folgenden Betrachtungen gut, wenn man sie kleiner als 90° machet. Die Bogen AB, BD, DA werden nun die Seiten des sphärischen Dreyecks, und das Maas der Seiten Flächenwinkel des soliden. In Fig. 3. ist es gezeichnet, wie es aussiehet, wenn es noch nicht zusammengelegt ist, und Fig 4. wie es unter den Linien CA, CB, CD eingeknicket und zusammengelegt ist.

§. 8. In dieser Fig. 4. welche ein solides und Fig. 4.
sphärisches Dreyeck zugleich vorstellet, ist nun nach vorhergehendem §. also der Bogen AB das Maas des Flächenwinkels ACB, der Bogen DB das Maas des Flächenwinkels DCB; der Bogen AD das Maas des Flächenwinkels ACD. Der Grund hievon liegt schon im §. 182. Geom. Wir haben ferner in Fig. 3 und 4. von den Punkten AA auf die Radios CB und CD Perpendikel AM und AN gezogen, und selbige durch MN zusammengehänget. Daher ist nun Fig. 4. ANM der Neigungswinkel, welchen die Ebenen ACB und CBD gegen einander haben, und zugleich = dem sphärischen Winkel bey B. Ferner AMN = dem Neigungswinkel der Ebenen ACD und CDB, und auch = dem sphärischen Winkel bey D. Es folget dieses aus den Betrachtungen, welche wir §. 268. und §. 274. Geom. anstellten.

ten. Es sind hiebey die Bogen kleiner als 90°, daher man die Linien AN und AM senkrecht auf die Intersektionslinien ziehen konnte. Wären die Bogen = 90° gewesen, so wären die Intersektionslinien selbst diesen perpendikal gewesen; und wären sie über 90°, so wären die Perpendikel darüber hinausgefallen.

Fig. 4. §. 9. Wie nun, wenn die Bogen AD, DB, BA größer als 90° sind? Wir haben schon in der Lehre von den Kugelschnitten (Gem. §. 441, 442, 443, 444) überhaupt gelehret, wie man sphärische Winkel misset, nemlich durch einen Bogen, welchen man durch seine Schenkel in der Entfernung von 90° von dem Orte an gezählet, leget, wo sich diese Schenkel einander schneiden, welches also der Pol des Bogens wird, welcher den sphärischen Winkel misset; imgleichen wie man auch die Tangenten der Bogen ꝛc. dazu gebrauchen könne. Wir sind dort weitläuftig genug gewesen, wir berufen uns darauf und bitten es nachzulesen.

§. 10. Ein sphärisches Dreyeck hat, wie ein geradelinichtes, drey Seiten und drey Winkel, also sechs Stücke, die vorzüglich zu betrachten sind. Die **sphärische Trigonometrie** ist diejenige Wissenschaft, welche es lehret, wie man aus 3 gegebenen Stücken von diesen sechsen, ein viertes Stück durch Rechnung finden könne, diese drey gegebenen Stücke mögen nun blos Seiten als Stücke von Bogen von Circulis maximis, oder blos Winkel, oder theils Seiten, theils Winkel seyn.

§. 11.

§. 11. Wir bemerken in dieser Erklärung der sphärischen Trigonometrie vorzüglich zwey Dinge, welche einem Leser auffallen könnten. Wir sagen, die drey Seiten eines sphärischen Dreyecks müssen Bogen von Circulis maximis seyn. Hierüber und warum das seyn muß, haben wir uns schon §. 5. erkläret. Wir fügen nur noch hinzu, daß wenn man diese drey Seiten nicht als Bogen von Circulis maximis annehme, man unzählich viele Bogen von kleinern Cirkeln, zwischen zween Punkten, auf einer Sphäre ziehen könnte, da, wenn diese Seiten als Bogen von Circulis maximis betrachtet werden, nur ein Bogen möglich ist. (§. 445. Geom.) Ferner bemerken wir; in der ebenen Trigonometrie mußte unter den drey gegebenen Stücken eines Dreyecks immer eine Seite befindlich seyn; (§. 498. Geom.) bey einem sphärischen Dreyecke wird diese nicht als nothwendig erfordert; auch blos die drey Winkel können ein sphärisches Dreyeck bestimmen. Es kömmt dieses gleichfalls daher, weil wir blos mit Circulis maximis zu thun haben; und da jedes Circuli maximi Ebene auch durchs Centrum der Kugel gehet, (§. 382. Geom.) und also die beyden auf der Kugel befindlichen Punkte und das Centrum der Kugel, die Lage dieser Ebene, und also auch die Lage des Circuli maximi bestimmet. Es ist zwar wahr, so wie man in der ebenen Trigonometrie ein Dreyeck von gleichen Winkeln mit einem andern gegebenen bekömmt, wenn man mit der Grundlinie oder Seitenlinien desselben Parallelen ziehet, so würde man auch ein sphärisches Dreyeck von gleichen Winkeln bekommen, wenn man z. E. einen Parallelkreis mit

einer seiner Linien legte. Es scheint also beym ersten Anblicke, als ob aus drey Winkeln kein sphärisches Dreyeck bestimmet werde, weil diese drey Winkel unendlich vielen Dreyecken zukommen können. Aber die Betrachtung, daß wir blos mit Circulis maximis zu thun haben, welche sich bey den, diesen ähnlichen Dreyecken nicht finden, ist, wie wir in der Folge sehen werden, völlig zureichend, diesen Satz zu berichtigen.

§. 12. Die sphärische Trigonometrie betrachtet nur Dreyecke, da die Seiten und Winkel alle kleiner als 180 Grad sind. Der Grund liegt zum Theil abermal darinn, weil man blos mit Circulis maximis zu thun hat, und blos hole und keine erhabne Winkel betrachtet. Es ist aus §. 423. Geom. bekannt, daß zwey Circuli maximi einer Kugel einander allezeit halbiren, ihre Bogen sind also 180 Grad. Nun nehme man zwey Bogen von Circulis maximis, und lege den dritten Bogen dadurch so, daß ein Dreyeck entstehet, so kann doch nie ein Bogen 180 Grad seyn, wenn man immer zwey und zwey Bogen betrachtet, weil ihn sonst der dritte nicht schneiden könnte. Es kann auch kein Winkel völlig 180 Grad seyn, so lange man hole Winkel betrachtet. Man lege in der Entfernung von 90°, wo sich zwey Bogen schneiden, einen Circulum maximum, ist dieser eben 180°, so machen die obigen beyden Bogen keinen Winkel mehr mit einander, sondern liegen in einer Ebene. Ist er gröser als 180°, so wird der Winkel, den beyde Bogen machten, erhaben, und solche Winkel betrachten wir

wir nicht. Die 5te, 6te und 7te Figur mag diese Fig. 5. 6. 7. erläutern. Es seyn Fig. 5. ADG und ABG zwey Circuli maximi auf der Kugel, sie schneiden sich in A und G, also jeder Bogen = 180°. Hier läßt sich kein dritter Bogen durchlegen, so daß ein Triangel entstünde und einer der Bogen 180° groß wäre. Sollte dieses geschehen, so müßte der eine Punkt da, wo der dritte Bogen die beyden erstern schnitte, in A oder G angenommen werden. Man nehme nun den andern Punkt, wo der dritte Bogen den zweyten schneiden soll, wo man will, in D, F, B oder sonst wo an, so gehet der dritte Bogen allezeit durch 2 Punkte eines der andern beyden Bogen, da er als Circulus maximus auch durchs Centrum der Kugel gehet, so hat er allezeit mit der Ebene des Bogens drey verschiedene Punkte gemein, er lieget also in eben derselbigen Ebene, und wird mit ihm zusammen fallen; also kein Bogen eines sphärischen Dreyecks kann völlig 180° groß seyn. Aber auch kein Winkel kann völlig 180° groß seyn. Es sey Fig. 5. ABD ein sphärisches Dreyeck, wo in A der Pol der Kugel, und AD und AB = 90° sind. Man lege in dieser Entfernung den Circulum maximum EDB dadurch, so ist §. 8. BD der Bogen, welcher den sphärischen Winkel BAD misset. Er ist kleiner als 180°, weil der Bogen EB erst 180° groß ist. Es bewege sich nun der Bogen AD nach E hin, so wird Fig. 6. wenn AD auf AE kömmt gar kein Winkel bey A mehr seyn, sondern AE und AD werden in einer Ebene liegen, und zusammen fallen, und denn ist der Bogen BD Fig. 5. = BE Fig. 6. und 180° groß geworden. Beweget sich

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 6.

Fig. 7. sich AD Fig 7. weiter herum, daß er jenseits E kömmt, so entstehet ein neuer sphärischer Triangel ABD, dessen erhabener Winkel bey A durch den Bogen BED gemessen wird. Solche betrachten wir aber nicht, und eigentlich wäre nun der Bogen DB zu betrachten, der das Complement des Bogens BED zu 360° geworden ist. Wir betrachten also hier nur blos Bogen und Winkel, die alle kleiner als 180° sind.

§. 13. Da die Seiten der sphärischen Dreyecke Bogen von Circulis maximis sind, so ist es schon sehr begreiflich, daß man selbige, so wie auch die Größe der Winkel, welche sie einschließen, durch die trigonometrischen Linien, die zum Cirkel gehören, durch Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens, Secans und Cosecans misset. Secans und Cosecans werden, wie in der ebenen Trigonometrie, nur wenig gebrauchet, weil man mit den übrigen trigonometrischen Fig. 4. Linien die Aufgaben auflösen kann. In Fig. 4. z. E. können die Linien AM und AN als sinus der Bogen AD und AB angesehen werden, weil sie auf CD = CB = Radio, unter rechten Winkeln stehen, und von der Spitze der Bogen in A gefället sind.

§. 14. Aus der ebenen Trigonometrie §. 457, 458, 461, 462. ist uns bekannt, daß es in Ansehung der trigonometrischen Linien Fälle der Zweydeutigkeit geben kann, indem eben dieselben trigonometrischen Linien mehrern Bogen zukommen können. Indessen da man in der sphärischen Trigonometrie

nur

nur Seiten und Winkel betrachtet, die alle kleiner als 180° sind, so giebt es nur zween Fälle der Zweydeutigkeit, wovon wir unten weiter reden werden, und wovon der eine Fall durch die Zeichen der trigonometrischen Linien auch erläutert wird, also nur einer zweifelhaft bleibet.

§. 15. Man theilt, wie in der ebenen Trigonometrie, die sphärischen Trianael **überhaupt** ein, in **rechtwinklichte** und **schiefwinklichte**. Rechtwinklichte sphärische Triangel sind, die einen oder mehr rechte Winkel haben. Schiefwinklichte Triangel sind solche, in welchen kein rechter Winkel ist, sondern alle Winkel schief, stumpf oder spitz, oder einer oder mehrere stumpf oder spitz sind.

§. 16. Es kann ein sphärisches rechtwinklichtes Dreyeck mehr als einen, ja alle drey rechte Winkel haben, wie wir in der Folge finden werden, so wie es auch zween rechte, und dazu einen stumpfen Winkel haben kann; und sich also schon hiedurch die sphärische Trigonometrie von der ebenen unterscheidet und weitläuftiger wird. Wenn aber ein **rechtwinklichtes** sphärisches Dreyeck nur **einen** rechten Winkel hat, so werden den Seiten oder Bogen eben die Namen gegeben, welche man in der ebenen Trigonometrie gebrauchet. Es sey Fig. 8. NMR ein **rechtwinklichtes** sphärisches Dreyeck, wo der rechte Winkel bey R sey; so heißen die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, hier NR und MR, die zween Perpendikel und die Seite, welche dem rechten Winkel Fig. 8. und Fig. 9.

kel entgegengesetzt ist, hier die NM, die **Hypotenuse**. Hinfort wollen wir, um Fig. 9. diese Worte
Fig. 9. nicht so oft zu wiederholen, das eine Perpendikel als Basin betrachten, und B nennen, das andere Perpendikel NR mag P heißen, und die Hypotenuse NM wollen wir mit H andeuten. Ferner mag der rechte Winkel R heißen, der eine Winkel zwischen B und H soll M, und der zwischen P und H soll N gennet werden. Alles dieses ist in der 9ten Figur so bezeichnet.

§. 17. Wir entwickeln, ehe wir zur Auflösung der Triangel selöst übergehen, noch einige allgemeine Eigenschaften derselben, die sie zum Theil mit geradlinichten Triangeln gemein haben, zum Theil darinn von ihnen unterschieden sind, um nichts wichtiges in dieser Materie zu vergessen.

Fig. 10. **Wann in zwey sphärischen Triangeln, auf gleich großen Kugeln ABC und abc zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind, so sind sie congruent.** Oder wann Fig. 10. AC = ac; Bc = bc; und der Winkel C = c, so sind die Triangel congruent, und es ist alsdenn der Winkel A = a; der Winkel B = b, und die Seite AB = ab.

Man kann hievon eben den Beweis führen, welchen wir §. 48. Geom. von den geradelinichten Triangeln gegeben haben. Denn ist AC = ac; BC = bc und der Winkel C = c, so müssen sich diese beyden Seiten einander decken, nun läßt sich aber von B nach A nur ein Bogen eines Circuli maximi

ziehen

ziehen §. 445. Geom. folglich werden sich auch AB und ab einander decken und die Triangel ABC und abc sind congruent.

§. 18. Wir haben aber hiebey wohl zu merken, daß die gleichen Winkel zwischen den gleichen Seiten eingeschlossen seyn müssen, denn sonst können Fälle vorkommen, wo zwey sphärische Dreyecke auf gleichen Kugeln einen gleichen Winkel und zwo gleiche Seiten haben, wovon eine dem gleichen Winkel gegenüberstehet, und doch sind die übrigen Seiten und Winkel nicht gleich groß, und die Triangel nicht congruent. Wir hatten schon so etwas in der Geometrie, und werden auch dieses leichtlich beweisen können. Es sey Fig. 11. ABC ein sphärisches Dreyeck und K der Mittelpunkt der Kugel, wozu die Circuli maximi dieses Dreyecks gehören. Man lege nun durch CK eine Ebene CKD auf die Ebene AKB senkrecht, so daß also bey D ein rechter Winkel seyn wird. Nun nehme man DB = Db und ziehe den Theil des Circuli maximi Cb, so hat man zwey congruente Dreyecke CDB und CDb. Denn Fig. 11.

DB = Db ex construct.
W. CDB = CDb = recto, weil CD senkrecht auf AB stehet
CD = CD

$\triangle$ CDB $\cong$ $\triangle$ EDb §. 17.

CB = cb.

Nun betrachte man die Dreyecke ABC und AbC, so haben die mit einander gemein den Winkel bey A, eine dem gleichen Winkel gleiche gegenüber stehende

stehende Seite CB = cb (ex antec.) und noch eine gleiche Seite CA = CA. Aber sie sind doch nicht congruent. Denn der Winkel ACb ist kleiner als ACB und Ab kleiner als AB, auch der Winkel CbA ist von dem Winkel CBA verschieden.

Denn CbA + CbB = 2 rectis, weils Nebenwinkel

aber CbB = CBA wegen oben bewiesener Congruenz der △ CBD und CbD

CbA + CBA = 2 Rectis.

es können also CbA und CBA nicht gleich groß seyn, weil CBA gleich Nebenwinkel von CbA oder = CbB, und der Bogen Cb nicht senkrecht auf AB stehet.

Fig. 10. §. 19. **Wenn in zwey sphärischen Triangeln ABC und abc auf gleichen Kugeln eine Seite und die beyden anliegenden Winkel gleich sind, so sind die Triangel congruent, und decken sich einander.** Oder wenn BC = bc, der Winkel B = b und der Winkel C = c, so ist auch AB = ab, AC = ac und der Winkel A = a, und die Triangel decken sich. Hier findet abermals fast eben der Beweis §. 51. Geomet. statt. Da BC = bc, so decken sie sich. Da B = b und C = c und die Neigungen der Schenkel durch die Winkel bestimmet werden, so hat AB und ab, AC und ac gleiche Neigungen; da sie ferner Circuli maximi von gleich großen Kugeln sind, so müssen sie sich also decken und können als in einander fallend betrachtet werden.

Folg-

Folglich muß AB = ab; AC = ac und der Winkel A = a seyn.

§. 20. Auch hiebey haben wir zu bemerken, daß das nur auf diesen Fall gilt. Es können zwey spärische Triangel auf gleich großen Kugeln eine gleiche Seite und zwey gleiche Winkel haben, wenn die gleichen Winkel nicht an der gleichen Seite liegen, so können sie alsdenn sehr incongruent seyn. Wir wollen jetzt zwey Triangel construiren, darinnen zwey gleiche Winkel und eine gleiche Seite seyn sollen, es soll aber einer der gleichen Winkel der gleichen Seite gegenüber stehen, und die Triangel sind doch nicht congruent. Fig. 12. Es sey ABC ein gegebener Triangel, K das Centrum der Kugel, wo die Ebenen, welche durch die Bogen der Triangel und durchs Centrum geleget würden, eine Ecke und also einen körperlichen Winkel formiren. Man verlängere nun die Bogen AC und AB, bis sie zusammen kommen, in a, so werden die Winkel bey A und a gleich (§. 274. Geom.) Fig. 12.

Man lege durch KC eine Ebene KCD auf die Ebene, aKABD, senkrecht; also bey D sind alsdenn rechte Winkel. Nun nehme man auf dem Bogen ABDa, BD = Db und ziehe den Bogen bC, so hat man zwey congruente Triangel DCB und DCb

Denn

Denn

DB = Db ex constr.
DC = DC beyden gemein
Winkel BDC = bDC = recto ex constr.

△ DBC ≅ △ DbC §. 17

folglich Winkel DBC = DbC

folglich beyder Nebenwinkel CBA = Cba, wie auch BC = bC

Wir haben also einen Triangel abC bekommen, der mit dem △ ABC zwey gleiche Winkel A = a (ex antec. und § 274. Geom.) und CBA = cba hat. Ferner eine gleiche Seite BC = bC und beide gleiche Seiten stehen einem gleichen Winkel A und a gegenüber. Aber die Triangel ABC und abC sind doch nicht congruent.

Es ist AC + Ca = 180°, (weil Circuli maximi einander halbiren) sollte nun AC und Ca gleich groß seyn, so müßte jeder dieser Bogen ein Quadrant seyn. Wäre aber C so weit herumgerücket, daß AC ein Quadrant wäre, so würde man aus C keine andere Ebene setzen können, als daß auch der Bogen AD ein Quadrant wäre, und alsdann wäre AD = aD und auch Quadranten.

Folglich wäre alsdenn auch AB = ab und die Dreyecke ABC und abC hätten lauter gleiche Seiten und Winkel, welches aber nach unsrer Voraussetzung nicht seyn soll. Sind aber aC und CA keine Quadranten, so kann es auch AD nicht seyn. Ist das nicht, so muß ab und AB ungleich seyn, und der Winkel ACB kann nicht gleich aCB seyn, weil sonst

AC

)et

A) Zwo Seiten

also a) zwo Seiten CMT
eingeschlo BNT
AMN

Zwey Sätze.
a) Die dritte Seite.
b) Einer von beyden Winkeln.

b) Zwo Seite CNT
Seite opponirte Win CMN

Drey Sätze.
a) Der der an-

Es kann gegeben seyn	Es werden gesuchet	
A) Zwo Seiten und ein Winkel;		
also a) zwo Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel. 1) ABN 2) ACM 3) BCT	Die dritte Seite und beyde an ihr liegende Winkel. 1) CMT 2) BNT 3) AMN	Zwey Sätze. a) Die dritte Seite. b) Einer von beyden Winkeln.
b) Zwo Seiten, und der einer Seite opponirte Winkel. 4) ABM 5) ABT 6) ACN 7) ACT 8) BCM 9) BCN	Die dritte Seite, ein ihr anliegender und ein ihr opponirter Winkel. 4) CNT 5) CMN 6) BMT 7) BMN 8) ANT 9) AMT	Drey Sätze. a) Der der andern Seite opponirte Winkel. b) Der von beyden Seiten eingeschlossene Winkel. c) Die dritte Seite.
B) Eine Seite und zwey Winkel.		
a) Eine Seite und die beyden anliegenden Winkel. 10) AMN 11) BNT 12) CMT	Die beyden übrigen Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel. 10) BCT 11) ACM 12) ABN	Zwey Sätze. a) Eine der andern Seiten. b) Der dritte Winkel.
b) Eine Seite, ein anliegender und ein einer Seite opponirter Winkel. 13) AMT 14) ANT 15) BMN 16) BMT 17) CMN 18) CTN	Die beyden übrigen Seiten und der einer Seite opponirte Winkel. 13) BCN 14) BCM 15) ACT 16) ACN 17) ABT 18) ABM	Drey Sätze. a) Der dritte Winkel. b) Die entgegengesetzte Seite des einen gegebenen Winkels. c) Die dritte Seite zwischen den gegebenen Winkeln.
C) Alle drey Seiten. 19) ABC	Alle drey Winkel. 19) MNT	Ein Satz. Ein Winkel.
D) Alle drey Winkel. 20) MNT	Alle drey Seiten. 20) ABC	Ein Satz. Eine Seite.

AC auch = Ca seyn müste, (ex antec.) welches wir aber nicht angenommen haben.

§. 21. **Wenn in zwey sphärischen Triangeln auf gleichen Kugeln alle drey Seiten gleich sind, so sind die Triangel congruent**; oder wenn Fig. 13 AB = ab; AC = ac; BC = bc, so decken sich die Triangel, und der Winkel A ist = a; B = b; und C = c.

Der Beweis hiezu würde schon daraus hergeleitet werden können, weil alle Bogen der sphärischen Triangel Stücke von Circulis maximis sind, und sich zwischen zwey Punkte auf der Kugel nur ein Circulus maximus legen lässet, dessen Lage und Neigung seiner Ebene, da sie mit durchs Centrum der Kugel gehet, schon hierdurch bestimmet wird. Wir wollen jetzt mal einen andern Beweis führen, welcher auch sehr einleuchtend ist und in diesen herein schlägt. Wenn die Triangel ABC und apc in allen Seiten gleiche Bogen von gleich großen Cirkeln, wie Circuli maximi sind, haben, so müssen auch die Chorden, die auf homogene Bogen gezogen werden, z. E. AC und ac u. s. w. gleich seyn. Haben die Bogen gleiche Chorden, so müssen diese (nach §. 165 Geom.) einander decken. Decken jeder homogene Bogen den andern, so müssen sich auch die ganzen Flächen decken, welche von den Bogen eingeschlossen werden. Also müssen auch die Winkel gleich seyn, oder Winkel A = a; B = b; C = c.

§. 22. Ein sphärischer Triangel, welcher zwey gleiche Seiten hat, heißt, wie in der ebenen Trigonometrie, ein **gleichschenklichter** Triangel, wie z. E. Fig. 14. der Triangel ABC seyn soll, wo AB = AC; hat er drey gleiche Seiten, so heißet er ein **gleichseitiger** Triangel.

Fig. 14. §. 23. **Wenn** Fig. 14. **in einem sphärischen Triangel zwey an der dritten Seite, (welche man alsdenn die Basin nennen kann) liegende Seiten gleich groß sind, so sind auch die den gleichen Seiten gegenüber stehende Winkel gleich groß**, oder wenn AB = AC, so ist auch Winkel B = C. Oder in einem gleichschenklichten sphärischen Triangel sind beyde an der Baß liegende Winkel gleich groß. Man nehme von beyden Bogen AB und AC gleich viel ab. Es sey AD und AE. Also AD = AE. Weil Gleiches von Gleichem genommen, Gleiches bleibt, so muß AB — AD = AC — AE seyn, oder DB = EC. Man lege nun durch D und C und durch E und B Bogen von Circulis maximis, so wird der Bogen DC = dem Bogen BE seyn. Denn wenn man nun die beyden entstandenen Triangel ADC und BEA betrachtet, so sind sie congruent, denn AB = AC ex hypothesi

AD = AE ex construct.

Winkel A = A.

$\triangle ADC \cong \triangle BEA$ §. 17.

DC = BE und y = x

folglich

folglich sind auch die Triangel DCB und EBC congruent. Denn DC = BE
DB = EC
BC = BC
△DCB ≅ EBC §. 21.

aber aus dem vorhergehenden
a = b
y = x
a + y = b + x

oder die den gleichen Seiten gegenüber stehenden Winkel sind gleich groß.

§ 24. Es ist dieser Satz auch umgekehrt wahr, nemlich: wenn zwey Winkel in einem sphärischen Triangel gleich groß sind so sind auch die gegenüber stehenden Seiten gleich groß, und der Triangel ist gleichschenklicht. Sey Fig. 14. wenn B = C, so ist auch AB = AC Beweis: man mache BD = EC und lege die Bogen BE und DC von Circulis maximis, so bekömmt man zwey congruente Triangel, BEC und BDC. Fig. 14.

Denn BD = EC ex construct.
BC = BC
x + a = x + b
△BDC ≅ BEC § 17.

Wird m = n und Winkel b = a, imgleichen BE = DC
p = q und y = x.

In den Triangeln ABE und ADC ist also

$$BE = DC$$
$$y = x$$
$$p = q$$

$$\triangle ABE \cong \triangle ADC \text{ §. 17.}$$

$$AD = AE$$

da $BD = EC$ ex construct.
und $AD = AE$ ex antec.

$AD + BD = AE + EC$ oder $AB = AC$
und der Triangel ist gleichschenklicht.

§. 25. Wenn alle drey Seiten in einem sphärischen Triangel gleich sind, so heißet der Triangel ein **gleichseitiger** Triangel. Hierin sind alle drey Winkel gleich. Man kann dieses Fig. 14 beweisen, wenn man es immer von zwey Winkeln oder zwey Seiten, auf die Weise, wie im 23ten und 24ten §. beweiset, und es würde zu weitläuftig seyn, es hier zu wiederholen.

Fig. 15. §. 26. Es sey Fig. 15. ein gleichschenklichtes Dreyeck, wo $AB = AC$. Man lasse einen Bogen aus der Spitze bey A herabfallen, welcher gleichfalls ein Stück eines Circuli maximi ist. Man lasse durch diesen Bogen den Winkel bey A halbiren und continuire denselben bis an die Grundlinie BC; ich sage, daß alsdenn die Grundlinie auch in D halbiret wird, und also $BD = DC$ und der Bogen AD auf ihr senkrecht stehet. Oder als Theorem ausgedrücket: **ein Bogen, welcher den einge-**

schlos-

schlossenen Winkel zwischen den gleichen Seiten eines gleichschenklichten oder gleichseitigen sphärischen Dreyecks halbiret, halbiret auch die entgegengesetzte Seite und stehet auf ihr senkrecht.

Beweis: Bogen AB = AC weils ein gleichschenklichtes Dreyeck

Winkel n = m §. 22.

x = y nach unser Voraussetzung

$\triangle ADC \cong \triangle ADB$ §. 19.

DC = DB

p = q und weils Nebenwinkel, jeder = Recto.

§. 27. Wir fahren fort, noch einige allgemeine Betrachtungen über die sphärischen Triangel zu entwickeln. Wir setzen aber hiebey immer zum voraus, daß die Winkel kleiner als 180° sind, wie wir bis daher immer gethan haben, und thun werden. **Es sey Fig. 16. ABC ein sphärischer Triangel wie er wolle, so läßt sich behaupten, daß allezeit zwey seiner Seiten zusammengenommen größer sind als die dritte, welche zwey Seiten man auch nehmen möge.** Fig. 16. Wir wollen in diesem Triangel die Seiten AB und AC nehmen, beyde zusammen sind größer als BC. Der Beweis wird auf alle Fälle passen, denn man hätte auch, wie man sehen wird, eben das mit zwey andern Seiten machen, und eben den Beweis führen können.

Da AC, wie alle Seiten, ein Bogen eines Circuli maximi ist, so continuire man diesen Bo-

gen, bis der Cirkel ganz ist. Man hat also den Cirkel ACDEA. Man ziehe aus A seinen Durchmesser AD. Auf der andern Seite von A an nehme man einen Bogen AE, der der einen Seite des Triangels, welche man mit der andern zusammengenommen hatte, gleich ist, oder AE = AB, und ziehe von E nach C die Chorde EC, die den Diameter AD irgendwo schneiden wird. Nun gedenke man sich, daß der halbe Cirkel AED sich um seine Axe AD bewege, bis er nach B komme, so wird EF eben auf FB passen, denn AE passet auf AB laut der Voraussetzung weil beyde gleich große Theile von Circulis maximis auf einer Kugel sind, und nun haben EF und FB beyde einerley Anfang in F, und kommen nach der Voraussetzung gleiche Enden gleicher Bogen.

Also $EF = FB$

$$\overline{EF} + \overline{FC} = \overline{FB} + \overline{FC}$$

man ziehe nun die Chorde BC. Nun ist aber

$$\overline{FB} + \overline{FC} > \overline{BC} \text{ (§. 53. Geom.)}$$

$$\overline{EF} + \overline{FC} > \overline{BC}$$

folgl. Bogen $AE + AC >$ Bogen BC

Bogen $AB + AC >$ Bogen BC

oder zwey Bogen eines sphärischen Triangels zusammengenommen sind allezeit größer als der dritte.

§. 28. Es mögen in einem sphärischen Dreyecke die Seiten so groß seyn, wie sie nach unsrer Voraussetzung, da nie 180° groß ist, seyn können,

nen, so werden doch alle drey Seiten zusammengenommen, nie so groß, als die Peripherie eines Circuli maximi der Kugel seyn können, wovon sie Bogen sind.

Es sey Fig. 17. ABC ein sphärischer Triangel, dessen Seiten nach unsrer Voraussetzung alle kleiner als halbe Cirkel sind. Man wird also jede Seite so lange continuiren können, bis sie einem halben Cirkel gleich wird. Man thue dieses von den Seiten AB und AC, bis sie sich in D schneiden, so ist ABD = ACD = Semicirculo (§. 423. Geom.); gleichfalls mit BA und BC eben so verfahren, so ist BAE = BCE = Semicirculo.

Nun ist BD + CD > BC §. 27.

oder BC < BD + CD

BA + AC = BA + AC

BC + BA + AC < BD + CD + BA + AC

oder BC + BA + AC < DBA + DCA

aber DBA + DCA = 2 Semicirc. max. = circulo max.

BC + BA + AC < als ein ganzer Cirkel; also die drey Seiten eines sphärischen Dreyecks zusammengenommen sind kleiner als ein Circulus maximus auf eben der Kugel.

§. 29. In jedem Kugeldreyeck ist die gröste Seite dem gröstem Winkel entgegengesetzet, und auch umgekehrt, der gröste Winkel ist der gröstem Seite opponirer.

Fig. 18. a. Es sey Fig. 18 a. das sphärische Dreyeck ABC, wovon der Winkel ACB der gröste Winkel ist, so behaupte ich, AB sey die gröste Seite. Gleichfalls wenn AB die gröste Seite ist, so ist der Winkel bey C der größeste. Zuerst vom ersten Satze. Beweis: da bey C der gröste Winkel ist, so verkleinere man ihn, bis er dem gegenüber stehenden Winkel gleich ist. Oder $y = x$, und ziehe den Bogen DC. Wenn $y = x$, so ist auch $BD = DC$, weil der Triangel BDC alsdenn gleichschenklicht ist §. 24.

also $DC = DB$

$DC + DA = DB + DA$

aber $DC + DA > AC$ §. 27.

$DB + DA > AC$ oder $BA > AC$

Es ist eben so leicht zu beweisen, wenn man bey A den kleinesten Winkel annimmt, daß BC die kleinste Seite, oder welches einerley hier ist, kleiner als AC sey. Um deutlich zu seyn, haben wir Fig. 18. b. ein völlig gleiches Dreyeck Fig. 18. b. gezeichnet. Ist der Winkel bey A kleiner als bey B, so mache man den Winkel bey B ihm gleich, und lege den Bogen BF,

so ist §. 24. $AF = BF$

$AF + FC = BF + FC$

$BF + FC > BC$ §. 27.

$AF + FC > BC$ oder $AC > BC$

folglich um so mehr $BC < AB$.

Und

Und AB ist die gröste Seite, die dem gröſten Winkel entgegengesetzet ist.

Und auch umgekehret, Fig. 18. a. wenn AB $>$ AC ist, so ist auch der Winkel ACB $>$ als der Winkel ABC. Fig. 18. a.

Es sey AB $>$ AC, so wird entweder der Winkel B $=$ dem Winkel C seyn, oder B $>$ C oder B $<$ C. Ist B $=$ C, so muß der Triangel gleichschenklicht oder AB $=$ AC seyn. §. 24 Aber laut unsrer Voraussetzung, da wir AB $>$ AC angenommen haben, ist das nicht. Es sind also noch zwey Fälle übrig, B $>$ C oder B $<$ C. Der erste Fall B $>$ C, kann auch nicht wahr seyn, denn wir haben eben bewiesen, daß dem größern Winkel die größre Seite entgegengesetzt ist. Also muß der letzte Fall richtig seyn, oder B muß kleiner als C seyn.

§. 30. Wir fanden bey den geradelinichten Triangeln, (§. 95. Geom.) daß der Winkel an der äußern verlängerten Seite den beyden innern entgegengesetzten gleich sey. Das ist nicht so bey den sphärischen Triangeln. Es kann kommen, daß der Winkel an der äußern verlängerten Seite schon dem einen innern entgegengesetzten gleich ist. Es kann kommen, daß er größer ist als dieser innere ihm entgegengesetzte; es kann aber auch kommen, daß er so gar kleiner sey. Wir wollen von allen drey Fällen reden.

1) Es soll Fig. 17. der äußere Winkel BCD dem innern entgegengesetzten Win- Fig. 17.

kel BAC gleich seyn, dieses geschiehet, wenn die beyden Seiten AB und BC, welche auf der dritten Seite (hier AC) stehen, zusammengenommen der halben Peripherie des Circuli maximi der Kugel gleich sind.

Hier ist der Beweis. Man verlängere die eine Seite AB und die Seite AC, welche man zur Grundlinie angenommen hat, so lange, bis sie sich in D schneiden. Es wird dieses allezeit geschehen, weil es Bogen von Circulis maximis sind (§. 423. Geom.) Es wird also

ABD = semicirculo

Nun war ex hypothesi AB + BC = semicirculo

ABD oder AB + BD = AB + BC

AB = AB

BD = BC

△BCD = aequilatero

Winkel BCD = Winkel BDC

aber Winkel BDC = Winkel BAC

folglich Winkel BAC = Winkel BCD

2) Fig. 17. Es soll der äußere Winkel BCD größer seyn, als der innere ihm entgegengesetzte BAC. Dieses geschiehet, wenn die Seiten AB und BC, welche auf der dritten (hier AC) stehen, zusammen kleiner sind als die halbe Peripherie eines Circuli maximi der Kugel.

Man verfahre, wie vorher gelehret worden, so daß ABD ein halber Cirkel wird.

Also

Also $AB + BD =$ semicirculo
$AB + BC <$ semicirc. ex hypothesi
$AB + BD > AB + BC$
$BD > BC$
Winkel BCD > Winkel D §. 29.
aber Winkel D = Winkel A §. 441. Geom.
Winkel CD > Winkel A.

3) Der äußere Winkel BCD sey kleiner als der innere ihm entgegengesetzte A. Dieses wird geschehen, wenn die zwey Seiten AB und BC, welche auf der dritten (hier AC) stehen, größer sind als die halbe Peripherie eines Circuli maximi der Kugel. Fig. 17.

Man verfahre wie vorher, so daß ABD ein halber Cirkel wird. Also

$AB + BD =$ semicirculo
aber $AB + BC >$ semicirc. ex hypvthesi
$AB + BD < AB + BC$
$BD < BC$
Winkel BCD < Winkel D §. 29.
Winkel D = Winkel A §. 441. Geom.
Winkel BCD < Winkel A.

§ 31. Der Inhalt des vorhergehenden Paragraphen ist auch umgekehrt wahr. 1) Wenn der äußere Winkel BCD dem innern entge-

gegengesetzten A gleich ist, so sind die beyden Seiten AB und BC zusammen gleich der halben Peripherie des Cirkels. 2) Ist BCD > A, so sind AB und BC zusammen kleiner als die halbe Peripherie des Cirkels. 3) Ist BCD kleiner als A, so sind AB und BC zusammen größer als die halbe Peripherie des Cirkels.

Fig. 17. Man verfahre Fig. 17. mit dem Triangel ABC, wie §. 30. im Anfange gelehret worden. Der Winkel D ist denn auf alle Fälle = dem Winkel A; ist nun der Winkel BCD = dem Winkel A, so ist auch BCD = dem Winkel D. Folglich der Triangel BCD gleichschenklicht. Folglich BC = BD. Da aber AB + BD = einem halben Cirkel, so kann man statt BD die BC setzen; also AB + BC muß auch gleich einem halben Cirkel seyn.

2) Wenn der Winkel BCD größer als A ist, so ist er auch größer als D. Folglich BD größer als BC. Aber da AB + BD gleich einem halben Cirkel, so kann AB + BC es nicht seyn, weil AB zwar in beyden Größen gleich, BD aber größer als BC ist.

3) Wenn der Winkel BCD kleiner als A ist, so ist auch BCD kleiner als D. Folglich ist BC größer als BD. Aber AB + BD ist gleich einem halben Cirkel. Es muß also AB + BC größer als ein halber Cirkel seyn, weil AB zwar in beyden Größen gleich, BC aber größer als BD ist.

§. 32.

§. 32. Aus den Betrachtungen des 30sten und 31sten §. wird sich nun auch etwas von der Größe der sphärischen Winkel BAC und BCA, die an der Grundlinie AC des Triangels BAC liegen, sagen lassen. 1) Sind die beyden Schenkel BA und BC gleich einem halben Cirkel, so sind die beyden Winkel A und C zusammen auch gleich zween rechten Winkeln; denn alsdenn ist laut §. 30. der Winkel BCD = dem Winkel A

nun ist BCD + BCA = zween Rectis

A + BCA = zween Rectis. Fig. 17.

2) Ist AB und BC zusammen kleiner als die halbe Peripherie, so sind die beyden Winkel A + BCA < 2 Rectis, denn alsdenn

Winkel BCD > A §. 30. aber

BCD + BCA = 2 Rectis

A + BCA < 2 Rectis.

3) Ist AB und BC zusammen größer als die halbe Peripherie, so sind die beyden Winkel A + BCA größer als zwey Recti, denn alsdenn ist laut §. 30. BCD < A aber

BCD + BCA = 2 Rectis

A + BCA > 2 Rectis.

§. 33. Diese drey Sätze des vorhergehenden Paragraphen sind auch umgekehrt wahr. Wir wollen die Fig. 17. noch mal betrachten. Fig. 17.

1) Wenn die Winkel BCA und BAC zusammen zween Rectis gleich sind, so sind die beyden

den Schenkel BA und BC zusammen gleich der halben Peripherie des Circuli maximi der Kugel; denn da

BCA + BCD = 2 Rectis §. 443. Geom.
ist nun BCA + BAC = 2 Rectis, ex hypothesi
so ist BAC = BCD und folglich laut §. 31.
BA + BC = der halben Peripherie.

2) Sind die beyden innern Winkel A + BCA kleiner als zween Recti, so sind auch die beyden Schenkel BA + BC kleiner als die halbe Peripherie. Denn BCD + BCA = Rectis
A + BCA < 2 Rectis, ex hypoth.
A < BCD; also nach §. 31. folglich
AB + BC < halbe Peripherie.

3) Sind die beyden innern Winkel A + BCA größer als zween Recti, so sind auch die beyden Schenkel AB + BC größer als die halbe Peripherie. Denn
BCD + BCA = 2 Rectis
A + BCA > 2 Rectis, ex hypoth.
A > BCA
A > BCD und folglich nach §. 31.
AB + BC > halbe Peripherie.

§. 34. **Jeder Winkel in einem sphäriſchen Triangel kann größer als ein rechter Winkel ſeyn, aber er iſt allezeit kleiner als zween rechte Winkel.** Fig. 17. In jedem

dem sphärischen Triangel machen der innere Winkel mit seinem Nebenwinkel zusammen zween Rectos aus.

Z. E. BCD + BCA = CBD + CBA = BAF + BAC = 2 Rectis (§. 443. Geom.)

Ist nun BCD oder CBD oder BAF jeder kleiner als ein Rectus, so muß der innere Nebenwinkel als BCA, CAB oder ABC nothwendig größer seyn, er kann aber nimmer zween Rectos erreichen, weil der äußere Nebenwinkel BCD oder CBD oder BAF, wenn er auch noch so klein wäre, doch immer den innern erst zu 2 Rectis completiren muß.

§. 35. Daher können auch alle drey Winkel in einem sphärischen Triangel zusammen nie sechs rechten Winkeln gleich werden, weil kein einziger von ihnen zween rechten Winkeln gleich ist. Sie können sich aber sechs rechten Winkeln sehr nähern, indem alle drey Nebenwinkel sehr spitz, und folglich die innern drey Winkel weit über 90 Grad oder sehr stumpf seyn können.

§. 36. Die Gränze der Größe der Winkel zusammen in einem sphärischen Triangel ist über 2 Rectos und unter 6 Rectos. **Alle drey Winkel zusammen in einem sphärischen Triangel sind immer größer als 2 Recti.**

Wir hatten im §. 32, daß die beyden Winkel BAC und BCA gleich zween rechten Winkeln, auch

größer

größer und **kleiner** als zwey rechte Winkel seyn könnten.

Sind sie **gleich** zween rechten Winkeln, oder sind sie auch **größer** als 2 rechte Winkel, so folget es von selbst, da noch der dritte Winkel ABC hinzukömmt, daß alle drey zusammen größer als zwey rechte Winkel seyn müssen. Aber es ist auch richtig, wenn auch zwey Winkel **kleiner** als zwey rechte Winkel sind.

Wir wollen annehmen, BAC und BCA zusammen mögen kleiner als 2 rechte Winkel seyn, so sind nach §. 32 und 33 die Schenkel AB und BC zusammen kleiner als die halbe Peripherie des Circuli maximi, und der äußere Winkel BCD ist größer als der Winkel BAC §. 30.

Wir wollen nun den Winkel BCD so groß als den Winkel BAC machen, welches geschiehet, wenn wir etwas von ihm abnehmen; es sey also der Winkel GCD so groß als BAC, so sind nach §. 31. AG + GC = der halben Peripherie, folglich muß das Stück des Schenkels AG, die BG und auch GC dazu, zusammen kleiner als die halbe Peripherie seyn; folglich die beyden Winkel zusammen GBC + BCG kleiner als 2 Recti seyn. §. 32. Nun sind die beyden Nebenwinkel

GBC + ABC = 2 Rectis §. 443. Geom.

da nun GBC + BCG < 2 Rectis laut den vorhergeh.

BCG < ABC

Wir hatten aber GCD so groß als den Winkel BAC gemachet. Da also

BAC

$$\begin{array}{l} BAC = GCD \\ ABC > BCG \\ \hline BAC + ABC > GCD + BCG \text{ oder} \\ \hline BAC + ABC > BCD \end{array}$$

aber $BCD + BCA = 2$ Rect. weils Nebenw.

$$\begin{array}{l} BAC + BAC + BCA > BCD + BCA \text{ od.} \\ \hline BAC + ABC + BCA > 2 \text{ Rectis.} \end{array}$$

Es ist also auf alle Fälle erwiesen, daß allezeit alle 3 Winkel zusammen in einem sphärischen Triangel größer sind als zwey rechte Winkel.

Man kann einen sphärischen Triangel in einen andern verwandeln, auf die Art, daß die Winkel des neuen Triangels das Complement zu den Seiten des erstern zu 180° sind, und die Seiten des neuen das Complement zu den Winkeln des erstern zu 180° ausmachen.

Fig. 21. Es sey der Triangel ABC gegeben; man verlängere alle seine Seiten also, daß $ACG = 90° = CAN = ABH = BAI = BCL = CBM$. Man lege durch die Enden dieser Verlängerung die Bogen FE, ED, DF, hieraus entstehet nun der sphärische Triangel DFE, ich sage, daß die Winkel dieses neuen Triangels das Complement zu den Bogen des erstern, und die Bogen dieses neuen das Complement zu den Winkeln des erstern sind.

Das wollen wir nun beweisen, aber nur von einer Seite und von einem Winkel, weil der Beweis auf eben die Art von jeder andern Seite und Winkel leicht zu führen ist.

AG = AH = 90° ex const.

A = dem Pol vom Bogen FGHE

und weil CM = CN = 90°

so ist C = Pol von DNME.

Eben so ist, da BI und BL Quadranten, B der Pol von DILF. §. 438. Geom. Eben so ist wieder umgekehrt E der Pol von NACG, also auch von AC, denn AH ist = 90° und CN = 90°, folglich auch EG = EN = 90°. Eben so ist D der Pol des Bogens CB und DL = DM = 90° und F der Pol des Bogens AB und FH = FI. Da nun

FH = 90°, EG = 90°

EG + FH = 180°

aber EG + FH = EG + FG + GH = EF + GH = 180°

aber laut §. 442. Geom. misset GH den Winkel A, da nun EF + GH = 180°, so muß EF das Complement zum Winkel A seyn, und folglich auch Winkel A das Complement zum Bogen EF. Eben so läßt sich beweisen, daß der Bogen DE das Complement zu 180° des Winkels C und folglich Winkel C auch dieses Bogens Complement, imgleichen daß DF das Complement zu B und B das Complement zu DF sey.

Aus eben den Gründen ist es leicht zu beweisen, daß der Winkel E, der durch den Bogen GN gemessen wird, das Complement der Seite CA zu 180°, so wie es D von CB und F von AB ist.

Denn

Denn $AG = CN = 90°$ ex const.

$AG + CN = 180° = AC + CG +$
$AC + AN = 2AC + CG + AN$
aber $GN = CG + AN + AC = 180° - AC$

Aber GN misset den Winkel E weil EN und EG jeder 90° ist §. Geom.

Da nun $GN = 180° - AC$, so ist folglich AC das Complement des Winkels E zu 180° und so läßt es sich von allen übrigen Winkeln in dem Triangel DFE beweisen, daß sie die Bogen AB und CB die Complemente zu F und D sind.

1) **Anmerkung** wäre AC, AB und CB jeder 90°, so fielen die △ ACB und DFE zusammen, und die Seiten und Winkel des Triangels ABC wären selbst ihre Complemente zu einander.

2) **Anmerkung**. Man wird sich nach der ersten Vorschrift auch leicht zu helfen wissen, wenn einige Bogen oder Winkel, oder Winkel und Bogen größer als 90° waren, nur daß die Figur alsdenn anders wird.

3) Durch Rechnung ist es leicht zu finden; wenn die Winkel und Bogen des Triangels ABC bekannt sind, wie die Winkel und Bogen des Triangels DFE beschaffen seyn werden.

4) Man nennt einen solchen Triangel als DFE einen **Polartriangel.**

Zweytes Capitel.

Von der Auflösung der sphärischen rechtwinklichten Triangel.

§. 37. Der allgemeine Grundsatz, worauf sich die Auflösung aller sphärischen Triangel, sowohl der rechtwinklichten als schiefwinklichten gründet, ist, weil wir hier mit Bogen zu thun haben, von dem in der ebenen Trigonometrie etwas verschieden. In der ebenen Trigonometrie verhielten sich die Seiten, wie die sinus der ihnen entgegengesetzten Winkel. Aber die Seiten waren da gerade Linien. Hier sind es Bogen grösster Cirkel, und die Bogen werden durch die sinus gemessen.

Unser Lehrsatz ist daher folgender:

Im sphärischen Dreyecke verhalten sich die sinus der Seiten, wie die sinus der ihnen entgegengesetzten Winkel.

Da dieses Capitel blos von **rechtwinklichten** sphärischen Triangeln handelt, so wollen wir dieses jetzt auch erst blos von **rechtwinklichten** sphärischen Triangeln beweisen. Aus §. 15. 16. wissen wir, was ein rechtwinklichter sphärischer Triangel sey, auch findet man daselbst die Benennung

nung seiner Seiten und Winkel, welche ich nachzusehen bitte.

Also unser Satz in Geometrischer Sprache ist: Fig. 19.

Fig. 19.

sin. Winkels NMR : sin. Seite NR = sin. Winkels MNR : sin. Seite MR

oder nach §. 16. sin. M : sin. P = sin. N : sin. B. Diesen Satz wollen wir nun beweisen:

Es sey Fig. 19. NMR ein sphärisches rechtwinklichtes Dreyeck, wo bey R ein rechter Winkel ist. NC = CR = CM mögen radii der Kugel seyn. Man ziehe aus N ein Perpendikel NG auf die CR, gleichfalls auch ein Perpendikel NF auf die CM, so daß also NFM = NFC = recto, und hange NG und NF durch die FG zusammen, so ist nach §. 8. der Winkel NGF = dem sphärischen Winkel bey R. Winkel NFG = dem sphärischen Winkel bey M.

Wir wollen nun erst die geradelinichten Triangel NCF und NCG betrachten, und da bey F und G, laut dem vorhergehenden rechte Winkel sind, so kann man schließen:

$$\begin{aligned} CN : \text{sin. tot.} &= NF : \text{sin. NCF} \\ CN : \text{sin. tot.} &= NG : \text{sin. NCG} \\ \hline NF : \text{sin. NCF} &= NG : \text{sin. NCG} \end{aligned}$$

oder $NF : NG = \text{sin. NCF} : \text{sin. NCG}$

da NGF gleichfalls ein rechter Winkel ist, indem, da bey R ein Rectus, die Ebene NCR auf die Ebene CRM senkrecht stehet, so kann man,

wenn man den Triangel NGF betrachtet, also schließen:

NF : NG = sin. totus : sin. NFG

folglich diese Proportion mit der eben vorhergehenden verglichen, so wird folgende Proportion richtig seyn:

sin. : tot. sin. NFG = sin NCF : sin. NCG

Nun ist aber der Winkel NFG = dem sphärischen Winkel bey M; der Winkel NCF misset den Bogen NM = H; der Winkel NCG misset den Bogen NR = P. Dieses nun statt des vorhergehenden Winkels in die Proportion gesetzt, so wird aus der Proportion

sin tot. : sin NFG = sin. NCF : sin. NCG

alsdenn folgende

sin. tot. : sin. M = sin. H : sin. P.

oder sin. tot. : sin. Bogen H = sin. Winkel M : sin. Bogen P.

Man hätte auf eben die Art beweisen können

sin. tot. : sin. Bogen H = sin. Winkel N sin. Bogen B

da nun sin. tot. : sin. Bogen H = sin. Winkel M : sin. Bogen P aber

sin. M : sin P = sin. N : sin. B

oder im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke verhalten sich die sinus der Seiten, wie die sinus der ihnen entgegengesetzten Winkel und auch umgekehrt.

Anmerkung. Da die Benennung des sinus totus noch oft in den Proportionen über die rechtwink-

winklichten Triangel vorkommen wird, so wollen wir der Kürze halber den sin. totus allezeit mit r bezeichnen.

§. 38. Es sind beym rechtwinklichten sphärischen Dreyecke, wie bey allen Dreyecken sechs Stücke, **drey Seiten** und **drey Winkel**, zu betrachten. Es müssen drey Stücke davon gegeben seyn, wenn das vierte soll gefunden werden. Bey rechtwinklichten sphärischen Dreyecken ist allezeit der rechte Winkel bekannt, also wie gegeben anzusehen. Es sind also noch 5 Stücke zu betrachten; die Folge wird zeigen, wenn davon **zwey** gegeben sind, daß man aus diesen zweyen und dem rechten Winkel die übrigen **drey** finden kann. Wenn man dieses nach der Lehre von der Conbination (§. 369. Arithm.) betrachtet, so hat man von 5 Dingen je zwey und zwey zu verbinden, denn das 3te, der rechte Winkel, kömmt zu jedem hinzu, und drey bleiben denn zu suchen übrig. Fünf Dinge lassen sich **Ambenweise** 10 mal verbinden, also wird man 10 Proportionen haben müssen, um alles, was in einem sphärischen rechtwinklichten Dreyecke vorkömmt, zu finden. Wozu noch die sechs Gesetze oder Hauptproportionen kommen, weil denn also überhaupt 16 Proportionen, die **sechs** Stücke, die bey diesen Dreyecken waren, sind, um sie mit denen §. 16. Fig. 9. und Fig. 19. befindlichen Buchstaben zu nennen R, M, N, P, B, H. Es kömmt nun R in jede Verbindung, auch muß man sich erinnern, daß auch bey sphärischen Triangeln die 3 Winkel den Triangel bestimmen. Die 5 Stücke M, N,

P, B, H, lassen sich folgendergestalt verbinden, da wir den R als bekannt jederzeit vorsetzen wollen.

gegeben		gesuchet
RMN	es wird	P, B, H
RMP	" "	N, B, H
RMB	" "	N, P, H
RMH	" "	N, P, B
RNP	" "	M, B, H
RNB	" "	M, P, H
RNH	" "	M, P, B
RPB	" "	M, N, H
RPH	" "	M, N, B
RBH	" "	M, N, P

Wir werden hiezu sechs **Fundamental**-Proportionen oder Gesetze bekommen, und beweisen, aus welchen sich alle diese 10 Proportionen, nebst noch manchen Veränderungen herleiten lassen. Giebt also nebst den Grundproportionen 16 Proportionen, die alles auflösen. Es verstehet sich von selbst, wenn außer dem rechten Winkel drey Stücke in dem Triangel gegeben sind, daß also 4 Stücke bekannt sind, die Verhältnisse, welche man durch die Gesetze gefunden hat, sich auch hierauf werden anwenden lassen.

Wenn wir obgedachte 10 Proportionen hergeleitet, und bewiesen haben, so werden wir alle mögliche Fälle in den sphärischen **rechtwinklichten** Triangeln auflösen können.

§. 39.

§. 39. Wenn wir Fig. 19. den sphärischen rechtwinklichten Trianael NRM betrachten, so werden wir finden, daß H oder die Hypotenuse, immer Hypotenuse bleibet; daß aber, nachdem man die Lage des Triangels annimmt, B oder die Grundlinie, auch wohl als der Perpendikel, oder als P kann betrachtet werden, wenn man nemlich P zur Grundlinie annimmt. Der rechte Winkel bleibt immer R, als der eingeschloßne Winkel zwischen der Grundlinie und dem Perpendikel, aber wenn P als B betrachtet wird, so wird N der Winkel an der Grundlinie und der Hypotenuse, und M der Winkel an dem Perpendikel und der Hypotenuse. Fig. 19.

§. 40. Die Proportionen, welche wir §. 37. fanden, lehren uns nun (da der rechte Winkel allezeit gegeben ist), **wenn in dem sphärischen rechtwinklichten Triangel von zwo Seiten, die den rechten Winkel nicht einschließen, und der Seite, die man zur Perpendikularseite angenommen hat, gegenüberstehender Winkel, wenn, sage ich, von diesen drey Stücken zwey gegeben sind, das dritte daraus zu finden.**

Oder Fig. 19. die Seiten, welche den rechten Winkel nicht einschließen, sind H und P, oder H und B. Hat man P zur Perpendikularseite, und B zur Grundlinie angenommen, so ist der der Perpendikularseite gegenüberstehende Winkel M. Und hat man B zur Perpendikularseite, und P zur Grundlinie angenommen, so ist der der Perpendikularseite gegenüberstehende Winkel N. Fig. 19.

Von den drey Dingen HPM, oder welches nach eben angestellten Betrachtungen einerley ist, HBN, sollen nun immer zwey gegeben seyn, so läßt sich das dritte nach §. 37. finden.

gegeben also H und P es wird gesuchet M
" " H und M " P
" " P und M " H

oder welches einerley ist,

gegeben H und B es wird gesuchet N
" H und N " B
" B und N " H

Es ist nun nach §. 37.

sin. H : r = sin. P : sin. M
imgleichen r : sin. H = sin. M : sin. P
imgleichen sin. M : sin P = r : sin. H
oder auch sin. H : sin. B = r : sin. N
imgleichen r : sin H = sin. N : sin. B
imgleichen sin. N : sin. B = r : sin. H

§. 41. Exempel: wir wollen gleich die Proportion nehmen

sin. H : r = sin. P : sin. M

Es sey H = 50°; P = 35°

so wäre die Proportion sin. 50° : sin. tot. = sin. 35° : sin. M

und $\sin. M = \frac{\sin. 35° . \sin. tot.}{\sin. 50°}$

und logarithmisch:

+ log sin. 35° =	9,7585913
+ log sin. tot. =	10,0000000
	19,7585913
− log sin. 50° =	9,8842540
	9,8743373

Dieser

Dieser Logarithme gehöret zum sin. 48° 28′ 56″ und das wäre also der Winkel M.

Diese Proportionen §. 37. waren das erste Gesetz bey den rechtwinklichten sphärischen Triangeln.

§. 42. Das zweyte Gesetz ist:

r : sin. B = tang. M : tang. P. Fig. 19. Fig. 19.

oder welches, wie wir zeigen werden, auch eben das seyn kann:

r : sin. P = tang. N : tang. B

Mit Worten ausgedrückt:

In dem rechtwinklichten sphärischen Dreyecke verhält sich der sinus totus zum sinus einer Perpendikularseite, wie der tangens des an dieser Perpendikularseite befindlichen Winkels zum tangens der gegenüberstehenden Perpendikularseite.

Dieses Gesetzes Richtigkeit müssen wir nun beweisen.

Fig. 19. Wenn wir den geradelinichten Triangel NCG und die übrigen geradelinichten Triangel betrachten, so wie wir §. 37. thaten, so werden wir, da CGN ein rechter Winkel ist, folgender gestalt schließen können:

CG:

CG : GN = r : tang. NCG
GN : GF = tang. NFG : r

§. 273. Arithm. CG : GF = tang. NFG : tang. NCG
aber es ist auch CG : GF = r : sin. GCF
weil bey GFC r : sin. GCF = tang. NFG : tang. NCG
= recto.

aber der Winkel GCF wird durch den Bogen B gemessen; also sinus des Winkels GCF = sinus des Bogens B. Eben so Winkel NFG = sphärischem Winkel M; also haben sie gleiche Tangenten; so wird auch der Winkel NCG durch den Bogen P gemessen, also hat der Winkel NCG mit dem Bogen P auch einerley Tangenten. Aus allem diesem folget, daß die eben bewiesene Proportion

r : sin. GCF = tang. NFG : tang NCG

durch Substitution gleiches für gleichem also verändert werden könne.

1) r : sin. B = tang. M : tang. P.

oder auch welches einerley ist, weil man auch P zur Basi annehmen, und alsdenn einerley Beweis mit dem vorigen führen kann.

2) r : sin. P = tang. N : tang. B.

§ 43. Weil sich die Cotangenten verkehrt verhalten als die Tangenten, so würde auch gelten:

r : sin. B = cot. P : cot. M oder auch
r : sin. P = cot. B : cot. N

es würde sich auch aus der Proportion

r : sin. B = tang. M : tang. P

auch folgende herleiten lassen:

r : cot. M = tang. P : sin. B.

Denn

Denn da (§. 471. Geom.) $\text{tang. } M = \frac{r^2}{\text{cot. } M}$

so ist, wenn man substituiret

$$r : \text{sin. } B = \frac{r^2}{\text{cot. } M} : \text{tang. } P$$

$$r : \text{sin. } B = r^2 : \text{cot. } M . \text{tang. } P.$$

$$r^2 . \text{sin. } B = r . \text{cot. } M \text{ tang. } P.$$

$$r . \text{sin. } B = \text{cot. } M . \text{tang. } P$$

also $r^2 : \text{cot. } M = \text{tang. } P : \text{sin. } B$

Eben auf die Art kann man auch aus der Proportion

$$r : \text{sin. } P = \text{tang. } N : \text{tang. } B$$

folgende herleiten:

$$r : \text{cot. } N = \text{tang. } B : \text{sin. } P$$

§. 44. Laut dieses vorhergehenden §. 42. zeiget es sich nun, daß wenn von den drey Dingen BPM oder BPN, zwey nebst dem rechten Winkel gegeben sind, das dritte durch die Proportion zu finden sey.

Es ist gegeben		es wird gesuchet
B und M		P
P und M		B
oder		
B und P		N
B und N		P
P und N		B

Man

Man kann nemlich nach §. 42. schließen:

sin. B. : r = tang. P : tang. M
imgleichen r : sin. B = tang. M : tang. P
imgl. tang. M : tang. P = r : sin. B
ferner sin. P : r = tang. B : tang. N
imgl. tang. N : tang. B = r : sin. P
und r : sin. P = tang N : tang. B

Anmerkung. Es giebt bey diesen Proportionen, so wohl als bey denen §. 40. wo es zweifelhaft wird, ob das Gesuchte **kleiner** oder **größer** als 90° sey. Wie dieses zu bestimmen, werden wir unten §. 89. anzeigen.

Fig. 19. §. 45. Das dritte Gesetz bey den rechtwinklichten sphärischen Triangeln ist folgendes. Fig. 19.

r : cos. P = cos. B : cos. H.

Oder mit Worten ausgedrückt: **In dem rechtwinklichten sphärischen Triangel verhält sich der** sinus totus **zum** cosinus **eines** Catheti, **wie der** Cosinus **des andern** Catheti **zum** Cosinus **der** Hypotenuse.

Um den Beweis hievon recht deutlich einzusehen, ist es sehr gut, wenn man eine Kugel dabey hat, worauf man einen rechtwinklichten Triangel aus Circulis maximis, wovon aber keine Seite 90° hat, gezeichnet hat. Alsdenn wird der Beweis ohne alle Schwierigkeit verstanden werden, da man sonst die Imagination zu sehr anstrengen muß.

Fig. 20. Es sey also Fig. 20. RNM ein auf einer Kugel gezeichnetes rechtwinklichtes Dreyeck, wo bey R der rechte Winkel; NM = H, die Hypotenuse RM = B und RN = P ist.

Man

Man verlängere RM auf der Kugel bis Q, so daß MQ ein Quadrant ist. Eben dieses thue man mit MN bis S, so daß MS gleichfalls ein Quadrant ist, und lege dadurch den Bogen QS, und ziehe aus dem Centro C der Kugel in Gedanken die Radios CQ und CS. Wenn man sich nun durch Q, S, und das Centrum C der Kugel eine Ebene durchdenkt, so ist, weil MS und MQ Quadranten sind, M der Pol des continuirten Bogen QS (§ 432. Geom.) MC stehet auch auf CS und CQ senkrecht, also auch auf der Ebene CQS (Geom. §. 262. 428.) gleichfalls stehen die Ebenen der Bog. MQ und MS, oder MCQ und MCS auf der Ebene QCS senkrecht, (§. 276. Geom.) man verlängre die Bogen QS und RN, so wird, da die Bogen QM und QS auf einander senkrecht stehen, der verlängerte Bogen QS durch des Bogens QRM Pol gehen. Gleichfalls da der Bogen RN (ex hypothesi, weil bey R rect.) auch auf QRM senkrecht stehet, so wird er auch durch des Bogens QRM Pol gehen, (§. 432. Geom.) wo sich also die verlängerten Bogen QS und RN in V schneiden, da wird des Bogens QRM Pol seyn, folglich VQ und VR Quadranten seyn. Durch die Lagen aller dieser Bogen entstehet ein Trlangel VSN, der bey S einen rechten Winkel hat (§. 249 und 432. Geom.) Man kann also schließen nach §. 37

r: sin. VN = sin. SVN : sin. SN

aber sin. VN ist das Complement zu 90° zu dem Bogen RN oder also cos. P.

Ferner sin. SVN ist der sin. des Bogens QR der diesen Winkel misset, und der Bogen QR noch

das

das Complement des Bogens RM zu 90° (ex constr.) also cos. B.

Eben so ist sin. SN das Complement des Bogens NM zu 90° oder also cos. H. Wenn wir nun substituiren, so kann man

anstatt r : sin. VN = sin. SVN : sin. SN

nun schließen r : cos. P = cos. B : cos. H

welches wir beweisen wollten.

§. 46. Wenn also außer dem rechten Winkel von P, B und H zwey Stücke gegeben sind, so läßt sich das dritte daraus finden.

gegeben P und B gesuchet H
" P und H " B
" B und H " P

also r : cos. P = cos. B : cos. H

ingleichen cos. P : r = cos. H : cos. B

cos. B : cos. H = r : cos. P

§. 47. Das vierte Gesetz: es folget auch aus der Betrachtung des Triangels VSN Fig. 20. und ist folgendes

Fig. 19. Fig. 19. r : cos. P = sin. N : cos. M

oder der sinus totus verhält sich zum cosinus eines Catheti, wie der sinus des anliegenden Winkels zum cos. des gegenüberstehenden Winkels.

Fig. 20. Wenn man Fig. 20. den Triangel SVN nochmals betrachtet, so wird aus den Gründen des vorhergehenden §. auch gelten:

r : sin. VN = sin. VNS : sin. VS

aber

aber sin. VN = cos. P; ferner
sin. VNS = sin. N, weil bey N Vertikalwinkel und sin. VS = cos. QS = cos. M, weil QS den Bogen M misset, also substituiret Gleiches vor Gleichem

r : cos. P = sin. N : cos. M.

§. 48. Da Fig. 20. die RM oder B gleichfalls als das Perpendikel angesehen werden kann, so wird man, wenn man auf der entgegengesetzten Seite von M aus die B und H bis zu 90° auf der Kugel verlängert, und alsdenn auch solchen Bogen als QS dadurch leget, und den continuiret, gleichfalls auch den Bogen P von R aus verlängert, bis sich die verlängerten Bogen schneiden, gleichfalls einen solchen Triangel, als SVN ist, bekommen, und nach den im vorhergehenden §. angeführten Gründen schließen können Fig. 20.

r : cos. B = sin. M : cos. N.

§. 49. Nach §. 47. und 48. wenn außer dem rechten Winkel von P, N, M oder von B, M, N zwey Stücke gegeben sind, läßt sich das 3te dadurch finden. Also Fig. 19. Fig. 19.

gegeben	P	und M	gesuchet N
"	P	und M	" N
"	N	und M	" P
oder			
"	B	und M	" N
"	B	und N	" M
"	M	und N	" B

r : cos. P = sin. N : cos. M
cos. P : r = cos. M : sin. N
sin. N : cos. M = r : cos. P
r : cos. B = sin. M : cos. N
cos. B : r = cos. N : sin. M
sin. M : cos. N = r : cos. B

§. 50. Das fünfte Gesetz Fig. 19.

Fig. 19.

r : cot. M = cot. N : cos. H

oder **in rechtwinklichtem sphärischem Dreyecke verhält sich der** sinus totus **zum** Cotangens **eines der beyden übrigen Winkel, wie der** Cotangens **des andern Winkels zum** Cosinus **der Hypotenuse.** Oder man könnte auch das zum 5ten Gesetze machen, weil dieses daraus, wie wir sehen werden, folget.

r : cos. H = tang. N : cot. M

Wir wollen hier abermal, wie im §. 45. den rechtwinklichten Triangel RNM auf der Kugel zeichnen Fig. 20. und eben das Verfahren, wie daselbst, beobachten. Wir erhalten dadurch, wie wir dort gesehen haben, einen rechtwinklichten Triangel SVN, wo bey S der rechte Winkel, SN und SV die beyden Catheti, und VN die Hypotenuse ist.

Fig. 20.

Wir fanden nun in dem zweyten Gesetze §. 42. wenn wir Fig. 19. betrachteten, folgende Proportion:

r : sin. P = tang. N : tang. B.

Wenn wir nun Fig. 20. SN als P betrachten; den Winkel VNS als N (wovon es ohnedem Vertikalwinkel und also gleich ist) und SV als B, so wird folgende Proportion wahr seyn:

r : sin. SN = tang. VNS : tang. SV

Es ist aber sin. SN der cos. H, weil SN die H zu 90° completiret, tang. VNS = tang. N, weils Vertikalen, und tang. SV = cot. QS, weil QS die SV gleichfalls zu 90° completiret.

Ferner misset QS den Winkel M, da tang. SV = cot. QS, so ist sie also auch cot. M. Das alles substituiret, kann man schließen:

r : cos. H = tang. N : cot M.

und die Glieder der Proportion versetzet

r : tang. N = cos. H : cot. M.

Nun finden wir (§. 473. Trigon.) daß $r^2 = \frac{\text{cot. N.}}{\text{tang N.}}$

oder also $r^2 = \text{tang. N. cot N.}$

folglich r : tang. N = cot. N : r

wir haben nun eben r : tang. N = cos. H : cot. M gehabt

folglich cot. N : r = cos. H : cot. M

und versetzet r : cot. M = cot N : cos. H

und dieses war der Satz, den wir beweisen wollten.

§. 51. Wenn also außer dem rechten Winkel von den drey Dingen M, N und H zwey gegeben sind, so läßt sich das 3te daraus finden.

gegeben M und N es wird gesuchet H
" M und H " " N
" N und H " " M

r : cot. M = cot. N : cos. H
cot. M : r = cot. H : cot. N
cot. N : cos. H = r : cot. M

Fig. 19.

Fig. 19. §. 52. Das sechste Gesetz Fig. 19.

r : cos. M = cot. B : cot. H.

oder der sinus totus verhält sich zum cosinus eines der beyden übrigen Winkel, wie der cotangens des an diesem Winkel liegenden Catheti zum cotangens der Hypotenuse.

Man würde auch daher dieses Gesetz folgender Gestalt ausdrücken können:

r : cos. N = cot. P : cot. H.

Fig. 20. Wir fanden im §. 42. die Proportion:

r : sin. B = tang. M : tang. P

Wenn wir das Fig. 20. auf den rechtwinklichten Triangel, den SVN, dessen Entstehung §. 45. sich findet, anwenden, und SV als B betrachten, SN als P, VN als H, und Winkel V als M, so wird diese Proportion auf den Triangel SVN also angewendet werden können:

r : sin. SV = tang. SVN : tang. SN

Nun ist aber der sin. SV = cos. QS = cos. M. tang. SVN = tang. QR, weil QR den Winkel C misset = cot. B.

tang. SN = cot. H.

dieses gehörig substituiret, so wird anstatt

r : sin. SV = tang. SVN : tang. SN

gesetzet werden können

r : cos. M = cot. B : cot. H

Würde man nun die RM oder B als das Perpendikel oder als P, und P als B betrachten, so würde also auch die Proportion wahr seyn

r : cos. N = cot. P : cot. H.

§. 53.

§. 53. Da sich die Cotangenten verkehrt wie die Tangenten verhalten, (§. 472. Trigonom.) so wird aus der Proportion

r : cos. M = cot. B : cot. H folgen

r : cos. M = tang. H : tang. B

ferner da r : cos. N = cot. P : cot H

so ist auch wahr r : cos. N = tang. H : tang. P

§. 54. Ebenfalls wird aus der Proportion

r : cos. M = cot. B : cot. H

folgende hergeleitet werden können

r : cot. H = tang. B : cos. M.

Denn (da nach §. 473. Trigon.) cot. B = $\frac{r^2}{\text{tang. B}}$

so folget, wenn man substituiret,

r : cos. M = $\frac{r^2}{\text{tang. B}}$: cot. H

r : cos. M = r^2 : tang. B . cot. H

r . tang. B . cot. H = r^2 . cos. M

tang. B . cot. H = r . cos. M

r : cot. H = tang. B : cos. M

Es wird daher auf eben die Art, da cot. P = $\frac{r^2}{\text{tang. P}}$ aus der Proportion

r : cos. N = cot. P : cot. H

folgende hergeleitet werden können:

r : cot. H = tang. P : cos. N.

§. 55. Diese nun erwiesenen sechs Gesetze mit ihren Folgerungen, deren wir noch mehrere machen könnten, welche aber jeder, der die trigonometrischen Lehren gut inne hat, selbst leicht machen kann, sind völlig hinreichend, alle Aufgaben bey den sphärischen rechtwinklichten Triangeln aufzulösen. Wenn man den §. 38. wieder durchlieset, so wird man daselbst finden, daß alle mögliche Verbindungen der fünf Stücke, MNPBH Fig. 9. je zwey und zwey gegeben sind, wo denn der rechte Winkel als bekannt vorausgesetzt wird, und wenn also zwey Stücke und der rechte Winkel bekannt sind, sich die übrigen drey finden lassen. Wir schreiben die Tabelle, aber in einer andern Ordnung, deren Ursache wir neben bey setzen werden, nochmals hin, und bemerken bey den zu suchenden Stücken mit Zahlen, nach welchem Gesetze sie gefunden werden.

Fig 9.

	gegeben
die drey Winkel	1) RMN
zwey Perpendikel	2) RPB
ein Perpendikel und die Hypotenuse oder	3) RBH / RPH
ein Winkel und die Hypotenuse	4) RHN / RHM
ein Perpendikel und der anliegende Winkel	5) RPN / RBM
ein Perpendikel und der gegenüber stehende Winkel	6) RPM / RBN

gesuchet

H(5)P(4)B(4) die drey Seiten

N(2)M(2)H(3) zwey Winkel und die Hypotenuse

N(1)M(6)P(3) / N(6)M(1)B(4) zwey Winkel und ein Perpendikel

P(6)B(1)M(5) / P(1)B(6)N(5) die beyden Perpendikel und ein Winkel

H(6)B(2)M(4) / H(6)P(2)N(4) die Hypotenuse, ein Perpendikel und der anliegende Winkel

H(1)B(2)N(4) / H(1)P(2)M(4) die Hypotenuse, ein Perpendikel und der gegenüberstehende Winkel.

Anmerkung. Bey den Proportionen, welche das durch 6 Gesuchte bestimmen sollen, bleibt das Gesuchte zweifelhaft, wie und warum, werden wir unten weitläuftiger zeigen; wir bemerken nur jetzt, daß man bey diesen Proportionen in 6 entweder aus andern Umständen wissen, oder es gesagt seyn muß, ob das Gesuchte **über** oder **unter** 90° sey.

§. 56. Wir wollen nun die Proportionen nach eben der Ordnung, worinn das Gesuchte im vorhergehenden §. stehet, hersetzen und dabey anzeigen, in welchem §. sie bewiesen sind.

1. r : cot. N = cot. M : cos. H §. 50. oder weil cot N = $\frac{r^2}{\text{tang. N}}$
   tang. N : r = cot. M : cos. H
   sin. N : r = cos. M : cos. P §. 49.
   sin. M : cos. N = r : cos. B §. 49.

2. sin. P : r = tang. B : tang. N §. 44. und weil die Tangenten sich verkehrt
   r : sin. P = cot. B : cot. N als die Cotangenten verhalten §. 53.
   r : sin. B = cot. P : cot. M §. 44.
   r : cos. B = cos. P : cos. H §. 46.

3. sin. H : sin. B = r : sin. N §. 40.
   r : cot. H = tang. B : cos. M §. 54.
   cos. B : cos. H = r : cos. P §. 46.
   tang. H : tang P = r : cos. N §. 53. oder r : cot. H = tang. P : cos. N
   sin. H : r = sin. P : sin. M §. 40.
   cos. P : r = cos. H : cos. B §. 46.

. r : tang. H = cos N : tang. P §. 53.
. r : sin. H = sin N : sin B §. 40.
. r : cos. H = tang N : cot. M §. 51.
4 . r : sin. H = sin. M : sin. P § 40.
. cos. M : r = cot. H : cot. B §. 52. oder r : cos. M = tang. H : tang. B
. cot M : r = cos. H : cot. N §. 51. oder r : cos. H = tang. M : cot. N
. r : cos. N = cot P : cot. H §. 52. oder cos. N : r = tang. P : tang. H
. r : sin. P = tang N : tang. B §. 44.
5 . r : cos. P = sin. N : cos. M §. 49.
. r : cos. M = cot. B : cot. H §. 52. oder cos. M : r = tang. B : tang. H
. r : sin. B = tang. M : tang. P §. 44.
. r : cos. B = sin. M : cos. N. §. 49.
. sin. M : sin. P = r : sin. H §. 40.
. r : cot. M = tang. P : sin. B §. 44. oder tang. M : tang. P = r : sin B
6 . cos. P : r = cos. M : sin. N §. 49.
. sin N : sin. B = r : sin. H §. 40.
. tang. N : tang B = r : sin. P §. 44 oder r : tang. B = cot. N : sin. P
. cos. B : r = cos. N : sin. M §. 49.

Bey den Proportionen in diesem sechsten Abschnitt, welcher auf dem im vorhergehenden §. passet, ist das Gesuchte ungewiß, wie wir weiter unten zeigen werden. Wir werden aber auch bemerken, daß man sich bey sin. M : sin. P = r : sin. H und sin. N : sin. B = r : sin. H sich helfen kann, wie H beschaffen ist, §. 90.

§. 57. Man wird bey genauer Betrachtung dieser Proportionen bald einsehen, daß eigentlich so viel Proportionen nicht nöthig sind, um alle Fälle bey den sphärischen rechtwinklichten Triangeln aufzulösen. Man kann mit 16 Proportionen zukommen, die alles enthalten, wie wir gleich zeigen werden. Wir haben in §. 56. dreyßig Hauptproportionen hergesetzet, davon das Gesuchte mit cursiv gedruckt ist, und noch manche Nebenproportionen, die nur eben das enthalten. Theils ist es darum geschehen, um das mehreste bey einander in einer Tabelle zu haben, theils auch, weil wir nach den Verbindungen der 5 Stücke in einem Triangel außer dem rechten Winkel nach §. 55. so viel zu suchen hatten, und wir einen der Cathetorum, die B beständig als die Basis, und P als das Perpendikel betrachteten. Aber es ist eben das, wenn man auch P als die Basis und B als das Perpendikel ansiehet, und nur allgemein von Perpendikel und Basis in den Proportionen redet; alsdenn fallen 14 Proportionen weg, die eigentlich auch nichts neues sagen und man denn entbehren kann. Aus dem ersten Satze **eine**, aus dem zweyten auch **eine**, und aus dem dritten, vierten, fünften und sechsten,

aus

aus jedem drey. Alsdenn thut man aber besser, daß man die Proportionen mit Worten ausdrücket. Sie sind folgende, nach der Ordnung, die wir im vorhergehenden § beobachtet haben.

§. 58. Wenn die beyden Winkel außer dem rechten bekannt sind, die Hypotenuse zu finden: der radius oder sinus totus (der Tafeln) verhält sich zum cotangens eines der Winkel, wie der cotangens des andern Winkels zum cosinus der Hypotenuse. §. 50.

2) Wenn die beyden Winkel bekannt sind, eines der Perpendikel zu finden: der sinus des anliegenden Winkels an der gesuchten Seite verhält sich zum sinus totus oder radius, wie der cosinus des andern Winkels zum cosinus der gesuchten Seite.

Das ist aus dem ersten Satze §. 49.

3) Wenn die beyden Perpendikel bekannt sind, die Winkel zu finden: der sinus totus verhält sich zum sinus des Perpendikels, woran der gesuchte Winkel lieget, wie die Corangente des andern Perpendikels, zur Corangente des gesuchten Winkels §. 44.

4) Wenn die beyden Perpendikel bekannt sind, die Hypotenuse zu finden: Der sinus totus verhält sich zum cosinus des einen Perpendikels, wie der cosinus des andern Perpendikels zum cosinus der Hypotenuse. §. 46.

Das ist aus dem zweyten Satze.

5)

5) Wenn die Hypotenuse und ein Perpendikel bekannt sind, den diesem Perpendikel entgegensetzten Winkel zu finden: **der sinus der Hypotenuse verhält sich zum sinus des bekannten Perpendikels, wie der sinus totus zum sinus des Winkels, der dem bekannten Perpendikel entgegen lieget.** §. 40.

6) Wenn die Hypotenuse und ein Perpendikel bekannt ist, den diesem Perpendikel anliegenden Winkel zu finden: **der sinus totus verhält sich zum cotangens der Hypotenuse, wie der tangens des bekannten Perpendikels zum cosinus des anliegenden Winkels.** §. 53.

7) Wenn die Hypotenuse und ein Perpendikel bekannt ist, das andre Perpendikel zu finden: **der cosinus des bekannten Perpendikels verhält sich zum cosinus der Hypotenuse, wie der sinus totus zum cosinus des gesuchten Perpendikels.** §. 46.

Das ist aus dem dritten Satze.

8) Wenn die Hypotenuse und ein Winkel bekannt ist, die diesem Winkel anliegende Seite zu finden: **der radius oder sinus totus verhält sich zum tangens der Hypotenuse, wie der cosinus des bekannten Winkels zum tangens der anliegenden Seite** §. 53.

9) Wenn die Hypotenuse und ein Winkel bekannt sind, die diesem Winkel entgegengesetzte Seite zu finden: **der sinus totus verhält sich zum**

sinus

sinus der Hypotenuse, wie der sinus des bekannten Winkels zum sinus der entgegengesetzten Seite. §. 40.

10) Wenn die Hypotenuse und ein Winkel bekannt sind, den andern Winkel zu finden: der sinus totus verhält sich zum cosinus der Hypotenuse, wie die Tangente des bekannten Winkels zur Cotangente des gesuchten Winkels. §. 51.

Dieses ist aus dem vierten Satze.

11) Wenn ein Perpendikel und der anliegende Winkel bekannt sind, die Hypotenuse zu finden: der sinus totus verhält sich zum cosinus des anliegenden Winkels, wie der cotangens des bekannten Perpendikels zum cotangens der Hypotenuse. §. 52.

12) Wenn ein Perpendikel und der anliegende Winkel bekannt sind, das andere Perpendikel zu finden: der sinus totus verhält sich zum sinus des bekannten Perpendikels, wie der tangens des anliegenden Winkels zum tangens des andern Perpendikels, das diesem Winkel entgegengesetzt ist. §. 44.

13) Wenn ein Perpendikel und der anliegende Winkel bekannt sind, den andern Winkel zu finden: der sinus totus verhält sich zum cosinus des bekannten Perpendikels, wie der sinus des bekannten anliegenden Winkels zum cosinus des andern Winkels. §. 49.

Dieses ist aus dem fünften Satze.

14)

14) Wenn ein Perpendikel und der gegenüberstehende Winkel bekannt sind, die Hypotenuse zu finden: **der sinus des bekannten Winkels verhält sich zum sinus des gegenüberstehenden bekannten Perpendikels, wie der sinus totus zum sinus der Hypotenuse.** §. 40. Dieser Fall ist zweifelhaft. Die Hypotenuse kann unter oder über 90 Grad seyn, und man muß es aus andern Umständen wissen, davon weiter unten §. 82.

15) Wenn ein Perpendikel und der gegenüberstehende Winkel bekannt sind, den andern Perpendikel zu finden: **der sinus totus verhält sich zum cotangens des bekannten Winkels wie der tangens des gegenüberstehenden bekannten Perpendikels zum sinus des andern Perpendikels.** §. 44. Auch dieser Fall ist zweifelhaft.

16) Wenn ein Perpendikel und der gegenüberstehende Winkel bekannt ist, den andern Winkel zu finden: **der cosinus des bekannten Perpendikels verhält sich zum sinus totus, wie der cosinus des gegenüberstehenden bekannten Winkels zum sinus des gesuchten.** §. 49. Auch dieser Fall ist zweifelhaft.

Dieses ist aus dem sechsten Satze.

§. 59. Wir haben in dem vorhergehenden Paragraphen bey den letzten drey Proportionen die Bemerkung gemacht, daß sie **zweifelhaft** wären. Gebrauche ich die Proportionen nach den Buchstaben

nach

nach §. 56. so sind der Fälle sechse, die zweifelhaft sind, welches aber würklich mit diesen einerley ist. Die Ursache rühret allgemein daher: weil außer dem bekannten rechten Winkel hier **eine Seite und der ihr gegenüberstehende Winkel** gegeben sind, welches aber, wie wir §. 20. bewiesen haben, keinen Triangel bestimmet, sondern mehrern zukommen kann. Es ist also würklich eigentlich nur **ein** Fall, wie wir weiterr unten aus andern datis noch sehen werden, wo das Gesuchte zweifelhaft bleibet, wenn nemlich außer dem bekannten rechten Winkel eine Seite und der gegenüberstehende Winkel gegeben ist, bey allen andern Fällen werden wir uns zu helfen wissen, wie der Erfolg lehren wird.

§. 60. Aus den Proportionen, welche wir §. 56. angezeiget haben, lassen sich nun folgende Formeln für die Seiten und Winkel des rechtwinklichten sphärischen Dreyecks machen. Wir zeigen sie an, ohngeachtet sie jeder leicht selbst machen kann, um bedürfenden Falls nicht weiter nöthig zu haben, sie zu suchen.

Sin. N $= \frac{r \cdot \text{sin. B}}{\text{sin. H}}$ und wenn r $= 1$ genommen wird $= \frac{\text{sin. B}}{\text{sin. H}}$

Ferner $\frac{\text{sin. N}}{} = \frac{r \cdot \text{cos. M}}{\text{cos. P}}$ $= \frac{\text{cos. M}}{\text{cos. P}}$

cos. N $= \frac{\text{sin. M} \cdot \text{cos. B}}{r}$ $= \text{sin. M} \cdot \text{cos. B}$

Ferner $\frac{\text{cos. N}}{} = \frac{r \cdot \text{tang. P}}{\text{tang. H}}$ $= \frac{\text{tang. P}}{\text{tang. H}}$

cos. N. $= \frac{r \cdot \text{cot. H}}{\text{cot. P}}$ $= \frac{\text{cot. H}}{\text{cot. P.}}$

tang. N $= \frac{r \cdot \text{tang. B}}{\text{sin. P}}$ $= \frac{\text{tang. B}}{\text{sin. P}}$

Ferner $\text{tang. } N = \frac{r \cdot \text{cot. } M}{\text{cos. } H}$ und wenn $r = 1$ angenommen wird $= \frac{\text{cot. } M}{\text{cos. } H}$

$\text{cot. } N = \frac{r \cdot \text{cos. } H}{\text{cot. } M}$ $= \frac{\text{cos. } H}{\text{cot. } M}$

Ferner $\text{cot. } N = \frac{\text{cos. } H \cdot \text{tang. } M}{r}$ $= \text{cos. } H \cdot \text{tang. } M$

Ferner $\text{cot. } N = \frac{\text{sin. } P \cdot \text{cot. } B}{r}$ $= \text{sin. } P \cdot \text{cot. } B$

Ferner $\text{cot. } N = \frac{r \cdot \text{sin. } P}{\text{tang. } B}$ $= \frac{\text{sin. } P}{\text{tang. } B}$

§. 61.

$$\sin. M = \frac{\cos. N . r}{\cos. B} \text{ und wenn } r = 1 \text{ angenommen wird } = \frac{\cos. N}{\cos. B}$$

Ferner

$$\sin. M = \frac{\sin. P . r}{\sin. H} \quad \text{:} \quad \text{:} \quad \text{:} \quad = \frac{\sin. P}{\sin. H}$$

$$\cos. M = \frac{\cot. H . r}{\cot. B} \quad \text{:} \quad \text{:} \quad = \frac{\cot H}{\cot. B}$$

Ferner

$$\cos. M = \frac{r . \tang. B}{\tang. H} \quad \text{:} \quad \text{:} \quad = \frac{\tang. B}{\tang. H}$$

Ferner

$$\cos. M = \frac{\sin. N . \cos. P}{r} \quad \text{:} \quad = \sin. N . \cos. P$$

$\text{tang. } M = \frac{r \cdot \text{tang. } P}{\text{sin. } B}$ und wenn $r = 1$ angenommen wird $= \frac{\text{tang. } P}{\text{sin } B}$

Ferner $\text{tang. } M = \frac{r \cdot \text{cot. } N}{\text{cos. } H} = \frac{\text{cot. } N}{\text{cos. } H}$

$\text{cot. } M = \frac{r \cdot \text{cos. } H}{\text{cot. } N} = \frac{\text{cos. } H}{\text{cot. } N}$

Ferner $\text{cot. } M = \frac{\text{cos. } H \cdot \text{tang. } N}{r} = \text{cos. } H \text{ tang. } N$

Ferner $\text{cot. } M = \frac{r \cdot \text{sin. } B}{\text{tang. } P} = \frac{\text{sin } B}{\text{tang. } P}$

Ferner $\text{cot. } M = \frac{\text{sin. } B \cdot \text{cot } P}{r} = \text{sin. } B \cdot \text{cot } P$

§. 62.

* $\sin. P = \frac{r . \text{tang. } B}{\text{tang. } N}$ und wenn $r = 1$ angenommen wird $= \frac{\text{tang. } B}{\text{tang. } N}$

Ferner $\sin. P = \frac{\sin. H . \sin. M}{r} = \sin. H . \sin. M$

$\text{cos. } P = r . \frac{\text{cos. } M}{\sin. N} = \frac{\text{cos. } M}{\sin. N}$

Ferner $\text{cos. } P = \frac{r . \text{cos. } H}{\text{cos. } B} = \frac{\text{cos. } H}{\text{cos. } B}$

$\text{tang. } P = \frac{\text{tang. } M . \sin. B}{r} = \text{tang. } M . \sin. B$

Ferner $\text{tang. } P = \frac{r \cdot \text{sin. } B}{\text{cot. } M}$ und wenn $r = 1$ angenommen wird $= \frac{\text{sin. } B}{\text{cot. } M}$

Ferner $\text{tang. } P = \frac{\text{tang. } H \cdot \text{cos. } N}{r} = \text{tang. } H \cdot \text{cos. } N$

Ferner $\text{tang. } P = \frac{r \cdot \text{cos. } N}{\text{cot. } H} = \frac{\text{cos. } N}{\text{cot. } H}$

$\text{cot. } P = \frac{r \cdot \text{cot. } M}{\text{sin. } B} = \frac{\text{cot. } M}{\text{sin. } B}$

Ferner $\text{cot. } P = \frac{r \cdot \text{cot. } H}{\text{cos. } N} = \frac{\text{cot. } H}{\text{cos. } N}$

§. 63.

$\sin. B = \frac{r . \cot. M}{\cot. P}$ und wenn $r = 1$ angenommen wird $= \frac{\cot. M}{\cot. P}$

Ferner $\sin. B = \frac{\cot. M . \tang. P}{r}$ $= \cot. M . \tang. P$

Ferner $\sin. B = \frac{r . \tang. P}{\tang. M}$ $= \frac{\tang. P}{\tang. M}$

Ferner $\sin. B = \frac{\sin. N . \sin. H}{r}$ $= \sin. N . \sin. H$

$\cos. B = \frac{r . \cos. N}{\sin. M}$ $= \frac{\cos. N}{\sin. M}$

Ferner $\cos. B = \frac{r. \cos. H}{\cos P}$ und wenn $r = 1$ genommen wird $= \frac{\cos. H}{\cos. P}$

$\text{tang } B = \frac{\text{sin P. tang. N}}{r}$ - - $= \text{sin. P. tang. N}$

Ferner $\text{tang. } B = \frac{r. \cos. M}{\cot. H}$ - - $= \frac{\cos. M}{\cot. H}$

Ferner $\text{tang. } B = \frac{\cos. M. \text{tang. } H}{r}$ - - $= \cos. M. \text{tang. } H$

$\cot. B = \frac{r. \cot N}{\text{sin P}}$ - - $= \frac{\cot. N}{\text{sin. P}}$

Ferner $\text{cot, } B = \frac{r. \cot. H}{\cos. M}$ - - $= \frac{\cot. H}{\cos. M}$

§. 64.

* $\sin. H = \frac{r. \sin. B}{\sin. N}$ und wenn $r = 1$ angenommen wird $= \frac{\sin. B}{\sin. N}$

Ferner

* $\sin. H = \frac{r. \sin. P}{\sin. M} = \frac{\sin. P}{\sin. M}$

$\cos. H = \frac{\cot. N. \cot. M}{r} = \cot. N. \cot M$

Ferner

$\cos. H = \frac{r. \cot. M}{\tang. N} = \frac{\cot. M}{\tang. N}$

Ferner

$\cos. H = \frac{r. \cot. N}{\tang. M} = \frac{\cot N}{\tang. M}$

Ferner $\text{cos. H} = \frac{\text{cos. P cos. B}}{r}$ und wenn $r = 1$ angenommen wird $= \text{cos. P cos. B}$

$\text{tang. H} = \frac{r \text{ tang. P}}{\text{cos. N}}$ $= \frac{\text{tang. P}}{\text{cos. N}}$

Ferner $\text{tang. H} = \frac{r \text{ tang. B}}{\text{cos. M}}$ $= \frac{\text{tang. B}}{\text{cos. M}}$

$\text{cot. H} = \frac{r \text{ cos. M}}{\text{tang. B}}$ $= \frac{\text{cos. M}}{\text{tang. B}}$

Ferner $\text{cot. H} = \frac{\text{cos. M. cot. B}}{r}$ $= \text{cos. M. cot. B}$

Ferner $\text{cot. H} = \frac{\text{cos. N. cot. P}}{r}$ $= \text{cos. N. cot. P}$

§. 65. 1) Anmerkung. Diejenigen Formeln, wo das Gesuchte zweifelhaft bleibet, wenn nicht andere Umstände es bestimmen, sind mit einem (*) bezeichnet.

2)

2) Wenn der r = 1 gesetzet wird, so werden, wie natürlich, alle sinus und cosinus zu Brüchen von 1 und die Tangenten sind es bis 45°, da sie = r = 1 werden. Wenn man r = 1 setzet, so ist das in den Rechnungen oft bequem zu gebrauchen, und vermindert auch das Schreiben; will man die natürlichen sinus und Tangenten suchen, so lassen sie sich auch bequem durch einander dividiren oder multipliciren, nachdem die Formel lautet, und alsdenn der Quotient unter den natürlichen sinibus oder Tangenten aufsuchen. Es ist nicht so bequem alsdenn mit Logarithmen zu rechnen, wenn r = 1 angenommen wird, (ohngeachtet es angehet) weil man alsdenn mit negativen Größen zu thun hat, indem die Logarithmen der ächten Brüche alle negative Größen sind (§. 353. Arith. am Ende). Es lässet sich aber in solchen Formeln, wo r sich nicht befindet, und also = 1 angenommen ist, die r leicht wieder herstellen. Bey solchen Formeln, wo die trigonometrischen Linien mit einander nur multiplicirt werden, als cot. H = cos. N. cot. P ist r der Divisor gewesen. Und will man mit Logarithmen rechnen, so wird sie also cot. H = $\frac{\text{cos. N. cot. P}}{\text{r}}$ und bey solchen Formeln, als cot. H = $\frac{\text{cos. M}}{\text{tang. B}}$ ist r im Nenner gewesen, und will man mit Logarithmen rechnen, so ist cot. H = $\frac{\text{r. cos. M}}{\text{tang. B}}$

3) Die Veränderungen, die man in diesen Formeln, wenn in der Gleichung Tangenten oder Co-

tangen-

tangenten herkommen, findet, als tang. B $= \frac{r.\cos. M.}{\cot H} = \frac{\cos. M. \tan g. H}{r}$ u. s. w. sind daher entstanden, weil §. 473. Geom. cot. a $= \frac{r^2}{\tan g. a}$ und daher tang. a $= \frac{r^2}{\cot. a}$ ist, dadurch sie sich, wenn man substituiret, leicht erklären lassen.

4) Man thut nun gut, wenn man entweder die Formeln, §. 60 bis 64, oder die Proportionen §. 56, oder die wörtlichen Ausdrücke §. 58. vor seine logarithmische Tafeln schreibet, um sie, wenn man sie gebrauchet, ohne langes Suchen bey der Hand zu haben, weil es ganz unmöglich wäre, sie alle zu behalten.

§. 66. Wir haben uns bey unsern bisherigen Betrachtungen nun gar nicht darum bekümmert, ob die Seiten und Winkel der bisher betrachteten Triangel größer oder kleiner als 90° sind. Wir haben sie vielmehr nur so groß, oder kleiner gedacht. Wie aber, wenn sie nun größer als 90° sind, oder wenn in einem sphärischen Triangel zugleich größere und kleinere Winkel und Bogen als 90° vorkommen? Das ists, davon wir nun reden wollen. Wir wissen noch aus der ebenen Trigonometrie daß die sinus, cosinus, und die andern trigonometrischen Linien zweyer Winkel oder Bogen, deren einer über, der andre unter 90° Grade ist, gleich groß seyn können. Es müßte daher zuweilen zweifelhaft werden, ob die gesuchten Winkel oder Bogen über oder unter 90°, (welches wir stumpf oder spitz nennen wollen) sind, da wir doch mit Triangeln jetzt zu thun haben, deren

ren Seiten und Winkel bis nahe an 180° steigen können. Es ist also durchaus nothwendig, daß man bey den drey gegebenen Stücken in einer Proportion auch darauf Rücksicht nimmt, ob die gegebenen Stücke stumpf oder spitz sind, und wo es sich thun lässet, (und nur bey den Sinussen wird es nicht angehen) die spitzen Winkel oder Bogen durch das Zeichen (+) und die stumpfen durch das Zeichen (—) ausdrücket. Es wird sich alsdenn bey dem 4ten Gliede, das man suchet, und aus den Zeichen der drey andern mehrentheils zeigen, ob das Gesuchte größer oder kleiner als 90° ist. Eigentlich kann nur der einzige Fall zweifelhaft bleiben, wenn das Gesuchte ein sinus ist und die ersten drey Glieder auch sinus sind, wozu auch r gehöret, wie wir denn noch weiter davon reden werden. Es geben auch diese Zeichen in der Rechnung keine Irrung, weil man bey der Behandlung durch Logarithmen nicht darauf siehet, und man nur die trigonometrischen Linien suchet.

§. 67. Man erinnere sich jetzt, oder lese es nach, was wir §. 457. Geomet. und im folgenden von den Eigenschaften der trigonometrischen Linien sagten. Wir haben aber nur nöthig, sie bis 180° zu betrachten, weil wir nur mit Winkeln und Bogen zu thun haben, die beynahe so groß seyn können. Die sinus der Winkel, und also auch der Bogen, es mögen diese spitz oder stumpf, unter oder über 90° seyn, bleiben allezeit in einerley Lage in Ansehung des Diameters des Zirkels, sie bleiben also immer positiv, und man muß ihnen das Zeichen (+) geben. Die cosinus der spitzen Winkel sind positiv (+)

über

über 90 Grad oder der stumpfe Winkel und Bogen werden **negativ** und haben das Zeichen (—), bey 90° werden sie **Null**. Die **Tangenten** der Winkel und Bogen unter 90° sind **positiv**, oder haben das Zeichen (+), über 90° bis 180°, sind sie negativ und haben das Zeichen (—), so wie sie beym rechten Winkel **unendlich** geworden sind, und bey 180° **Null** werden. Die **Corangenten** sind bis 90° **positiv** (+), bey 90° werden sie **Null** und über 90° bis 180°, also bey stumpfen Winkeln werden sie **negativ** und haben das Zeichen (—). Die **Secante** ist **positiv** bis 90° (+). Bey 90° wird sie **unendlich** und über 90° bis 180° **negativ** (—). Die **Cosecante** ist **positiv** bis 90° (+), bey 90° ist sie = radius, sie bleibt **positiv** bis 180° und wird bey 180° **unendlich**. Doch wir werden bey unsern folgenden Betrachtungen weder Secanten noch Cosecanten gebrauchen, weil wir sie hier nicht nöthig haben, und ohne sie alle Fälle auflösen können.

§. 68. Nach diesen Vorerinnerungen, oder eigentlichen Wiederholungen der Lehren von den trigonometrischen Linien, werden wir nun, was wir §. 66 sagten, berichtigen können. Ehe wir dazu schreiten, wollen wir erst noch folgende Bemerkung machen. Man pfleget ein Paar Winkel oder Bogen, deren jeder **mehr** oder **weniger** als 90° hält, **gleichartig** (homogeneos) zu nennen. So werden z. E. zwey Winkel oder Bogen, deren einer 40°, der andere 50°, oder deren einer 116°, der andere 95° wären, gleichartig genennet. Es ist nicht nöthig, wie man siehet, zu dieser Benennung, daß diese Winkel

kel oder Bögen **gleich** sind. Ein Paar solche Winkel oder Bogen, oder Winkel und Bogen, deren einer **unter**, der andre **über** 90°, werden **ungleichartig** (heterogenei) genennet. So sind z. E. die Winkel oder Bogen, oder Winkel und Bogen von 65° und 97° **ungleichartig**.

§. 69. Man kann aus den Proportionen selbst, und zwar aus den Zeichen, die man den Gliedern derselben, nachdem sie stumpf oder spitz sind, geben kann, §. 66. 67. die Beschaffenheit bestimmen, welche ein Paar Winkel oder Bogen in Ansehung ihrer Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit haben. Es kommt auch dieses einem oft wohl zu statten, ob man schon die mehreste Zeit aus den Zeichen, welche man den drey ersten Gliedern der Proportionen giebet, richtig schließen kann, ob das Gesuchte **über** oder **unter** 90° sey. Man könnte eben dieses, was wir jetzt durch die Proportionen lehren wollen, auch durch die Lage der Ebenen gegen einander zeigen. Man findet auch in manchen Lehrbüchern, daß man diesen Weg gegangen ist, auch ist es recht gut, wenn man sich ihn bekannt machet. Aber da man durch die Bezeichnung der Glieder der Proportionen eben das ausrichtet, und leichter dazu kömmt, so haben wir diese Methode gewählet. Wären diese Regeln nicht, so wäre jede Auflösung oder jedes Gefundne vierte Glied zweydeutig, und man wüste nicht, ob es stumpf oder spitz wäre, welches jetzt aber bey den mehrsten Fällen gar keinen Zweifel unterworfen ist.

Wir haben §. 67 etwas von der Bezeichnung der trigonometrischen Linien gesaget. Auch dieses läßt sich durch die Proportionen beweisen. Die cosinus, Tangenten und Cotangenten von eben dem Winkel sind immer von einerley Beschaffenheit in Ansehung ihres Zeichens, bis 180°. Die sinus bis 180° sind mit dem radius von gleicher Beschaffenheit, und es haben die sinus bis dahin + zum Zeichen. Aus §. 473 Geom. ist bekannt tang. a = r . sin. a. Folglich cos. a : sin. a = r : tang. a

cos. a . tang. a = r . sin. a.

nun ist sin. r bis 180° allezeit ein positives Produkt, folglich muß es cos. tang auch seyn, das wird es aber nur, wenn beyde Größen **positiv**, oder beyde Größen **negativ**, also von einerley Beschaffenheit sind.

Ferner, weil §. 473 Geom. rr = cot. a . tang a

Folglich tang a : r = r : cot. a

tang. a . cot. a = r . r

aber r . r ist allezeit positiv, folglich muß es auch tang. a. cot. a seyn, folglich auch von einer Beschaffenheit seyn, entweder beyde das Zeichen **Plus** oder beyde das Zeichen **Minus** haben. Da der Cotangens mit dem Tangenten von einerley Beschaffenheit in Ansehung des Zeichens seyn muß, auch der cosinus eben so mit dem tangens, so müssen cosinus, tangens und cotangens bis 180° von einerley Beschaffenheit seyn.

§. 70

§. 70. In jedem rechtwinklichten sphärischen Triangel ist ein Winkel (außer dem rechten, der am Perpendikel liegt, von dem in der Folge nie die Rede ist, wenn von Winkeln geredet wird), und das gegenüberstehende Perpendikel allezeit gleichartig, oder wenn N oder M **größer**, **kleiner** oder **gleich** 90° ist so ist das gegenüberstehende Perpendikel auch **größer**, **kleiner** oder **gleich** 90°. Es folget dieses schon aus der Proportion §. 56. in 5. r : sin. P = tang. N : tang. B, oder auch aus der r : sin. B = tang. M : tang. P. Fig. 9.

Wir wollen es nur bey der ersten dieser Proportionen zeigen; jeder wird es bey der letztern selbst gleich machen können.

Da nun r. tang. B = sin. P. tang N, so folget: ist N > 90°, so hat tang. N — zum Zeichen, folglich sin. P. tang. N eine Minusgröße, folglich muß r. tang. B es auch seyn, weil das Produkt der äußern Glieder in einer Proportion gleich ist dem Produkte der mittlern, r kann es nicht seyn, also muß tang. B negativ und folglich B > 90° seyn, wie N sein gegenüberstehender Winkel auch war.

Ist N < 90°, so ist sin. P. tang. N eine Plusgröße, also r. tang. B imgleichen; folglich muß B **unter** 90° seyn.

Ist N = 90° so ist tang. N ∞ folglich sin. P. tang. N eine **unendliche** Größe, also muß r. tang. B auch eine **unendliche** Größe seyn. Die-

ses kann nur geschehen, wenn tang. B = ∞ also B = 90°, weil r sich immer gleich bleibet. §. 67. 69.

§. 71. **Alles dieses ist auch umgekehrt wahr. Wenn einer der Perpendikel größer, kleiner oder gleich 90° ist, so ist der gegenüberstehende Winkel auch größer, kleiner oder gleich 90°; oder Perpendikel und gegenüberstehende Winkel sind gleichartig.** Es folgt auf eben die Art aus r. tang. B = sin. P. tang. N. Ist tang. B **negativ**, so muß es auch tang. N seyn, ist tang. B **positiv**, so muß es auch tang. N seyn; ist tang. B = ∞, so muß es auch tang. N seyn.

Anmerkung. Man verstehe uns wohl: die Perpendikel und ihre gegenüberstehende Winkel sind **gleichartig**. Darum nicht gleich; sie können sehr verschieden seyn, nur sind beyde **über** oder **unter** 90°. Nur den Fall ausgenommen, wenn N oder M = 90°, so ist B oder P ein Quadrant, und umgekehrt, wenn B oder P ein Quadrant ist, so ist N oder M = 90°.

§. 72. Wenn man also B aus N und P, oder P aus M und B, ferner N aus B und P oder M aus P und B suchet; so kann man allezeit richtig schließen, von welcher Art das Gesuchte ist, weil es mit dem gegenüberstehenden **gleichartig** ist. Es ist also hierdurch in unser Proportionstabelle §. 56. bey folgenden Proportionen das Gesuchte außer allen Zweifel gesetzet, ob es stumpf oder spitz sey.

§. 56.

§. 56. aus 5 r: sin. P = tang. N: tang. B
aus 2 r: sin. P = cot. B: cot. N
aus 5 r: sin. B = tang. M: tang. P
aus 2 r: sin. B = cot. P: cot. M.

§. 73. **Wenn in einem sphärischen rechtwinklichten Triangel beyde Winkel an der Hypotenuse gleichartig sind; so ist die Hypotenuse kleiner als 90°. Sind beyde Winkel ungleichartig, so ist die Hypotenuse größer als 90°. Ist einer von diesen Winkeln 90°, so ist auch die Hypotenuse 90° und der Triangel ist gleichschenklicht, sind beyde Winkel jeder 90°, so ist die Hypotenuse und beyde Perpendikel zusammen Quadranten, und der Triangel ist gleichseitig.**

Es läßt sich dieses aus folgender Proportion leichtlich erweisen §. 56. aus 1.

$$\frac{\text{r. cot. N} = \text{cot. M: cos. H}}{\text{r. cos. H} = \text{cot. N. cot. M}}$$

Wenn N und M **gleichartig** sind, so haben sie beyde entweder das Plus-, oder Minuszeichen, nachdem sie unter oder über 90° sind, und ihr Produkt ist **Plus**. Folglich muß cos. H auch **Plus** seyn, weil es r allzeit ist, folglich H **unter** 90° §. 67. 69.

Ist N und M **ungleichartig**, so ist eines davon eine **Plus**, das andre eine **Minus**größe, und das Produkt von cot. N. cot. M ist **negativ**, folg-

lich muß cos. H auch negativ seyn, folglich H größer als 90° seyn. §. 67. 69.

Ist N oder M = 90°; so ist cot. N oder cot. M = Null §. 67. Also auch cot. N. cot. M. Folglich auch r. cos. H, r kann nicht = Null werden, also muß es cos. H seyn, aber alsdenn ist H = 90° §. 67. Ich füge noch hinzu, daß alsdenn der Triangel gleichschenklicht ist; denn laut §. 71. ist, wenn ein Winkel 90° ist, sein gegenüberstehender Perpendikel ein Quadrant. Daher folget es auch, wenn beyde Winkel 90° sind, so sind beyde Perpendikel Quadranten, und da es die Hypotenuse auch war, so ist der Triangel gleichseitig.

§. 74. **Es ist auch umgekehrt wahr. Wenn Fig. 9. H oder die Hypotenuse kleiner als 90° ist, so sind beyde Winkel gleichartig. Ist die Hypotenuse größer als 90°, so sind die Winkel ungleichartig. Ist die Hypotenuse = 90°, so ist auch einer dieser Winkel = 90°.** Es folget dieses aus eben der gehabten Proportion und daher entstandenen Produkten r. cos. H = cot. N. cot. M.

Ist H > 90°, so ist r. cos. H negativ, weil cos. H negativ ist; folglich muß cot. N. cot. M auch negativ seyn. Folglich eine von beyden Größen **Plus**, die andre **Minus** zum Zeichen haben, folglich die eine größer, die andre kleiner als 90° seyn. Folglich die Winkel ungleichartig seyn.

Ist

Ist H kleiner als 90°, so ist cos. H eine Plusgröße und cos. H. r ein positives Produkt. Folglich muß es auch cot. N. cot. M seyn. Das könnte aber nicht seyn, wenn nicht beyde das Pluszeichen oder beyde das Minuszeichen haben, also beyde gleichartig sind.

Ist H = 90°, so ist cos. H = o. Also r . cos. H = o. Folglich muß entweder cot. M oder cot. N = o seyn, damit cot. N. cot. M = o sey. Es muß also einer von beyden Winkeln = 90° seyn.

§. 75. Wenn man also H aus N und M suchet, oder M aus H und N oder N aus H und M, so weis man allezeit, von welcher Art das Gesuchte seyn müsse. Es ist daher in unsrer Proportionstabelle das Gesuchte folgender Proportionen außer aller Zweydeutigkeit.

§. 56. aus 1 . r : cot. N = cot. M : cos. H oder auch
aus 1 . tang. N : r = cot. M : cos. H
aus 4 r : cos. H = tang. N : cot. M
aus 4 cot. M : r = cos. H : cot. N oder auch
aus 4 r : cos. H = tang. M : cot. N

§. 76. **Wenn in einem sphärischen rechtwinklichten Triangel ein Winkel mit dem anliegenden Perpendikel, oder** Fig. 9. **M und B oder N und P gleichartig sind, so ist die Hypotenuse kleiner als 90°. Ist aber ein Winkel mit dem anliegenden Perpendikel, oder M und B oder N und P**

ungleichartig, so ist die Hypotenuse größer als 90°.

Es folget dieses aus der Proportion §. 56. r : cos. M = cot. B : cot. H
cos M. cot. B = r. cot. H oder auch r : cos. N = cot. P : cot. H.

Ist M und B **gleichartig**, so ist ihr Produkt positiv, folglich muß es auch r. cot. H seyn. Da r allezeit positiv ist, so muß also cot. H + zum Zeichen haben, folglich H unter 90° seyn.

Ist M und B **ungleichartig**, so ist cos. M. cot. B ein negatives Produkt, weil eine Größe +, die andre — zum Zeichen hat. Da r. cot. H nun auch negativ seyn muß, so muß cot. H das Zeichen — haben, also H über 90° seyn.

§. 77. Es ist dieses auch umgekehrt wahr. **Wenn die Hypotenuse oder H < 90° ist, so ist ein Winkel mit dem anliegenden Perpendikel entweder M und B oder N und P gleichartig. Ist H > als 90°, so ist entweder M und B oder N und P ungleichartig.**

Es folget dieses aus eben der Proportion (vorhergehender §), hat cot. H das Zeichen +, also H unter 90°, so müssen cos. M und cot. B beyde entweder das Zeichen +, oder beyde das Zeichen — haben, sonst würde ihr Produkt nicht positiv, also M und B **gleichartig** seyn. Ist cot. H negativ, also H > 90°; so muß entweder cos.

M

M oder cot. B negativ, und das andere positiv, also M und B ungleichartig seyn. Es kämen sonst keine gleichförmige Produkte heraus.

§. 78. Wenn man also H aus M und B, oder M aus H und B, oder B aus H und M; ferner, wenn man H aus N und P, oder N aus H und P, oder P aus H und N suchet, so weis man allezeit, von welcher Art das Gesuchte seyn müsse. Hiedurch werden in unser Proportionentabelle §. 56 folgende Proportionen außer aller Zweydeutigkeit gesetzet

§. 56. aus 5 r: cos. M = cot. B: cot. H oder
aus 5 cos. M: r = tang. B: tang. H
aus 3 r: cot. H = tang. B: cos. M
aus 4 cos. M: r = cot. H: cot. B oder
aus 4 r: cos. M = tang. H: tang. B
aus 5 r: cos. N = cot. P: cot. H oder
aus 5 cos. N: r = tang. P: tang H
aus 3 tang. H: tang. P = r: cos. N oder
aus 3 r: cot. H = tang. P: cos. N
aus 4 r: tang. H = cos. N: tang. P.

§. 79. **Wenn in einem sphärischen rechtwinklichten Triangel ein Winkel mit der Hypotenuse gleichartig ist, so muß der andre Winkel kleiner als 90° seyn, ist der anliegende Winkel mit der Hypotenuse ungleichartig, so muß der andre Winkel größer als 90° seyn,** oder Fig. 9. ist H und M gleichartig, so ist N < 90°. Ist H und N gleichartig, so ist M < 90°. Ist H und M ungleichartig, so ist

N > 90°. Ist H und N ungleichartig, so ist M > 90°.

Es folget dieses aus der Proportion

r : cos. H = tang. M : cot N

oder r : cos. H. r. cot. N = cos. H. tang. M = tang. N : cot. M

so muß, da in einer Proportion das Produkt der mittlern Glieder gleich ist, dem Produkt der äußern, wenn H und M gleichartig, und ihr Produkt also positiv ist, alsdenn nothwendig cot. N. auch positiv, also N unter 90° seyn. Ist cos. H. tang. M ein negativ Produkt, so ist eine von beyden Größen + die andere —. Also sind sie ungleichartig. Da r. cot. N alsdenn auch negativ seyn muß, so muß das daher kommen, daß cot. N negativ, also N über 90 Grade ist. Alles dieses läßt sich auch anwenden, wenn in der 2ten angeführten Proportion M aus H und N bestimmet wird.

§. 80. **Alles dieses ist auch umgekehrt wahr. Wenn ein Winkel kleiner als 90°, so ist der andre mit der Hyporenuse gleichartig, ist ein Winkel größer als 90°, so ist der andre mit der Hyporenuse ungleichartig.** Es folget dieses eben so leicht aus der Proportion, die wir im vorhergehenden § angeführet haben. r : cos. H = tang. M : cot. N, so, daß wir es auszuführen nicht nöthig haben.

§. 81. Wenn man also N aus H und M, oder H aus N und M, oder M aus N und H suchet, so ist das Gesuchte in den Proportionen keiner Zwey-

deutig-

deutigkeit unterworfen. Folgende Proportionen sind dadurch berichtiget, die freylich schon im vorhergehenden § durch andre Gründe von der Zweydeutigkeit befreyet waren, die wir aber doch anführen wollen.

§. 56. aus 4 r : cos. H = tang. M : cot. N
aus 1 r : cot. N = cot. M : cos. H oder
aus 1 tang. N : r = cot. M : cos. H
aus 4 r : cos. H = tang. N : cot. M

§. 82. **Wenn in einem rechtwinklichten sphärischen Triangel beyde Perpendikel gleichartig sind, so ist die Hypotenuse kleiner als 90°, sind die Perpendikel ungleichartig, so ist die Hypotenuse größer als 90°, sind beyde Perpendikel 90°, so ist die Hypotenuse auch = 90°.**

Es folget dieses aus der Proportion

$$r : \cos. P = \cos. B : \cos. H$$

$$r . \cos. H = \cos. P . \cos. B$$

Wenn beyde Perpendikel gleichartig sind, so muß das Produkt cos. P. cos. B positiv seyn, also cos. H auch, folglich H unter 90°. Sind die Perpendikel ungleichartig, so ist dieses Produkt negativ, also muß es cos. H auch, folglich H über 90° seyn. Sind die Perpendikel = 90°, so ist ihr Produkt 0. 0. Also muß cos. H auch = 0, und H 90° seyn.

§. 83. Dieses ist auch umgekehrt wahr, **wenn die Hypotenuse kleiner als 90°, so sind die Perpendikel gleichartig, ist sie größer als 90°, so sind die Perpendikel ungleichartig.**

Ist sie 90°, so muß wenigstens ein Perpendikel = 90° seyn. Es folget dieses eben so leicht aus der Gleichung des vorhergehenden §. r. cos. H = cos. P. cos. B, so, daß es nicht nöthig seyn wird, es weitläuftiger auszuführen.

§. 84. Hier wird H aus P und B, oder P aus H und B, oder B aus H und P gesuchet. Hier ist nun das Gesuchte in folgenden Proportionen keiner Zweydeutigkeit unterworfen.

§. 56. aus 2 r : cos B = cos. P : cos. H
aus 3 cos. B : cos. H = r : cos. P
aus 3 cos. P : r = cos. H : cos. B

§. 85. **Wenn in einem rechtwinklichten sphärischen Triangel die Hypotenuse und ein anliegender Perpendikel gleichartig sind, (also Fig. 9. H und P oder H und B gleichartig), so ist der andre Perpendikel, wie auch der demselben entgegengesetzte Winkel < 90°,** (also alsdenn im ersten Fall B und N spitz, im 2ten Fall P und M spitz). **Wenn aber die Hypotenuse und der anliegende Perpendikel ungleichartig sind, so ist der andre Perpendikel, wie auch sein entgegengesetzter Winkel > 90°.** Oder ist H und P, oder H und B ungleichartig, so ist im ersten Fall B und N, im 2ten Falle P und M stumpf.

Es folget dieses aus folgenden Proportionen.

Es wird nemlich hier erstlich aus H und P die B, oder aus H und P die N gesuchet, oder aus H und B die P, oder H und B die M gesuchet.

Aus

Aus H und P wird gesuchet B.

cos. P : r = cos. H : cos. B.

1) **Ist P und H gleichartig**, so sind sie beyde entweder mit + oder beyde mit — bezeichnet. r ist nun allezeit positiv, also in diesem Falle müste die Proportion so stehen:

+ cos. P : + r = + cos. H : cos. B

oder — cos. P : + r = — cos. H : cos. B.

auf beydes ist cos. B entweder $= \frac{+r \cdot + \cos. H}{+ \cos. P}$

oder $\frac{+r - \cos. H}{- \cos. P}$ das giebt auf beyde Fälle + cos. B zum Quotienten, also B **unter** 90°.

2) **Ist P und H ungleichartig**, so ist entweder P oder H über 90°, und das andere **unter** 90°, ich kann also die Proportion also setzen

— cos. P : + r = + cos. H : — cos. B

oder + cos. P : + r = — cos. H : — cos. B

auf beyde Fälle wird das 4te Glied = — cos. B, also B über 90°.

Aus H und P wird gesuchet N. Hier ist folgende Proportion

1) wenn H und P gleichartig,

+ tang. H : + tang. P = + r : cos. N

oder auch — tang. H : — tang P = + r : cos. N

auf beyde Fälle wird das 4te Glied = + cos. N, also N unter 90°.

2) Wenn H und P ungleichartig,

+ tang. H : — tang. P = + r : — cos. N

oder — tang H : + tang. P = + r : — cos. N

auf beyde Fälle wird das 4te Glied = — cos. N, also N über 90°.

Wenn

Wenn wir aus H und B die P, oder aus H und B den Winkel M suchen, verfahren wir eben so. Wir wollen also die Proportionen schon bezeichnet hinsetzen, weil sie jedweder nach dem vorhergehenden leicht erklären kann.

1) **Wenn H und B gleichartig,**

$+\cos. B : +\cos. H = +r : \cos. P$

oder $-\cos. B : -\cos. H = +r : \cos. P$

also P **unter** 90°.

2) **Wenn H und B ungleichartig,**

$+\cos. B : -\cos. H = +r : \cos. P$

oder $-\cos. B : +\cos. H = +r : \cos. P.$

also P **über** 90°.

Aus H und B den Winkel M gesuchet,

1) wenn H und B **gleichartig,**

$+r : +\cot. H = +\tang. B : \cos. M$

oder $+r : -\cot. H = -\tang. B : \cos. M$

also M **unter** 90°.

2) Wenn H und B **ungleichartig,**

$+r : +\cot H = -\tang. B : \cos. M$

oder $+r : -\cot. H = +\tang. B : \cos. M$

also M **über** 90°.

§. 86. Es ist also hiedurch das Gesuchte folgender Proportionen außer aller Zweydeutigkeit gesetzet

§. 56. aus 3 $\cos. P : r = \cos. H : \cos. B$

aus 3 $\tang. H : \tang. P = r : \cos. N$

aus 3 $\cos. B : \cos. H = r : \cos. P$

aus 3 $r : \cot. H = \tang. B : \cos. M$

Es waren diese Proportionen nun freylich schon durch

durch §. 78. 84. berichtiget, wir haben aber auch diese Berichtigung anführen wollen.

§. 87. Wir könnten nun den Satz §. 85 umkehren, und würden alsdenn aus B und N die H oder P, oder aus P und M die H und B zu suchen haben. Allein es würde uns dieses nichts helfen, und das Gesuchte nicht bestimmen, weil nur eins von den Gesuchten in der Proportion vorkömmt, wir würden nur höchstens erfahren, daß H und P, oder H und B ungleichartig oder gleichartig wären, ohne zu wissen, ob sie über oder unter 90° seyn. Es gehöret dieses zu den Fällen, wo das Gesuchte zweifelhaft bleibt, wenn es nicht aus andern Umständen bestimmet wird, wovon wir weiter §. 89 und folgende sagen werden.

§. 88. Wir haben nun von den mehrsten Fällen in unser Proportionentabelle §. 56 bis auf die zweifelhaften Fälle, die sich daselbst unter 6 befinden, gesehen, wie das Gesuchte bestimmet wird, ob es **stumpf** oder **spitz** sey. Es sind noch einige Fälle übrig, die wir noch nicht berühret haben, und wobey einigen das Gesuchte zweifelhaft **scheinet**, aber es nicht ist, die wir jetzt anführen wollen. Das Gesuchte wird allezeit richtig darinn bestimmet

§. 56. aus 1 sin. N : r = cos. M : cos. P
aus 1 sin. M : cos. N = r : cos. B
aus 3 sin. H : sin. B = r : sin. N
aus 3 sin. H : r = sin. P : sin. M
aus 4 r : sin. H = sin. N : sin. B
aus 4 r : sin. H = sin. M : sin. P
aus 5 r : cos. P = sin. N : cos M
aus 5 r : cos. B = sin. M : cos. N

Bey den beyden ersten und bey den beyden letztern Proportionen, nemlich:

sin. N : r = cos. M : cos. P
und sin. M : cos. N = r : cos. B
ferner r : cos. P = sin. N : cos. M
und r : cos. B = sin. M : cos. N

findet sich die Bestimmung des Gesuchten leichtlich, da in den drey ersten Gliedern sich auch ein Cosinus befindet, der gegeben ist, und aus dem Zeichen desselben erhellen muß, ob das Gesuchte + oder — zum Zeichen haben müsse, also unter oder über 90° sey. Ist der cosinus unter 90 Grad, und hat also + zum Zeichen, so hat das Gesuchte auch + und ist auch unter 90°. Hat der cosinus — zum Zeichen; so wird es auch das Gesuchte bekommen müssen, und wird über 90° seyn. Es folget dieses schon aus der Bezeichnung, ohngeachtet sin. und r immer + zum Zeichen bekommen. Hiezu kömmt noch, daß, nach §. 70. jedes Perpendikel mit seinem gegenüberstehenden Winkel, und jeder Winkel mit dem gegenüberstehenden Perpendikel gleichartig ist, und alle in diesen 4 Proportionen befindliche cosinus sind es entweder von Winkeln, die dem gesuchten Perpendikel, oder von Perpendikeln, die dem gesuchten Winkel entgegen stehen.

Die vier mittlern Proportionen aus 3 und 4, nemlich sin. H : sin. B = r : sin. N
sin. H : r = sin. P : sin. M
r : sin. H = sin. N : sin. B
r : sin. H = sin. M : sin. P

welches eigentlich nur zwey Proportionen sind, wo die Glieder nur umgekehrt werden, scheinen

Schwie-

Schwierigkeiten unterworfen zu seyn, und das Gesuchte zweifelhaft zu werden, ob es über oder unter 90° sey, weil in den drey ersten Gliedern blos sinus und radius vorkommen, die immer **Plus** zum Zeichen haben. Aber das Gesuchte ist doch aus dem Grunde nicht zweifelhaft, weil §. 70. die Perpendikel ihren gegenüberstehenden Winkeln, und die Winkel ihren gegenüberstehenden Perpendikeln **gleichartig** sind, und diese sind doch in den drey ersten Gliedern dieser Proportionen, und sind gegeben. So ist in der ersten von diesen 4 eben angeführten Proportionen N gleichartig B und B ist gegeben. In der 2ten M gleichartig P und P ist gegeben. In der 3ten B gleichartig N und N ist gegeben. In der 4ten P gleichartig M und M ist gegeben, daß hier also gar keine Zweydeutigkeit für das Gesuchte mehr statt findet.

§. 89. Wir kommen auf die würklich zweydeutigen Fälle, die sich unter 6 in der Proportionentabelle §. 56 befinden. Bey diesen Proportionen bleibt es zweifelhaft, ob das Gesuchte, welches ein sinus sowol wie alle andre Glieder dieser Proportionen sind, **unter** oder **über** 90° sey, weil ein und eben derselbe sinus, wie uns bekannt ist, sowol einem stumpfen als spitzen Winkel oder Bogen zukommen kann. Die Ursachen der Zweydeutigkeit des Gesuchten bey diesen Proportionen unter §. 56, liegen ferner darin, weil hier aus einem Perpendikel und dem entgegengesetzten Winkel, oder aus P und M oder B und N das übrige gesuchet wird, und wir §. 20, Fig. 12 gesehen haben, daß gar wohl zwey

Trian-

Triangel eine gleiche Seite und einen gleichen dieser Seite opponirten Winkel, und außer diesem Winkel noch einen gleichen Winkel haben können, welches in unserm jetzigen Falle der rechte Winkel ist, und dennoch sehr verschieden seyn können, welches wir Fig. 22 noch durch eine leichte Zeichnung erläutert haben.

Fig. 22. Fig. 22. Die Triangel FKI und BKI sollen bey K rechtwinklicht seyn. Die Seite IK ist beyden commun, der Winkel F ist = dem Winkel bey B, aber alles andre sehr verschieden, sowol die andre Perpendikel KF oder BK, als die Hypotenusen IF und BI, als auch der dritte Winkel bey I, der in dem einen Triangel spitz und in dem andern spitz ist.

Es sind in der Proportionstabelle §. 56 sechs Proportionen angegeben, deren Gesuchtes zweifelhaft bleibet, wo aus P und M gesuchet wird H, B und N, oder aus B und N gesuchet wird H, P und M. Eigentlich da man B als P, und P als B betrachten kann, sind es nur drey, welches auch seyn würde, wenn man sie mit Worten ausdrückte, die wir §. 58 in der 14, 15ten und 16ten Proportion gethan haben; und diese drey kommen auf eine am Ende heraus, nemlich auf die, welche man zuerst suchet. Wenn man aus B und N, oder aus P und M, die Hypotenuse H suchet, so bleibt das Gesuchte freylich zweifelhaft, ob es ein spitzer oder stumpfer Bogen sey; nehme ich es aber alsdenn für eins von beyden an, oder kann das aus andern Umständen schließen, so bleibt das übrige zu suchende nicht mehr zweifelhaft, weil ich nun das übrige aus dem gefundenen H, und eines der gegebenen, z. E. aus H und M

oder

oder H und P suchen kann, wie wir auch unten durch ein Exempel §. 93 zeigen werden. Wir nehmen nun die zweifelhaften Proportionen vor, immer zwey, die zusammen gehören und als eine betrachtet werden können, und zeigen, wie das Gesuchte darin zweifelhaft bleibet.

§. 90.

§. 56 aus 6

sin. M : sin. P = r : sin. H
oder sin. N : sin. B = r : sin. H

Da die sinus bis 180°, auch die r allezeit **Plus** zum Zeichen haben, so läßt sich also hier aus den Zeichen gar nicht schließen, ob H spitz oder stumpf sey. Es hilft mir auch nichts, daß mir die Größe der Seite und des Winkels, z. E. von P und M bekannt sind, um daraus die Beschaffenheit von H schließen zu können, weil Winkel und Perpendikel, die einander opponiret sind, auch allezeit **gleichartig** sind, laut §. 70. Ich mag mir also M und P als Plus- oder als Minusgrößen gedenken, so wird doch H allezeit als Plus erscheinen. Eben das gilt von den übrigen in der Proportionstabelle § 56 unter 6 sich noch befindenden Proportionen.

wenn aus M und P gesuchet wird B { r : cot M = tang. P : sin. B oder tang. M : tang. P = r : sin. B

wenn aus N und B gesuchet wird P { tang. N : tang. B = r : sin P oder r : tang. B = cot. N : sin. P

wenn aus P und M gesuchet wird N cos. P : r = cos. M : sin. N

oder aus B und N gesuchet wird M cos. B : r = cos. N : sin. M.

Die vordern Glieder der Perpendikel und Winkel sind allezeit gleichartig §. 70, und haben also einerley Zeichen, und es wird daher das Gesuchte nicht bestimmet, weil es allezeit mit seinen natürlichen Zeichen als Plus erscheinen würde. Es muß bey solchen Fällen gesaget seyn, oder aus andern Umständen geschlossen werden können, ob das Gesuchte stumpf oder spitz seyn solle, sonst bleibt es zweifelhaft. In den §. 60, 61, 62, 63, 64 haben wir die zweifelhaften Formeln mit einem * bezeichnet.

§. 91. Ehe wir dieses Kapitel von den rechtwinklichten sphärischen Triangeln beschließen, geben wir noch einige Exempel, um das gesagte desto besser zu erläutern. Wir gebrauchen hier Logarithmen, da wir uns über den Gebrauch der natürlichen trigonometrischen Linien, wenn der radius = 1 angenommen wird, schon erkläret haben, (§. 65 2te Anmerkung), und wovon wir nur ein Exempel anführen wollen.

Es sey Fig. 9 gegeben die Hypotenuse oder H = 60°, der Winkel M = 23° 30′, man suchet also nebst dem rechten Winkel aus H und M, P, B und N.

Erstlich P. Das wird durch die Proportion §. 56 in 4 gefunden.

r : sin. H = sin. M : sin. P.

Ohngeachtet hier nun blos sinus und radius in den drey vordern Gliedern sind, und also alle 4 Glieder + sind, folglich P zweifelhaft zu bleiben scheinet, so wird es doch bestimmet, weil es mit M, welches gegeben ist, gleichartig ist. §. 70, 71, 88. M ist spitz, also muß auch P spitz und unter 90° seyn.

Nach

Nach der Proportion ist $\sin. P = \frac{\sin. M. \sin. H}{r}$

und wenn $r = 1$. $\sin. M. \sin. H.$

logarithmisch P gesuchet

$\log. \sin. P = \log. \sin. M + \log. \sin. H - \log. \sin.$ totus.

log. sin. M hier log. sin. 23° 30′	=	9,6006997
log. sin. H hier log. sin. 60°	=	9,9375306
		19,5382303
log. sin. totus	=	10,0000000
log. sin. P	=	9,5382303

welcher sinus zu 20° 12′ und etliche Secunden gehört, wie wir schon gesagt haben. Da M spitz war, muste auch P spitz seyn, sonst würde dieser Logarithme auch eben so gut für den sinus des Winkels von 159° 48′ als das Complement des Gefundenen zu 180° gehören.

wäre $r = 1$ so ist $\sin. P = \sin. M = \sin. H$

nun ist der natürliche sinus $M = \sin. 23° 30′ =$
$= 0,3987491$. Der natürliche $\sin. H = \sin. 60° =$
$= 0,8660254$. Dieses mit einander multiplicirt, wozu man die mehrste Zeit nur von beyden die ersten Decimalbrüche nöthig hat, giebt 0,3453268. . . welches, wie man in den Tafeln unter den natürlichen Sinussen finden wird, auch zu 20° 12′ und etlichen Secunden gehöret.

also P = 20° 12′

Man suchet ferner aus H und M den Perpendikel B. §. 56 aus 4. Hier ist B gewis spitz, weil M spitz ist. $r : \cos. M = \tang. H : \tang. B$ und $\log. \tang B = \log. \cos. M + \log. \tang. H - \log.$

sin. totus. Log. cos. M hier log. cos. 23° 30′
= log. sin. 66° 30′ = 9,9623978
log. tang. H hier log. tang. 60° = 10,2385606

20,2009684
log. sin. totus = 10,0000000

log. tang. B = 10,2009684

Dieser Logarithme gehöret zum Bogen von 57° 48′ also B = 57° 48′

Man suchet ferner aus H und M den Winkel N §. 56 aus 4.

+ r: + cos. H = + tang. M: cot. N. Also N auch spitz.

log. cot. N = log. tang. M + log. cos. H — log. sin totus.

log. tang. M hier log. tang. 23° 30′ = 9,6383019.
log. cos. H hier log. cos. 60° = log.
sin. 30 = 9,6989700

19,3372719
log. sin. totus = 10,0000000

log. cot. N = 9,3372719

Dieser Logarithme gehöret zum Winkel 12° 16′; weil aber das nur der cotangens des Winkels N ist, so ist der Winkel N das Complement zu 90°, also 77° 44′ = N.

Es waren also die Stücke in diesem Triangel.

P gefunden 20° 12′
B gefunden 57° 48′
H gegeben 60°
M gegeben 23° 30′
N gefunden 77° 44′, und denn noch der rechte Winkel.

Anmer-

Anmerkung. Man kann nach diesen datis leicht einen Triangel von Chartenpappe machen, wenn man, weil 3 Seiten einen sphärischen Triangel bestimmen, §. 21 man, nachdem man drey gleich große Cirkelebenen aus Chartenpappe gemacht, und solche durch den Diameter jeden in gleiche Theile getheilet hat, auf dem Diameter jedes Cirkels vom Centro an, mit einen Transporteur die Bogen, welche die drey Seiten haben sollen, nimmt, dadurch und durchs Centrum eine gerade Linie ziehet, die Linien auf einer Ebene an beyden Enden ein wenig einschneidet, die andre auf der andern Ebene am Diameter, bis an den Rand mehrentheils, und auf der andern Linie an der Peripherie an beyden Seiten einschneidet. Die dritte Ebene, beyde Linien inwendig bis fast an den Rand durchschneidet, und alsdenn als einen Windball über einander und in einander schiebet, so kömmt dieser Triangel an einer Seite heraus. Anfänger thun gut, sich solche anschauliche Erkenntnis zu erwerben.

§ 92. Ein andres Exempel, wo man aus beyden Perpendikeln das übrige suchet. Also aus B und P. H, M und N.

Es sey gegeben B = 130° 20′. Ferner, P = 85° 27′.

Erstlich bemerken wir, daß der entgegengesetzte Winkel von B gewis stumpf, §. 70 also N stumpf sey. Ferner, daß aus eben dem Grunde der entgegengesetzte Winkel von P oder M gewis spitz sey.

Erstlich H aus B und P gesuchet.

§. 56 aus 2.

$$+1 : -\cos. B = +\cos. P : \cos. H$$

Also H bekömmt das — Zeichen und ist über 90°.

log. cos. H = log. cos. B + log. cos. P — log. sin. tot.
log. cos. B hier = log cos. 130° 20′ = log cos. 49° 40′ = log. sin. 40° 20′
= 9 8110609,
log. cos. P hier = log. cos. 85° 27′ = log. sin. 4° 33′ = 8, 8994322
18, 7104931
10, 0000000
log. cos. H = 8, 7104931

Dieser Logarithme passet auf den sinus des Winkels 2° 57′

2° 57′, das wäre col. H, also H 87° 3′, aber H ist über 90°, also H das Complement zu 180° = 92° 57′ = H. und stumpf, denn es ist über 90°.

2tens M aus B und P gesuchet.

§. 56 aus 2 + r + sin. B = + cot. P: cot. M.

Hier scheint M zweifelhaft, aber weil es P gegenüber lieget, und P spitz ist, so muß M auch spitz seyn.

log. cot. M = log. cot. P + log. sin. B — log. sin. totus.
log. cot. P hier log. cot. 85° 27′ = log. tang. 4° 33′ = 8,9008030.
log. sin. B hier log. sin. 130° 20′ = log. sin. 49° 40′ = 9,8821213

18,7829243
10,0000000

log. sin. totus = log. cot. M = 8,7829243

Dieser log. passet auf 3° 28′, das ist cot. M. Also M = 86° 32′.

3) Aus B und P wird N gesuchet, §. 56. aus 2. + sin. P : + r = — tang. B : tang. N und N ist also stumpf, wie wir auch schon daher wusten, daß B stumpf war. Also

log. tang. N = log. tang. B + log. sin. tot. — log. sin P
log. tang. B hier log. tang. 130° 20′ = log. tang. 49° 40′
= 10, 0710604
log. sin. tot. = 10, 0000000
2.0, 0.7.1.06.04
log. sin. P = log. 85° 27′ = 9, 9986292
log. tang. N = 10, 0724312

Der Logarithme passet auf 49° 45′, weil aber N stumpf ist, so ist es das Complement zu 180° = 130° 15′.

Also

Also alle Stücke des Triangels sind:
B gegeben 130° 20′
P gegeben 85° 27′
H gefunden 92° 57′
M gefunden 86° 32′
N gefunden 130° 15′
und noch der rechte Winkel.

§. 93. Nun noch ein Exempel eines Falls, wo das Gesuchte zweifelhaft bleibet, ob es spitz oder stumpf sey. Es geschiehet, wenn man die übrigen Stücke des rechtwinklichten sphärischen Triangels aus P und M oder aus B und N suchet, wie wir schon einigemal erwähnet haben. Es sey gegeben P = 74°, und sein entgegengesetzter Winkel M = 82° 15′. Man suchet H, B und N.

Man findet es aus der Proportion §. 56 unter 6
sin. M : sin. P = r : sin. H.

Hier sind blos sinus und H bleibt zweifelhaft, es ist nun

log. sin. H = log. sin. tot. + log. sin. P — log. sin. M

log. sin. P = hier = log. sin. 74° =		9,9828416
log. sin. totus =		10,0000000
		19,9828416
log. sin. M = log. 82° 15′ =		9,9960149
log. sin. H =		9,9868267

Dieser Logarithme gehöret zum sinus 75° 57′, welches der Bogen H wäre, er kann aber auch von 104° 3′ seyn, welches sein Complement zu 180° ist.

B gesuchet aus der Proportion §. 56 unter 6. sie wird gleichfalls B zweifelhaft lassen, da P immer M gleichartig ist.

tang. M : tang. P = r : sin. B

log. sin. B = log. sin. tot. + log. tang. P — log. tang. M.

log. sin. tot. = 10, 0000000

log tang. P hier log. tang. 74° = 10, 5425036

20, 5425036

log. tang. M hier log. tang. 82° 15′ = 10, 8661609

log. sin. B = 9, 6763427

Der Logarithme gehöret zum sin. 28° 20′, aber auch zu seinem Complemente zu 180°, also auch zu 151° 40′.

N gesuchet aus P und M. §. 56 aus 6.

cos. P : r = cos. M : sin. N

log.

log. fin. N = log. cos. M + log. sinus totus − log. cos. P.
log. cos. M hier = log. cos. 82° 15′ = log. fin. 7° 45′ = 9,1298539
log. sinus totus = 10,0000000
19,1.2.98539
log. cos. P hier = log. cos. 74° = log. fin. 16° = 9,4403381
log. fin N = 9,6895158

Dieser Logarithme gehöret zum sinus des Winkels 29° 17′, aber auch zu seinem Complemente zu 180°, also auch zu 150° 43′. Wir haben also folgende Stücke in diesem Triangel.

P ge-

P gegeben = 74°
M gegeben = 82° 15′
H gefunden = 75° 57′, oder 104° 3′
B gefunden = 28° 20′, oder 151° 40′
N gefunden = 29° 17′, oder 150° 43′

Es lassen sich also aus dem gegebenen zwey Triangel construiren, worin P und M gleich, aber in dem einen H, B und N spitz und in dem andern H, B und N stumpf ist.

Hätte man, wie man den doppelten Wehrt für H zuerst fand, nun bestimmet, ob man den spitzen oder den stumpfen Bogen nehmen wollte, so wäre B und N nicht zweifelhaft geblieben. Hätte man den spitzen Bogen für H genommen, so hätte man die gefundenen spitzen Werthe für B und N erhalten. Hätte man den stumpfen Bogen für H genommen, so hätte man die stumpfen Werthe für B und N bekommen.

Man siehet also, daß eigentlich nur ein Fall zweifelhaft ist, nemlich, wenn aus dem Perpendikel und entgegengesetzten Winkel die Hypotenuse oder H gesuchet wird.

Wir wollen auch das durch dieses Exempel zeigen, und nun H spitz annehmen, aber alsdenn die Werthe von B und N, nicht mehr aus P und M, sondern aus dem angenommenen Werthe von H und aus M suchen. Man kann aus §. 56 aus H schließen

$$+r : +\cos. M = +\tang. H : \tang. B$$

und tang. B muß unter 90° seyn, weil es + zum Zeichen hat. Also:

log.

log. tang. B = log. tang. H + log. cos. M − log. sin. totus.
log. cos. M hier log. cos. 82° 15′ = log. sin. 7° 45′ = 9, 1298539
log. tang. H hier log. tang. 75° 57′ = 10, 6016170
19, 7314709
10, 0000000
log. sin. tot. = log. tang. B = 9, 7314709

Dieser Logarithme gehöret zu 28° 20′, wie wir auch unter den zweifelhaften einen solchen Werth für B gefunden haben.

Eben so erhält man auch für N den einen gefundenen spitzen Werth für N unter den beyden gefundenen

fundenen zweifelhaften, da man es aus P und M suchte, wenn man nun H spitz annimmt, und es aus H und M suchet. Es kann folgende Proportion aus §. 56 in 4 gebrauchet werden.

$$+r : +\text{cos. } H = +\text{tang. } M : \text{cot. } N$$

log. tang. M hier log. tang. 82° 15′ = 10, 8661609
log. cos. H hier log. cos. 75° 57′ = log. sin. 14° 3′ = 9, 3851924
log. sin. totus = 20 2513533
log. cot N = 10 0000000
10 2513533

Dieser Logarithme gehöret zum tangens 60° 44′, da

da er aber der Logarithme des cotangens des gesuchten Winkels ist, so ist also der gesuchte Winkel sein Complement zu 90°. Also 29° 17', wie wir auch vorher unter beyden zweifelhaften Werthen auch diesen Werth für N gefunden haben. Hätte man, wie man H gefunden hatte, unter den beyden zweifelhaften, den stumpfen Werth dafür genommen, so würde man auch jetzt für B und N die stumpfen Werthe unter den zweifelhaften gefunden haben.

Drittes Capitel.

Von den schiefwinklichten sphärischen Triangeln.

§. 94. Wir gehen zu der Betrachtung der sphärischen **schiefwinklichten** Triangeln, entwickeln die Gesetze, darnach sie behandelt werden, und zeigen, wie man aus dreyen von ihnen gegebenen Dingen, es mögen Seiten und Winkel zusammen, oder Seiten oder Winkel allein seyn, das übrige des Triangels findet. Wir bemerken noch hierbey, daß wir in den Exempeln, die wir hievon geben wollen, nur auf die Minuten Rücksicht nehmen, und Secunden negligiren wollen, weil wir die Logarithmen nur aus den gewöhnlichen Tafeln nehmen wollen, und nicht aus den Avignonnertafeln, so sie von 10 zu 10 Secunden befindlich sind; weil wir sie doch

auch

auch alsdenn nicht strenge genau genug allezeit bekämen, auch diese Tafeln in weniger Händen sind, und sie nach §. 358 Arithm. genau zu suchen, uns zu sehr aufhalten würde. Wer sie strenge genau haben will, kann das leicht selber thun. Ehe wir aber diese Gesetze der sphärischen schiefwinklichten Triangel aus einander setzen, müssen wir erst einige allgemeinere Betrachtungen über diese Triangel anstellen.

§. 95. Um diese Betrachtungen recht deutlich einzusehen, wird es sehr gut seyn, wenn Anfänger eine würkliche Kugel vor sich nehmen, und so wie sie diese Betrachtungen lesen, nach der Anweisung derselben, die Bogen auf die Kugel ziehen, da sie sich denn auch nach der Fig 23 richten können. Es wird ihnen dieses, wenn sie eine gehörige Aufmerksamkeit anwenden, auch nicht im geringsten schwer seyn, so schwer auch sonst die sphärische Trigonometrie, und vornemlich die Betrachtung der schiefwinklichten Triangel oft ausgegeben wird.

Fig. 23. Man nehme eine Kugel; es ist gleichgültig, von welchem radius sie sey; doch um recht deutlich zu seyn, nehme man sie nicht zu klein. Indessen werden 2 Zoll radius zureichend seyn. Man nehme zwey Pole auf der Kugel an, und theile die Oberfläche der Kugel durch einen herumgezogenen Cirkel ADBA in zwey gleiche Theile. Wenn man einen Punkt auf der Kugel willkührlich zum Pol angenommen hat, so findet sich die Oefnung des Cirkels leicht, womit man den Cirkel um die Kugel ziehet, der ihre Oberfläche in zwey gleiche Theile theilet. Diese Oefnung ist die

die Chorde eines Bogens von 90° = r√2 (§. 211. Geomet.) wenn man in diesen Cirkel den einen Fuß des Cirkels setzet, **der überhaupt immer in der Oefnung bleibet** und auf verschiednen Punkten der entgegengesetzten Seite des gezognen Kreises kleine Bogen machet, so ist da der andre Pol, wo sich diese kleine Bogen schneiden. Man hätte eigentlich nicht nöthig, den andern Pol zu suchen, wie sich in der Folge zeigen wird; es ist nur jetzt gut, um die Richtigkeit des gezogenen Kreises zu prüfen, weil ein aus diesem gefundenen Pole gezogener Kreis, wenn die Kugel richtig und der Kreis recht gezogen ist, mit dem erstern zusammen fallen muß. Es heiße dieser erste gezogene Kreis ADBA die **Basis.**

§. 96. Ueber den Kreis ADBA ziehe man nun einen andern Circulum maximum APa, der auf den erstern rechtwinklicht stehet, man wird ihn bekommen, wenn man, mit eben der Oefnung des Cirkels, einen beliebigen Punkt in der Basis annimmt, und darinn den einen Fuß des Cirkels setzet. Bey A und a sind also rechte Winkel. (§. 429. Geom.) Man nehme auf dem Halbkreis Aa einen beliebigen Punkt P an, es sey aber PA **kleiner** als Pa. Man lege durch P wieder einen Bogen eines circuli maximi, welches geschiehet, wenn man jenseits des Kreises ADBA einen Punkt zum Pol dieses neuen Kreises annimmt, und denn durch P den Bogen ziehet. Dieser Bogen sey BPb; wird = semicirculo maximo seyn, weil zwey Circuli maximi, die sich in zwey Punkten schneiden, sich auch halbiren, (§. 423 Geom.) also BP + Pb = 180°. Die Winkel, wel-

che dadurch bey B und b entstehen, wird jeder mit seinem Nebenwinkel 180° ausmachen. ABP und AbP werden beyde spitz, und aBP wie auch abP werden beyde stumpf seyn. §. 71. Man lege durch P noch einen andern Bogen eines Circuli maximi dPD, so bekömmt man wieder zwey spitze und zwey stumpfe Winkel. AdP und ADP sind beyde spitz. adP und aDP beyde stumpf.

Fig. 23. §. 97. Man bekömmt also 4 Triangel.

1) △BPD da sind die Winkel B und D spitzig.

2) △ bPd da sind die Winkel b und d stumpf.

3) △ bPD da ist Winkel D stumpf und Winkel b spitz.

4) △BPd da ist Winkel B stumpf, und Winkel d spitz.

Es sind also bey den △ 1 und 2 die Winkel an der Basi **gleichartig**, beyde spitz oder beyde stumpf. Bey den Triangeln 3 und 4 sind die Winkel an der Basi **ungleichartig**, einer spitz, der andre stumpf.

§. 98. Wir bemerken nun hier leichtlich folgendes. Bey den Triangeln 1 und 2, wo die Winkel an der Basi **gleichartig** sind, fällt ein von ihrer Spitze herabgelaßnes Perpendikel PA, innerhalb der Basis BD und bd, und ist auch mit den an der Basi liegenden Winkeln gleichartig, also beym △ 1 spitz, und beym △ 2 stumpf. Ferner, wo die Winkel an der Basi **ungleichartig** sind, fällt das Perpendikel PA beym △ 3 **außerhalb** der Basis, und ist mit dem ihm am nächsten liegenden Winkel D ungleichartig, also hier spitz. Beym △ 4

wo

wo auch die Winkel an der Basi ungleichartig sind, fällt das Perpendikel gleichfalls **außerhalb** der Basis des Triangels, und ist mit dem ihm am nächsten hier stumpfen Winkel B **ungleichartig**, also hier spitz. Wie denn das alles auch aus §. 71 gefolgert werden kann.

Wir ziehen hieraus die allgemeine Lehre:

Wenn die Winkel an der Basi eines schiefwinklichten sphärischen Triangels gleichartig sind, so fällt das Perpendikel innerhalb des Triangels, und ist mit diesen Winkeln gleichartig. Wenn aber die Winkel an der Basi eines schiefwinklichten sphärischen Triangels ungleichartig sind, so fällt das Perpendikel außerhalb des Triangels, und ist mit dem ihm in dem Triangel am nächsten liegenden Winkel ungleichartig.

§. 99. Der Triangel PBD zerfällt nun durch das Perpendikel PA in zwey rechtwinklichte Triangel PAD und PAB, wovon wir jetzt den Triangel PAD betrachten wollen. Wir fanden nach dem 2ten Gesetze für rechtwinklichte Triangel §. 42 folgende Proportion. Fig. 23.

r : sin. B = tang. M : tang. P, oder auch §. 43
r : sin. B = cotang. P : cot. M.

Hier nun im Triangel PAD stellet B die AD, ferner M den Winkel PDA oder Winkel D, und P die PA vor. Ich werde also, wenn ich tuire, zu schließen können:

r : sin. AD = cotang. PA : cot. D

r . cot. D = sin. AD . cotang. PA. folglich;

und wenn man r = 1 annimmt, um die Rechnung bequemer zu machen, cot. D = sin. AD. cot. PA. Der sin. AD bleibt, wie bekannt, beständig positiv bis 180°, soll aber hier wachsen und abnehmen können. PA oder das Perpendikel soll ungeändert bleiben, also auch der cot. PA.

Nun wollen wir setzen, der Bogen dPD soll sich drehen, so, daß D immer weiter von A rücket, folglich d der A immer näher kömmt. So wie D immer weiter von A rücket, so wächset offenbar die AD, folglich auch ihr sinus. Man nehme nun von A nach beyden Seiten 90° und bezeichne das mit Q und q. Der sinus des Bogens AD wird also so lange wachsen, bis daß D in Q ankömmt, und AD alsdenn = AQ = 90° ist.

Nun war cot. D = sin. AD . cot. PA.

Da cot. PA ungeändert bleibet, so muß, so wie sinus AD wächset, auch cot. D wachsen, sonst bliebe die Gleichung nicht. Wird aber cot. D größer, so muß tangens D abnehmen, also auch der Winkel D kleiner werden. Da sinus AD bis 90° wächset, also auch in der Gleichung cot. D, so muß tangens D, da also auch sein Winkel immer bis AD = 90° ist, abnehmen. Folglich rücket D weiter, so nimmt der Winkel PDA immer ab, bis D in Q ist, oder bis AD = 90°, und alsdenn ist das Perpendikel PA das Maaß des Winkels PAD (§. 44. Geomet.)

§. 100.

§. 100. Es rücke nun D immer weiter fort, und rücke von Q nach △ hin, so wird AD immer größer, und ist von Q an über 90°. Nun bleibt zwar der sinus AD noch immer positiv, aber er wird wieder kleiner als sinus totus, und nimmt immer ab, je größer AD wird, (weil die sinus der stumpfen Bogen und Winkel = ihren Complementen zu 180°). Es wird also die Größe sin. AD. cot. PA wieder kleiner, also der diesem Produkt gleiche cot. D auch wieder kleiner, folglich wird tang. D größer, also auch der Winkel D. Dieses würde immer continuiren, bis D von A 180° weit fortgerücket wäre, weil alsdenn sin. AD = 0, und denn wäre auch (weil cot. D = sin. AD. cotang. PA §. 99). cot. D = 0. Folglich tang. D unendlich §. 67., folglich der Winkel D = 90°. Es wäre aber alsdenn PD kein Bogen des △ mehr, sondern PD und Aa fielen zusammen, bis dahin bliebe aber der Winkel bey D unter 90°. Aber dies letztere betrachten wir jetzt nicht. Wir betrachten bloß, wie D immer weiter von Q nach △ rücket, und endlich auch nach b kömmt, wo denn (wie wir weiter unten zeigen werden, PD über Pb und Pd über PB zu liegen kömmt) und sin. A△ = sin. AB wird, (weil sich beyde Bogen A△ oder alsdenn Ab und AB zu 180° completiren, indem AB + Ab = 180° (§ 423. Geom.), also der sinus des stumpfen Bogens Ab auch der sinus des spitzen Bogens AB ist,) und denn wird der Winkel △ = b = B, weil cotang. b = sin. Ab. cot. PA = sin. AB. cot. PA ist. §. 99. Fig. 23.

Fig. 23. §. 101. Es ist offenbar, daß, so wie D fortrücket, auch d fortrücken und näher nach q kommen müsse. Es ist ferner deutlich, wenn man hier die Proportion §. 42, die wir §. 99 angewendet haben, anwendet, man also setzen müste:

r : sin. Ad = cotang. PA : cotang. d.

und wenn r = 1, alsdenn cotang. d = sin. Ad. cotang. PA. Rücket nun d fort, so wie D fortrücket, so wird sin. Ad, weil jetzt noch Ad über 90° ist, und sich d nach 90° hin nähert, immer größer, bis d den Punkt q erreichet hat, da sin. Ad am größten ist. So wie sin. Ad größer wird, muß der Gleichung gemäß auch cotang. d größer werden, also tang. d kleiner werden, also auch der spitze Winkel d abnehmen, folglich der stumpfe bey d zunehmen, weil es des spitzen Complement zu 180° ist, also der spitze Winkel bey d nimmt ab, und der stumpfe Winkel bey d wächst, bis d den Punkt q erreichet hat, da alsdenn sin. Ad am größten, weil er = sin. totus ist, indem Aq = 90°. Folglich ist alsdenn auch cot. d am größten, folglich tang. d, und daher auch der Winkel d am kleinesten, und daher auch der stumpfe Winkel bey d am größten ist. Hat d die q erreichet, so ist das Maaß des stumpfen Winkels die Pa, weil aq nun = 90° ist (§. 441 Geom.)

Ueber q nach B hin wird sin. Ad immer kleiner, folglich auch der Gleichung gemäß, cotang. d, folglich tang. d größer, folglich auch der spitze Winkel bey d, folglich nimmt der stumpfe Winkel bey d ab, oder wird kleiner, bis endlich d die ♂ und

B er-

B erreichet. Es wird der stumpfe Winkel bey d immer abnehmen, und der spitze zunehmen, bis A, wo beyde gleich und also = rectis wären, da denn der Bogen dPD über APa zu liegen käme; doch davon ist jetzt die Rede nicht.

§. 102. Wir fanden §. 99. daß der Winkel PDb, oder der spitze Winkel bey D immer kleiner wurde, bis D die Q erreichet hatte, also muß sein stumpfer Nebenwinkel bey D im Triangel PDb immer bis Q größer werden, wie die Db abnimmt, und in Q am größten seyn. Ist D aber über Q etwa in Δ, so wird im Triangel PDb alsdenn laut §. 100 der stumpfe Winkel bey D wieder an Stumpfheit abnehmen, weil alsdenn der spitze Winkel bey D größer wird, und der stumpfe sein Complement ist. Fig. 23.

§. 103. Es ist nun sehr begreiflich, wenn D und d ihre Stellen verändern, und D nach Q und so weiter hinrücket und d also zugleich nach q, der Halbkreis DPd aber immer mit seinen Enden auf der Basi bleibet, daß, so wie D nach Q hinrücket, PD länger und in eben dem Maaße Pd kürzer werden müsse. Das wollen wir nun jetzt betrachten. Fig. 23.

In dem durch das Perpendikel PA rechtwinklicht gewordenen Triangel ließe sich laut §. 46, 56 folgende Proportion machen:

r : cos. B = cos. P : cos. H.

Hier stellet AD die B vor, PA die P, und PD die H. Also substituiret kann man schließen

r : cos. AD = cos. PA : cos. PD

wird r = 1 gesetzet, so ist also

cos. AD . cos. PA = cos. PD

Es bleibe PA eine Constante oder unverändert. Aber so wie D weiter rücket, so verändert sich AD. Nun werden, wie bekannt ist, die cosinus der Bogen immer kleiner, so wie die Bogen wachsen, bis 90° bleiben aber bis dahin immer positiv. So wie cos. AD abnimmt, so wird cos. AD. cos. PA eine kleinere Größe, also auch das diesem Produkte gleiche cos. PD, folglich wächset der Bogen PD. Weil aber cos. AD bis 90° positiv bleibet; so bleibet cos. AD. cos. PA so lange eine positive Größe, also auch cos. PD. Folglich so lange bis D die Q erreichet hat, wird PD zwar immer größer, aber bleibt doch **unter** 90°. Wenn D die Q oder 90° erreichet hat, so ist cos. AD = Null. §. 67. Also auch cos. AD. cos. PA = 0. Folglich auch cos. PD = 0. Folglich der Bogen PD = 90°. Folglich alsdenn auch PD = pd, weil DPd = semiciculo.

Kömmt D über Q nach △; so wird cos. AD **negativ**, also auch die Größe cos. AD. cos. PA und daher auch die ihre gleiche cos. PD eine negative Größe. Folglich wird P△ **über** 90° und P**d** **unter** 90° oder spitz, welches continuiret bis D in b und **d** in B angelanget ist.

§. 104. Es folget also hieraus, daß da, wie PD zu- oder abnimmt, auch Pd zu- oder abnimmt, also bis an q bleibt Pd stumpf, in q wird es 90°, über q hinaus nach B hin wird Pd spitzig. Dies dienet zur Beurtheilung des Triangels BPD und des auf der andern Seite der Kugel befindlichen Triangels bPd.

§. 105.

§. 105. Wir wollen nun wieder einmal den Triangel PBD betrachten. Das Perpendikel PA theilet seine Basis den Bogen BD in zwey Theile AD und AB. Es sey nun AD kleiner als AB. Man nehme also AT = AD. Man kann sich alsdenn vorstellen, daß B fortgerücket sey nach T, folglich b, das zugleich mit fortrücket, nach t und der Bogen Bb läge nun über Tt. Fig. 23.

Ist aber AT = AD, so ist auch PT = PD, denn PA ist sowohl dem Triangel PAT als dem Triangel PAD gemeinschaftlich. Bey A sind die Winkel beyde gleich = Rectis und AT = AD ex hypothesi. Also △ PAT ≅ △ PAD §. 17. Folglich PT = PD. Folglich Winkel PTA = Winkel PDA und der Triangel ist gleichschenklicht. Es ist daher der Winkel BTP = 2R − PTA, auch = 2R − PDA. Ist aber PT = PD, so ist auch Pt = Pd

denn PT = PD ex hypothesi

PT + Pt = 180° und PD + Pd = 180°

PT + Pt = PD + Pd

Pt = Pd.

§. 106. Wenn, wie wir eben vorher zeigten, PD = PT, weil AD = AT ist, so ist nothwendig PD kleiner als PB, wenn T wieder zurück nach B rückte, und also PT über PB zu liegen käme. Es wird alsdenn AB größer als AT war. Der Werth von PT war laut §. 103. Fig. 23.

cos. PT = cos. AT. cos. PA und der Werth von PB ist cos. PB = cos. AB. cos. PA, weil nun AT kleiner ist als AB, aber doch unter 90°, so ist cos. AT **größer** als cos. AB, wo der Bogen größer ist. Folglich cos. AT. cos. PA ist größer als cos. AB. cos. PA. Also auch werden die ihnen gleiche Größen eben so beschaffen seyn,

oder cos. PT ist größer als cos. PB

folglich Bogen PT kleiner als Bogen PB

aber §. 105 war PT = PD

Folglich PD < PB, wenn T wieder nach B rücket. Alsdenn aber giebt es für PD zwey mögliche Lagen, **einmal** wie es jetzt lieget, und **einmal**, weil es = PT ist, kann man es über PT legen. Das werden aber alsdenn zwey sehr verschiedne Triangel. Einmal der Triangel PBD, und einmal der Triangel PBT, die doch aber beyde zwey gleiche Seiten, PB und PD = PT haben, und auch einen gleichen Winkel bey B. Es kann also PB, PD und der Winkel B gegeben seyn, und können doch zwey verschiedne Triangel PBD und PBT daraus gemacht werden, wo denn aber beym letztern der Winkel bey T stumpf ist. Das gehet aber, wie man siehet, nur an, wenn PD **kleiner** als PB; sonst läßt sich PD nicht auf PT legen. Ist PD = PB oder auch PD **größer** als PB, so gehet das nicht an, und der Winkel BDP ist allezeit spitzig, wie aus §. 99 sattsam erhellet.

Fig. 23. §. 107. Nun wollen wir das auf der andern Seite der Kugel befindliche Dreyeck bPd betrachten.

Hievon

Hievon soll eben auch bP der stumpfe Winkel b, und Pd gegeben seyn, so läßt sich nicht nur das Dreyeck bPd, sondern auch unter einigen Umständen das Dreyeck bPt daraus machen. Es kömmt nur darauf an, daß Pd größer als Pb, und das kann allerdings seyn, wenn §. 105 PD = PT; da alsdenn, wie wir gezeiget, pd = pt ist. Alsdenn kann man pd über pt legen, und man bekömmt alsdenn eines, von dem Dreyecke bPd sehr verschiednes Dreyeck bPt, worin der Winkel btP spitz ist §. 100.

Sobald aber Pd = Pb (und dieses gehet an, wenn ad = ab, denn alsdenn ist der Triangel Pbd gleichschenklicht, weil △ Pab ≅ △ Pad) oder Pd kleiner als Pb, und das gehet an, wenn Pd mehr nach B hinleget, oder ad > ab, so läßt sich Pd nicht mehr über Pt legen. Es kann alsdenn von den drey Stücken Pb, Pba, Pd nur ein Dreyeck gemacht werden, in welchem der Winkel Pdb allezeit stumpf ist.

§. 108. Wir betrachten nun das Dreyeck PbD. In diesem Dreyecke läßt sich aus der gegebnen Seite Pb, dem Winkel PbD und der Seite PD nicht nur das Dreyeck PbD, sondern auch, wenn PD kleiner ist als PB das Dreyeck PbT machen. Für den Ausdruck PD < PB kann man auch setzen Fig. 23.

PD < 2 R — Pb denn

2R — Pb = Bogen Bb — Pb = PB

PD < 2R — Pb = PD < PB also

denn ist PD kleiner als PB, so läßt es sich dieseits B nach A zu legen, das mag über PT seyn. Diese Zweydeutigkeit dauret fort, bis PD = PB, welches

ist

ist, wenn AD = AB, denn läßt sich PD nicht mehr über PT legen, wollte man es in die Gegend legen, so würde PD über PB fallen, man hätte also keinen Triangel mehr, sondern bloß einen halben Cirkel bB.

Man kann also aus den gegebnen datis, Pb, PbD und PD zwey sehr verschiedne Triangel bekommen, in denen einmal der Winkel PDb stumpf, das andre mal PTb spitz ist, auch die Bases sehr verschieden sind. Ist Pd > 2R — Pb, so ist der Winkel bey D stumpf, oder welches einerley ist, wenn PD > PB.

Fig. 23. §. 109. Wir betrachten nun ferner den Triangel PBd. Bey diesem Triangel läßt sich auch aus der gegebenen Seite PB, dem Winkel PBd und der Seite Pd nicht nur der Triangel PBd, sondern auch in einem Falle der Triangel PtB machen. Es gehet alsdenn an, wenn PB > 2R — Pd, oder 2R — Pd = Bogen dD — Bogen Pd = Bogen PD, so ist also der Ausdruck einerley, wenn PB > 2R — pd oder PB > PD. Alsdenn läßt sich PB auch jenseit PD, es mag in Pt seyn, legen, und man kann aus den gegebenen datis also zwey Triangel construiren, den Triangel PBd und den Triangel PtB. Dieses höret auf, wenn PB = PD, oder welches einerley, wenn PB = 2R — Pd. Wollte man alsdenn PB jenseit nach PD hinlegen, so würde es über PD kommen, man würde also keinen Triangel mehr haben, sondern nur einen halben Cirkel dD.

§. 110. In allen den Triangeln, welche wir jetzt in den §§. 106, 107, 108, 109 betrachtet haben,

ben, waren jederzeit zwey Seiten, und der an einer Seite anliegende, und der andern gegebenen Seite opponirte Winkel gegeben, und die Triangel wurden nicht dadurch bestimmet, wenn nicht noch einige Umstände, welche wir hier bemerket haben, eintraten. Wir fanden dieses schon überhaupt im §. 18, und haben es jetzt genauer aus einander gesetzet. Wir entwerfen nun aus diesen bis daher erklärten Lehren folgende Tafel, die daraus folget.

Es mag W einen Winkel bedeuten, er liege in dem Triangel, wo er wolle, und sey der gegebene Winkel.

Es bedeute ferner l die an diesem Winkel liegende Seite, die auch gegeben war.

Ferner bedeute L die diesem gegebenen Winkel gegenüberstehende Seite, und es bedeute w den Winkel, welcher der Seite l entgegengesetzet ist. So wäre z. E. in dem Dreyecke BPD der gegebene Winkel PBD = W, die gegebene Seite PB, die an ihm lieget, = l, die gegenüberstehende Seite PD = L, der Winkel PDB = w.

So

Es ist nun folgende Tafel

Es sey W	und L	so ist W	
spitzig	spitzig	kleiner als 1	zweydeutig §. 106.
spitzig	spitzig	größer als 1	spitzig
stumpf	stumpf	größer als 1	zweydeutig §. 107.
stumpf	stumpf	kleiner als 1	stumpf
spitzig	stumpf	kleiner als 2R−1	zweydeutig §. 108.
spitzig	stumpf	größer als 2R−1	stumpf
stumpf	spitzig	größer als 2R−1	zweydeutig §. 109.
stumpf	spitzig	kleiner als 2R−1	spitzig

§. 111. Wir wollen noch einmal die gehabten Dreyecke betrachten, und wir werden finden, daß auch eine Seite, ein ihr anliegender und der dieser Seite opponirte Winkel nicht auf alle Fälle, sondern nur unter gewissen Umständen, die andre Seite bestimmen. Wir betrachteten das schon allgemeiner in §. 20. Jetzt wollen wir dieses genauer ansehen.

Es

Es mag wieder zuerst das Dreyeck BPD Fig. 23 seyn. Es sey darinn gegeben die Seite PB, der Winkel PBD, und der Winkel PDB, so wird nur unter gewissen Umständen, die wir gleich anführen wollen, die Seite PD bestimmet. Wir sagen nur erst allgemein, wenn die gegebene Seite PB < als PD, so lassen sich immer zweyerley Dreyecke machen, wo PD einmal spitz, das andre mal stumpf ist. Fig. 23

§. 112. Es sey der Bogen PD herumgerücket und P△ daraus geworden, der Punkt D, und mit ihm der Bogen PD sey so weit herumgerücket, daß AD das Complement von A△ zu zwey Rectis ist, oder Fig. 23.

A△ + AD = 2R

A△ = 2R − AD alsdenn ist auch PDA = P△A oder der gegebene Winkel bey D und der Winkel bey △ sind gleich. Denn wir hatten §. 56 die Proportion

r : sin. B = cot. P : cotang. M.

Wenn wir nun in den rechtwinklichten Triangeln PAD und PA△ gehörig substituiren, so werden wir folgende Proportionen erhalten.

r : sin. AD = cot. PA : cot. PDA

und auch r : sin. A△ = cot. PA : cot. P△A.

und sey r = 1. So ist

sin. AD . cot. PA = cot. PDA und

sin. A△ . cot. PA = cot. P△A.

Es bleibt nun PA auf beyde Fälle ungeändert. Wenn aber A△ so beschaffen ist, daß der Bogen von AD sein Complement zu zwey Rectis ist, oder welches,

wie

wie wir im Anfange des § gesehen haben, A△ = 2R — AD, so haben beyde Bogen A△ und AD einerley sinum, die auch beyde, weil sie unter 180° sind, positio sind.

Folglich sin. AD . cot. PA = sin. A△ . cot. PA. Folglich sind auch diesen Producten gleiche Größen unter einander gleich. Folglich cot. PDA = cot. P△A. Folglich Winkel PDA = Winkel P△A.

§. 113. Da AD die A△ zu 180° completiren soll, so haben auch beyde einerley cosinum (§. 457 Trigon. 2ter Theil) nun der cosinus des stumpfen A△ ist negativ §. 67. Also cos. AD = cos. A△. Nun ist §. 103. cos. PD = cos. AD cos. PA und cos. P△ = cos. A△. cos. PA.

Da nun PA in beyden Gleichungen einerley ist, und cos. A△ = cos. AD, so muß cos. PD = cos. P△ seyn. Das kann aber nicht anders seyn, als wenn PD und P△ sich zu 2 Rectis completiren. Also PD + P△ müssen = 2 Rectis seyn.

§. 114. Das größeste A△ ist = 2R — AB. Denn D ist alsdenn am weitesten fortgerücket, in diesem Triangel PDB, wenn A△ + AB = 2 Rectis. Das geschiehet, wenn Pd, das mit PD zugleich fortgerücket ist, über PB, und also PD über Pb zu liegen kömmt, oder △ bis b gekommen ist. Denn alsdenn ist der Bogen AB + Ab = semicirculo, weil er von einem andern circulo maximo geschnitten wird (§ 423 Geom. 2ter Theil). Folglich das größte A△ = 2R — AB. Folglich muß das kleineste A△ = AB seyn, weil AB das A△ zu 180° completiret. Ist aber A△ = AB, oder weil das

kleine

kleineste A△ alsdenn = AD ist, indem der Punkt D denn nicht weiter geräcket ist; so ist der Triangel PBD gleichschenklicht, also der Winkel bey D = dem Winkel bey B. §. 22. 23.

§. 115. Ist AD > AB, so ist der Winkel ADP < Winkel ABP. Denn nach §. 99.

cotang. ADP = sin. AD . cot. PA
cot. ABP = sin. AB . cot. PA

ist nun AD > AB, so ist sin. AD > sin. AB

Folglich cot. ADP > cot. ABP

Folglich tang. ADP < tang. ABP

Winkel ADP < Winkel ABP.

§. 116. Es ist nun hier AD spitzig und bleibet bis Q spitzig, weil es erst bey Q = 90° §. 99. Es müssen also so viel spitzige AD seyn, so viel es stumpfe A△ giebet, weil sie einander zu 180° completiren sollen.

§. 117. Die stumpfen A△ müssen sich alle in einem Bogen endigen, der = Ab — AQ, denn AQ = 90° und über b kann △ nicht kommen §. 114. Die spitzigen AD, die Complemente der stumpfen A△ sind, müssen sich alle in einem Bogen endigen, der AQ — AB. Denn AQ ist = Aq, denn von q bis B wird der Bogen AB spitzig und ist △ über b gekommen, so ist auch d über B, und es giebt keinen Triangel mehr, sondern einen halben Cirkel BPb. Diese beyden Bogen müssen auch gleich seyn, oder Ab — AQ = AQ — AB. Denn der Ueberschuß des einen über 90° muß so groß seyn als der Man-

gel des andern an 90°, weil sie einander zu 180° completiren.

§. 118. Zu jedem dieser AD, die sich innerhalb des Bogens AQ — AB endigen, muß also ein A△ gehören, wo laut §. 112 A△P = ADP und AD + A△ = 2R. und auch zu jedem dieser AD muß ein Winkel gehören, ADP < ABP, wo alsdenn AD > AB §. 117. und jeder Winkel ADP > ABP gehöret zu einem AD < AB.

Denn cot. D = sin. AD. cot. PA
cot. B = sin. AB. cot. PA.
PA ist constant. — D > B so ist
tang. D > tang. B
cot. D < cotang. B folglich
sin. AD < sin. AB folglich
Bogen AD < Bogen AB folglich

Ist D < B, so folget eben das Gegentheil und der Bogen AD > Bogen AB.

Ist Bogen AD < Bogen AB, folglich D > B, so ist (da für PD und PB folgende Gleichung gilt §. 113.

cos. AD. cos. PA = cos. PD
cos. AB. cos. PA cos. PB und PA eine beständig bleibende Größe ist.)

cos. AD > cos. AB
cos. PD > cos. PB folglich
sin. PD > sin. PB folglich
Bogen PD < Bogen PB

und daher die Seite PD nothwendig spitzig.

Ist

Ist aber D < B, so folget aus eben diesen Gründen und nach eben dieser Methode, daß PD > PB und PD auch stumpf seyn kann. Denn da ADP = A△P §. 112. und PD + P△ = 2R §. 113. und sie das nicht seyn können, wenn sie einander nicht zu 180° completiren, und also daher P△ = 2R − PD.

Es können also die Seite PB, der Winkel PBD und der Winkel PDB gegeben seyn, nur auf den Fall, wenn D > B, ist der Triangel bestimmt, und PD spitzig; wenn aber D < B, so ist der Fall **zweydeutig**, und es giebt zwey Triangel, denen diese gegebene Dinge zukommen.

§. 119. Wir betrachten nun das Dreyeck bPd auf der andern Seite der Kugel. Wenn darinn gegeben ist bp, der Winkel b und der Winkel d, so kann die dem gegebenen Winkel b entgegenstehende Seite, **nach den Umständen**, pd, oder auch pδ seyn, so wie in dem eben betrachteten Dreyeck die dritte Seite PD oder auch P△ seyn konnte, wenn D < B war; eben so kann in diesem Triangel bPd, bey den gegebnen Stücken die eine Seite Pd oder auch Pδ seyn, wenn 2 Recti − Pdb < 2 Rect. − Pbd, oder also Pdb > Pbd. Die Gründe sind eben die, als im vorhergehenden Falle. Oder überhaupt: Ist der stumpfe Winkel **größer** als der stumpfe Winkel b, so wissen wir aus §. 101, daß der Winkel d nach q hin zwar immer stumpfer wird, aber hinter q an Stumpfheit wieder abnimmt, und also über q in δ eben die Größe haben kann, als in d. Alsdenn aber ad > ab §. 101. Ist aber der Win-

kel b = Winkel d, oder gar d < b, so konnte d im letzten Falle, wenn es so weit herum geleget war, daß es den Punkt B erreichet hatte, aber denn gab es keinen Triangel mehr, sondern einen halben Cirkel.

Also, wenn d < b, also auch ad < ab, so giebt es keine Zweydeutigkeit, sondern nur einen stumpfen Bogen Pd.

§ 120. In dem dritten Dreyecke bPD soll gegeben seyn bP, der Winkel d und der Winkel D. Da der stumpfe Winkel bey D sowol diesseits als jenseits Q gleich groß seyn kann, §. 112. so kann PD auch auf die andre Seite von Q geleget werden, ohne Aenderung des Winkels D, etwa in P△. Das kann aber nur geschehen, wenn der spitze Nebenwinkel bey D < als der spitze im Triangel befindliche Winkel bey b, oder welches einerley ist, wenn 2 R — PDb < Pbd. Da der spitze Winkel bey D immer bis Q abnimmt, und erst hinter Q wieder wächst, §. 99. 100, so kann PD erst hinter Q geleget werden. Es muß aber diesseits b geschehen können, und also der spitze Winkel bey D nicht so groß seyn, als der spitze Winkel im Triangel bey b. Denn wären die spitzen Winkel bey b und D gleich groß, so könnte man, wenn man PD anders legen wollte, ohne daß sein gegebener Winkel D verändert würde, es nur über Pb legen, und denn gäbe es keinen Triangel mehr. Also muß D bleiben, wo es ist.

Ist also der spitze Winkel bey D kleiner als der spitze Winkel bey b, so ist der Fall zweydeutig, und die

die PD kann diesseits und jenseits Q liegen, und also spitz oder stumpf seyn.

Ist aber der spitze Winkel bey D **größer** als der spitze Winkel bey b, so giebts nur einen Fall, und PD ist spitz. Denn ob es schon wahr wäre, daß jenseit b sich Lagen finden würden, wo der spitze Winkel bey D um eben so viel größer über dem Winkel b wäre, als er vorher war, so läßt sich PD doch da nicht hinlegen, weil der Triangel alsdenn nicht mehr die gegebnen Stücke hätte, und bey b jetzt ein stumpfer, und bey D ein spitzer Winkel entstehen würde, welches nicht seyn sollte.

§. 121. Es sey nun noch im 4ten Dreyecke, PBd die Seite PB, der Winkel PBD und der Winkel PdB gegeben, so bleibet Pd zweydeutig, ob es stumpf oder spitz ist, wenn der Winkel PdB $< 2R - PBd$ oder PdB $<$ als der spitze Winkel bey B, oder welches einerley ist, als das Complement des stumpfen Winkels bey B zu 180°. Denn man kann zwey gleich spitze d haben, diesseits und jenseits q §. 101. Also ließe Pd sich auch diesseits q legen, und man hätte dennoch einen Triangel, darinn das gegebene wäre. Fig. 23.

Ist aber PdB $> 2R - PBD$, oder der spitze Winkel bey d $>$ als der spitze Winkel bey B, oder als das Complement des stumpfen Winkels B zu 180°, so ist nur ein Pd möglich, welches stumpf ist.

§. 122. Aus diesen Betrachtungen von 111 bis 121 läßt sich nun folgende Tafel entwerfen.

Es liege der Winkel B oder b wo er wolle, er mag W heißen. Die an ihm liegende Seite heiße l, der gegenüberstehende Winkel w, die daran liegende Seite, die gesuchet wird, heiße L. Wenn nun

W	l	w	so ist L
spitzig	spitzig	kleiner als W	zweydeutig } §. 118.
spitzig	spitzig	größer als W	spitzig }
stumpf	stumpf	größer als W	zweydeutig } §. 119.
stumpf	stumpf	kleiner als W	stumpf }
spitzig	stumpf	größer als 2R — W	zweydeutig } §. 120.
spitzig	stumpf	kleiner als 2R — W	spitzig }
stumpf	spitzig	kleiner als 2R — W	zweydeutig } §. 121.
stumpf	spitzig	größer als 2R — W	stumpf }

§. 123.

§. 123. Weil

AD + Ad = halben Cirkel } denn sie werden durch
Ad + ad = halben Cirkel } einen circulum maximum geschnitten.

Also AD + Ad = Ad + ad

AD = ad Folglich

Ferner AΔ + Aδ = halben Cirkel
Aδ + aδ = halben Cirkel

AΔ + Aδ = Aδ + aδ

AΔ = aδ

So ist, wie wir hier angezeiget haben, bey der Betrachtung der Triangel, sowol bey der Tafel §. 110 als der Tafel §. 122, dieser Bogen in zweydeutigen Fällen zweydeutig, aber in den gewissen Fällen allezeit spitz, wie auch aus allen unsern Betrachtungen deutlich erhellet. Man siehet aus allen diesen Betrachtungen, wie wir auch schon erwähnet haben, daß, wenn eine Seite, ein ihr anliegender und ein ihr opponirter Winkel gegeben sind, das Dreyeck nicht allezeit dadurch bestimmet werde.

§. 124. Wir fangen nun an, die Gesetze zu entwickeln, nach welchen die schiefwinklichten sphärischen Triangel behandelt und aufgelöset werden. Wir werden selbige aus den rechtwinklichten sphärischen Triangeln herleiten, und von der Spitze der schiefwinklichten sphärischen Triangel ein Perpendikel fallen lassen, wodurch jeder schiefwinklichte Triangel in zwey rechtwinklichte verwandelt wird.

Das erste Gesetz. Im schiefwinklichten Triangel verhalten sich die sinus der Sei-

Seiten, wie die sinus der ihnen entgegengesetzten Winkel.

Fig. 24. Fig. 25. Wir haben zwey Triangel gezeichnet Fig. 24 und Fig. 25, und aus ihrer Spitze ein Perpendikel herabfallen lassen. Wir wissen aus §. 98, daß es innerhalb des Triangels auf die Seite, welche man zur Basis angenommen hat, fällt, wenn die Winkel an der Basi gleichartig sind, und außerhalb desselben, wenn sie ungleichartig sind. Wir haben in beyden Triangeln die Seiten pb mit A; bd mit C und pd mit B, und das Perpendikel pa mit P bezeichnet. Den Winkel pbd haben wir M, den bpd haben wir N, und den Winkel pdb haben wir T genennet. Fig. 24. Wir betrachten nun erst den Triangel Fig. 24. Er ist durch das Perpendikel pa in zwey rechtwinklichte Triangel getheilet. Nach §. 37 können wir nun schließen

$$r : \text{sin. pb} = \text{sin. pbd} : \text{sin. pa}$$

und auch

$$\text{sin. pd} : r = \text{sin. pa} : \text{sin. pdb}$$

Folglich

$$\text{sin. pd} : \text{sin. pb} = \text{sin. pbd} : \text{sin. pdb}$$

oder in den gegebnen Zeichen

$$\text{sin. B} : \text{sin. A} = \text{sin. M} : \text{sin. T}$$

also auch

$$\text{sin. B} : \text{sin. M} = \text{sin. A} : \text{sin. T.}$$

und Fig. 25

Fig. 25.

$$r : \text{sin. pb} = \text{sin. pba} : \text{sin. pa}$$
$$\text{sin. pd} : r = \text{sin. pa} : \text{sin. pda}$$

$$\text{sin. pd} : \text{sin. pb} = \text{sin. pba} : \text{sin. pda}$$
$$= \text{sin. pba} : \text{pdb}$$

weil die Winkel bey d Complemente zu einander sind, und also einerley sinum haben.

Und

Und in Zeichen

sin. B : sin. A = sin. M : sin. T

also auch sin. B : sin. M = sin. A : sin. T

Man mag nun zum Grundbogen annehmen, welche Seite man will, so wird man, wenn man gehörig substituiret, und das Perpendikel hat fallen lassen, allemal den Lehrsatz herausbringen: daß in jedem schiefwinklichten sphärischen Triangel die sinus der Seiten sich verhalten, wie die sinus der ihnen entgegengesetzten Winkel, und wie aus der Proportion erhellet, auch umgekehret, die sinus der Winkel wie die sinus der ihnen entgegengesetzten Seiten.

§. 125. **Das zweyte Gesetz. Wenn** Fig. 24. Fig. 25. **das Perpendikel Pa auf der Grundlinie steht, so verhalten sich die sinus der beyden Stücke der Grundlinie umgekehrt als die Tangenten der beyden anliegenden Winkel.**

Oder Fig. 24.

sin. ba : da = tang. T : tang. M : = cot. M : cot. T

Beweis. Nach §. 42 wenn wir gehörig substituiren, können wir schließen:

r : sin. da = tang. T : tang. pa

und sin. ba : r = tang. pa : tang. M

sin. ba : sin. da = tang. T : tang. M

= cot. M : cot. T.

und bey Fig. 25 wo bey a der rechte Winkel

r : sin. da = tang. adp : tang. pa

sin. ba : r = tang. pa : tang. M

sin. ba : sin. da = tang. adp : tang. M

Aber tang. adp ist auch der tang. T, weil sie Nebenwinkel sind. Also:

sin. ba : sin. da = tang. T : tang. M = cot. M : cot. T.

Fig. 24. Fig. 25. §. 126. **Das dritte Gesetz. Wenn das Perpendikel pa auf der Grundlinie stehet, so verhalten sich die cosinus der beyden Stücke der Grundlinie, wie die cosinus der anliegenden Seiten.**

Oder Fig. 24.

cos. ba : cos. da = cos. pb : cos. pd

und eben auch Fig. 25, wo das Perpendikel außerhalb des Triangels fällt.

cos. ba : cos. da = cos. pb : cos. pd

Beweis. Wenn man nach §. 46 gehörig substituiret, indem man diese durchs Perpendikel entstandne Triangel als zwey rechtwinklichte betrachtet, so wird man schließen können:

r : cos. pa = cos. ba : cos. pb

Folglich r : cos. pa = cos. da : cos. pd

cos. ba : cos. pb = cos. da : cos. pd

oder cos. ba : cos. da = cos. pb : cos. pd

oder hier in Zeichen cos. ba : cos. da = cos. A : cos. B

Welches, wie man aus den Figuren siehet, für beyde Triangel gilt, wo das Perpendikel **innerhalb** oder **außerhalb** des Triangels fällt.

Fig. 24 Fig. 25. §. 127. **Das vierte Gesetz. Wenn das Perpendikel pa auf der Grundlinie stehet, so verhalten sich die sinus der beyden**

beyden Winkel, welche durchs Perpendikel an der Spitze entstehen, wie die cosinus der beyden Winkel an der Grundlinie.

oder Fig. 24. und Fig. 25.

sin. bpa : sin. dpa = cos. pba : cos. pda

Beweis. Da die Triangel bpa und pda durchs Perpendikel pa zwey rechtwinklichte Triangel geworden sind, so werden nach §. 49. wenn man gehörig substituiret, folgende Proportionen statt finden.

r : cos. pa = sin. bpa : cos. pba

und auch r : cos. pa = sin. dpa : cos. pda

also sin. bpa : cos. pba = sin dpa : cos. pda

oder sin bpa : sin dpa = cos. pba : cos. pda

oder in Zeichen sin. bpa : sin. dpa = cos. M : cos. T

In Fig. 25. ist anstatt des Winkels adp sein Nebenwinkel T genommen, weil er ihn zu 180° completiret, und also mit ihm einerley cosinum hat.

§. 128. **Das fünfte Gesetz.** Wenn das Perpendikel pa auf der Grundlinie stehet, so verhalten sich die cosinus der beyden Winkel, welche durchs Perpendikel an der Spitze entstehen, verkehrt wie die Tangenten der beyden anliegenden Seiten Fig. 24. Fig. 25.

oder

cos. bpa : cos. dpa = tang. pd : tang. pb

Beweis.

Beweis. Wenn man bey den durchs Perpendikel entstandnen beyden rechtwinklichten Triangeln gehörig substituiret, so wird man nach §. 52. schließen können:

r : cot. pa = cos. bpa : cot. pb

imgleichen r : cot. pa = cos. dpa : cot. pd

cos. bpa : cot. pb = cos. dpa : cot. pd

oder cos. bpa : cos. dpa = cot. pb : cot. pd

und da sich die Tangenten verkehrt wie die Cotangenten verhalten

cos. bpa : cos. dpa = tang. pd : tang. pb

oder in Zeichen cos. bpa : cos. dpa = tang. B : tang. A

§. 129. Dieses sind nun die fünf Gesetze §. 124, 125, 126, 127, 128, daraus sich alles herleiten lässet, was zur Auflösung der schiefwinklichten sphärischen Triangel gehöret. Man wird auch gefunden haben, daß sie sehr leicht daraus hergeleitet sind, daß wir jeden schiefwinklichten Triangel durchs Perpendikel in zwey rechtwinklichte verwandelt haben. Ehe wir nun aber diese Auflösung der schiefwinklichten Triangel vornehmen, und die Fälle anzeigen und berichtigen, welche dazu gehören, wollen wir erst noch ein Paar Theoreme anführen und beweisen, welche wir zu der Auflösung solcher schiefwinklichten Triangel gebrauchen, bey welchen entweder blos alle drey Seiten, oder blos alle drey Winkel gegeben sind, daraus man das übrige finden soll, ohngeachtet der letztere von beyden Fällen sehr selten vorkömmt, so viel auch der erstere, nemlich aus den drey Seiten die Winkel zu finden, in der Astronomie gebrauchet wird.

§. 130.

§. 130. Im §. 477. Trigonom. 2ter Theil dieses Buchs fanden wir, daß, wenn wir zwey Winkel oder Bogen a und b nennen, und ihre sinus gegeben sind, sich daraus der sinus der Summe dieser beyden Stücke finden läßt, oder sin. (a + b) = cos. a . sin. b + sin. a . cos. b / rad.

und nimmt man r = 1 an, so ist
sin. (a + b) = cos. a . sin. b + sin. a . cos. b.

Wir führten daselbst nicht die Formel an, für den cosinus der Summe zweyer Winkel oder Bogen, und das müssen wir hier nun nachholen und einschalten, weil wir es gebrauchen, wie auch noch einige andre Formeln, die wir zu unsern folgenden Betrachtungen, die zum Theil gleich nachher kommen, nöthig haben.

§. 131. Wenn die beyden Winkel oder Bogen, deren cosinus ihrer Summe man suchen will, a und b heißen, so ist der cosinus ihrer Summe oder
cos. (a + b = cos. a . cos. b − sin. a . sin. b und wenn / rad.
r = 1 gesetzet wird, cos. (a + b) = cos. a . cos b − sin. a . sin. b. Diese Formel wollen wir nun jetzt beweisen. Fig.

Fig. 26. Es sey der Winkel BCA oder der Bogen BA = a, der Winkel BCD oder Bogen BD = b: so ist BE = sin. a; EC = cos. a; DG = sin. b; GC = cos. b.

Der

Der Winkel ACD oder der Bogen AD Winkel oder Bogen a + b; DF = sin. (a + b); FC = (cos. a + b). Man setze als Hülfslinien aus G die GH auf AC, imgleichen auch aus G die GK aus DF senkrecht, so ist der Triangel CGH ähnlich dem Triangel CBE, und dieser auch ähnlich dem Triangel DGK. Das erstere fällt gleich in die Augen, weil GH parallel BE, indem H und E Recti, das zweyte ist auch nicht schwer zu beweisen.

Die Verticalwinkel bey L sind in den rechtwinklichten Triangeln, FCL und DGL gleich bey F und G sind Recti, also der Winkel FCL ist = dem Winkel GDK, aber der Winkel FCL gehöret auch zu dem Triangel BCE, also Winkel BCE gleich Winkel GDK, nun sind bey K und E Recti, also auch EBC = KGD. Also △ CBE ∽ △ DGK ∽ △ CGH.

Daher

Daher gilt

BC : CE = CG : CH und in Zeichen

r : cos a = cos b : CH und $CH = \frac{\cos b \cdot \cos a}{rad.}$

ferner BC : BE = DG : GK und in Zeichen

rad. : sin. a = sin. b : GK und $GK = \frac{\sin. b \cdot \sin. a}{rad.}$

aber GK = HF (§. 84 Geom.)

ferner $CF = CH - HF$ oder $= CH - GK = \frac{\cos a \cdot \cos b}{r} -$

$\frac{\sin. a \cdot \sin. b}{rad.} = \cos. (a + b)$

weil $CF = \cos. (a + b)$ ist, wie wir vorher gesehen haben, =

cos. der Summe zweener Winkel oder Bogen.

§. 132. Der sinus der Differenz zweyer Fig. Winkel oder Bogen, oder der sin. (a − b) ist = 27. $\frac{\sin. a \cdot \cos. b - \cos. a \cdot \sin. b}{rad.}$ und wenn r = 1, so ist sin. (a − b) = sin. a . cos. b − cos. a . sin. b.

Es

Es sey der Winkel ACB oder der Bogen AB = a, der Winkel BCD oder Bogen BD = b, so ist der Winkel ACD oder der Bogen AD = dem Winkel oder Bogen der Differenz dieser beyden Winkel oder Bogen = a − b.

Es wird also BE = sin. a; CE = cos. a

DG, die auf BC unter einem rechten Winkel stehet, = sin. b; GC = cos. b.

DF = sin. (a − b); FC = cos. (a − b)

GH ist eine Hülfslinie = KF, weil KG parallel mit FH und GH parallel mit KF (§. 84. Strom.)

Nun kann man wegen Aehnlichkeit der Triangel CBE und CGH schließen:

CB : BE = CG : GH und in Zeichen

$$r : \sin. a = \cos. b : GH \text{ und } GH = \frac{\sin. a \,.\, \cos. b}{rad.}$$

= KF.

Es werde ferner BC und FD verlängert, bis sie in L zusammenkommen, so ist wegen Aehnlichkeit der Triangel LFC und LKG

Winkel ACG = KGL aber

KGL = GDK denn CGD = GKD = Recto

DGK + KGL = DGK + GDK

= Recto

KGL = GDK.

folglich der Triangel DGK ∽ △ LFC ∽ △ BCE daher

ang. BCE = ang. GDK

CBE = DGK.

bey H und K sind Recti

Man

man kann also schließen:

BC : CE = DG : KD und in Zeichen

r : cos. a = sin. b : KD und

$KD = \frac{\text{cos. a . sin. b}}{\text{rad.}}$

Nun ist $DF = \text{sin. (a} - \text{b)} = KF - KD = GH - KD = \frac{\text{sin. a . cos. b} - \text{cos. a . sin. b}}{\text{rad.}}$ und

wenn r = 1, = sin. a . cos. b — cos. a . sin. b = dem sinus der Differenz zweener Winkel oder Bogen.

§. 133. Da man aber auch schließen kann, Fig. 27.

Fig. 27.

BC : CE = CG : CH und in Zeichen

r : cos. a = cos. b : CH so ist $CH = \frac{\text{cos. a . cos. b}}{\text{rad.}}$

ferner BC : BE = DG : KG und in Zeichen

r : sin. a = sin. b : KG

also $KG = \frac{\text{sin. a . sin. b}}{\text{r.}} = FH$

Nun ist ferner, da KG = FH und FC = FH + HC = cos. (a — b) die Werthe dafür gesetzet $= \frac{\text{sin. a . sin. b}}{\text{rad.}} + \text{cos. a . cos. b}$ und wenn r = 1

= sin. a . sin. b + cos. a . cos. b = cosinus der Differenz zweener Winkel oder Bogen.

§. 134. Da der $\text{sin (a} + \text{b)} = \frac{\text{cos. a . sin. b} + \text{sin. a . cos. b}}{\text{rad}}$ §. 130. so sey

$b = a$, oder beyde Winkel gleich, also anstatt b die a substituiret, so ist $\sin. 2a = \frac{\sin. a . \cos. a + \sin. a . \cos. a}{rad}$

$= 2 \frac{\sin a . \cos a}{rad}$ und wenn $r = 1 = 2 \sin. a . \cos. a$

= dem sinus des doppelten Winkels.

Da ferner $\cos.(a+b) = \frac{\cos. a . \cos. b - \sin. a . \sin. b}{rad.}$

so ist daher $\cos. 2a = \frac{\cos. a^2 - \sin. a^2}{rad.}$ und wenn

$r = 1$; $= \cos. a^2 - \sin. a^2 =$ dem cosinus des doppelten Winkels oder Bogens.

§. 135. Eben so ist (laut §. 479. Trigon. 2ter Theil.)

$\sin. \frac{1}{2} a = \sqrt{\left(\frac{r^2 - r . \cos. a}{2}\right)}$ und wenn $r = 1$

$= \sqrt{\left(\frac{1 - \cos. a}{2}\right)}$

und $\cos. \frac{1}{2} a = \sqrt{\left(\frac{r^2 + r . \cos. a}{2}\right)}$ und $r = 1$

$= \sqrt{\left(\frac{1 + \cos. a}{2}\right)}$

§. 136.

Es war §. 130. $\sin.(a+b) = \sin.a.\cos.b + \cos.a \sin.b$
und §. 132. $\sin.(a-b) = \sin a.\cos.b - \cos a.\sin.b$

folglich

$\sin.(a+b) + \sin.(a-b) = 2 \sin.a.\cos.b.$ und
$\sin.(a+b) - \sin.(a-b) = 2 \cos.a, \sin.b.$

Es sey nun $(a+b) = \eta$
und $(a-b) = \vartheta$

addirt
$2a = \eta + \vartheta$
$a = \frac{1}{2}(\eta + \vartheta.)$

noch einmal
$(a+b) = \eta$
$(a-b) = \vartheta$

subtrah.
$2b = \eta - \vartheta$
$b = \frac{1}{2}(\eta - \vartheta)$

dieses giebt bey den im Anfange des § angeführten Formeln, die wir nachher bequem gebrauchen können. Also:

$\sin.(a+b)+\sin.(a-b)=\sin.\eta+\sin.\vartheta$
$=2\sin.\frac{1}{2}(\eta+\vartheta).\cos.\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$
und $\sin.(a+b)-\sin.(a-b)=\sin.\eta-\sin.\vartheta$
$=2\cos.\frac{1}{2}(\eta+\vartheta).\sin.\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$

§. 137.

Es war nach §. 133 $\cos.(a-b)=\cos.a.\cos.b+\sin.a.\sin.b$ und nach §. 131. $\cos.(a+b)=\cos.a.\cos.b-\sin.a.\sin.b$ folglich $\cos.(a-b)+\cos.(a+b)=2\cos.a.\cos.b$ und $\cos.(a-b)-\cos.(a+b)=2\sin.a.\sin.b$

es sey wie vorher $(a+b)=\eta$ und

$a-b=\vartheta$

so ist wie vorher $a=\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)$ und $b=\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$ folglich $\cos.(a-b)+\cos.(a+b)=2\cos.a.\cos.b=2\cos.\frac{1}{2}(\eta+\vartheta).\cos.\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$ und $\cos.(a-b)-\cos.(a+b)=2\sin.a.\sin.b=\cos.\vartheta-\cos.\eta=2\sin.\frac{1}{2}(\eta+\vartheta).\sin.\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$.

§. 138. Nach diesen Lehnssätzen von §. 130. 137. die wir in der Folge nöthig haben werden, können wir nun noch das sechste und siebente Gesetz entwickeln, welche eigentlich dazu dienen, wenn man aus den drey Seiten die Winkel, oder aus den drey Winkeln die Seiten finden soll.

§. 139. Das sechste Gesetz, welches wir nun beweisen werden, ist folgendes: Fig. 24. Fig. 25.

Wenn r = 1 angenommen wird, so ist der sinus eines halben Winkels, hier mag es Fig. 24. 25. der Winkel M seyn.

$$\sin.\frac{1}{2}M = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(pd+pb-bd).\sin.\frac{1}{2}(pd+bd-pb)}{\sin.bd.\sin.pb.}}$$

Beweis. Es sey der Bogen pa und bd senkrecht, oder pa ein Perpendikel, so hat man zwey rechtwinklichte Triangel. Es läßt sich nun erstlich nach §. 126 schließen:

$$\text{cos. pb} : \text{cos. pd} = \text{cos. ba} : \text{cos. da}$$

$$\text{cos. da} = \frac{\text{cos. ba} \cdot \text{cos. pd}}{\text{cos. pb.}}$$

Nun ist aber auch da = bd − ba, (welches auch beym Triangel Fig. 25 gilt, nur daß man alsdenn da mit negativen Zeichen bekömmt).

Folglich cos. da = cos. (bd − ba)

Aber das ist = dem cosinus der Differenz zweyer Bogen, und also nach §. 133 =

cos. da = sin. bd . sin ba + cos. bd . cos. ba

Wir haben also zwey Werthe für cos. da, die wir gleich setzen können. Es wird folglich

cos.

$$\frac{\text{cos. pd. cos. ba}}{\text{cos. pb}} = \text{sin. bd. sin. ba} + \text{cos. bd. cos. ba}$$

$$\text{also cos. pd} = \frac{\text{sin. bd. sin. ba} + \text{cos. bd. cos. ba}}{\frac{\text{cos. pb}}{\text{cos. ba}}}$$

$$\text{oder cos. pd} = \frac{\text{sin. bd. sin. ba} + \text{cos. bd}}{\frac{\text{cos. pb}}{\text{cos. ba}}}$$

Aber es ist auch (nach §. 473 Trigon. 2ter Theil, wo sin. a = tang. a sin ba = tang. ba. Das in der cos. a cos. ba eben gehabten Gleichung substituiret, so ist

$$\frac{\text{cos. pd}}{\text{cos. pb}} = \text{sin. bd} \cdot \text{tang. ba} + \text{cos. bd}$$

$$\text{cos. pd} - \text{cos. bd} = \text{sin. bd} \cdot \text{tang. ba} \quad \text{und daher}$$

$$\text{cos. pb}$$

$$\text{cos. pa} = \text{cos. bd} = \text{tang. ba} \quad \text{und folglich}$$

$$\text{cos. pb, sin. bd} \qquad \text{sin. bd} \qquad \text{oder}$$

$$\text{cos. pd} - \text{cos. bd. cos. pb} = \text{tang. ba}$$

$$\text{cos. pb, sin. bd}$$

Man ist laut §. 52 und 56 in 4, wenn man gehörig substituiret,

r; cos. M = tang pb: tang. ba

also wenn r = 1, so ist tang. ba = cos. M. tang. pb aber da (laut §. 473 Trigon. 2ter Theil) tang. pb = sin. pb so ist also dieses substituiret, auch daher

$$\text{tang. ba} = \frac{\text{cos. M. sin. pb}}{\text{cos. pb}}$$

Wir

Wir haben also zwey Werthe für tang. ba, die wir gleich setzen können. Es ist daher

$$\frac{\text{cos. pd} - \text{cos. bd . cos. pb}}{\text{cos. pb . sin. bd}} = \frac{\text{cos. M . sin. pb}}{\text{cos. pb}}$$

und daher

$$\frac{(\text{cos. pd} - \text{cos. bd . cos. pb}) \text{cos. pb}}{\text{cos. pb . sin. bd}} = \text{cos. M . sin. pb}$$

oder

$$\frac{\text{cos. pd} - \text{cos. bd . cos. pb}}{\text{sin. bd}} = \text{cos. M . sin. pb}$$

und daher

$$\text{cos. pd} - \text{cos. bd . cos. pb} = \text{cos. M . sin. bd . sin. pb}$$

Wir könnten nun schon hier den Winkel M finden, weil aber die Rechnungsart unbequem, und die Logarithmen nicht gut gebräuchet werden können, so wollen wir suchen, den sinus von M zu finden.

Es ist nun laut §. 135 $\sin \frac{1}{2} M = \sqrt{\frac{1 - \cos M}{2}}$

folglich $\sin \frac{1}{2} M^2 = \frac{1 - \cos M}{2}$

und $2 \sin \frac{1}{2} M^2 = 1 - \cos M$

Es wird also laut der gebahnten Rechnung für $\cos M$, $1 - (\cos pd - \cos bd, \cos pb)$

$\sin bd, \sin pb$

oder $1 - \cos M = \frac{\sin bd, \sin pb - \cos pd + \cos bd, \cos pb}{\sin bd, \sin pb}$

Nun ist aber unter dieser Größe eine befindlich, welche laut §. 133 der cosinus der Differenz zweyer Bogen ist, nämlich $\sin bd . \sin pb + \cos bd . \cos pb = \cos (pb - bd)$. Es ist folglich

sin.

$$\frac{\text{sin. bd . sin. pb} - \text{cos. pd} + \text{cos. bd . cos pb}}{\text{sin. bd . sin pb}} = \frac{\text{cos. (pb} - \text{bd)} - \text{cos pd}}{\text{sin. bd . sin. pb}} = 1 - \text{cos. M}$$

und da $1 - \text{cos. M}$, wie wir oben gehabt, $= 2 \sin \frac{1}{2} M^2$, so ist also

$$2 \sin. \tfrac{1}{2} M^2 = \frac{\text{cos (pb} - \text{bd)} - \text{cos. pd}}{\text{sin. bd . sin pb}}$$

Es sey nun, wie in §. 136. $pb - bd = \vartheta$ und $pd = \eta$, so ist also

$$2 \sin \tfrac{1}{2} M^2 = \frac{\text{cos. } \vartheta - \text{cos. } \eta}{\text{sin. bd . sin pb}}$$

Aber laut §. 137. wenn man gehörig substituiret,

$$2 \sin. \tfrac{1}{2} M^2 = \frac{2 \text{ sin. } \frac{1}{2}(\eta + \vartheta) . \text{ sin. } \frac{1}{2}(\eta - \vartheta)}{\text{sin. bd . sin pb}}$$

folglich

$$\sin. \tfrac{1}{2} M^2 = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(\eta + \vartheta) . \text{sin } \frac{1}{2}(\eta - \vartheta)}{\text{sin. bd . sin. pb}}$$

Es ist aber ferner, wie wir oben die Werthe für η und ϑ gesetzet haben, $\eta + \vartheta = pd + pb - bd$ und $\eta - \vartheta = pd - pb + bd$. Das in der Formel substituiret, so wird

$$\sin.\tfrac{1}{2}M^2 = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(pd+pb-bd).\sin.\tfrac{1}{2}(pd+bd-pb)}{\sin.bd.\sin.pb}$$

und daher

$$\sin.\tfrac{1}{2}M = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(pd+pb-bd).\sin.\tfrac{1}{2}(pd+bd-pb)}{\sin.bd.\sin.pb}}$$

§. 140. Rechnet man mit Logarithmen, und will also den Radius, den wir hier = 1 angenommen haben, wieder herstellen, so ist

sin.

$$\sin\tfrac{1}{2}M^2 = r^2\frac{(\sin.\tfrac{1}{2}(pd+pb-bd).\sin.\tfrac{1}{2}(pd+bd-pb)}{\sin.bd.\sin pb}$$

und daher

$$\sin\tfrac{1}{2}M = r\sqrt{\frac{(\sin.\tfrac{1}{2}(pd+pb-bd).\sin.\tfrac{1}{2}(pd+bd-pb))}{\sqrt{\sin.bd.\sin.pb}}}$$

wie man bey der Rechnung finden wird. Oder in Zeichen

$$\sin.\tfrac{1}{2}M = r\sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(B+A-C).\sin.\tfrac{1}{2}(B+C-A))}{\sqrt{\sin.C.\sin.A}}}$$

Anmerkung. Analogisch ist also

$$\sin.\tfrac{1}{2}N = r\sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(C+B-A).\sin\tfrac{1}{2}(C+A-B)}{\sqrt{\sin A.\sin C}}}$$

und

$$\sin\tfrac{1}{2}T = r\sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(A+C-B).\sin.\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\sqrt{\sin.B.\sin.A}}}$$

§ 141. **Das siebente Gesetz**, welches wir nun beweisen werden. Wir fanden §. 36b, wie man einen sphärischen Triangel in einen andern verwandeln kann, auf die Art, daß die Winkel des neuen Triangels das Complement zu den Seiten des erstern zu 180°, und die Seiten des neuen Triangels

das

das Complement zu den Winkeln des erstern zu 180° sind. Wir können hieraus den Satz finden, wie man aus den drey Winkeln die Seiten finden kann.

Fig. 28. Es mögen nun PBD und pbd Fig. 28. zwey solche Triangel seyn, deren Seiten und Winkel, wie wir eben gesagt haben, sich zu 180° completiren: so müssen wir den Triangel pbd zuerst betrachten, aus §. 139, wo wir einen Werth für cos. M fanden, daß, wenn wir hier statt M die d setzen und gehörig substituiren, alsdenn

$$\cos. d = \frac{\cos. pb - \cos. bd . \cos. pd}{\sin. bd . \sin. pd}$$

Nun completiren die Winkel und Seiten dieser beyden Triangel Fig. 28. PBD und pbd auch ein ander zu 180°. Es ist also nach §. 36 b.

$$PB + d = 180°$$
$$D + pb = 180°$$
$$P + bd = 180°$$
$$B + pd = 180°$$

Hieraus folget nun, weil man die cosinus der Winkel oder Seiten, die die andern Winkel oder Seiten zu 180° completiren, als einander entgegengesetzte Größen betrachten kann, indem doch eines stumpf, das andre spitz seyn muß, dieses aber auch nur in Ansehung der cosinus statt findet, indem die sinus bis 180° alle positiv bleiben; daß also

$$\cos. d = - \cos. PB$$
$$\cos. pb = - \cos. D$$
$$\cos. bd = - \cos. P$$
$$\sin. bd = + \sin. P$$
$$\cos. pd = - \cos. B$$
$$\sin. pd = + \sin. B$$

Wenn

Wenn man nun in die eben gehabte Gleichung für cos. d, da — PB ihm gleich ist, diese Größe, nur das, was wir hier gefunden, anstatt des vorigen substituiret und mit verkehrten Zeichen gesetzet, weil auch anstatt cos. d die — cos. PB kömmt: so ist also

$$-\cos. PB = \frac{-\cos. D + \cos. P. - \cos. B}{\sin. P. \sin. B}$$

$$= \frac{-\cos. D - \cos. P. \cos. B}{\sin P. \sin. B}$$ und daher also

$$\cos. PB = \frac{\cos. D + \cos. P. \cos B}{\sin. P. \sin. B}$$ nun ist laut §. 135.

$$\cos. \tfrac{1}{2} PB = \sqrt{\frac{(1 + \cos. PB)}{2}}$$

$$\cos. \tfrac{1}{2} PB^2 = \frac{1 + \cos. PB}{2}$$

$$2 \cos. \tfrac{1}{2} PB^2 = 1 + \cos. PB$$

Es ist aber, wenn man vor cos. PB das oben gefundne setzet

$$1 + \cos. PB = \frac{1 + \cos. D + \cos. P. \cos B}{\sin P. \sin B}$$

$$= \frac{\sin. P. \sin B + \cos. D + \cos. P. \cos. B}{\sin. P \sin B.}$$

und weil hier im Zähler $\sin P. \sin B + \cos. P. \cos B$ nach §. 133 ein cosinus der Differenz ist: so ist also auch

$$1 + \cos. PB = \frac{\cos (B - P) + \cos D}{\sin P. \sin. B}$$

Es

Es sey nun nach Aehnlichkeit §. 136, $B - P = \vartheta$ und $D = \eta$, so ist

$$\frac{\cos.(B-P) + \cos. D}{\sin. P . \sin. B} = \frac{\cos. \vartheta + \cos. \eta}{\sin. P . \sin. B}$$

und also nach §. 137, wenn man gehörig substituiret

$$\frac{2 \cos.\frac{1}{2}PB^2}{\sin. P . \sin. B} = \frac{2 \cos.\frac{1}{2}(D+B-P) . \cos.\frac{1}{2}(D+P-B)}{\sin. P . \sin. B}$$

$$\text{also } \cos.\tfrac{1}{2}PB^2 = \cos.\tfrac{1}{2}(D+B-P) . \cos.\tfrac{1}{2}(D+P-B)$$

$$\text{und } \cos.\tfrac{1}{2}PB = \sqrt{\cos.\tfrac{1}{2}(D+B-P) . \cos.\tfrac{1}{2}(D+P-B)}$$

Erste

Erste Anmerkung. Es wird dieser Satz zur Auflösung der Aufgabe gebrauchet, wenn man aus drey gegebenen Winkeln die drey Seiten finden soll, obschon der Fall sehr selten vorkömmt. Rechnet man mit Logarithmen, so muß man den r wieder herstellen, der in obiger Gleichung = 1 genommen war, stellet man den r wieder her, so ist

$$\cos.\tfrac{1}{2}PB = \frac{r\sqrt{(\cos.\frac{1}{2}(D+B-P).\cos.\frac{1}{2}(D+P-B))}}{\sqrt{\sin.P.\sin.B}}$$

und $\cos.\frac{1}{2}PB = \frac{r\sqrt{(\cos.\frac{1}{2}(D+B-P).\cos.\frac{1}{2}(D+P-B))}}{\sqrt{\sin.P.\sin.B}}$

Zweyte Anmerkung. Wenn man diese Buchstaben auf die Buchstaben von Fig. 24. 25 bringet, so wird also

$$\cos.\tfrac{1}{2}A = r\sqrt{\frac{(\cos.\tfrac{1}{2}(T+M-N)\cdot\cos.\tfrac{1}{2}(T+N-M)}{\sin.N.\sin.M}}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}B = r\sqrt{\frac{(\cos.\tfrac{1}{2}(M+T-N)\cdot\cos.\tfrac{1}{2}(M+N-T)}{\sin.N.\sin.T}}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}C = r\sqrt{\frac{(\cos.\tfrac{1}{2}(N+T-M)\cdot\cos.\tfrac{1}{2}(N+M-T)}{\sin.M.\sin.T}}.$$

§. 142. Nach allen diesen Vorbereitungen schreiten wir nun zu der Auflösung der schiefen sphärischen Triangel. Bey den rechtwinklichten sphärischen Triangeln fanden wir §. 58 **sechzehn** Sätze, die wir nöthig

nöthig hatten, um alle Fälle, die dabey vorkommen konnten, aufzulösen. Hier bey den schiefwinklichten werden wir zwölfe antreffen, wodurch alles aus den erwiesenen sieben Gesetzen aufgelöset werden kann. Wir wollen nun die schiefen Triang. Fig. 24 und 25 betrachten, wo wir die Seiten und Winkel mit Buchstaben bezeichnet haben. Wir finden hierin 6 Stücke, drey Seiten A, B, C und drey Winkel M, N, T. Davon müssen drey gegeben seyn, um die übrigen drey zu finden. Es sind hier also 6 Stücke, die immer zu drey und drey, oder auf Ternenweise verbunden sind. Nach der Lehre von der Combination (§. 370 Arithm. 1ster Theil) finden wir, wie viel mögliche Verbindungen das giebet. Es giebt nemlich $\frac{6.5.4}{1.2.3} = \frac{120}{6} = 20$ Verbindungen, wovon aber verschiedne, wie sich in der Folge zeigen wird, würklich einerley Satz enthalten, daß also alles auf 12 Fälle hinausläuft. Man suchet nun entweder Winkel oder Seiten, oder beydes zugleich. Folgende Tabelle wird zeigen, was gegeben seyn kann, was gesuchet wird, und die Sätze, die hierin enthalten sind.

Man wird hiedurch finden, wenn man in der letzten Columne die Sätze zusammenzählet, daß also 12 Sätze gesuchet werden können, und also eigentlich **zwölf** Aufgaben sind, und ohngeachtet mancher Satz, nachdem andre Seiten oder Winkel gegeben sind, verändert wird, so ist es doch in der That ein und eben derselbe Satz, der eine und eben die Art der Auflösung erfordert.

§. 143. Wir wollen die **allgemeinen** Fälle nun zusammensetzen und anzeigen, wo die Auflösungen zu finden sind.

Es ist gegeben	Es wird gesucht
I. Zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel.	a) die dritte Seite §. 144. b) einer von den übrigen beyden Winkeln. §. 146.
II. Zwey Seiten und der einer Seite opponirte Winkel.	a) der der andern Seite opponirte Winkel §. 151. b) der von beyden Seiten eingeschlossene Winkel §. 167. c) die dritte Seite. §. 161.
III. Eine Seite und die beyden anliegenden Winkel.	a) eine der andern Seiten §. 158. b) der dritte Winkel §. 155.
IV. Eine Seite, ein anliegender und ein dieser Seite opponirte Winkel.	a) der dritte Winkel §. 164. b) die entgegengesetzte Seite des einen gegebenen Winkels §. 153. c) die dritte Seite zwischen den gegebenen Winkeln §. 170.
V. Alle drey Seiten.	a) ein Winkel §. 173.
VI. Alle drey Winkel.	a) eine Seite §. 176.

§. 144. **Wir fangen die Aufgaben und Auflösungen an.**

1. a) §. 143. **Es sind gegeben zwey Seiten, nebst dem eingeschlossenen Winkel, man sucht die dritte Seite.** Es sey nun gegeben Fig. 24. Fig. 25. die Seite A oder die pb, die Seite C oder die bd und der Winkel M, man sucht also die Seite pd oder B.

Fig. 24 Fig. 25

Auflösung. Es soll von den beyden gegebenen Seiten die Seite A die kleinste seyn. Man fälle nun von der Spitze des Winkels N auf die entgegengesetzte Seite C ein Perpendikel, hier pa, und zwar also, daß man aus der Spitze des Winkels, der an der kleinesten Seite von den gegebenen Seiten lieget und nicht gegeben ist, auf die andre gegebene Seite das Perpendikel fallen läßt. Es ist dieses der Bequemlichkeit halber, auch muß man die Seite, worauf das Perpendikel fällt, verlängern, wenn es nöthig ist, und das Perpendikel außerhalb des Triangels fallen sollte. Auf diese Art wird eines von den beyden rechtwinklichten Dreyecken, die man nun bekömmt, zwey von den gegebnen Stücken enthalten. Hier enthält das rechtwinklichte Dreyeck pba die gegebne Seite A und den gegebnen Winkel M.

Man hat nun in dem rechtwinklichten Dreyeck pba den rechten Winkel b, y a, den gegebnen Winkel M, und die gegebne Seite A, die man jetzt als Hypotenuse betrachten kann. Man kann also (nach §. 55. 56. in 4), wenn man gehörig substituiret, also schließen:

r:

r : cos. M = tang. A : tang. ab
und tang. ab = $\frac{\text{tang. A . cos. M}}{\text{r}}$

Es wird nun darauf ankommen, zu bestimmen, wo das Perpendikel pa hinfällt, ob es innerhalb des Triangels, oder außerhalb desselben zu liegen kömmt. Man kann dieses aus der Seite A und dem Winkel M schließen, die beyde gegeben sind. Ist A **kleiner** als 90°, so ist M und ba **gleichartig**; ist A **größer** als 90°, so sind M und ba **ungleichartig** §. 77.

Es ist aber da = bd — ba

Da mir bd oder die Seite C bekannt ist, und ich auch jetzt ba kenne, so weiß ich nun auch da und weiß auch, ob das Perpendikel pa innerhalb oder außerhalb des Triangels falle. Es fällt innerhalb, wenn ba **kleiner** als bd ist, und fällt außerhalb, wenn ba **größer** als bd ist. Nun habe ich noch die Seite B zu suchen. Ich schließe nun nach dem dritten Gesetze §. 126.

cos. ba : cos. da = cos. A : cos. B und
cos. B. = $\frac{\text{cos. A . cos. da}}{\text{cos. ba.}}$

Um nun zu wissen, ob B größer oder kleiner als 90° sey, muß man wissen, ob das Perpendikel pa größer oder kleiner als 90° sey. Das kömmt nun auf den Winkel M an. Ist M größer als 90°, so ist es auch pa. Ist M kleiner als 90°, so ist es gleichfalls pa §. 70. Wenn ich weiß, was pa und da ist, so weiß ich es auch von B oder pd, das gesuchet ist. Ist pa und da gleichartig, so ist B klei-

kleiner als 90°; ist pa und da ungleichartig, so ist B größer als 90° §. 82.

Diese Aufgabe wäre also aufgelöset.

In die deutsche Sprache übersetzt und allgemein ausgedrücket, heißen beyde zu dieser Auflösung erforderlichen Proportionen also

der sinus totus
zum cosinus des gegebenen Winkels
wie der tangens der kleinsten gegebenen Seite
zum tangens des ersten Abschnitts

berichtiget und ferner geschlossen,

der cosinus des ersten Segments
zum cosinus des zweyten Segments
wie der cosinus der kleinsten gegebenen Seite
zum cosinus der gesuchten Seite

und dieses nun nach dem obigen berichtiget.

Es ist diese Auflösung eine der nützlichsten in der Astronomie.

Anmerkung. Wir führen noch eine Formel an, die man auch zur Auflösung dieser Aufgabe gebrauchen könnte, mit der es sich aber nicht bequem mit Logarithmen rechnen läßt, sondern man die natürlichen trigonometrischen Linien addiren, subtrahiren ꝛc. und dann das Resultat unter den natürlichen trigonometrischen Linien aufsuchen muß. Wir haben sie §. 139. bewiesen, und finden daselbst

cos. M = cos. B − cos. C . cos. A gehörig substituire

sin. C . sin. A

cos. M . sin. C . sin. A = cos. B − cos. C . cos. A

cos M . sin. C . sin. A + cos. C . cos. A = cos B

welches wir suchten. Hier ist r = 1 angenommen, also alle sinus und cosinus Decimalbrüche.

§. 145. Von dieser Aufgabe nun einige Exempel. Es sey gegeben die Seite A 52° 42′, die Seite C 73° 25′ und der Winkel M 63° 51′, man suchet die Seite B oder die pd.

erstlich also tang. ab = tang. A . cos. M hier =

r

tang. 52° 42′ . cos. 63° 15′

sin. totus. logarithmisch.

log tang. 52° 42′ = 10, 1181614

log. cos. 63° 15′ = 9 6533075

19, 7714689

log. sin. tot. = 10, 0000000

log. tang. ab = 9, 7714689

Dieser Logarithme gehöret fast zu dem Bogen 30° 35′ weil A und M beyde unter 90°, so ist also ad spitz und würklich 30° 35′ und nicht das Complement zu 180°.

Da C oder die bd gegeben ist = 73° 25′, so ist also ad = bd − ba = hier = 73° 25′ − 30° 35′ = 42° 50′ = ad.

Nun ist $\cos B = \cos A \cdot \cos da = \frac{\cos 52^\circ 42' \cdot \cos 42^\circ 50'}{\cos ba \qquad \cos 30^\circ 35'}$

logarithmisch log. cos. 52° 42′ = 9,7824643
log. cos. 42° 50′ = 9,8653021
19 6477664
log. cos. 30° 35′ = 9,9349477
log. cos. B = 9,7128187.

Dieser Logarithme gehöret fast zu 31° 5′, da es der Cosinus von B ist, so ist also B = 58° 55′. Da M, das gegeben war, kleiner als 90° ist, so ist es auch das Perpendikel pa; da nun pa und da auch gleichartig sind, so ist B < 90°, also würklich dieser Bogen 57° 50′ und nicht sein Compelment zu 180°.

Anmerkung. Wir haben bey den Größen, welche durch die Logarithmen angezeiget worden sind, blos

blos auf die Minuten gesehen und die Secunden negligiret, welches wir, da es zu weitläuftig wäre, die Secunden (nach §. 362. Arithm. erster Th.) zu suchen, immer thun werden.

Noch ein Exempel. Es sey $A = 50° 32'$; $C = 132° 15'$; $M = 112° 7'$, man suchet B.

Es ist tang. ab $=$ tang $50° 32'$. cos. $112° 7'$ logarithmisch.

	sin. totus.	
log. tang. $50° 32'$	$=$	10,0844104
log. cos. $112° 7' =$ log cos. $67° 53' =$		9,5757578
		19,6601682
log. sin totus	$=$	10,0000000
log. tang. ba	$=$	9,6601682

Dieser Logarithme gehört fast zu $24° 34' =$ Bogen ba. Weil A kleiner als $90°$, so ist M und ba gleich-

artig, da nun M stumpf ist, so ist auch ba stumpf, also ba = 180° — 24° 34′ = 155° 26′.

Da C nur 132° 15′, so fällt also das Perpendikel ausserhalb des Triangels, wie Fig. 25 vorstellet, und da = bd — ba = 132° 15′ — 155° 26 = — 23° 11′,

Nun ist cos. B = cos. A. cos. da hier = cos. 53° 32′. cos. 23° 11′

logarithmisch.	cos. ba	cos. 155° 26′
log. cos. 50° 32′ =		9, 8033038
log. cos. 23° 11′ =		9, 9634336
		19, 7667374
log. cos. 155° 26′ = log. cos. 24° 34′ =		9, 9587923
log. cos. B =		9, 8078451

Dieser Logarithme gehöret fast zu 39° 58′. Da er Logarithme des cosinus ist, so ist also B oder pd = 50° 2′.

De

Da M größer als 90°, so ist es auch das Perpendikel pa, da ferner da auch kleiner als 90° ist, also pa und da gleichartig sind, so ist B oder pd auch kleiner als 90°, also würklich = 50° 2′ und nicht sein Complement zu 180°.

§. 146. I. b) §. 143) **Es sind gegeben zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel, man sucher einen der übrigen Winkel.** Fig. 24. Fig. 25. **Es sey hier gegeben die Seite A, die Seite C und der Winkel M. Man sucher den Winkel T.**

Auflösung. Man fälle aus des dritten Winkels N Spitze das Perpendikel pa, so ist in dem rechtwinklichten Triangel pab bekannt die Hypotenuse A oder pb, der Winkel M und der rechte Winkel; hieraus läßt sich ba finden, und man kann also schließen (§. 55. 56. in 4) gehörig substituiret.

r : cos. M. = tang. A : tang. ab

und tang ab = tang. A. cos. M

rad.

Es kömmt jetzt nun ferner darauf an, ob ab größer oder kleiner als 90° ist. Ist die dem gegebenen Winkel anliegende Seite, die jetzt als Hypotenuse betrachtet wird, oder A **kleiner** als 90°, so ist M und ab **gleichartig**; ist A **größer** als 90°, so ist M und ab **ungleichartig** §. 77. Es ist nun ferner ad = bd — ba, ist ba kleiner als bd, so fällt das Perpendikel **innerhalb** des Triangels. Ist ba größer als bd, so wird ad negativ, und das Perpendikel fällt **außerhalb** des Triangels.

Man schließe nun ferner nach §. 125.

sin. ad : sin. ba = tang. M : tang. T

also tang. T = $\frac{\text{tang. M . sin ba}}{\text{sin. ad}}$

Dieser Winkel T wird spitz oder stumpf seyn; nach der Beschaffenheit von ba. Ist ba kleiner als bd oder fällt das Perpendikel innerhalb des Triangels, so ist der gegebene Winkel M und der gesuchte Winkel **gleichartig**; ist ba > bd oder das Perpendikel fällt außerhalb des Triangels, so ist der gegebne Winkel M und der gesuchte T ungleichartig, wie dieses aus §. 98. erhellet.

Die beyden zu dieser Auflösung nöthigen Proportionen lauten allgemein ausgedrücket mit Worten also:

der sinus totus
zum cosinus des gegebnen Winkels
wie die Tangente der Seite die dem gesuchten Winkel opponirt ist
zur Tangente des ersten Abschnitts durchs Perpendikel

ferner

der sinus des zweyten Abschnitts durchs Perpendikel
zum sinus des ersten Abschnitts
wie die Tangente des gegebnen Winkels
zur Tangente des gesuchten Winkels

Dieses muß aus obigem gehörig berichtiget werden.

§. 147. Wir wollen aber diese Aufgabe noch eine andre Auflösung geben, die allerdings bey manchen

chen Vorfällen sehr nützlich ist, ob sie sich schon nicht bequem durch Logarithmen berechnen läßt, sondern man die natürlichen trigonometrischen Linien bequemer gebrauchet.

Es sey also gegeben Fig. 24. 25. die Seite A, die Seite C und der Winkel M, man suchet den Winkel T. Fig. 24. Fig. 25.

Wir werden bey dieser Auflösung die dritte Seite B einige Zeit gebrauchen, ohngeachtet sie uns nicht bekannt ist, wir werden sie aber nachher wieder wegzuschaffen suchen. Wir nehmen den Radius = 1 an.

Wir fanden §. 139. wenn wir hier gehörig substituiren,

1) $\cos. T = \frac{\cos. A - \cos. C . \cos. B}{\sin. B . \sin. C}$

2) $\cos. M = \frac{\cos. B - \cos. C . \cos. A}{\sin. C . \sin. A}$

ferner da wir nach §. 124. schließen können:

sin: T: sin. A = sin. M: sin. B. also

3) $\sin. B = \frac{\sin. M . \sin. A.}{\sin. T.}$

Wir müssen nun sin. B und cos. B wegschaffen, und etwas anders dafür substituiren, wozu uns diese Gleichungen Gelegenheit geben. Also erstlich nach 1)

$$\cos. T = \frac{\cos. A - \cos. C . \cos. B}{\text{fin. } B . \text{fin. } C}$$

$$\cos. T . \text{fin. } B . \text{fin. } C = \cos. A - \cos. C . \cos. B$$

$$\cos. T . \text{fin. } B . \text{fin. } C - \cos. A = - \cos. C . \cos. B$$

$$\cos. C . \cos. B = - \cos. T . \text{fin. } B . \text{fin. } C + \cos. A \quad \text{oder}$$

$$\cos. B = \frac{\cos. A - \cos. T . \text{fin. } B . \text{fin. } C}{\cos. C}$$

ferner nach 2)

$$\cos. M = \cos. B - \frac{\cos. C . \cos. A}{\text{fin. } C . \text{fin. } A}$$

$$\cos. M . \text{fin. } C . \text{fin. } A + \cos. C . \cos. A = \cos. B$$

Wir haben hier nun zwey Ausdrücke für cos. B, die einander gleich sind, und wodurch wir dasselbe aus den Gleichungen wegschaffen können; nemlich

cos.

$$\frac{\text{cos. A} - \text{cos. T . sin. B . sin. C}}{\text{cos. C}} = \text{cos. M , sin. C , sin. A} + \text{cos. C , cos. A ,}$$

$$\text{cos. A} - \text{cos. T . sin. B . sin. C} = \text{cos. C , cos. M . sin. C , sin. A} + \text{cos C}^2 \text{ cos. A}$$

oder bequemer $\text{cos. A} - \text{cos. T . sin. B . sin. C} = \text{cos. C}^2 \text{ cos. A} + \text{cos. C , cos. M . sin. C . sin. A}$

Es ist aber (nach §. 473. Trigon. 2ter Theil) $\text{cos. C}^2 = 1 - \text{sin. C}^2$ also

$\text{cos. C}^2 \text{ , cos. A} = \text{cos. A} - \text{sin. C}^2 \text{ , cos. A.}$ Das substituiret

$$\text{cos. A} - \text{cos. T . sin. B . sin. C} = \text{cos. A} - \text{sin C}^2 \text{ . cos. A} + \text{cos. C cos. M . sin C . sin. A}$$

oder $- \text{cos. T . sin B . sin. C} = - \text{sin. C}^2 \text{ . cos A} + \text{cos C . cos. M . sin C . sin. A}$

: sin. C

$$- \text{cos. T . sin. B} = - \text{sin. C . cos A} + \text{cos. C . cos. M . sin. A}$$

geordnet $\text{sin. C . cos. A} - \text{cos. T . sin B} = \text{cos. C . cos. M . sin. A}$

Nun ist aus der Gleichung 3) $\sin. B = \frac{\sin. M . \sin. A}{\sin. T}$

und das substituiret

$$\sin. C . \cos. A - \frac{\cos. T . \sin. M . \sin. A}{\sin. T} = \cos. C . \cos. M . \sin. A$$

aber $\frac{\cos. T}{\sin. T} =$ cotang. T. (473. Trigon.) das substituiret

$$\sin. C . \cos. A - \cot. T . \sin. M . \sin. A = \cos. C . \cos. M . \sin. A$$

oder

$$\frac{\text{sin. C. cos A} - \text{cos. C. cos M. sin. A}}{\text{sin. C. cos. A} - \text{cos. C. cos. M. sin. A.}} = \text{cot. T. sin. M. sin. A}$$

$$\text{sin. M. sin. A}$$

aber es ist cot. $T = \frac{1}{\text{tang. T}}$ §. 473. Trigon.

$$\frac{\text{sin. C. cos. A} - \text{cos. C. cos. M. sin}}{\text{sin. M. sin. A.}} = \frac{1}{\text{tang. T.}}$$

$$\frac{\text{sin. C. cos. A} - \text{cos. C. cos. M. sin. A}}{\text{sin. M. sin. A}} = \text{tang. T oder auch}$$

$$\frac{\text{sin. C. cos. A} - \text{cos. C. cos. M. sin. A}}{\text{sin. M. sin. pb}}$$

$$\text{sin. bd. cos. pb} - \text{cos bd. cos M. sin. pb} = \text{tang. T}$$

und dadurch war auch diese Gleichung aufgelöset.

§. 148. Hievon nun einige Exempel.

Es sey Seite A = 30° 29′, die Seite C = 66° 45′, der Winkel M = 43° 20′, man suchet den Winkel T.

Es

Es ist nach §. 146. tang. ab = $\frac{\text{tang. A . cos. M}}{\text{rad.}}$,

hier = $\frac{\text{tang. } 39° 29' \text{ . cos. } 43° 20'}{\text{sin. tot.}}$

logarithmisch.

log. tang. 39° 29′ = 9,9158471
log. cos. 43° 20′ = 9,8617576
19,7776047
log sin. tot. = 10,0000000
log. tang. ab = 9,7776047

Dieser Logarithme gehöret fast zu 30° 56′. Da A kleiner als 90°, folglich M und ab gleichartig; so ist, da M spitz ist, auch ab spitz, also würklich 30° 56′.

Nun ist ferner ad = bd — ba, hier = 66° 45′ — 30° 56′ = 35° 49′, da ba kleiner als bd, fällt das Perpendikel innerhalb des Triangels.

Nun ist tang. T = $\frac{\text{tang. M . sin. ba}}{\text{sin. ad}}$ hier

= $\frac{\text{tang. } 43° 20' \text{ sin. } 30° 56'}{\text{sin. } 35° 49'}$

logarithmisch.

log. tang. 43° 20′ = 9,9747195
log. sin. 30° 56′ = 9,7109972
19,6857167
log. sin. 35° 49′ = 9,7672996
log. tang. T = 9,9184171

Dieser Logarithme gehöret fast zu 39° 39′. Da das Perpendikel innerhalb des Triangels fällt, so ist

ist M und T gleichartig, also hier T würklich = 39° 39′.

§. 149. Ein anderes Exempel, wo das Perpendikel außerhalb des Triangels fällt. Es sey Fig 25 M = 30°; A = 70°; C = 60°. Man suchet den Winkel T. Es ist hier also Fig. 25.

tang. ab = $\frac{\text{tang. } 70° \text{ cos. } 30°}{\text{sin. tot.}}$ Logarithmisch.

log tang. 70° = 10 4389341
log. cos. 30° = 9,9375306
20,3764647
log. sin. totus = 10,0000000
log. tang. ab = 10,3764647

Dieser Logarithme gehöret fast zum tangens 67° 12′. Da A kleiner als 90°, so ist M und ab gleichartig, also ab dieses würklich.

Nun ist ad = bd − ab hier = 60° − 67° 12′ = = − 7° 12′. Es wird also ad negativ, und das Perpendikel fällt außerhalb des Triangels.

Nun ist ferner tang. T = $\frac{\text{hier tang. } 30° \text{ sin. } 67° 12′}{\text{sin. } 7° 12′}$

und logarithmisch

log. tang. 30° = 9,7614394
log. sin. 67° 12′ = 9,9646665
19,7261059
log. sin. 7° 12′ = 9,0980662
10,6280397

Dieser Logarithme gehöret fast zum tang. 76° 45′. Weil das Perpendikel außerhalb des Triangels fällt,

so

so ist M und T ungleichartig, folglich der gefundne Winkel x = dem Nebenwinkel von T, und T sein Complement zu 180° = 180° — 76° 45′ = 103° 15′ = Winkel T.

§. 150. Um ein Beyspiel zu geben, wollen wir eben dieses Exempel nach der Formel §. 147 rechnen. Hier müssen wir aber die natürlichen trigonometrischen Linien gebrauchen, und nehmen, wie auch in der Formel geschiehet, den radius = 1 an. Die Formel war

$$\text{tang. } T = \frac{\text{sin. M. sin. A}}{\text{sin. C. cos. A} - \text{cos. C. cos. M. sin. A}}$$

Es sey, wie im vorhergehenden §

M = 30°; A = 70°; C = 60°; so ist hier

$$\text{tang. } T = \frac{\text{sin. } 30^\circ . \text{ sin. } 70^\circ}{\text{sin. } 60^\circ . \text{cos. } 70^\circ - \text{cos. } 60^\circ . \text{cos. } 30^\circ . \text{sin. } 70^\circ}$$

Nun ist

sin. 30°. sin. 70° = 0 50000 . 0, 93969 = = 0, 4698450000

ferner sin. 60. cos. 70 = 0 86602. 0, 34202 = = 0 296196 1604

ferner cos. 60. cos. 30. sin. 70 = 0 50000. 0, 86602. 0 93969 = 0 4068951669 und

sin. 60°. cos 70° — cos. 60°. cos. 30°. sin 70° = = 0, 296 961604 — 0, 4068951669 = — 0, 1106990065 und

$$\frac{\text{sin. } 30^\circ . \text{ sin. } 70^\circ}{\text{sin. } 60^\circ . \text{cos. } 70^\circ - \text{cos. } 60^\circ . \text{cos. } 30^\circ . \text{sin. } 70^\circ} = \frac{0,4698450000}{-0,1106990065} = -4,24435.$$ Da dieses

eine

eine negative Größe geworden ist, so fällt das Perpendikel außerhalb des Triangels. Dieser natürliche tang. T. = — 4,24435 gehöret fast zu 76° 45′. Weil aber die Größe negativ ist und die Tangenten über 90° negativ werden, so ist dieses eine Anzeige, daß der Winkel T über 90° sey, man muß also das Complement zu 180° von 76° 45′ nehmen, und es wird also Winkel T = 103° 15′, wie wir auch durch die Rechnung des vorhergehenden § fanden.

§. 151. II. a) §. 143. **Es seyn gegeben zwo Seiten nebst einem Winkel, der einer Seite opponiret ist, man suchet den Winkel, welcher der andern Seite opponirt ist**, oder es sey gegeben A und B, nebst dem Winkel M, man suchet den Winkel T. 24. Fig 25.

Auflösung. Es ist diese Auflösung sehr leicht, und gründet sich blos auf das erste Gesetz, wornach die schiefwinklichten sphärischen Triangel behandelt werden. Man schließe nach §. 124.

sin. B : sin. M = sin. A : sin. T.

und sin. T = $\frac{\text{sin. M. sin. A}}{\text{sin. B}}$ Wäre B und C nebst dem Winkel M gegeben, und man suchte N, so wäre sin. N = $\frac{\text{sin. C. sin M}}{\text{sin. B}}$

Und wäre A und C, nebst dem Winkel T gegeben; und man suchte daraus N; so wäre sin. N = $\frac{\text{sin. C. sin. T}}{\text{sin. A}}$

Und

Und wäre B, C und N gegeben, so wäre sin M = $\frac{\text{sin. B . sin. N}}{\text{sin. C.}}$ Mit Worten allgemeiner ausgedrücket, lautet die Proportion, welche zu dieser Auflösung gehöret, also:

der sinus der gegebnen Seite, welche dem gegebnen Winkel opponirt ist zum sinus dieses gegebnen Winkels wie der sinus der andern gegebnen Seite zum sinus des gesuchten Winkels.

Man gebrauchet, wie man siehet, hiebey kein Perpendikel fallen zu lassen, oder den schiefwinklichten Triangel in zwey rechtwinklichte zu zertheilen. Aber durch die Formel allein, weis einer auch doch noch nicht, ob der gesuchte Winkel stumpf oder spitz sey; die gegebnen Stücke bestimmen ihn nicht, sondern er bleibet **zweydeutig**, wie schon aus §. 18 erhellet. Man muß alsdenn aus andern bekannten Umständen urtheilen, ob der gesuchte Winkel stumpf oder spitz sey. Wenn zum Exempel A, B und M gegeben wären, und man suchte T, aber es wäre B größer als A, und M kleiner als ein Rectus, so wäre T offenbar spitz nach §. 29. Aber wäre M größer als 90°, so könnte man schon die Folgerung nicht machen, und solcher Umstände giebt es mehrere, wie denn hier die Tafel § 110 dieses berichtiget, dadurch man erfähret, ob der gesuchte Winkel stumpf oder spitzig sey, oder zweydeutig bleibe, wenn letzteres nicht noch durch andre Umstände bestimmet würde.

§. 152.

§. 152. Exempel hievon: Es sey gegeben, die Seite $A = 60° 40'$, die Seite $B = 86° 15'$, der Winkel $M = 72° 19'$, man suchet den Winkel T. fig. 24.

$$\sin. T = \frac{\sin. A . \sin. M}{\sin. B}$$

logarithmisch

log. sin. A = log. sin. $60° 40'$ = 9,9404091
log. sin. M = log. sin. $72° 19'$ = 9,9789789
19,9193880
log. sin. B = log sin. $86° 15'$ = 9,9990691
log. sin. T = 9,9203189

Dieser Logarithme gehöret fast zum sinus $56° 21'$, und ist T auch wirklich dieser Winkel und nicht stumpf, oder das Complement, denn B ist größer als A, und dabey M unter 90°, auch findet man nach der Tafel §. 110, daß T spitz sey.

Noch ein Exempel.

Es sey $A = 110° 5'$; $B = 95° 15'$; $M = 75° 4'$; man suchet T.

log. sin. $110° 5'$ = log. sin. $90° 55'$ = 9,9727554
log. sin. $75° 4'$ = 9,9850789
19,9578343
log. sin. $95° 15'$ = log. $84° 45'$ = 9,9981743
log. sin. T = 9,9596600

Dieser Logarithme gehöret fast zum sinus $65° 42'$ nach §. 110. Weil W hier = M spitzig ist, l hier = A stumpf und L hier = B größer als $2R - l$, größer als $2R - A$, so ist hier T stumpf. also das Complement zu 2 Rectis = $180° - 65° 42'$ = $114° 18'$ = T.

Noch ein Exempel, wo der gesuchte Winkel zweydeutig bleibet.

Es sey A = 115° 16′; M = 142° 10′; B = 120°, man suchet T.

log. sin. 115°16′ = log. sin. 64° 44′ = 9,9563274
log. sin. 142° 10′ = log. sin. 37° 50′ = 9,7877202

19,7440476

log. sin. 120° = log. sin. 60° = 9,9375306

also log. sin. T = 9,8065170

Dieser Logarithme gehöret fast zu 39° 50′, und wie bekannt ist, auch zu seinem Complement von 140° 10′. Es bleibt zweydeutig, welches der Winkel sey, wenn es nicht noch durch andre Umstände bestimmet wird. Denn nach §. 110 ist W hier = M stumpf, L hier = A stumpf. L hier = B größer als L oder größer als A. Also W hier = T zweydeutig.

§. 153. IV. b) §. 143. **Es ist gegeben eine Seite, ein anliegender und ein dieser Seite opponirter Winkel, man suchet die entgegengesetzte Seite des einen gegebenen anliegenden Winkels**, oder Fig. 24. 25. Es sind gegeben die Seite B, und die Winkel N und M, man suchet die Seite C.

Fig. 24. Fig. 25.

Auflösung. Diese Auflösung folget sogleich und ohne daß man ein Perpendikel zu fällen nöthig hat, aus dem ersten Gesetze für schiefwinklichte Triangel nach §. 124.

sin. M : sin. B = sin. N : sin. C, also

$$\text{sin. C} = \frac{\text{sin. N. sin. B}}{\text{sin. M.}}$$

Aus

Aus dieser Formel für C aber kann man noch nicht folgern, ob diese gefundne Seite stumpf oder spitz sey. Ueberhaupt wird dieses durch die gegebnen Stücke nicht bestimmet. §. 20. Die Tafel des §. 123 zeiget es an, was die gesuchte Seite sey, stumpf oder spitz, oder ob sie zweydeutig bleibe.

Es würde $\frac{\text{sin. A} = \text{sin B. sin. T}}{\text{sin M}}$

wenn B, T und M gegeben wäre;

und eben so wäre $\frac{\text{sin. B} = \text{sin C. sin. M}}{\text{sin. N.}}$

wenn C, M und N gegeben wäre.

Allgemein ausgedrücket und ins Deutsche übersetzt, lautet die Proportion, wodurch aus einer Seite und zween Winkeln, nemlich einem anliegenden und einem ihr opponirten, die Seite, welche dem anliegenden Winkel opponiret ist, gefunden wird, also:

der sinus des Winkels, welcher der gegebnen Seite opponirt ist
zum sinus der gegebnen Seite
wie der sinus des anliegenden gegebnen Winkels an der gegebnen Seite
zum sinus der gesuchten Seite.

§. 154. Exempel zu dem vorhergehenden Problem Fig. 24.

Es sey M = 63° 20′; N = 82° 34′; B = 60° 45′ man suchet C

$\text{sin. C} = \frac{\text{sin. N. sin. B hier} = \text{sin. 82° 34′ sin. 60° 45′.}}{\text{sin. M}} \qquad \frac{}{\text{sin. 63° 20′}}$

logarithmisch.

log. sin. 82° 43′ = 9,9964816
log. sin. 60° 45′ = 9,9407634

19,9372450

log. sin. 63° 20′ = 9,9511590

log. sin. C = 9,9860860

Dieser Logarithme gehöret fast zu 75° 35′ nach der Tafel §. 122. Da dort W hier = N spitzig, ferner l hier = B auch spitzig, und dort w hier M kleiner als W, oder hier M kleiner als N, bleibt die Seite **zweydeutig**, und es läßt sich aus den gegebnen Dingen ein Triangel construiren, da C = 75° 35′, oder auch 104° 25′ ist; andere Umstände müssen es anzeigen, welches von beyden es sey.

Noch ein Exempel. Es sey = 122° 15′; B = 142° 4′; M = 75° 4′, es wird gesuchet C. Gleich logarithmisch nach der Formel.

log.

log. sin. N hier log. sin. 122° 15′ = log. sin. 67° 45′ = 9, 9663954
log. sin. B hier log. sin. 142° 4′ = log. sin. 47° 56′ = 9 8706179
19, 8370133
log. sin. M hier log. sin. 75° 4′ = 9, 9850789
log. sin. C = 9, 8519344

Dieser Logarithme gehöret fast zum sinus 75° 8′. Weil aber N stumpf, B stumpf und M kleiner als N ist; so ist die Seite stumpf, also das Complement zu 75° 8′, folglich die würkliche Größe der Seite C = 104° 52′.

Fig. 24. Fig. 25. §. 155. III. b) § 143. **Es sind eine Seite und die beyden an ihr liegenden Winkel gegeben, man sucher den dritten Winkel.** Denn es ist gegeben Seite A, Winkel M, und Winkel N, man suchet Winkel T: Man lasse von N den Bogen pa fallen, der auf bd oder C senkrecht stehet, oder das Perpendikel pa; so bekömmt man an der Spitze N, anstatt N, zween Winkel adb und apd.

Es ist aber der Winkel apd = dpb — apb. Was nun den Winkel apb betrift, da man nicht weis, wie groß er nun ist, da das Perpendikel daraus herabgelassen ist, so gilt in dem rechtwinklichten Triangel apb folgende Proportion nach §. 55. 56 in 4.

cot M : r = cos. A : cot. apb.

und cot. apb = $\frac{\text{cos. A . r}}{\text{cot. M}}$

Da mir nun der Winkel apb bekannt ist, und apd = dpb — apb = N — apb, so kenne ich nun auch den Winkel apd.

Ich schließe nun ferner nach (§. 127) dem 4ten Gesetze

sin. apb : sin apd = cos. M : cos. T

Es ist also cos T = $\frac{\text{cos. M . sin. apd}}{\text{sin. apb}}$

und Winkel T also bekannt, welchen ich suchte. Es ist aber ferner T stumpf oder spitz, nachdem das Perpendikel innerhalb oder außerhalb des Triangels fällt. Ob es nun innerhalb oder außerhalb des Triangels fällt, kann ich daran wissen: Wenn der Winkel apd > als der gegebne Winkel N oder dpb, alsdenn

fällt

fällt das Perpendikel natürlich **außerhalb** des Dreyecks, und denn sind M und T **ungleichartig**. So wie, wenn apd kleiner als N oder dpb, das Perpendikel innerhalb des Dreyecks fällt, und M und T **gleichartig** sind. §. 98.

Allgemein im Deutschen ausgedrücket, heißen diese Proportionen, wodurch dieses Problem aufgelöst wird:

Der cotangens **des gegebnen Winkels gegenüber dem herabgelassenen Perpendikel**

zum sinus totus
wie der cosinus **der gegebnen Seite**
zum cotangens **des ersten Winkels, den an der Spitze das Perpendikel macht.**

Ferner:

der sinus **des ersten Winkels, den an der Spitze das Perpendikel macht**
zum sinus **des andern Winkels, den an der Spitze das Perpendikel macht**
wie der cosinus **des an der Basi gegebnen Winkels**
zum cosinus **des gesuchten Winkels**

welches alles nach den vorherigen Bemerkungen berichtiget wird.

§. 156 Wir führen noch eine Auflösung dieses Problems an, nur daß sie sich nicht so bequem mit Logarithmen berechnen läßt.

Es seyn die Winkel M und N, und die dazwischen liegende Seite A gegeben, man suchet den Winkel T. Es ist hier radius = 1.

Aus §. 141 ist, wenn man gehörig substituiret,

$$\text{cos. pb oder cos. A} = \frac{\text{cos. T} + \text{cos. N . cos. M}}{\text{sin. N, sin. M}}$$

$$\text{cos. A} = \frac{\text{sin. N . sin. M} = \text{cos. T} + \text{cos. N . cos. M}}{\text{cos. A, sin. N, sin. M} - \text{cos. N, cos. M} = \text{cos. T}}$$

§. 157. Von dieser Aufgabe nun Exempel. Nach §. 155.

Es sey pb oder A = 66° 45′; M = 43° 20′; N = 79° 9′, es wird T gesuchet.

§. 155. cotang. abp = $\frac{\text{cos. A . r hier}}{\text{cot. M}}$ =

$$\frac{\text{cos. } 66° 45′ \text{ . sin. tot.}}{\text{cot. } 43° 20′}$$

loga-

logarithmisch.

cosin. 66° 45′ = 9,5963154
log. sin. tot. = 10,0000000

19 5963154
log. cotang 43° 20′ = 10,0252805

also log. cot. apb = 9,5710349

Dieser Logarithme gehöret zum cot. 20° 26′, da es cotangens ist, so ist der würkliche Winkel = 69° 34′.

Nun ist apd = dpb — apb = N — apb, hier = 79° 9′ — 69° 34′ = 9° 35′. Da nun apb kleiner als N, so fällt also das Perpendikel innerhalb des Triangels, und M und T werden also gleichartig seyn. Es ist aber

cos. T = cos. M sin apd hier = cos. 43° 20′. sin. 9° 35′
sin. apb sin. 69° 34′

logarithmisch.

log. cos. 43° 20′ = 9 8617576
log. sin. 9° 35′ = 9 2213671

19,0831247
log. sin. 69° 34′ = 9 9717762

log cos. T = 9 1113485

Dieser Logarithme gehöret fast zu 7° 26′. Da er Logarithme des cosinus ist, so ist der Winkel T das Complement zu 90°, also = 82° 34′, und da hier M und T gleichartig sind, würklich so groß.

Noch ein Exempel. Es sey A = 75° 40′; M = 40° 24′; N = 30° 15′, man suchet den Winkel T.

Es ist cotang. apb = cos 75° 40′. sin. totus
cotang. 40° 24′

logarithmisch

log. cos. 75° 40′ = 9,3936852
log. sin. tot. = 10,0000000
19,3936852
log. cot. 40° 24′ = 10,0700364
also log. cot. apb = 9,3236488

Dieser Logarithme gehöret fast zu 11° 54′. Da er Logarithme des cotangens ist, so ist also der Winkel apb = 78° 6′.

Nun ist apd = dpb − apb, hier = 30° 15′ − 78° 6′ = − 47° 51′. Es ist also apd > als dpb oder N. Das Perpendikel fällt also ausserhalb des Triangels, und M und T sind **ungleichartig**. Es ist nun $\cos. T = \frac{\cos. 40° 24′ . \sin. 47° 51′}{\sin. 78° 6′}$

logarithmisch.

log. cos. 40° 24′ = 9,8816918
log. sin. 47° 51′ = 9,8700470
19,7517388
log. sin. 78° 6′ = 9,9905648
log. cos. T = 9,7611740

Dieser Logarithme gehöret fast zu 35° 15′. Weil er aber Logarithme des cosinus ist, so ist der würkliche Winkel 54° 45′. Da ferner M und T hier **ungleichartig** sind, also, da M spitz ist, T stumpf seyn muß, so muß man hier den Nebenwinkel des gefundenen T nehmen, und T würklich = 180° − 54° 45′ = 125° 15′.

§. 158.

§. 158. III. a) §. 143. **Es sind eine Seite und die beyden an ihr liegenden Winkel gegeben, man suchet eine von den andern beyden Seiten.** Fig. 24. Fig. 25. Oder es sey gegeben, die Seite A, der Winkel M, und der Winkel N, man suchet die Seite B.

Auflösung. Es werde pa aus N auf die Seite, welche man nicht suchet, auf die Seite C oder bd senkrecht geleget, so erhält man durch dieses Perpendikel zwey rechtwinklichte Triangel, apb und apd.

Es ist nun in dem rechtwinklichten Triangel apb bekannt, der rechte Winkel, die Hypotenuse A und der Winkel M, man kann also nach §. 55. 56. in 4. schließen

$$\text{cot. } M : r = \text{cos. } A : \text{cot. apb}$$

$$\text{und cotang. apb} = \frac{r \cdot \text{cos. } A}{\text{cot } M.}$$

Es ist nun ferner apd = bpd − bpa, also kennet man denn auch apd.

Man kann nun nach dem 5ten Gesetze §. 128. schließen;

$$\text{cos. apd} : \text{cos apb} = \text{tang. } A : \text{tang } B$$

$$\text{also tang. } B = \frac{\text{tang. } A \cdot \text{cos. apb}}{\text{cos. apd}}$$

Ob nun B stumpf oder spitz sey, kömmt auf das Perpendikel pa, und das Stück der Basis ad an, pa oder das Perpendikel ist mit M gleichartig, wenn es innerhalb des Triangels fällt und ad ist mit dem Winkel apd gleichartig §. 70. Man weis also, was pa und ad sind, beyde stumpf, oder bey-

de spitz, oder eins stumpf und eins spitz. Ist nun pa und da **gleichartig**, das ist beyde stumpf oder beyde spitz, so ist B oder pd kleiner als 90°. Sind pa und da **ungleichartig**, so ist B größer als 90° §. 82.

Allgemein ausgedrücket mit Worten, lauten die zu diesem Problem gehörigen Proportionen also:

der cotangens des einen gegebnen Winkels an der Grundseite
zum sinus totus
wie der cosinus der gegebnen Seite
zum cotangens des ersten Winkels, der an der Spitze durchs Perpendikel entstehet.

ferner:

der cosinus des zweyten Winkels, der an der Spitze durchs Perpendikel gemacht wird
zum cosinus des ersten Winkels an der Spitze, der durchs Perpendikel gemacht wird
wie der tangens der gegebnen Seite
zum tangens der gesuchten Seite.

Die Berichtigungen hievon sind angezeiget.

§. 159. Wir geben eine Auflösung dieses Problems, die sehr brauchbar ist, ob sie sich schon nicht bequem durch Logarithmen rechnen läßt. Es sey wiederum gegeben, die Seite A, der Winkel M, und der Winkel N, man suchet die Seite B. Wir werden bey dieser Auflösung noch zwey unbekannte Größen, sin T und cos. T mit in die Rechnung bringen, die wir vors erste nöthig haben, aber nach-

nachher wieder wegschaffen werden. Es ist hier r = 1. Es ist nun, wenn man gehörig substituiret, nach § 141.

1) $\cos. B = \frac{\cos. M + \cos. N. \cos. T}{\sin. N. \sin. T}$

2) $\cos. A = \frac{\cos. T + \cos. N. \cos. M}{\sin. N. \sin. M}$

3) $\sin. T = \frac{\sin. A. \sin. M}{\sin. B}$ nach §. 124.

Von diesen Gleichungen muß sin. T und cos T nachgerade weggeschaffet werden, weil sie uns unbekannt sind.

Da 1) $\cos. B = \frac{\cos. M + \cos. N. \cos. T}{\sin. N. \sin. T}$

$\cos. B. \sin. N. \sin. T = \cos M + \cos. N. \cos. T$

$\cos. B. \sin. N. \sin. T - \cos. M = \cos. T.$

$\cos. N$

Da 2) $\cos. A = \frac{\cos T + \cos. N. \cos. M}{\sin. N. \sin. M}$

$\cos. A. \sin. N. \sin. M = \cos. T + \cos N. \cos. M$

$\cos. A. \sin. N. \sin. M - \cos N. \cos. M = \cos T$

Wir haben nun zwey gleiche Werthe für cos. T und dadurch wird cos. T weggeschaffet. Also:

cos.

Nun

$$\frac{\text{cos. B . sin N . sin T} - \text{cos. M}}{\text{cos N}} = \text{cos. A . sin. N . sin. M} - \text{cos. N . cos. M}$$

$$\text{cos. N} \cdot \frac{\text{cos. B . sin. N . sin. T} - \text{cos. M}}{\text{cos N}} = \text{cos. B . sin. N. sin T} - \text{cos. M} = \text{cos A . sin. N , sin. M. cos. N} - \text{cos. N}^2\text{. cos. M}$$

oder $\text{cos. B . sin. N. sin T} = \text{cos. A . sin. N . sin. M . cos. N} - \text{cos. N}^2\text{ . cos. M} + \text{cos. M}$

oder anders ausgedruckt $\text{cos B . sin. N. sin T} = \text{cos A . sin. N . sin. M . cos. N} + (1 - \text{cos. N}^2)\text{cos. M}$

aber $1 - \text{cos. N}^2 = \text{sin. N}^2$ §. 473. Trigon. im 2ten Theile

also

$$\text{cos. B . sin. N , sin. T} = \text{cos. A . sin. N , sin. M . cos. N} + \text{sin. N}^2\text{ . cos. M} : \text{sin. N}$$

$$\text{cos. B . sin. T} = \text{cos. A . sin. M , cos. N} + \text{sin N . cos. M.}$$

Nun war aus 3) $\text{sin. } T = \frac{\text{sin. A . sin. M}}{\text{sin B}}$

das statt sin. T wodurch sin. T weggeschaffet wird,

$\frac{\text{cos. B . sin. A . sin M}}{\text{sin B}} = \text{cos A . sin. M, cos. N} + \text{sin. M . cos. M}$

aber $\frac{\text{cos. B}}{\text{sin B}} = \text{cotang. B.}$ Es folget dieses leicht aus den Gleichungen für den tangens und cotangens §. 473. Trigon.

$\text{cotang. B . sin. A . sin M} = \text{cos. A . sin. M . cos. N} + \text{sin. N . cos. M}$ folglich

$\text{cotang. B} = \frac{\text{cos. A . sin. M . cos N} + \text{sin. N . cos. M}}{\text{sin. A . sin. M}}$

und weil $\text{cotang. B} = \frac{1}{\text{tang. B}}$ §. 473. Trigon. im 2ten Theile

So ist $\text{tang. B} = \frac{\text{sin. A . sin. M}}{\text{cos. A . sin. M . cos. N} + \text{sin. N . cos. M}}$

Durch diese Formel, darin nichts als die gegebnen Größen sind, ist also diese Aufgabe gleichfalls aufgelöset.

Fig 24. §. 160. Nun hievon Exempel §. 158. Es sey die Seite A 60° 45′, der Winkel M = 43° 20′, der Winkel N = 79° 10′, man suchet T.

Es ist cotang. apb = $\frac{\text{r} \cdot \text{cos. A}}{\text{cotang. M}}$ hier =

$\frac{\text{sin. tot. cos. 60° 45′}}{\text{cotang. 43° 20′}}$

logarithmisch

log sin totus	=	10 0000000
log. cos. 60° 45′	=	9, 6889723
		19 6889723
log. cot. 43° 20′	=	10, 0252805
tog. cotang. apb	=	9, 6636918

Dieser Logarithme gehöret fast zu 24° 45′. Da er Logarithme des cotangens ist, so ist der würkliche Winkel = 65° 15′.

Es ist nun apd = bpd, — apb hier = 79°, 10′ = 65° 15′ = 13° 55′. Da nun apb < bpd, so fällt das Perpendikel innerhalb des Triangels; also M und T sind gleichartig §. 98.

Es ist ferner tang. B = $\frac{\text{tang. A} \cdot \text{cos. apb}}{\text{cos. apd}}$

hier = $\frac{\text{tang. 60° 45′} \cdot \text{cos. 65° 15′}}{\text{cos. 13° 55′}}$

log.

logarithmisch

log. tang. 60° 45′ = 10,2517911
log. cos. 65° 15′ = 9,6218612

19,8736523
log. cos. 13° 55′ = 9,9870611

log. tang. B = 9,8865912

Dieser Logarithme gehöret zum nächsten zu 37° 36′. Weil pa und ad gleichartig sind §. 70, so ist B kleiner als 90°, also würklich 37° 36′.

Noch ein Exempel. Es sey die Seite A = 96° 40′, der Winkel M = 115° 20′, der Winkel N = 104° 12′. Man suchet die Seite B.

cotang. apb ist hier = $\frac{\text{sin. totus. cos. } 96° 40′}{\text{cotang. } 115° 20′}$

log. sin. tot. = 10,0000000
log. cos. 96° 40′ = log. cot. 83° 20′ = 9,0648057

= 19,0648057
log. cot 115° 20′ = log. cot. 64° 40′ = 9,6752372

log. cotang. apb = 9,3895685

Dieser Logarithme gehöret zum nächsten zum tang. 13° 47′. Da er cotangens ist, so ist der würkliche Winkel = 76° 13′.

Nun ist apd = 104° 12′ = 76° 13′ = 27° 59′, da apd < N, so fällt das Perpendikel innerhalb des Triangels, und da nun M und T gleichartig, und beyde stumpf sind, so ist auch pa oder das Perpendikel stumpf. Ferner, da da mit apd gleichartig ist, und apd spitzig, also auch da, folglich da und pa ungleichartig, so wird B > 90° seyn. §. 82.

Es ist aber tang. B hier = $\frac{\text{tang. } 96° 40' \text{ cot. } 76° 13'}{\text{cot } 27° 59'}$

log. tang. 96° 40′ = log. tang. 83° 20′ = 10 9322478
log. cot. 76° 13′ = 9. 3770347
20, 3092825
log. cot. 27° 59′ = 9. 9460021
log. tang. B = 10, 3632804

Dieser Logarithme gehöret fast zum tang. 66° 35′. Weil aber B stumpf ist, so ist es würklich 180° — 66° 35′ = 113° 25′ = der Seite B.

Fig. 24. Fig. 25. §. 161. II. c. §. 143. Es sind zwey Seiten gegeben, und der der einen Seite opponirte Winkel, man suchet die dritte Seite.

Seite. Oder es sey der Winkel M, die Seite C und die Seite B gegeben, man suchet die Seite A.

Auflösung. Man fälle auf die zu suchende Seite A aus dem entgegengesetzten Winkel das Perpendikel TD Fig. 24, so hat man das recht- Fig. winklichte Dreyeck dDB, und es gilt nach §. 55. 56 24. in 4 folgende Proportion.

r : cos. M = tang. C : tang. bD

also $\text{tang. bD} = \frac{\text{tang. C . cos. M}}{\text{rad.}}$

Es gilt ferner nach dem dritten Gesetze §. 126.

cos C : cos. B = cos. bD : cos. Dp.

also $\text{cos. Dp} = \frac{\text{cos. bD . cos. B}}{\text{cos. C}}$

Es wird nun die gesuchte Seite A in einem Falle so wohl bD + Dp als auch bD — Dp seyn können, und also zweifelhaft bleiben. Es ist hier der Fall, wie §. 18, der gegebene Winkel wird nicht von den gegebnen Seiten eingeschlossen, sondern stehet einer Seite gegen über, also wird das Dreyeck dadurch nicht bestimmet.

Indessen kann man sich helfen. Es kömmt darauf an, ob B kleiner oder größer als C ist; ist B kleiner als C, so ist auch Dp kleiner als bD, denn nur alsdenn wäre Dp und bD gleich groß, wenn das Perpendikel in die Mitte der Seite A fiele, das geschähe aber, wenn die Seiten B und C gleich groß, und also der Triangel gleichschenklicht wäre, ist also die Seite B kleiner als die Seite C, so muß P näher an D liegen, wenn alles übrige in seiner Lage bleibet, und die Lage des Perpendikels wird nicht

bestimmet. Wäre mir der Winkel bey N nur ohngefähr bekannt, ob er stumpf oder spitz sey, so könnte ich mich in Ansehung A aus der Tafel §. 122 helfen, da er das nicht ist, ob man schon aus dem gegebnen eine Formel für ihn finden kann, nach der Proportion §. 124. sin. B : sin. M = sin. C : sin. N und also $\sin. N = \frac{\sin. C. \sin. M}{\sin. B}$ so wird hiedurch doch noch nicht bestimmt, ob der Winkel N stumpf oder spitz sey, es bleibet also A zweydeutig und kann alsdenn

$A = bD \pm Dp$ seyn.

Ist aber $Dp > bd$, so wird die Seite A oder $bp = bD + Dp$.

Allgemein im Deutschen ausgedrücket, heißen die zu dieser Auflösung nöthigen Proportionen:

der sinus totus
zum cosinus des gegebenen Winkels
wie der tangens der anliegenden Seite
an diesem gegebenen Winkel.
zum tangens des ersten Abschnitts durchs
Perpendikel.

Ferner:
der cosinus der anliegenden Seite an dem
gegebnen Winkel
zum cosinus der gegebnen Seite, die dem
gegebnen Winkel opponirt ist
wie der cosinus des ersten Abschnittes
zum cosinus des zweyten Abschnittes.

Was

Was sonst hiebey zu bemerken ist, haben wir angezeiget.

§. 162. Die Auflösung dieses vorhergehenden Problems kann auch also, wie folget, eingerichtet werden, ob es schon keine bequeme logarithmische Rechnung giebet. Es sey gegeben, wie vorher, die Seite B, die Seite C und der Winkel M. Man suchet die Seite A. Man hat alsdenn die Bequemlichkeit, daß man den Winkel N auch als gegeben betrachten kann; denn sin B : sin. M = sin. C : sin. N und sin. $N = \frac{\text{sin. M . sin. C}}{\text{sin. B}}$ §. 124. Wir werden ihn jetzt mit in die Rechnung bringen, und nutzen. Es sey rad. = 1.

Also 1) sin. $N = \frac{\text{sin. M . sin. C.}}{\text{sin. B}}$ Es ist ferner aus §. 473. Trig. bekannt, daß sin. $N = \frac{\text{tang. N}}{\text{cos. N}}$ und wenn man gehörig substituiret, aus dem Ende des §. 147.

tang. $N = \frac{\text{sin. } M \text{. sin. } C}{\text{sin. } A \text{. cos. } C - \text{cos. } A \text{. cos. } M \text{. sin. } C}$ $= \frac{\text{sin. } N}{\text{cos. } N}$

und 2) tang. $M = \frac{\text{sin. } M}{\text{cos. } M} = \frac{\text{sin. } N \text{. sin. } B}{\text{sin. } A \text{. cos. } B - \text{cos. } N \text{. cos. } A \text{. sin. } B}$

also da 1) $\frac{\text{sin. } N}{\text{cos. } N} = \frac{\text{sin. } M \text{. sin. } C}{\text{sin. } A \text{. cos. } C - \text{cos. } A \text{. cos. } M \text{. sin. } C}$

folglich

1) sin. N. sin. A. cos. C − sin. N. cos. A. cos. M sin. C = cos. N. sin. M. sin. C

da 2) $\text{sin. } M = \frac{\text{sin. } N \text{. sin. } B}{\text{sin. } A \text{. cos. } B - \text{cos. } N \text{. cos. } A \text{. sin. } B}$

folglich

2) sin. M. sin. A. cos. B − sin. M. cos. N. cos. A. sin. B = cos. M sin. N. sin. B

Man

Man multiplicire die erste Gleichung mit cos M, also

1) sin N. sin A. cos C. cos M − sin N. cos A cos M². sin C = cos N. sin M. sin C. cos M.

und multiplicire die 2te Gleichung mit cos. N, also

2) sin M. sin A. cos B. cos N − sin M. cos N². cos A. sin B = cos M. sin N. sin B. cos N

Man subtrahire nun die 2te Gleichung von der ersten. Also

1) sin N. sin A. cos C. cos M − sin N. cos A. cos M². sin C = cos N. sin M. sin C cos M
2) sin M. sin A. cos B. cos N − sin M. cos A. cos N². sin B = cos M. sin N. sin B. cos N

also

sin. N. sin A. cos C. cos M − sin M. sin. A. cos B. cos N + sin M. cos A. cos N². sin B
− sin N. cos A. cos M². sin C = cos N. sin M. sin C. cos M − cos M. sin N. sin B. cos N

Aber der zweyte Theil dieser letztern Gleichung kann, weil er gemeinschaftliche Faktores hat, auch also ausgedrücket werden,

cos. N . sin. M . sin. C . cos M − cos. M . sin. N. sin. B . cos. N = (sin. M. sin. C − sin. N. sin. B) cos. M. cos. N.

weil aber nach §. 124.
sin. M : sin. N = sin B : sin. C folglich
sin. M. sin. C = sin N. sin. B und daher der letzte Theil der Gleichung (sin. M. sin. C − sin N. sin. B) cos. M. cos. N = Null wird, weil sich diese Größen einander aufheben, so ist also

sin. N. sin. A. cos. C. cos. M − sin M. sin A. cos B. cos N + sin M. cos. A. cos. N² sin. B − sin. N. cos. A. cos M². sin. C = 0.

folglich

sin N. sin A. cos. C. cos. M + sin. M. cos. A. cos. N². sin. B = sin. M. sin. A . cos. B . cos. N + sin. N. cos. A. cos. M². sin. C

oder

3) (sin M cos. N² sin B − sin C. cos. M². sin. N) cos A = (sin. M. cos B . cos N − sin N. cos. C. cos. M sin A.

weil cos. N² = (1 − sin. N²) und cos M² = (1 − sin. M²) §. 473 Trigon. im 2ten Theile. so ist der erste Theil dieser Gleichung 3) oder

(sin. M. cos. N² . sin. B − sin. C . cos. M². sin N = sin. M. sin B (1 − sin. N²) − sin. C. sin. N (1 − sin. M²)

und würklich multiplicirt, so wird hieraus

sin.

$$\text{sin. M . sin. B} - \text{sin. M . sin. B . sin. N}^2 - \text{sin. C} + \text{sin. N} + \text{sin. C . sin N . sin. M}^2$$

oder anders geordnet

$$\text{sin. M . sin. B} - \text{sin. C . sin. N} + \text{sin. C . sin. N} - \text{sin. M}^2 - \text{sin. M . sin B . sin N}^2$$

Die letzten beyden Glieder hievon aber lassen sich auf folgende Art ändern, weil sin. M und sin. N in beyden Faktores sind. + sin. M. sin. N (sin. M. sin. C − sin. B. sin. N)
aber (sin. M. sin. C − sin. B. sin. N) = 0. Weil §. 124

sin. M : sin N = sin. B : sin C und daher sin. M. sin. C = sin. B . sin. N.

Es ist also um Deutlichkeit halber nochmal zu wiederholen sin M . sin. N (sin. M . sin. C − sin. B. sin. N) = 0, also fällt diese Größe weg, und es bleibt nur noch für den ersten Theil der Gleichung in (3)

(sin. M. sin. B − sin. C. sin. N) cos. A.

Nun die Gleichung (3), die so verändert ist, hingesetzet

$$(\text{sin. M. sin. B} - \text{sin. C. sin. N})\,\text{cos. A} = (\text{sin. M. cos B. cos. N} - \text{sin. N. cos. C. cos. M})\,\text{sin. A}$$

—also

$$\text{sin. M sin B} - \text{sin. C. sin. N} = (\text{sin. M. cos. B. cos N} - \text{sin. N. cos. C. cos. M})\,\frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}}$$

$$\frac{\text{sin. M. sin. B} - \text{sin. C. sin. N}}{\text{sin. M. cos. B. cos. N} - \text{sin. N. cos C. cos. M}} = \frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}}$$

aber $\frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}} = \text{tang. A.}$ §. 473 Trigonometrie.

also $\frac{\text{sin. M. sin. B} - \text{sin. C. sin N}}{\text{sin. M. cos B. cos. N} - \text{sin. N. cos. C, cos. M}} = \text{tang. A}$

und hiedurch war die Aufgabe aufgelöset.

§. 163. Nun einige Exempel hievon. §. 161.

Es sey gegeben die Seite B = 39° 29′, die Seite C = 66° 45′, der Winkel M = 43° 20′, man suchet die Seite A.

Es ist tang. bD = $\frac{\text{tang. C . cos. M}}{\text{sin. totus}}$ hier =

$\frac{\text{tang. } 66° 45′ \text{ . cos. } 43° 20′}{\text{sin. totus}}$

logarithmisch.

log. tang. 66° 45′ = 10, 3669015
log. cos. 43° 20′ = 9. 8617576

20, 2286591
log. sin. totus = 10, 0000000

log. tang bD = 10, 2286591

Dieser Logarithme gehöret fast zu 59° 26′.

Ferner cos. Dp = $\frac{\text{cos. bD . cos. B}}{\text{cos. C}}$ hier

= $\frac{\text{cos. } 59° 26′ \text{ . cos. } 39° 29′}{\text{cos. } 66° 45′}$

logarithmisch.

log. cos. 59° 26′ = 9, 7063256
log. cos. 39° 29′ = 9, 8875102

19, 5938358
log. cos. 66° 45′ = 9, 5963154

log. cos. Dp = 9, 9975204

Dieser Logarithme gehöret fast zu 83° 53′. Da das cosinus des Abschnittes ist, so ist also der würkliche Bogen = 6° 7′. = Dp. Hier ist Dp kleiner als bD,

bD, denn bD war = 59° 26′, es bleibt also pb oder A zweifelhaft, und kann
A oder pb = bD ± Dp seyn; oder es kann A = 59° 26′ ± 6° 7′, also entweder 65° 33′ oder 53° 19′ seyn.

Noch ein Exempel, da es nicht zweifelhaft bleibet. Es sey gegeben die Seite B = 40° 15′, die Seite C = 38° 25′, der Winkel M = 60° 15′.

So ist $\text{tang. } bD = \frac{\text{tang. } 38° 25′ \cdot \text{cos. } 60° 15′}{\text{sin. totus}}$

logarithmisch.

log. tang. 38° 25′	=	9,8993082
log. cos. 60° 15′	=	9,6956712
		19,5949794
log. sin. tot.	=	10,0000000
log tang. bD	=	9,5949794

Dieser Logarithme gehöret fast zu 21° 29′ = bD

Ferner

$$\text{cos. } Dp = \frac{\text{cos. } 21° 29′ \cdot \text{cos. } 40° 15′}{\text{cos. } 38° 25′}$$

logarithmisch.

log. cos. 21° 29′	=	9,9687276
log. cos. 40° 15′	=	9,8826568
		19,8513844
log. cos. 38° 25′	=	9,8940461
log. cos. Dp	=	9,9573383

Dieser Logarithme gehöret fast zu 65° 2′. Da er hier der cosinus ist, so ist der würkliche Bogen = 24° 58′ = Dp.

Weil Dp grösser als bD ist; so ist also
pb oder A = bD + Dp, hier = 21° 29′ + 24° 58′
= 46° 27′ = pb oder A.

§. 164. IV. a) §. 143. **Es sind gegeben zween Winkel und eine Seite, die einem dieser Winkel entgegen stehet, man suchet den dritten Winkel**; oder es sey gegeben der Winkel M, der Winkel N, die Seite B, man suchet den Winkel T.

Auflösung. Man fälle aus T, welches man suchet, den Bogen dD, der auf A oder pb perpendikular stehet. Wir wissen, daß dieses Perpendikel innerhalb des Dreyecks fället, wenn N und M gleichartig; und ausserhalb des Dreyecks fället, wenn N und M ungleichartig sind. §. 144.

Es gilt nun im rechtwinklichten Dreyeck dDp aus §. 55. 56 in 4 folgende Proportion, wenn man substituiret:

cot. N : r = cos. B : cot. pdD und cot. pdD = $\frac{\text{cos. B. r.}}{\text{cot. N}}$

Ferner nach dem vierten Gesetze §. 127.

cos. N : cos. M = sin. pdD : sin. bdD und sin. bdD = $\frac{\text{sin. pdD. cos. M}}{\text{cos N.}}$

Ist nun M und N gleichartig, beyde spitz oder beyde stumpf, so, daß also das Perpendikel innerhalb des Triangels fället; so ist Winkel T = Winkel bdD + pdD.

Ist

Ist M und N ungleichartig, so ist Winkel T = Winkel bdD = pdD, welches also leicht aufzulösen war.

§. 165. Auch folgende Auflösung dieser Aufgabe wird hier statt finden. Es sey wie vorher gegeben Winkel M, Winkel N, und die Seite B, man suchet den Winkel T.

Da M, N und B gegeben ist, so kann man daraus auch die Seite C finden; es gilt nemlich §. 124.

sin. M : sin. B = sin. N : sin. C

und sin. C = $\frac{\text{sin. B . sin. N}}{\text{sin. M}}$

Es kann auch ferner nach §. 140, wenn man gehörig substituiret, folgendes statt finden:

1) cos. C = $\frac{\text{cos. N} + \text{cos. M . cos. T}}{\text{sin. M . sin T}}$

2) cos. B = $\frac{\text{cos. M} + \text{cos N . cos. T}}{\text{sin. N . sin T}}$

Da wir eigentlich T suchen, so muß sin. T und cos. T wieder aus der Gleichung geschaffet, und ein Werth dafür gefunden werden.

1) $\text{nach cos. } C = \frac{\text{cos. } N + \text{cos. } M \text{ cos. } T}{\text{sin. } M \text{ sin. } T}$

$\text{also cos. } C \text{ sin. } M \text{ sin. } T = \text{cos. } N + \text{cos. } M \text{ cos. } T$

1) $\text{cos. } C \text{ sin. } M \text{ sin. } T - \text{cos. } M \text{ cos. } T = \text{cos. } N$

2) $\text{nach cos. } B = \frac{\text{cos. } M + \text{cos. } N \text{ cos. } T}{\text{sin. } N \text{ sin. } T}$

$\text{also cos. } B \text{ sin. } N \text{ sin. } T = \text{cos. } M + \text{cos. } N \text{ cos. } T$

2) $\text{cos. } B \text{ sin. } N \text{ sin. } T - \text{cos. } N \text{ cos. } T = \text{cos. } M$

Man multiplicire die erste Gleichung mit cos. M, und die zweyte mit cos. N, und ziehe die erste Gleichung von der zweyten ab. Wir wollen mit der zweyten anfangen, und sie mit cos. N, multipliciren, also

mit

ferner

mit cos. N die 2) cos. B . sin. N . cos. N . sin. T − cos. N². cos. T = cos. M . cos. N .
mit cos M . die 1) cos. C . sin. M . cos. M . sin. T − cos. M² . cos. T = cos. M . cos. N

abgezogen cos. B . sin. N . cos. N . sin. T − cos. C . sin M . cos. M . sin. T +
cos. M² . cos. T − cos. N² . cos. T = 0.

oder anders geordnet.

(cos. B . sin. N . cos. N − cos C . sin M . cos. M) sin. T + (cos M² − cos N²) cos. T = 0

folglich

(cos. B . sin. N . cos N − cos C . sin M . cos. M) sin. T = − (cos. M² − cos. N²) cos. T

also

$$\sin. T = \frac{-(\cos. M^2 - \cos. N^2)\cos. T}{\cos. B . \sin. N . \cos. N - \cos. C . \sin. M . \cos. M}$$

nach §. 473 Trigonometrie im zweyten Theil ist aber

$$\frac{\sin. T}{\cos. T} = \tang. T = \frac{\cos. N^2 - \cos. M^2}{\cos. B . \sin. N . \cos. N - \cos. C . \sin. M . \cos. M}$$

ferner ist nach §. 473 Trigonom. 2ter Theil

$$\cos.N^2 = 1 - \sin.N^2 \text{ und } \cos.M^2 = 1 - \sin.M^2$$

also

$$\cos.N^2 - \cos.M^2 = (1 - \sin.N^2) - (1 - \sin.M^2) = \sin.M^2 - \sin.N^2,$$

das substituirt, so ist

$$\text{tang.}\,T^2 = \frac{\sin.M^2 - \sin.N^2}{\cos.B.\sin.N.\cos.N - \cos.C.\sin.M.\cos.M}$$

Zähler und Nenner durch $\sin.N$, dividirt, $=$

$$= \frac{(\sin.M^2 : \sin.N) - \sin.N}{\cos.B.\cos.N - (\sin.M : \sin.N)\cos.M.\cos.C.}$$

Aber nach §. 124 gilt auch

$$\sin.M : \sin.N = \sin.B : \sin.C$$

folglich

$$\text{sin. M} = \frac{\text{sin. N . sin. B}}{\text{sin. C}} \text{ und } \frac{\text{sin. M}^2}{\text{sin. N}}$$

$$= \frac{\text{sin. M . sin. N . sin. B}}{\text{sin. C , sin. N}} = \frac{\text{sin. M . sin. B}}{\text{sin. C}}$$

$$\text{und } \frac{\text{sin. M}}{\text{sin. N}} = \frac{\text{sin. N , sin. B}}{\text{sin. N , sin. C}} = \frac{\text{sin. B}}{\text{sin. C}}$$

Das alles im Zähler und Nenner substituiret, so wird

$$\text{tang. T} = \frac{(\text{sin M . sin. B : sin. C}) - \text{sin. N}}{\text{cos. B , cos. N} - (\text{sin. B : sin. C}) \text{cos. M , cos. C}}$$

Oder

Oder wenn man den Divisor im Zähler sowol als im Nenner wegschaffet, indem man die dabey befindliche Zähler und Nenner mit sin. C. multiplicirt, so ist

$$\text{tang. } T = \frac{\text{sin. M. sin. B} - \text{sin. N. sin. C}}{\text{cos. B. cos. N, sin. C} + \text{sin. B. cos. M. cos. C.}}$$

Die Aufgabe ist also aufgelöset, und der gesuchte Winkel T in bloß bekannten Größen gefunden.

§. 166. Nun ein Paar Exempel nach §. 164. Es sey gegeben der Winkel M = 112° 5′, der Winkel N = 98° 17′, die Seite B = 130° 5′. Man suchet den Winkel T.

1) cot. pdD $= \frac{\text{cof. B . r hier}}{\text{cot. N}} = \frac{\text{cof. } 130° 5' \text{ . fin. tot.}}{\text{cot. } 98° 17'}$.

logarithmisch

log cof. $130° 5' =$ log. cof. $49° 55' =$ 9, 8088192
log. fin. totus 10, 0000000

19, 8088192
log. cot. $98° 17' =$ log. cot. $81° 43' =$ 9, 1631231

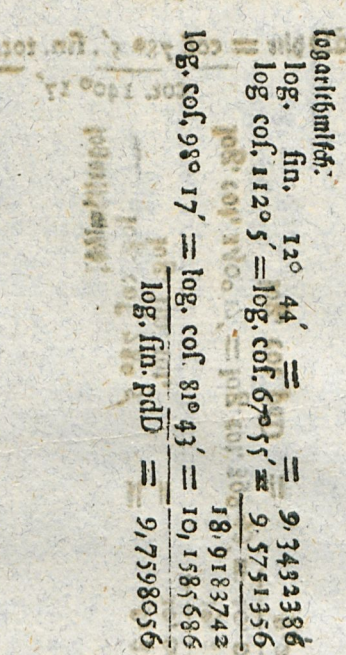
10, 6456961

Dieser Logarithme gehöret fast zu 77° 16'; da er für den cotangens ist, so ist der würkliche Winkel = 12° 44' = pdD

ferner

2) fin. bdD $= \frac{\text{fin. pdD . cof. M hier}}{\text{cof. N}}$

$= \frac{\text{fin. } 12° 44 \text{. cof. } 1 : 2° 5'}{\text{cof. } 98° 17'}$



Logarithmisch:

log. sin. 12° 44′ = log. cos. 67° 53′ = 9,3432386
log cos. 112° 5′ = log. cos. 81° 43′ = 9,5751356
log. cos. 98° 17′ = log. sin. pdD = 18,9183742
10,1585686
9,7598056

Dieser Logarithme gehöret fast zu 35° 7′; da er Logarithme des cosinus ist, so ist der Winkel selbst = 54° 53′ = pdD.

Weil M und N gleichartig, indem beyde stumpf, so fället das Perpendikel innerhalb des Triangels und Winkels T = bdD + pdD = 12° 44′ + 54° 53′ = 67° 37′.

Ein anders Exempel. Es sey M = 50° 34′, N = 140° 17′, B = 78° 5′, man suchet T.

1) cot. pdD hier = $\frac{\text{cos. } 78^\circ\ 5'\ .\ \text{sin. tot.}}{\text{cot. } 140^\circ\ 17'}$

logarithmisch:

log. cos. 78° 5′ = 9, 3148965
log. sin. tot. = 10, 0000000
19, 3148965
log. cot. 140° 17′ = log. tot. 39° 43′ = 10, 0805519
log. cot. pdD = 9, 2343446

Dieser Logarithme gehöret fast zu 45′, da er fast den cotangens ist, so ist der würkliche Winkel = 80° 15′ = pdD.

Ferner

2) sin. bdD hier = $\frac{\text{sin. } 80^\circ\ 15'\ .\ \text{cos. } 50^\circ\ 34'}{\text{cos. } 140^\circ\ 17'}$

loga-

logarithmisch:

log. sin. 80° 15′ = 9.9936813
log. cos. 50° 34′ = 9.8028968

log. cos. 140° 17′ = log. cos. 39° 43′ = 19.7965781
log. sin. bdD = 9.8860470

= 9.9105311

Der Logarithme gehöret fast zum sinus des Winkels 54° 29′. Da M und N nicht gleichartig sind, so fällt das Perpendikel außerhalb des Triangels, also Winkel T = bdD — pdD = 54° 29′ — 80° 15′ = — 25° 46′ = Winkel T.

§. 167. II. b) §. 143.) Es sind gegeben zwo Seiten, und ein Winkel, der einer Seite opponiret ist, es wird der Winkel gesuchet, der von beyden gegebenen Fig. 24.

nen Seiten eingeschlossen wird. Oder es sey gegeben die Seite B, die Seite C und der Winkel M, man suchet den Winkel T.

Auflösung. Man lege den Bogen dD aus T auf die Seite A senkrecht, so bekömmt man zwey rechtwinklichte Triangel bdD und pdD. Wir betrachten erst den Triangel bdD. Hier gilt nun nach §. 55. 56 in 4.

$$\text{cot. } M : r = \text{cos. } C : \text{cot. } bdD \text{ also}$$

$$\text{cotang. } bdD = \frac{r \cdot \text{cos. } C}{\text{cot. } M}.$$

Man schließe nun ferner nach dem 5ten Gesetze §. 128.

$$\text{tang. } B : \text{tang } C = \text{cos. } bdD : \text{cos. } pdD.$$

und

$$\text{cos. } pdD = \frac{\text{cos. } bdD \cdot \text{tang. } C}{\text{tang. } B}$$

Hiedurch erhält man nun auch den Winkel pdD, aber die Winkel $bdD + pdD = pdp$ oder $=$ dem gesuchten Winkel T.

Nun haben wir hier noch folgendes zu bemerken. Es kömmt noch darauf an, ob das Perpendikel dD innerhalb oder außerhalb des Triangels fällt. Fällt es außerhalb des Triangels, so ist es ganz natürlich, die beyden Winkel von einander zu subtrahiren, und ihre Differenz für den gesuchten Winkel zu nehmen, oder nach Fig. 30 vom Winkel pdD den Winkel bdD abzuziehen, um den Winkel T zu erhalten. Fig. 30. Fällt das Perpendikel innerhalb des Triangels, so muß man beyde Winkel addiren, und man bekömme dadurch den Winkel T. Fig. 29. Fig. 29.

Es kömmt darauf an, ob der gegebne Winkel M mit dem unbekannten N gleichförmig sey oder nicht.

Ich

Ich kann aber dieses so ziemlich wissen nach §. 124. Denn sin. B : sin. M = sin. C : sin. N, und also nach §. 151 erst den dritten Winkel suchen, dabey die dortigen Berichtigungen zu Hülfe nehmen, so werde ich die Beschaffenheit dieses Winkels erfahren, wenn ich auch noch dabey die Tafel §. 110 zu Hülfe nehme, die nun mich lehret, ob der Winkel N stumpf, spitz oder zweydeutig sey. Allgemein im Deutschen ausgedrücket heißen die zu dieser Auflösung nöthigen Proportionen.

Der cotangens des gegebnen Winkels
zum sinus totus
wie der cosinus der anliegenden bekannten Seite an dem gegebnen Winkel
zum cotangens des ersten der beyden Winkel, die durchs Perpendikel an der Spitze entstehen

Ferner:

der tangens der Seite, die dem gegebnen Winkel entgegen stehet
zum tangens der andern gegebnen Seite
wie der cosinus des ersten Winkels, die durchs Perpendikel an der Spitze entstehen
zum cosinus des zweyten Winkels an der Spitze

welches nachher aus dem obigen berichtiget wird.

§. 168. Die Auflösung dieses Problems kann auch leichtlich durch eine Gleichung gefunden werden, dabey wir den radius = 1 annehmen.

Es sey, wie vorher, die Seite B, die Seite C und der Winkel M gegeben, man suchet den Winkel T. Wenn B, C und M gegeben ist, so ist auch N gegeben, denn sin. B : sin. M = sin. C : sin. N. und sin. N = sin. M. sin. C §. 124.

sin. B

Nun aber ist nach §. 165

tang. T = sin. M. sin B — sin. N. sin. C

cos.B.cos.N.sin.C — sin.B.cos M.cos.C

welches völlig die Auflösung dieser Aufgabe enthält.

§. 169. **Hievon nun einige Exempel nach §. 167.**

Es sey gegeben die Seite B = 70° 29′, die Seite C = 66° 45′ und der Seite B oppo irte Winkel M = 43° 20′, man suchet den Winkel T. Fig. 34.

Das erstere, was wir hier untersuchen wollen, soll seyn, ob das Perpendikel dD innerhalb oder ausserhalb des Triangels fällt, damit wir uns nachher bey T darnach richten können, ob wir die gefundenen Winkel bey T addiren, oder von einander subtrahiren sollen.

Da nach §. 124 sin. N = $\frac{\text{sin. C . sin. M}}{\text{sin. B}}$

hier = $\frac{\text{sin. } 66° 45′ \text{ . sin. } 43° 20′}{\text{sin. } 70° 29′}$ = sin. 42°

Ich weis es jetzt, daß N dieses würklich und also spitz seyn müsse, es folgete schon daraus, weil die Seite B gröser ist als die Seite C, auch wird man nach der Tafel §. 110 N spitzig finden. Das Perpendikel wird also, da N und M gleichartig sind, inners

innerhalb des Triangels fallen und die Winkel bey T addiret werden müssen.

Also erstlich cotang. bdD = r. cos. C hier = cotang. M / sin. totus. cos 66° 45′ logarithmisch / cot. 43° 20′

log. sin. totus = 10, 0000000
log. cos. 66° 45′ = 9. 5963154
19. 5963154
log. cotang. 43° 20′ = 10, 0252805
log. cotang bdD = 9 5710349

Dieser Logarithme gehöret fast zu 20° 26′. Da er der Logarithme des cotangens ist, so ist also der würkliche Winkel bdD = 69° 34′. Nun 2tens:

cos. pdD = cos. bdD . tang. C hier = tang. B / cos. 69° 34′. tang. 66° 45′ / tang. 70° 29′

logarithmisch.

log cos. 69° 34′ = 9, 5429713
log tang. 66° 45′ = 10. 3669015
19, 9098728
log tang. 27° 29′ = 10. 4504500
log cos. pdD = 9. 4594228

Dieser Logarithme gehöret fast zu 16° 45′. Da er zum cosinus gehöret, so ist der würkliche Winkel = 73° 15′, also der gesuchte Winkel = 69° 34′ + 73° 15′ = 142° 49′ = Winkel T, es ist also T stumpf.

Ein

Ein Exempel, wo das Perpendikel außerhalb des Triangels fällt. Fig. 25.

Es sey gegeben die Seite B = 80° 36′, die Seite C = 103° 16′, der Winkel M = 84° 16′.

Dieses gäbe erstlich nach §. 124 den Winkel N = 79°. Da die Seite C größer ist als die Seite B, so kann ich schließen, daß der Winkel N stumpf sey, M und N also ungleichartig, also auch das Perpendikel außerhalb des Triangels falle.

Folglich vom Winkel pdD der Winkel bdD abzuziehen sey, um den Winkel T zu erhalten.

Es ist hier $\cot. bdD = \frac{r . \cos. 103° 16′}{\text{cotang. } 84° 16′}$

logarithmisch

log. sin. totus	=	10 0000000
log cos. 103° 16′ = log. cos. 76° 44′	=	9, 3607515
		19, 3607515
log. cot. 84° 16′	=	9, 0017375
log. cotang. bdD		10, 3590140

Dieser Logarithme gehöret fast zu 66° 23′. Da er der Logarithme des cotangens ist, so ist der wahre Winkel = 23° 37′ = Winkel bdD.

$\cos. pdD \text{ ist hier} = \frac{\cos. 23° 37′ \text{ tang. } 76° 44′}{\text{tang. } 80° 36′}$

log cos. 23° 37′	=	9, 9620122
log. tang. 76° 44′	=	10, 6275008
		20, 5895130
log. tang. 80° 36′	=	10, 7810736
log. cos. pdD	=	9, 8084394

Die-

Dieser Logarithme gehöret fast zu 40° 3′. Da er zum cosinus gehöret, so ist der würkliche Winkel 49° 57′. Nun ist hier T = Winkel pdD — Winkel bdD, hier = 49° 57′ — 23° 37′ = 26° 20′ = Winkel T.

§. 170. IV. c) §. 143. **Es ist gegeben eine Seite, ein anliegender, und ein dieser Seite opponirter Winkel, man suchet die Seite, die zwischen den gegebnen Winkeln lieget.** Fig. 24. Fig. 25. Oder es sey gegeben die Seite C, der Winkel M und der Winkel N, man suchet die Seite A.

Auflösung. Man lege auf die Seite, welche man suchet, aus dem entgegengesetzten Winkel T den Bogen dD, so, daß er ein Perpendikel wird, oder auf A senkrecht stehet, so erhält man zwey rechtwinklichte Triangel bdD und pdD. Wir wollen nun erst das rechtwinklichte Dreyeck bdD betrachten, hier ist Db das eine Perpendikel Dd, das andere Perpendikel und C die Hypotenuse, davon ist gegeben der rechte Winkel, die Hypotenuse und der Winkel M. Wir wollen nun das eine Perpendikel bD suchen. Es gilt also, gehörig substituiret, nach §. 55. 56. aus 4.

r : cos. M = tang. C : tang. bD und

tang. bD = tang. C . cos. M / rad.

Man kann nun ferner schließen nach dem zweyten Gesetze §. 125.

tang. N : tang M = sin. bD ; sin. Dp. und

sin. Dp = sin. bD . tang. M / tang. N

Wir

Wir haben nun einen Werth für beyde Stücke gesuchten Seite A, die durch Perpendikel dD gemacht werden, für bD und Dp, beyde addiret machen die Seite A aus, wohl zu merken, wenn das Perpendikel innerhalb des Triangels fällt. Man kann ihn aber gewiß wissen nach §. 98., weil die Winkel M und N gegeben sind, und man daher auch weiß, ob sie gleichartig oder ungleichartig sind. Sind sie gleichartig, so addiret man beyde Stücke und erhält dadurch die Seite A, oder alsdenn ist Fig. 29. A = bd + Dp.

Sind sie ungleichartig und fällt also das Perpendikel außerhalb des Triangels, so wird Fig. 30. A = pD — bD; oder noch kürzer, ist M und N gleichartig, so ist A = der Summe beyder Segmente; ist M und N ungleichartig, so ist A = der Differenz beyder Segmente.

Allgemein ausgedrückt im Deutschen lauten die hieher gehörigen Proportionen also:

der sinus totus
zum cosinus des anliegenden Winkels
an der gegebnen Seite
wie die Tangente dieser Seite
zu der Tangente des ersten Segments

ferner

die Tangente des der gegebnen Seite
opponirten Winkels
zur Tangente des anliegenden Winkels
an der gegebnen Seite
wie der sinus des ersten Segments
zum sinus des zweyten Segments.

Was

Was übrigens hiebey zu bemerken ist, ist schon angeführet.

§. 171. Auch durch eine Gleichung läßt sich die Auflösung dieses Problems, nach schon erklärten Berechnungen finden, wo denn der radius = 1 angenommen wird.

Es sey, wie im vorhergehenden §. der Winkel M, der Winkel N und die Seite C gegeben, man suchet die Seite A. Fig. 24. Fig. 25.

Man kann bey diesen datis die Seite B gleichfalls als gegeben ansehen, weil aus den gegebenen Dingen sich folgende Proportion nach dem ersten Gesetze §. 124 herleiten läßet.

sin. N : sin. C = sin. M : sin. B

und $\sin. B = \frac{\sin. M . \sin. C}{\sin. N}$. Wir müssen dieses wissen, weil wir es in der Gleichung gebrauchen. Nun ist nach §. 162. der tangens der Seite, die man hier suchet, oder

$$\text{tang. } A = \frac{\sin. M . \sin. B - \sin. C . \sin. N}{\sin. M . \cos. B . \cos. N - \sin. N . \cos. C . \cos. M}$$

und auch hiedurch ist diese Gleichung aufgelöset.

§. 172. Hievon noch einige Exempel nach §. 170. Es sey M 43° 20′; N = 79° 10′; C = 39° 29′, man suchet die Seite A.

Weil die Winkel M und N gleichartig sind; so fällt das Perpendikel innerhalb des Triangels; es sind also beyde Segmente von A zu addiren, um die Seite A zu bekommen. Fig. 24. Es ist aber tang. bD = tang. C . cos. M, hier

$= \frac{\text{tang } 39° 29' \cdot \text{cos. } 43° 20'}{\text{sin. totus}}$ logarithmisch.

log. tang. 39° 29′ = 9 9158471
log cos. 43° 20′ = 9,8617576
19 7776047
log. sin. tot. = 10 0000000
log tang. bD = 9,7776047

Dieser Logarithme kömmt am nächsten dem log. 30° 56′ = bD.

Ferner

$\text{sin. Dp} = \frac{\text{sin. bD} \cdot \text{tang. M hier}}{\text{tang. N}} =$

$\frac{\text{sin. } 30° 56' \cdot \text{tang. } 43° 20'}{\text{tang. } 79° 10'}$ und das logarithmisch.

log. sin. 30° 56′ = 9,7109972
log. tang. 43° 2′ = 9 9747195
19 6857167
log. tang. 79° 10′ = 10,7181415
log sin. Dp = 8,9675752

Dieser Logarithme gehöret fast zum sinus von 5° 20′, und dieses ist das Segment Dp.

Also die Seite A = bD + Dp = 30° 56′ + 5° 20′ = 36° 16′.

Noch ein Exempel, wo das Perpendikel außerhalb des Triangels fällt.

Es sey = M 43° 20′; N = 96° 10′; C = 39° 29′, man suchet die Seite A.

Erst tang. bD logarithmisch gesuchet

log.

log. tang. 39° 29′ = 9,91584471
log. cos. 43° 20′ = 9,8617576

10,7776047
log. sin. totus = 10,0000000
also log. tang. bD = 9,7776047

Dieser Logarithme kömmet am nächsten dem Logarithmen des tangens des Bogens 30° 56′ = bD. Nun Dp logarithmisch gesuchet.

log. sin. 30° 56′ = 9,7109972
log. tang. 43° 20′ = 9,9747195

19,6857167
log. tang. 96° 10′ = log. tang. 83° 50′ = 10,0663907
also log. sin. Dp = 9,7193260

Dieser Logarithme gehöret fast zum sinus des Bogens 3° 1′. Weil M und N ungleichartig, so fällt das Perpendikel außerhalb des Triangels.

Also nach §. 170. Die Seite A = pD — pD =

3° 1′ — 30° 56′ = — 27° 55′, oder welches einerley wäre bD — pD = 30° 56′ — 3° 1′, oder welches diesem gleich = der Differenz beyder Segmente. Also die Seite A = 27° 55′.

§. 173. V. a) §. 143. **Es sind gegeben alle drey Seiten, man suchet einen Winkel**; oder es sey gegeben die Seite A, die Seite B und die Seite C; man suchet den Winkel M.

Die Auflösung dieser Aufgabe findet sich schon §. 140. Es ist nemlich

sin.

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2}M = r \cdot \sqrt{\frac{(\text{sin. } \tfrac{1}{2}(B+A-C) \cdot \text{sin. } \tfrac{1}{2}(B+C-A))}{\sqrt{(\text{sin. } C \cdot \text{sin. } A)}}}$$

Weil kein Winkel größer, ja nicht einmal ganz voll, als 180° seyn kann, so ist also der halbe Winkel allezeit kleiner als 90°. Man nimmt also allezeit den spitzen Winkel, welchen der Logarithme anzeiget.

§. 174. **Exempel hievon.** Es sey A = 65° 31′; B = 39° 29′; C = 66° 45′; man suchet M. Also nach vorhergehendem Paragraphen.

$$\sin.\tfrac{1}{2}M = \frac{r\sqrt{(\sin.\tfrac{1}{2}(39°\,29' + 65°\,31' = 66°\,45').\sin.\tfrac{1}{2}(39°\,29' + 66°\,45' - 65°\,31'))}}{\sqrt{(\sin 66°\,45'.\sin.65°\,31'}}$$

$$= \frac{r\sqrt{\sin.19°\,7'.\sin.20°\,21'}}{\sqrt{(\sin.66°\,45'.\sin.65°\,31')}}$$

logarithmisch

log sin. 19° 7′ = 9,5152017
log. sin. 20° 21′ = 9,5412721

19,0564738

Radix daraus logarithmisch gezogen oder dividiret durch 2 ———— 9,5282369

dazu den Logarith. des sinus totus 10,0000000

19,5282369

Dieses ist nun der Logarithme des Zählers. Ferner zum Logarithmen des Renners,

log. sin. 66° 45′ = 9,9632168
log. sin. 65° 31′ = 9,9590805

den Radix daraus logarith. 19,9222973
misch oder dividiret durch 2 ————

9,9611486

Dieses ist der Logarithme des Renners

also Logarithme des Zählers = 19,5282369
Logarithme des Renners = 9,9611486
abgezogen bleibt ————

Logarithme sin. $\frac{1}{2}$M = 9,5670883

Dieser Logarithme gehöret fast zu 21° 40′ = $\frac{1}{2}$M, also M = (21° 40′). 2 = 43° 20′.

Er wird nicht ganz genau seyn, weil wir die Secunden in der Rechnung negligiret haben.

Noch ein Exempel. Es sey die Seite A = 110° 50′, die Seite B = 96° 54′, die Seite C = 72° 8′, man suchet den Winkel M. Also

$$\sin\tfrac{1}{2}M = r\sqrt{\frac{(\sin\tfrac{1}{2}(96^\circ 54' + 110^\circ 50' - 72^\circ 8').\ \sin\tfrac{1}{2}(96^\circ 54' + 72^\circ 8' - 110^\circ 50'))}{(\sin 72^\circ 8'\ \sin.\ 110^\circ 50')}}$$

$$= r\sqrt{\frac{(\sin.\ 67^\circ 48'.\ \sin.\ 29^\circ 6')}{(\sin.\ 72^\circ 8'.\ \sin.\ 110^\circ 50')}}$$

log.

logarithmisch

log. sin. 67° 48′	=	9,9665503
log. sin. 29° 6′	=	9,6869359
		19,6534862
Radix daraus logar.		9,8267431
log. sin. totus	=	10,0000000
		19,8267431

= dem Logarithmen des Zählers

log. sin. 73° 8″ = log. sin. 69° 10′ = 9,9785334
log. sin. 110° 50′ = 9,9706346
19,9491680
den Radix daraus 9,9745840

= Logarithmen des Nenners 19,8267431
also 9,9745840
9,8521591 = log. sin. ½ M.

Dieser Logarithme gehöret fast zum sin. 45° 22′. Da dieses der sinus von $\frac{1}{2}$M ist, so ist also der ganze Winkel M = (45° 22′) . 2 = 90° 44′. Er wird nicht strenge genau seyn, weil die Secunden in der Rechnung negligiret sind.

§. 175. VI a) § 143. **Es sind gegeben alle drey Winkel, man suchet eine Seite**; oder es seyn gegeben M, N und T, man suche A.

Es ist die Auflösung dieser Aufgabe schon im §. 141. befindlich und ist gehörig substituiret.

$$\text{cos.}\tfrac{1}{2}A = r\sqrt{\frac{(\text{cos.}\tfrac{1}{2}(T+M-N).\text{cos.}\tfrac{1}{2}(T+N-M))}{(\text{sin. N . sin. M.})}}$$

weil

Weil keine Seite völlig 180° erreichen kann, so kann die halbe Seite nicht völlig 90° seyn, und es ist hier also gar keine Zweydeutigkeit, sondern man nimmt allezeit den spitzen Bogen, obschon auch diese Aufgabe selten vorkömmt.

§. 176. **Exempel hievon.** Es sey M 50° 36′ T = 75° 58′, N = 82° 10′, man suchet die Seite A. Nach vorhergehendem Paragraphen ist nun die Formel für

$$\cos\tfrac{1}{2}A = r\sqrt{(\cos\tfrac{1}{2}(75°\,58' + 50°\,36' - 82°\,10'),\cos\tfrac{1}{2}(75°\,58' + 82°\,10' - 50°\,36'))}$$

$$= r\sqrt{(\cos 22°\,12'.\cos 53°\,46')}$$

$$= r\sqrt{(\sin 82°\,10'.\sin 50°\,36')}$$

logarithmisch
log. cos 22° 12′ = 9,9665503
log. cos. 53° 46′ = 9,7716426
19,7381929
den Radix daraus oder
dividiret durch 2 ———
9,8690964
log. sin. tot. = 10,0000000
also Logarithme des ———
Zählers = 19,8690964
Ferner
log. sin. 82° 10′ = 9,9959284
log. sin. 50° 36′ = 9,8880298
19,8839582
den Radix daraus ———
9,9419791 =
dem Logarithmen des Nenners
also Logarithme des Zählers = 19,8690964
Logarithme des Nenners = 9,9419791
log. cos. ½ A = 9,9271173

Dieser Logarithme gehöret fast zu 57° 44′. Da er zum cosinus gehöret, so ist also der würkliche **halbe** Bogen A = 32° 16′, also der **ganze** Bogen oder Seite A = 64° 32′.

Ein anderes Exempel. Es sey M = 96°; T = 114° 5′; N = 127° 30′, man suchet A. Also

col.

log.

$$\cos.\tfrac{1}{2}A = \frac{1\sqrt{(\cos.\tfrac{1}{2}(114°5' + 96° - 127°36')\cos.\tfrac{1}{2}(114°5' + 127°36' - 96°))}}{\sqrt{(\sin.127°30'.\sin.96°)}}$$

$$= \frac{\text{sin. tot.}\sqrt{(\cos.41°14'.\cos.72°47')}}{\sqrt{(\sin.52°30'.\sin.84°)}}$$

log. cos. 41° 14′ = 9,8762361
log. cos. 72° 47′ = 9,4712710
19,3475071
Radix daraus
9,6737535
log. sin. totus = 10,0000000
19,6737535 = Logarithme des Zählers

log. sin. 52° 30′ = 9,8994667
log. sin. 84° = 9,9976143
19,8970810
Radix daraus
9,9485405 = Logarithme des Nenners

Logarithme des Zählers = 19,6737835
Logarithme des Nenners = 9,9485405
log. cos. $\frac{1}{2}$ A = 9,7252130

Dieser Logarithme gehöret fast zu 32° 5′. Da er Logarithme des cosinus ist, so ist also $\frac{1}{2}$ A = 57° 55′, also A = 115° 50′.

§. 177. Die Auflösungen, welche wir nun bis daher für die schiefen Dreyecke vorgetragen haben, sind nun für alle hinreichend Fälle, die bey der Findung ihrer Seiten oder Winkel aus gegebnen Seiten und Winkeln vorkommen können.

Zuweilen trift es sich auch, daß in einem schiefen Dreyecke eine der Seiten eben 90° oder ein Quadrant ist, und dann hat man diese Auflösungen nicht einmal nöthig, (ohngeachtet man, wenn man will, sich

sich ihrer auch bedienen kann), sondern es läßt sich ein solches schiefwinklichtes Dreyeck auf Art eines rechtwinklichten behandlen. Wir wollen jetzt nun ein Paar schiefe Dreyecke zeichnen Fig 31. und Fig 32. in welchen der eine Bogen = 90° oder ein Quadrant seyn soll, und ihre Auflösung nach Art eines rechtwinklichten zeigen.

Wir müssen hiebey auf zwey Fälle Acht geben. Wenn eine Seite des schiefwinklichten Triangels = 90°, so kann die andre Seite auch **gleich größer** oder **kleiner** als 90° seyn. Was das **gleich** anbetrift, davon wollen wir am Schlusse des §. reden; wir gebrauchen jetzt nur das **größer** oder **kleiner** zu bemerken.

Es sey im Triangel pbd, der Bogen oder Seite pb = 90°, die Seite bd sey größer als 90°, so mache man auf dieser Seite ba = 90°, und lege einen Bogen pa aus der Spitze p. Es wird also da = bd − ba = bd − 90°, der Winkel apd wird = bpd − bpa = bpd − 90°; denn bpa ist = 90°, weil dieser Winkel durch den Bogen ba, der 90° groß ist, und um 90° davon lieget, gemessen wird. (§. 442. Geom. im 2ten Theil.) Ferner wird der Bogen pa gleich dem Winkel b seyn; denn da pb = 90°, ba = 90°, so misset der Bogen pa den Winkel b. Es wäre mir also in den Triangeln pbd und pba bekannt, der Quadrant oder das gegebene pb = 90°; der Winkel bey a, der allezeit = Recto, da pb = 90° in der Entfernung ba = 90° ihn misset. Nun sey von dem

Fig. 31.

dem ganzen Triangel pbd übrigens noch gegeben, was da wolle, so wird er sich nach Art der rechtwinklichten Triangel auflösen lassen.

Fig. 32. Nun der andre Fall. Es sey in dem Triangel pbd Fig. 32. pb wieder $= 90°$, bd aber kleiner als $90°$, so verlängere man bd nach a hin, daß also ba $= 90°$ wird. Es wird also da $=$ ba $-$ bd $= 90° -$ bd oder $= -$ bd $+ 90°$. Der Winkel dpa $=$ bpa $-$ bpd $= 90° -$ bpd; der Winkel b $=$ dem Bogen pa. Bey a ist ein rechter Winkel, wie denn alles dieses aus eben den Gründen, als die bey dem ersten Falle angeführet sind, sattsam erhellet. Nun sey übrigens in dem Triangel bpd gegeben, was da wolle, so wird er sich nach Art der rechtwinklichten Triangel auflösen lassen.

Wäre pb $= 90°$, bd auch $= 90°$, so ist der Triangel ohnedem schon rechtwinklicht, weil der Winkel p alsdenn $= 90°$ ist, den der Bogen bd misset. Auch alsdenn ist der Bogen pd $=$ dem Winkel b, und der Winkel bey d $= 90°$, den der Bogen pb misset, und der Triangel auch gleichschenklicht.

§. 178. Dieses wären die vornehmsten Betrachtungen über die sphärischen Triangel, so viel nehmlich nach der Absicht dieser Schrift zu den ersten Anfangsgründen nöthig ist. Man kann freylich noch ungemein viel Betrachtungen über selbige anstellen, viele verschiedene Ausdrücke der trigonometrischen Linien, ihrer Seiten und Winkel finden, die wir jetzt nicht anzeigen, und ihren Grund in den vorhergehenden

Be-

Betrachtungen haben. Durch den Gebrauch der Differential- und Integralrechnung können wir manche schwerere Aufgaben dabey auflösen. Zu allem dem reichet das noch nicht zu, was wir bis daher vorgetragen haben. Aber es wird dieses, was wir vorgetragen haben, völlig hinreichend seyn, die am meisten vorkommenden und nützlichsten Aufgaben in der Astronomie, Geographie ꝛc. aufzulösen und den Leser, der weiter gehen will, dazu vorzubereiten, und er wird in den Schriften eines Eulers, Kästners, Klügels, (dessen analytische Trigonometrie wir sehr empfehlen) und anderer seine Wißbegierde stillen können. Wir wollen noch ein Kapitel zu einigen Anwendungen der sphärischen Trigonometrie, die wir vornehmlich aus der Astronomie, und noch einigen andern Wissenschaften nehmen werden.

Viertes Capitel.

Ueber einige Anwendungen der sphärischen Trigonometrie.

§. 179. Die Absicht dieses Kapitels ist, einigen Gebrauch der sphärischen Trigonometrie zu zeigen, und etwas von ihrer Anwendung deutlich zu machen. Da ich nur die ersten Anfangsgründe zum eignen Unterricht aufsetze und also gar nicht für Mathematiker von Profession schreibe, so wird man es

es auch gar nicht erwarten können, daß ich es weitläuftig erkläre, zu wie mancherley Dingen die sphärische Trigonometrie gebrauchet werden könne. Doch nur etwas davon. Am mehrsten wird sie doch bey der sphärischen Astronomie und bey der Geographie angewendet, und in diesen beyden Wissenschaften kann man ohne sie gar nicht zurechte kommen. Eben so bey der Gnomonik, oder der Wissenschaft Sonnenuhren zu verzeichnen, und noch bey vielen andern Dingen. So kann sie z. E. sehr gut bey der Berechnung der Prismen, der Pyramiden, und der regulären oder platonischen Körper ꝛc. angewendet werden. Von diesen Dingen wollen wir nun etwas sagen, und fangen mit einigen Anwendungen aus der sphärischen Astronomie an. Weil wir Leser voraussetzen, die noch nicht weiter als bis an diese sphärischen Betrachtungen gekommen sind, so wird es nothwendig seyn, daß wir erst verschiedne Erklärungen und Bemerkungen vorausschicken, ehe wir die Anwendungen aus der sphärischen Astronomie vortragen können. Wir werden uns aber nur auf einige der am meisten vorkommenden, sowohl Erklärungen als Anwendungen einlassen können.

§. 180. Viele Untersuchungen, Erfahrungen und daraus hergeleitete Gründe haben es längst bewiesen, daß die Erde eine kugelähnliche Figur habe, die so wenig von der wahren Kugel abweichet, daß wir es wenigstens in diesen Betrachtungen nicht zu bemerken nöthig haben, sondern sie immer als eine würkliche Kugel behandeln können. Gleichfalls kömmt uns der Himmel als eine hole Kugel vor, in

in deren Mittelpunkte die Erde sich befindet, und der sich um die Erdkugel in 24 Stunden von Morgen gegen Abend herumdrehet. Diese Bewegung, welche der ganze Himmel in 24 Stunden zu haben scheinet, nennet man auch die **tägliche Bewegung** (motus primus, communis, diurnus, motus primi mobilis.) Ob nun schon das nicht richtig ist, sondern daher rühret, weil die Erde in 24 Stunden sich einmal selbst herumdrehet, so kommen doch gleiche Erscheinungen dadurch zum Vorschein, man mag sich nun vorstellen, daß sich die Erde oder der Himmel herumdrehe. Da man die Erde als eine Kugel betrachten kann, und den Himmel als eine hole Kugel, die um sie herumgehet, so werden sich auf beyde Circulos maximos und auch kleinere Cirkel in Gedanken ziehen lassen. Diese Circuli maximi können in unzählich verschiedenen Lagen darauf gedacht werden, sich auf mancherley Art durchschneiden, und rechtwinklichte und schiefwinklichte Triangel bilden, deren Winkel und Seiten, wenn die data dazu vorhanden sind, sich werden berechnen lassen.

§. 181. Einer der ersten von diesen Circulis maximis, die wir betrachten wollen, ist derjenige, welchen man den **Horizont** nennet. Da man auf einer Kugel **allzeit oben ist**, so ist derjenige Kreis eigentlich der Horizont, der, wenn wir auf einer ebenen Fläche uns befinden, unsern Gesichtskreis begränzet. Wenn wir uns die **Ebene**, worinn dieser Kreis lieget, gedenken, so berühret sie den Punkt, wo wir uns auf der Erde befinden.

Man kann wenigstens die wenigen Fuß, die das Auge des Menschen höher ist, als der Punkt, da er auf der Erde stehet, als eine geringe Kleinigkeit vernachläßigen. Es heißt dieser **Horizont** der **scheinbare Horizont.** Fig. 33. a. Es sey n der Punkt, wo jemand stehet, so stehet er rund um sich herum. Der scheinbare Horizont AB ist der Durchschnitt der Ebene dieses scheinbaren Horizonts, den man sich bis an die hole Himmelskugel vergrößert vorstellet. Der **wahre Horizont** ist eigentlich der Circulus maximus, dessen Ebene durch C den Mittelpunkt der Erde qnph gehet, und dessen Durchmesser hier qp ist. Da er Circulus maximus ist, so theilet er die Erdkugel in zwey gleiche Theile, wird, die Ebene dieses Kreises bis an die hole Himmelskugel vergrößert, dieselbe in zwey gleiche Theile theilen, welche man auch ihren Horizont nennet. Der Durchmesser dieser Ebene ist hier EF. Der Bogen qnp wird also sowol als der Bogen EAZBI 180° groß seyn. Es lieget mit dem scheinbaren Horizont parallel. Die Pole also, sowol des scheinbaren als wahren Horizonts müssen einerley seyn, weil beyde parallel sind, (§. 439 Geom.) sie haben beyde einerley Pol in Z, welcher Punkt 90° von E oder F entfernet seyn muß. Man sollte nun gedenken, wenn man die Ebene des **scheinbaren** Horizonts bis an die hole Himmelskugel vergrößerte, daß zwischen dem scheinbaren Horizonte und dem wahren am Himmel ein großer Unterschied wäre, und daß der Bogen FB oder EA, darum sie verschieden sind, doch etwas bedeute. Aber es findet sich dieses nicht, sondern man kann ohne merklichen Irrthum annehmen,

Fig. 33.

men, wie Beobachtungen und Erfahrungen lehren; daß ebenfalls durch die Ebene des scheinbaren Horizonts 180° am Himmel abgeschnitten werden, ohngeachtet sie nur die Erde berühret. Dieses kömmt daher, weil die ganze Erde in Ansehung ihrer ungeheuren Entfernung von den Sternen, nur als ein Punkt betrachtet werden kann, da es denn in Ansehung der Folgerungen auch gleichviel ist, die Ebene des Horizonts berühre nur die Erde, oder sie gehe mitten hindurch. Selbst bey dem Monde, der doch in mittler Entfernung, ohngefähr 50000 Meilen von der Erde ist, macht der ganze Bogen FB, oder der Winkel FCB, nur ohngefähr einen Grad aus. Wenn einem Zuschauer in N der Mond eben in B aufgienge, so würde ein Zuschauer in C, oder dem Mittelpunkte der Erden, den Mond 1 Grad über dem Horizont erhaben sehen. In Ansehung der Sonne und Planeten wird dieser Bogen nur wenige Secunden groß seyn, und bey den Fixsternen gar nicht bemerket werden können. Man wird es leicht einsehen, daß jeder Punkt auf der Erde einen andern Horizont, sowol scheinbaren als wahren Horizont habe. Fig. 33b wird dieses deutlich machen. Der scheinbare Horizont des Punkts n ist AB, der wahre EF. Der Pol von beyden ist Z. Der scheinbare Horizont von r ist RS, der wahre TV, ihr Pol M. Der scheinbare Horizont von t ist yx, der wahre DG, ihr Pol N. Der Astronom bekümmert sich indes nicht viel um den scheinbaren Horizont, sondern vornehmlich um den wahren.

§. 182. Der wahre Horizont Fig. 33u, EF, darum, wie wir schon gesagt haben, die Astronomen

sich nun vorzüglich bekümmern, theilet, wie wir schon erwähnet haben, die Erd- und Himmelskugel in zwey gleiche Theile, deren einer, welcher dem Zuschauer sichtbar ist, hier EZF, die **obere** und der Theil ENF die **untere** Halbkugel genannt wird. Der Pol der obern Halbkugel Z heißt das **Zenith** oder der **Scheitelpunkt**, und ist vom Horizonte 90°, oder um einen Quadranten entfernt. Der ihm im Diametro entgegengesetzte Punkt, der Pol der andern Halbkugel N, heißt **Nadir** oder **Fußpunkt**, und ist also gleichfalls vom Horizonte 90° entfernet. Es sind also vom **Zenith** bis an **Nadir** 180°. Man siehet es also leicht ein, daß im strengen Verstande jeder Punkt auf der Erde seinen eignen Horizont, sein eignes Zenith und Nadir habe, wie sich das auch aus Fig. 33b leicht erkennen lässet.

Fig. 34. §. 183. Man ziehet nun auf dem wahren Horizont AB Fig. 34 durch das **Zenith** Z und **Nadir** N Circulos maximos, die auf allen Punkten des Horizonts stehen können, so wie zum Exempel ZA, Zp, Zq &c. welche sind, so heißen die **Verticalkreise**. Sie stehen alle auf dem Horizont des Orts unter einem rechten Winkel oder senkrecht, denn sowol der Horizont als die Verticalkreise sind Circuli maximi, die jeder durch des andern Pole gehn (§. 429 Geom. im 2ten Theile). Man misset auf diesen Verticalkreisen die Höhe der Sonnen, des Mondes, und der übrigen Himmelskörper über dem Horizonte in Graden, Minuten und Secunden. Es wären also z. E. Fig. 34 ps oder qr Höhen eines Gestirns, über dem Horizont. Leget man nun parallel mit dem

Ho-

Horizonte zwischen die Verticalkreise in der Höhe des Gestirns einen Kreis, der aber kein Circulus maximus ist, so heißet ein solcher Kreis **Almucantharat.** So sind z. E. Fig. 34. ts, mr **Almucantharats.** Alle Himmelskörper herum, wodurch ein Almucantharat gehet, werden also auch eine gleiche Höhe über dem Horizonte haben. Weil die Almucantharats mit dem Horizonte parallel liegen, alle Verticalkreise aber senkrecht auf dem Horizonte stehen, wie wir eben vorgetragen haben, so werden sie auch auf die Almucantharats senkrecht hindurch gehen, oder diese Cirkel die Almucantharats unter rechten Winkeln schneiden. Es sey nun aber die Höhe eines Gestirns hoch oder niedrig über dem Horizonte, so siehet man nunmehro leicht selbst, da ein Verticalkreis durch das Zenith gehet, da vom Zenith bis anf den Horizont 90° sind, daß auf den Verticalkreisen das, was einem Gestirn noch an seiner Höhe bis ans Zenith fehlet, das Complement seiner Höhe zu 90° seyn müsse. So ist Fig. 34 der Bogen sZ oder rZ, das Complement der Höhen der Sterne s oder r zu 90°.

§. 184. Derjenige **Verticalkreis**, darinn sich die Sonne befindet, wenn es eben vor dem Zuschauer Mittag ist, heißt der **Meridian.** Er gehet auch, wie wir nachher zeigen werden, nicht nur durchs Zenith, sondern auch durch die **Weltpole.** Da man unzählig viel Verticalcirkel auf den unzählig vielen Horizonten stellen kann, und die Sone alle 24 Stunden dem Anschein nach, um den ganzen Himmel gehet, und also durch alle diese Verticalkreise durchkömmt,

so muß es auch unendlich viel Meridiane geben, und im eigentlichen Verstande muß jeder Punkt auf der Erde seinen eignen Meridian haben.

§. 185. Man hat den Circulum maximum, welchen man den **Horizont** nennet, in vier Haupttheile, deren jeder die Größe eines Quadranten hat, getheilet, so wie man auch Tag und Nacht in 4 Haupttheile getheilet hat. Die vier Punkte des Horizonts, worauf diese Theilungen treffen, hat man **Morgen, Mittag, Abend** und **Mitternacht** genennet. Wenn die Sonne am Mittage gerade im Meridian stehet, und man ist ihr gerade gegen über, so ist da gerade vor einem der **Mittagspunkt**, gerade hinter mir, 180° vom Mittagspunkte der **Mitternachtspunkt**. Zur linken Hand 90° vom Mittags- oder Mitternachtspunkte der **Morgenpunkt**, und 90° Grad zur rechten Hand hin der **Abendpunkt**.

Zwischen diesen vier Hauptabtheilungen liegen noch Unterabtheilungen, zwischen zweyen allezeit sieben, so, daß überhaupt zusammen 32 Abtheilungen des Horizonts statt finden. Hiernach hat man auch 32 Winde benennet. Wenn es Mittag ist, um 12 Uhr stehet die Sonne alle Tage in Süden, über dem wahren Südpunkte, und um Mitternacht alle Tage in Norden, über dem wahren Nordpunkte; aber nicht alle Tage des Morgens um 6 Uhr in Osten, über dem wahren Ostpunkte, und des Abends um 6 Uhr in Westen, über dem wahren Westpunkt. Am 21 Merz und am 28 September ist beydes bey ihrem Aufgan-

ge

ge und Untergange, die übrige Zeit ist der Punkt, wo sie aufgehet, mehr oder weniger entfernet von Osten, und wo sie untergehet, mehr oder weniger entfernet vom wahren Westpunkte, und gleichfalls ist sie nicht alle Tage um 6 Uhr Morgens oder Abends in Osten oder Westen.

Man nennet den Bogen vom **wahren Ost-** oder **Westpunkte** bis an den Punkt, wo die Sonne oder ein andres Gestirn auf- oder untergehet, die **Morgenweite** (amplitudinem ortivam) und die Abendweite (amplitudinem occiduam). Sonne und Mond ändern täglich ihre Morgen- und Abendweite, und gehen an einem andern Orte auf und unter, aber die Fixsterne niemals, wenigstens kann man es durch Jahrhunderte so annehmen. Wenn Fig. 34 in A der Ostpunkt, und in B der Westpunkt Fig. 34. wäre, und die Sonne, oder ein andres Gestirn gienge in p auf und in v unter, so ist der Bogen des Horizonts Ap die **Morgenweite**, und der Bogen Bv die **Abendweite**. Es ist dieses für jeden Ort auf der Erde ein andrer Bogen, weil jeder Ort einen andern Horizont in einer andern Lage hat.

§. 186. Der Circulus maximus nun, welchen man den **Horizont** nennet, wird, wie jeder Cirkel, in 360° getheilet, und in Graden zählet man auch, wie ganz natürlich ist, die **Morgen-** und **Abendweite**. Die Mathematiker haben aber die Einrichtung so gemacht, daß man von Osten und Westen anfängt, wo beyderseits 0 Grad ist, und zählet denn fort, von Osten nach Süden und auch nach Norden, und gleichfalls von Westen nach Süden,

und auch nach Norden, wo also auf Süden und Norden, sowol von Osten, als Westen an, 90° zu stehen kömmt.

§. 187. Wir wollen uns nun noch einmal den Verticalkreis gedenken, der gerade vom **Zenith** auf den Punkt, wo Süden ist, auf dem Horizont stehet und so weiter um die Kugel gezogen ist, so kommt er auf der entgegengesetzten Seite gerade durch Norden. Es mag Fig. 35 der Kreis ZAFB dieser Verticalkreis seyn, es sey in A der Mittagspunkt, und in B der Nordpunkt, in M sey Osten und in N sey Westen. Der Circulus maximus ANBM soll den Horizont vorstellen; in p stehe ein Gestirn, wodurch ein Verticalkreis vom Zenith herab auf den Horizont geleget ist, so heißt der Winkel, den dieser durchs Gestirn gelegte Verticalkreis Zpr mit dem Verticalkreise durch Süden ZA oder den Meridian oben am Zenith machet, oder der Winkel rZA das Azimuht des Sterns. Es wird dieser Winkel durch den Bogen des Horizonts Ar, der um 90° davon entfernt ist, oder auch durch das Complement dieses Bogens zu 180° gemessen, der Stern stehe auf dem Verticalkreise hoch oder niedrig, und daher heißt auch dieser Bogen Ar des Horizonts eben so wol das Azimuht dieses Sterns. Man zählet aber die Azimuhtalischen Grade auf folgende Art. Man fängt von Süden an, und zählet von Süden durch Osten bis Norden 180° Eben so zählet man auch von Süden durch Westen bis Norden 180°. Von Süd durch Ost nach Nord, heißt nun das **östliche Azimuht**; und von Süd durch West nach Nord wird das **westliche**

Fig. 35.

che Azimuhr genennet. Es sey in Fig. 35, wo in M Osten, das Gestirn p, der Bogen Ar sey 45°; so ist das östliche Azimuhr des Gestirns p = 45°, und so groß ist auch der Winkel rZA. Es würde also eine Definition des Azimuhts seyn: es sey ein Bogen des Horizonts zwischen dem Meridian und dem Verticalkreis, der vom Zenith durch den Stern geleget ist.

§. 188. Achtzehn Grade unter dem Horizonte auf einen Verticalcirkel gezählet, mit dem Horizonte also parallel, gedenket man sich einen Cirkel, welchen man den Dämmerungscirkel nennet. Man hat aus Berechnung und Erfahrung, wenn die Sonne vor ihrem Aufgange oder nach ihrem Untergange diesen Cirkel erreichet, daß alsdenn für den Ort, dem obiger Horizont zugehöret, die Morgendämmerung anfänget und die Abenddämmerung aufhöret, wir berühren das jetzt nicht dabey, daß die Beschaffenheit der Atmosphäre hierinn einige kleine Veränderung verursachen kann. Weil die Sonne in der gemäßigten Zone, in den langen Sommertagen, nicht 18° unter den Horizont sinket, so höret auch um diese Zeit die Dämmerung die ganze Nacht nicht auf.

§ 189. Die Erfahrung lehret es uns, daß alle 24 Stunden der ganze Himmel mit allen seinen Gestirnen um uns herum von Osten nach Westen sich zu wälzen scheinet, welches man, wie wir schon erwähnet haben, die tägliche Bewegung nennet. Es ist aber längst bewiesen worden, daß das nur so scheinet, und daß eigentlich die Erde einmal in 24 Stun-

den sich von Westen nach Osten herumdrehet, und die Sonne und Gestirne still stehen. Wenigstens kann man es annehmen, ohne eben zu irren, ob es schon nicht strenge richtig ist, weil der Irrthum erst in Jahrhunderten bemerkbar wird, von den Planeten aber, und noch viel weniger von dem Monde darf man es nicht sagen.

Es ist aber ganz natürlich, da die Erde eine Kugel ist, und sich um sich selbst drehet, von Westen nach Osten, daß also die Oerter auf der Erde, die mehr nach Osten liegen, als der Ort, wo man selbst wohnet, die himmlischen Körper, und also auch die Sonne, früher sehen als wir, aber auch eher wieder verliehren, und daß die mehr Westlichen als wir, sie später als wir sehen, aber auch später verliehren. Man siehet auch schon zum voraus ein, daß sich die Zeit, um wie viel dieses ist, leicht wird berechnen lassen, und daß, wenn man den Cirkel in 360° theilet, die in 24 Stunden herum kommen, auf jede 15 Grad eine Stunde kommen wird. Es kömmt nur darauf an, daß man weis, um wie viel Grad ein Ort mehr östlich oder westlich ist. Doch davon weiter unten.

Ferner ist es auch begreiflich, daß, da die Erde sich um sich selbst drehet, an den beyden äußersten Enden der Kugel sich ein Punkt befinden muß, da einer dem andern gerade entgegengesetzt ist, darum sie sich drehet. Man nennet diese beyden Punkte die **Pole** der Erdkugel, und wenn man diese beyden Punkte durch eine gerade Linie zusammen hänget, so heißt diese gerade Linie die **Axe** der Erdkugel.

Es

Es sey Fig. 36 diese Kugel AMBN, sie drehe sich um sich selbst von M nach N, so sind A und B ihre Pole, und AB die Axe der Erdkugel. Man nennet den einen Pol den **nördlichen Pol**, und den andern Pol den **südlichen Pol**. Diese Erdaxe, bis an den Himmel verlängert zu beyden Seiten, trift auch auf zwey Punkte, die der nördliche und südliche Pol heißen. Da man sich die Erde als das Centrum in der holen Himmelskugel nach den äußerlichen Erscheinungen vorstellen kann, und der Himmel um sie herumgehet, so muß er sich um diese beyden Punkte wälzen, und in diesen beyden Punkten ein Stern, den sie da träfe, still zu stehen scheinen. Es sey Fig. 37, der kleine Cirkel die Erde, der große die hole Himmelskugel, A und B die Pole der Erde, A der südliche Pol, B der nördliche Pol, AB die Erdaxe, sie mag zu beyden Seiten bis an die hole Himmelskugel nach C und D verlängert seyn, so ist in C der südliche Pol am Himmel, und in D der nördliche. Wenn also die Erde **beständig** in der Lage bleibet, und beständig alle 24 Stunden sich einmal um ihre Axe wälzet, so wird es nothwendig scheinen müssen, als ob der ganze Himmel sich einmal in diesen 24 Stunden herumgewälzet hätte, die Punkte C und D aber immer stille stünden. Fig. 36. Fig. 37.

§. 190. Da die Erde sich von Westen gegen Osten herumdrehet, so müssen alle Gestirne in der östlichen Gegend des Himmels aufzugehen, und in der westlichen Gegend unterzugehen scheinen. Den Cirkel, den sie alsdenn beschreiben, so lange sie über dem Horizont des Beobachters sind, nennet man ihren **Tagebogen**.

§. 191.

Fig. 37. §. 191. Wenn man Fig. 37. auf der Erdkugel von dem Pol an, zu beyden Seiten 90 Grad, oder den halben Bogen gegen den andern Pol zu nimmt, und hiedurch einen Circulum maximum leget, so theilet der, wie hieraus folget, die Erdkugel genau in zwey Halbkugeln, und heißt daher der **Aequator**. Er wird auch oft schlechtweg die **Linie** genannt. Es seyn Fig 37 A und B die Pole der Erden, von B bis E oder bis F, von A nach E und nach F 90°, so ist EF der Durchmesser des Cirkels, welchen man den **Aequator** nennt. Es werde nun sene Ebene erweitert bis an die scheinbare hohe Himmelskugel, so entstehet dadurch der **Aequator** am Himmel. Fig. 37 G und H sind zwey Durchschnittspunkte dieses Aequators am Himmel. Es ist also sowol die Erdkugel als die Himmelskugel durch die Ebenen der Weltaxe und des Aequators in 4 Quadranten abgetheilet. So ist auf der Erdkugel der Bogen BF = BE = AE = AF = 90°, und gleichfalls am Himmel der Bogen DG = DH = CG = CH = 90°. Wenn B und D die nördlichen Pole auf der Erden und am Himmel sind, und A und C die südlichen Pole, so wird auch durch den Aequator sowol die Erde als Himmelskugel in zwey Halbkugeln, die nördliche und die südliche Halbkugel getheilet.

§. 192. Es ist sehr leicht zu begreifen, da die scheinbare tägliche Bewegung der Sonne und der Gestirne von der Umwälzung der Erde herrührt, und von Osten nach Westen zu gehen scheinet, gleichfalls der Aequator am Himme von Osten nach Westen sich

zu

zu bewegen scheinen, und in 24 Stunden einmal herum kommen muß. Ferner folget daraus, daß diese Bewegung der himmlischen Körper, da die Erde immer in der Lage bleibet, in Parallelkreisen mit dem Aequator geschehen muß. Die Menschen, welche also auf der Erde unter dem Aequator wohnen, müssen die Sonne und Gestirne in Parallelkreisen in der östlichen Gegend aufgehen, und in der westlichen Gegend untergehen sehen, ob sie schon sehr verschiedne Tagebogen haben, und der Pol gerade an ihrem Horizonte lieget. Alle Sterne müssen ihnen auch auf- und untergehen.

Wenn Menschen unter den Polen wohnten, die also den Aequator im Horizonte, und die Pole im Zenith und Nadir haben, so können die nur die Sterne der einen Halbkugel sehen, es muß ihnen von diesen nie ein Stern auf- oder untergehen, sondern sie müssen sich alle im Cirkel herum bewegen, ob sie schon verschiedne Höhen am Himmel haben.

Denen, die weder unter dem Aequator noch den Polen wohnen, müssen die mehresten Sterne auf- und unterzugehen scheinen, nur die nach dem Pole an der Seite der Halbkugel wohnen, nicht, und von diesen letztern mehr oder weniger, nachdem sie nahe oder weit von den Polen wohnen, auch muß ihnen die Bewegung der Sterne schief über die Erde zu gehen scheinen. Z. E. Fig. 38.

Es sey CD die Weltaxe, B der Nordpol auf der Erde, D der Nordpol am Himmel, GFEH der Aequator, womit die Gestirne Parallelkreise beschreiben, so würden denen, die in B wohneten, die Gestirne

sterne sich immer in Cirkel herum zu bewegen scheinen, und alle bis an den Aequator GH nie untergehen, so wie sie die Gestirne auf der andern Seite des Aequators auch nie sehen würden. Denen, die unter dem Aequator FE wohnen, wenn G Morgen und H Abend ist, von der Seite CD nach der entgegengesetzten Seite sich bewegen, und müßten ihnen alle Sterne auf- und untergehen, und nur die nach den Polen hin sehr kleine Bogen beschreiben, und der Polarstern im D im Horizonte stehen. Welche zum Beyspiel in L wohneten, hätten nun zum Horizonte PNMQ, weil von L bis M oder N 90° sind. Stellet man sich nun die Bewegung der Sterne mit dem Horizonte parallel vor, so siehet man gleich, daß denen die Gestirne schief auf- und untergehen, daß die nahe an dem Nordpol sind, ihnen gar nicht untergehen, und die näheren an dem Südpol ihnen gar nicht aufgehen werden. Es ist nicht schwer zu berechnen, wenn der Ort, wo jemand auf der Erde wohnet, (nach datis davon weiter unten) gegeben ist, welche Gestirne ihm auf- und untergehen, welche ihm gar nicht untergehen, und welche ihm gar nicht aufgehen.

§. 193. Da Fig. 38 auf der Erde von den Polen B und A bis an den Aequator FE 90° sind, so lassen sich vom Aequator bis an die Pole unendlich viele Cirkel legen, die mit dem Aequator **parallel** sind. Die Peripherien dieser Parallelcirkel werden immer kleiner, bis endlich in den Polen nur ein Punkt aus der Peripherie wird. Eben so kann man die Ebnen dieser Parallelcirkel, sich bis an den Himmel erweitert vorstellen, da sie denn ebenfalls

falls immer kleiner werden, bis sie endlich in den Polen nur einen Punkt ausmachen.

§. 194. Der größte dieser Parallelcirkel ist also der Aequator GH Fig. 38, welches ein Circulus maximus ist. Man wird es sich leichter vorstellen können, daß er beständig den wahren Morgen und Abend durchschneidet, wenn man bedenket, daß er die Erde und den Himmel genau in die nördliche und südliche Hämisphäre theilet, und also gerade von Abend nach Morgen gehen muß.

Da er ein Circulus maximus ist, und der Horizont auch ein Circulus maximus ist, so müssen sich diese beyden Cirkel halbiren; (§. 423 Geom. im 2ten Theile) ob nun schon der Horizont unbeweglich bleibt, der Aequator aber sich mit herum beweget, so muß doch daher an jedem Orte von ihm 180° beständig über dem Horizonte seyn, außer unter den Polen, wo er selbst im Horizonte lieget. Er wird auch für jeden Ort auf der Erde, da jeder Ort seinen eignen Horizont hat, in einer unveränderlichen Lage bleiben.

Man zählet die Grade des Aequators von Abend gegen Morgen fort, und zwar in eins fort bis 360°, und fänget also in Westen mit Null an. Die Grade des Aequators auf der Erde werden nun die **Grade der Länge** genannt, und die Grade desselben am Himmel heißen Grade der **Rektascension** oder der **geraden Aufsteigung**; doch hiervon deutlicher §. 208 und 209. Die Grade der **Parallelkreise** mit dem **Aequator** werden zwar gleichfalls von Abend gegen Morgen gezählet, in eins fort bis 360°. Allein da die Parallelkreise

keine

keine Circuli maximi sind, so sind an den Oertern, wo man den Nordpol sehen kann, die näher an den Nordpol sind, gänzlich, und alle übrigen mehr als die Hälfte über den Horizonte sichtbar. Hingegen die jenseits des Aequators nach Süden hin sind, da ist für die, welche so wohnen, daß sie den Nordpol sehen können, weniger als die Hälfte der Parallelcirkel über dem Horizonte, und die nahe an dem Südpol erscheinen ihnen gar nicht. Wo man nur den Südpol sehen kann, wird eben das Gegentheil statt finden; die Parallelcirkel um den Südpol ganz sichtbar, und die andern mehr als die Hälfte, die nördlichen weniger als die Hälfte, und die um den Nordpol ganz unsichtbar. Unter dem Aequator siehet man alle Parallelcirkel halb, und unter den Polen siehet man sie bis an den Aequator ganz. Es sind auch diese Parallelkreise mit samt dem Aequator **die Tagebogen** der himmlischen Körper.

§. 195. Wir haben schon im §. 184. von dem Verticalkreise etwas geredet, welchen man den **Meridian** nennet, und wo die Sonne, wenn sie sich darin befindet, den Mittag machet. So wie nun der **Aequator** die Erde in die **südliche** und **nördliche** Hälfte theilete, weil dieser Circulus maximus von Abend gegen Morgen gieng, so theilet jeder Meridian **für den Ort des Zuschauers nemlich** in die **östliche** und **westliche** Hälfte. Es gehet aber jeder Meridian nicht nur, wie wir schon gehabt haben, durchs Zenith und Nadir, sondern auch durch die Pole und stehet also sowol auf dem **Horizonte** als auf dem **Aequator** senkrecht

(§

(§. 429. Geom. im 2ten Theile). Man begreifet leicht, daß der Meridiane unendlich viele seyn müssen. Wenn man von Osten nach Westen oder von Westen nach Osten gehet, so bekömmt man für jeden Schritt, ja im strengen Verstande für jeden Punkt einen andern Meridian, und man kann nur auf eben demselben Meridian bleiben, wenn man gerade nach Norden oder Süden seine Reise fortsetzte. Man zählet die Grade des Meridians, sowohl am Himmel als auf der Erden, vom **Aequator** an bis zu den **Polen**, jedesmal von 0 an bis 90°. Am Himmel heißen diese Grade **Grade der Declination** oder Grade der **Abweichung**, das ist der Abstand eines Gestirns vom Aequator nach dem Nord- oder Südpol hin. Auf der Erde werden diese Grade **Grade der Breite** genannt, oder sie zeigen den Abstand an, um wie viel Grade, Minuten, Secunden ein Ort vom Aequator entfernet liege.

Wenn man durch diese Grade parallel Cirkel mit dem Aequator leget, und ihre Ebenen bis an den Himmel vergrößert, so siehet man leicht ein, daß alle Oerter auf der Erde, die in einem solchen Parallelcirkel liegen, einen gleichen Abstand vom Aequator, oder gleiche **Grade der Breite** haben. Eben so alle Sterne, die in einem solchen Parallelcirkel sind, werden eine gleiche **Declination** haben müssen.

§. 196. Die Grade der Meridiane nach dem Nordpole hin werden Grade der **nördlichen Breite**, und die nach dem Südpole hin Grade der **südlichen**

chen **Breite** auf der Erde genennet. Am Himmel nennet man sie, die **nördliche** oder **südliche Declination** eines Gestirns.

§. 197. Wenn die Sonne oder ein ander Gestirn den Meridian eines Orts erreichet hat, in seiner täglichen Bewegung, so stehet es für diesen Ort am höhesten über den Horizont am Himmel, und man nennet das: **es culminire.** Weil der Meridian für jeden Ort die Kugel des Himmels in die östliche und westliche Hälfte theilet, so ist dieser Bogen vom Orte, wo das Gestirn aufgehet, genau die Hälfte des Weges, den es auf seinem Tagebogen an der holen Himmelskugel vom Aufgange bis zum Untergange zu machen hat. Es muß also nothwendig, wenn es diesen Cirkel erreichet hat, seinen höhesten Stand haben, und nachher wiederum, so wie es gestiegen ist, nach dem Horizonte herabsinken.

Fig. 39. §. 198. Es mögen Fig. 39. a und b die beyden Pole seyn, adbe ein Meridian, die andern Cirkel nach den Polen oder von a nach b hin alle Meridiane. Die Sonne stehe in dem ersten Meridian adb hoch oder niedrig. Sie stehe z. E. in P, so werden alle die Oerter, die in dem halben Meridian adb liegen, sie liegen auf welchem Grade der Breite sie wollen, alle Mittag haben, und die Sonne am höhesten stehen sehen, (obschon an jedem Orte sie eine andre Höhe über dem Horizont haben wird,) wenn es nicht die Declination der Sonne verhindert, daß sie selbige gar nicht sehen (davon weiter unten).

Die

Die Oerter, die auf der entgegengesetzten Seite des Meridians in dem halben Meridian aeb liegen, haben alle Mitternacht.

Da sich die Erde um ihre Axe in 24 Stunden von Westen nach Osten drehet, und die Sonne als stillstehend betrachtet wird, so werden alle Meridiane, die auf der Erden sind, nachgerade durch diesen Verticalkreis, darinn die Sonne stehet, und welchen man den **Hauptmeridian** nennen könnte, gehen, und in der Ordnung Mittag haben. Wenn also ein Ort Mittag hat, so haben die mehr westwärts liegenden Oerter noch Vormittag. Die Oerter, die mehr ostwärts liegen, als der Ort, wo es eben Mittag ist, haben schon Nachmittag, weil ihr Meridian schon durch den Hauptmeridian gegangen ist. Es folget auch daraus, daß alle die Oerter, welche unter einem Meridian, oder gleichen Grade der Länge liegen, sie mögen nahe oder weit von den Polen liegen, eine nördliche oder südliche Breite haben, auch gleiche Stunden zählen müssen.

§. 199. Es gehet nun die Erde in 24 Stunden einmal um ihre Axe; es gehen also in einer Stunde $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$ des Aequators durch den Hauptmeridian, in einer Minute $\frac{15^\circ}{60} = 15'$ und in Secunde $\frac{15'}{60} = 15''$. Die Menschen also, welche 15° mehr ostwärts wohnen, oder deren Grade der Länge um 15° verschieden sind, haben eine Stunde früher

Mittag und die um 15° mehr westwärts wohnen, eine Stunde später Mittag, und so differiren alle Stunden, die sie zählen, von einander. Es läßt sich leicht berechnen, wie viel es für mehrere Grade auch Minuten und Secunden bringet.

§. 200. Jeder Meridian auf der Erde ist eigentlich der **erste** Meridian. Indessen haben doch alte und neuere Geographen verschiedne Oerter angenommen, wodurch sie den ersten Meridian gezogen, oder von welchen sie die Grade oder Länge auf der Erde zu zählen angefangen haben. So nahm man zu Ptolomäus Zeiten den ersten Meridian bey den Glücksinseln, welches das entfernteste Land nach Abend war, das man zu der Zeit kannte. Verschiedene Geographen haben ihn durch eine der azorischen Inseln del Corvo, andre durch die Inseln des grünen Vorgebürges, oder auch durch den Pic von Teneriffa, als z. E. die Holländer, gezogen. Seit 1634 haben die Franzosen den ersten Meridian mitten durch die Insel Ferro, welche eine der Canarischen Inseln ist, angenommen, so daß Paris genau 20 Grad mehr nach Osten oder unter dem 20sten Grad der Länge liegt. Oft zählet man auch von einer großen Stadt die Meridiane an, als vom Meridian von London, Paris, Berlin ꝛc.

§. 201. Wir haben es schon gesaget, daß man vom Aequator an, auf einem Verticalcirkel, die Grade der Breite zählet, oder um wie viel ein Ort vom Aequator nach den Polen zu liege. Man nennet dieses auch wohl seine **Polhöhe**. Eigentlich zeiget

zeiget zwar dieses Wort nur an, um wie hoch der Weltpol über den Horizont eines Orts erhaben ist, indessen ist dieser Ausdruck doch völlig unschädlich, wie wir gleich zeigen werden.

Erstlich wollen wir dazu zeigen, daß die Polhöhe und Aequatorhöhe über dem Horizont zusammen 90° ausmache. Es sey Fig. 40. Z das Zenith eines Orts, so ist HR der Horizont. Ferner sey NS die Erdaxe, so sind N und S die Pole und NR ist die Polhöhe über dem Horizont des Orts, dessen Zenith Z und Horizont HR ist. Es sey AQ der Aequator, so ist der Bogen HA die Aequatorhöhe für diesen Ort. Der Kreis ZRQH sey der Meridian. Wir behaupten nun, daß $NR + HA = 90°$. Fig. 40.

Weil AQ der Aequator ist, so ist der Punkt N sein Pol. Also

$$AN = 90° \text{ §. 191.}$$

ferner $HA + AN + NR = 180°$

$$HA + AN + NR - AN = 180° - 90° = 90°$$

oder $HA + NR = 90°$

oder die Polhöhe und Aequatorhöhe zusammen über dem Horizont ist $= 90°$.

ferner da NR + NZ = 90°
HA + AZ = 90°
aber HA + NR = 90° aus dem vorhergehenden
so ist AN = 90° = NZ + AZ.
nun ist NR + NZ = 90°
NZ + AZ = 90° eben aus dem vorhergeh.
NR + NZ = NZ + AZ
NR = AZ

oder der Bogen der Polhöhe über dem Horizont ist eben so groß, als der Bogen von der Höhe des Aequators an bis zum Zenith, oder der Bogen der Polhöhe ist das Complement der Aequatorhöhe zu 90°.

Da der Bogen AZ = dem Bogen NR, der Bogen AZ aber in Ansehung der Zahl der Grade gleich dem Bogen aZ auf der Erde, aber aZ **Grade der Breite** sind auf der Erde vom Punkte des Aequators a an gezählet nach n hin, so wird es ganz richtig seyn, daß die Grade der Breite auf der Erde **gleich** den Graden der Elevation des Pols über dem Horizont, und man eins fürs andre nehmen kann, oder Polhöhe und Grade der Breite auf der Erde als gleichbedeutende Wörter betrachtet werden können.

§. 202. Wir lassen uns hier nicht darauf ein, wie man mit einem Quadranten die Polhöhe an dem Polarstern, wenn er durch den Meridian gehet, oder durch Beobachtung eines andern bekannten Sterns, oder Sonnenhöhen oder durch einen Gnomon findet.

Etwas

Etwas wird davon weiter unten, unter den aufzulösenden Problemen noch vorkommen, ob man schon hier keine Beschreibung der hiezu erforderlichen Instrumente und ihrer Behandhabung suchen darf.

Die Grade der Länge auf der Erde findet man durch die Verfinsterung der Jupitertrabanten, der Bedeckung eines Sterns durch den Mond, der Mond- und Sonnenfinsternissen ꝛc., wodurch man die Differenz zweyer Meridiane in Zeit findet, weil diese Erscheinungen von allen, wo das Gestirn oder der Mond über dem Horizont erhaben ist, in eben dem Augenblicke gesehen werden. Man kann nun die verschiedne Stundenzahl Zeit, da dieses geschiehet, leicht in Bogen des Aequators verwandeln, da man weiß, daß auf eine Stunde 15 Grade gehen, und dadurch die Differenz zweyer Meridiane, und die Grade der Länge finden.

Wenn man den Grad der Länge eines Orts auf der Erde weiß, und auf seinen Grad der Breite, so weiß man den Punkt, wo er auf der Erde liegt, weil dadurch seine Entfernung von einem bekannten Meridian oder von dem ersten, z. E. von der Insel Ferro, ost- oder westwärts, und seine Entfernung vom Aequator bestimmet wird, welches nur einem Punkte auf der Kugel zukommen kann. Dieses ist der Grund der Zeichnung der **Erdgloben.**

§. 203. Wenn es bekannt ist, unter welchen Graden der geographischen **Länge** und **Breite** zwey Oerter liegen, so ist es leicht, ihre Entfer-

nungen von einander zu bestimmen, welches ein Bogen eines Circuli maximi zwischen ihnen ist, weil zwischen zwey Punkten auf der Kugel der Bogen eines Circuli maximi immer der kürzeste Weg ist (§. 445. Geom. im 2ten Theile); doch davon weiter unten.

§. 204. Die Erfahrung lehrte es, daß die Sonne nicht immer an einem Orte am Himmel auf- und untergieng, nicht immer am Himmel am Mittage eine gleiche Höhe hätte, sondern im Sommer hoch und im Winter niedrig stünde, und daß sie nur zweymal im Jahre eine gleiche Höhe bekäme. Aus der Beobachtung dieser Phänomenen, und da man zugleich bemerkte, daß die Sonne sich täglich den mehr östlichen Sternen näherte, welches man daraus wissen konnte, wenn man die Sterne bemerkte, die später als sie an dem Tage durch Meridian untergiengen, schlossen schon die alten Astronomen, daß die Sonne neben ihrer täglichen Bewegung, da sie in 24 Stunden um die Erde gienge, auch eine jährliche Laufbahn haben müßte, darauf sie 365 Tage zubrächte, denn man fand sie nach so langer Zeit bey eben den Sternen wieder, daß sie in dieser Laufbahn ohngefähr täglich einen Grad zurücklegen müßte, und daß ihr Weg von Westen nach Osten zugehen müsse. Oder vielmehr die Erde gehet, außer ihrer täglichen Ueberkugelung oder Bewegung um ihre Axe, auch noch in einer Laufbahn herum, die sie alle Jahr zu Ende bringet, da es denn, weil die Laufbahn um die Sonne gehet, es nothwendig scheinen muß, daß sie sich eben in dem entgegengesetzten Theile der Laufbahn

befände. Dieser Lauf der Erde um die Sonne muß also von **Osten** nach **Westen** seyn. Die **ganz genaue** Zeit, die die Erde gebraucht, um die Sonne zu gehen, hat man erst später durch mancherley Berichtigungen gefunden. Die Erde gebrauchet ihre Zeit zu durchlaufen, 365 Tage 6 Stunden 9 Minuten 11 Secunden. Daher die Einrichtungen des Calenders mit dem Schaltjahre, daher der Fehler des Julianischen Calenders, wo man die Minuten negliget hat, und daher die völlige neuere Einrichtung des Calenders, wo zu gewissen Zeiten ein außerordentliches Schaltjahr, um die Minuten und Secunden nachzuholen. Doch davon können wir nichts weitläuftig reden.

Aus den Beobachtungen der Höhe der Sonnen vorzüglich an den kürzesten und längsten Tagen, und dem Tage der Nachtgleichen an einem Orte hat man die Lage dieses Circuli maximi, welchen die Sonne jährlich zu beschreiben scheint, gefunden, und leichtlich bemerket, daß er nicht mit dem Aequator einerley Lage habe, oder in dessen Ebene fiele, (denn sonst müßte sich die Sonne täglich im Aequator herum bewegen und alle Tage müßten gleich lang seyn), sondern mit dem Aequator einen Winkel von $23\frac{1}{2}$ Grad, oder nach den neuern Observationen von $23^{\circ}\ 28'$ und noch ungefähr bis an 40 Secunden, (als über die Secunden man noch nicht völlig einig ist) ausmache. Wir wollen in den folgenden Auflösungen der Problemen diesen Winkel zu $23^{\circ}\ 29'$ annehmen. Der Irrthum, welcher hieraus entstehen könnte, wird für unsre Betrachtungen unbedeutend seyn.

Man nennet diesen Circulus maximus, den die Sonne jährlich zu beschreiben scheinet, oder diese Sonnenbahn die **Ekliptik**.

Fig. 41. Es sey Fig. 41 AQ der Durchschnitt der Ebene des Aequators, so wird EK der Durchschnitt der Ebene der **Ekliptik** und der Winkel ACE = KCQ = 23° 29′ seyn. Man gedenke sich den Bogen KCE am Himmel, und seine Ebene wird auch durch die Erde, die man sich **mitten** in der holen Himmelskugel gedenket, durchgehen, und auf ihrer Oberfläche eben den Cirkel unter eben der Lage gegen ihren Aequator bilden. Wenn man die Bogen KQ und AE um 90° von dem Winkel C ablieget, welches der Ort seyn wird, wo die Sonne den höchsten Punkt in der Ekliptik erreichet hat, so wird KQ = AE = 23° 29′ seyn, die also diesen Winkel der Ekliptik mit dem Aequator messen.

Die **Pole** der **Ekliptik** werden also eben so viel Grade, nemlich 23° 29′ von den Polen des Aequaters T und U in N und S liegen. Die Sonne beschreibet nun in ihrer täglichen Bewegung Parallelkreise mit dem Aequator AQ. Am 23 September und 21 Merz ist ihr Tagebogen **gerade** der Aequator selbst, von da steiget sie für die nördliche Halbkugel immer weiter in die Höhe bis K, welchen Punkt sie den 21 Junius erreichet, und immer Parallelcirkel mit dem Aequator beschreibet, die durch einen Punkt der Ekliptik gehen, wenigstens scheinet das so wegen der Ueberkugelung der Erde, ob sie

schon

schon würklich in einem Punkte der Ekliptik stille stehet. Eigentlich muß sie Spirallinien zu beschreiben scheinen; weil sie immer in ihrer Laufbahn forteilet.

Wenn sie den 21 Junius den höhesten Punkt der Ekliptik erreichet hat, so senket sie sich nun wieder, bis sie am 23 September wieder die Bahn über dem Aequator beschreibet. Sie sinket für die nördliche Halbkugel immer weiter herunter und für die südliche hinauf, bis an den Punkt E, den sie am 21 December erreichet, von da sie wieder für die nördliche Halbkugel in die Höhe kömmt, und für die südliche sinket, bis sie am 21 Merz wieder den Tagebogen auf dem Aequator AQ machet.

Wenn man eine Erd- oder Himmelskugel gehörig nach der Polhöhe richtet und denn in Bewegung um sich selbst setzet, so wird man sich dieses sehr deutlich vorstellen können.

§. 205. Schon die alten Astronomen haben diesen Cirkel in 12 Theile getheilet, und einem jeden Theil 30 Grad gegeben, und sie nach einem Sternbilde benennet, welches sich zu der Zeit würklich darinn befand, das aber jetzt nicht mehr darinnen, sondern viel weiter fortgerücket ist, wovon die Astronomen bey der Präcession der Tag und Nachtgleichen reden, wovon wir aber jetzt unsrer Absicht gemäß nicht handeln können.

Man nennet aber doch noch den Ort, wo sich die Sonne in der Ekliptik befindet, nach diesen

sen himmlischen Zeichen, ohngeachtet sie sich bey diesem Sternbilde nicht befindet. Man fängt von dem Punkte an, wo die Ekliptik den Aequator durchschneidet, und die Sonne ihren Tagebogen über dem Aequator macht.

Das erste himmlische Zeichen ist der **Widder** = ♈
das zweyte, der **Stier** = ♉
das dritte, die **Zwillinge** = ♊
das vierte, der **Krebs** = ♋
das fünfte, der **Löwe** = ♌
das sechste, die **Jungfrau** = ♍
dieses heißen auch die **nördlichen Zeichen**;
das siebente, die **Wage** = ♎
das achte, der **Scorpion** = ♏
das neunte der **Schütze** = ♐
das zehnte, der **Steinbock** = ♑
das eilfte, der **Wassermann** = ♒
das zwölfte, die **Fische** = ♓

Man hat diesen himmlischen Zeichen zu beiden Seiten der Ekliptik durch Parallelcirkel eine gewisse Breite gegeben, weil man in dieser Bande den Mond und die Planeten erblicket. Es ist aber hier nicht der Ort davon zu reden.

§. 206. Wo die Sonne den größten Abstand in der Ekliptik vom Aequator erreichet hat, hat man nach **Norden** und nach **Süden** hin einen Parallelcirkel mit dem Aequator geleget, der nach Norden hin, dessen Durchschnitt seiner Ebene Fig. 41 LK ist, heißt der **Wendecirkel des Krebses** (tropicus cancri) und der nach dem Südpol hin, dessen Ebene

Fig. 41.

Ebene Durchschnitt EM ist, heißt der **Wendecirkel des Steinbocks** (tropicus capricorni), weil sich die Sonne gleichsam bey beyden zu wenden scheinet. Am 21 Junius ist der Wendecirkel des Krebses der Tagebogen der Sonne, und am 21 December der Wendecirkel des Steinbocks. Der Bogen KM der Zone, welche beyde Wendecirkel einschließen, ist 23° 29′, 2 = 46°,158′ groß.

Es ist leicht begreiflich, daß also allen Bewohnern dieser Zone die Sonne jährlich an einem gewissen Tage am Mittage senkrecht über dem Kopfe stehen muß, und zwar denen, die an den beyden äußersten Enden dieser Zone, unter den Wendecirkeln des **Krebses** und des **Steinbocks** wohnen, **einmal** im Jahre, allen andern aber **zweymal** im Jahre, wie man aus der Betrachtung der Lage der Ekkliptik leicht siehet, und auch die Zeit oder der Tag, wanneher dieses geschiehet, läßt sich leicht finden (davon unten). Durch die Punkte, wo die Ekkliptik den Aequator durchschneidet, und wo also Tag und Nacht gleich sind, hat man einen Vertikal Circulum maximum geleget, wie auch durch die Punkte der Sonnenwende. Man nennet die erstern **Coluren der Tag- und Nachtgleichen**, und die letztern die **Coluren der Sonnenwende.** Sie gehören mit zu den andern Vertikalcirkeln, nur daß sie diese Oerter bezeichnen.

Durch die Pole der Ekkliptik Fig. 41 durch N und S sind mit dem Aequator AQ Parallelcirkel, deren Durchschnitte hier NO und RS sind, geleget, die also sowohl am Himmel als auf der Erden 23°

29′

29° von den Weltpolen, oder den Polen des Aequators abstehen. Sie heißen die **Polarcirkel** und liegen in einer Ebene mit den Polarcirkeln am Himmel. Auf der Erde haben nun diese mit dem Aequator parallel liegende vier Cirkel, nemlich die beyden Polar- und beyden Wendecirkel eine Abtheilung der Erdkugel in 5 **Zonen** verursachet. Es ist **eine heiße Zone**, die auf beyden Seiten des Aequators zwischen den Wendecirkeln lieget, und durch die Wendecirkel des Krebses und Steinbocks begränzt wird. Der Bogen KM, da zwischen sie lieget, enthält 46° 58'. **Zwey gemäßigte Zonen** auf beyden Seiten des Aequators, zwischen den Wendecirkeln und Polarcirkeln, oder zwischen den Bogen KO und MS. Jeder dieser Bogen enthält 43° 2', also beyde 86° 4'. **Zwey kalte Zonen**, von den Polarcirkeln an bis an die Pole. Der Bogen TO so wohl als US, enthält jeder 23° 29', also beyde 46° 58'. Alle diese Bogen zusammen von T bis U, machen also 180° aus. Ohngeachtet nun der Bogen TO so groß ist als der KQ, so siehet man doch leicht ein, daß die Uebersläche dieses Segments weit kleiner ist, als die Uebersläche der halben heißen Zone, die dichte beym Aequator um die Erde gehet, daß wir davon gar nicht zu reden nöthig haben.

§. 207. Aus dieser Lage der Erd- oder Sonnenbahn, wie man sie nennen will, lassen sich nun leichtlich die Verschiedenheiten der Tag- und Nachtlängen unter den verschiednen Polhöhen erklären. Die Erdaxe behält beständig einerley Richtung auf ihrer Laufbahn, und ihre Laufbahn hat, wie wir gezeigt

zeigt haben, eine schiefe Lage gegen den Aequator. Wenn also die Sonne ins Zeichen des Widders tritt, oder in Null ♈ stehet, also den Aequator zum Tagebogen hat, so muß, da allezeit die halbe Erde laut optischen Grundsätzen erleuchtet wird, alsdenn zu beyden Seiten des Aequators auf 90° hin, also bis unter die Pole die Erde erleuchtet werden. Es wird auch auf der ganzen Erde Tag und Nacht gleich seyn, weil die Sonne den Aequator als einen Circulum maximum zum Tagebogen hat, der Horizont eines jeden Orts aber auch ein Circulus maximus ist, also sich beyde Cirkel halbiren, und also an jedem Orte 180° vom Aequator immer über den Horizonte sind §. 194. folglich, wenn die Sonne im Aequator oder 0♈ ist, sie allenthalben so lange über als unter dem Horizonte seyn muß.

Es wird auch unter dem Aequator beständig Jahr aus Jahr ein Tag und Nacht gleich seyn, denn, da alle Tagecirkel der Sonne Parallelcirkel mit dem Aequator sind, da die Pole des Aequators, und also aller seiner Parallelcirkel den Bewohnern unter dem Aequator im Horizonte liegen, so wird nicht nur der Aequator als Circulus maximus, sondern auch jeder seiner Parallelcirkel daselbst vom Horizonte halbiret (§. 429 Geom. im 2ten Theil). Die Sonne ist also den Bewohnern unter dem Aequator täglich 12 Stunden über dem Horizonte.

Wenn die Sonne in Null Arietis = 0♈ im Aequator ist, ist sie auch unter beyden Polen am Himmel, und läuft sie daselbst um, nur wird man sie

hart am Horizont erblicken, wenn man auf keine Strahlenbrechung Rücksicht nimmt, die sie höher vorstellet. Rücket sie näher nach dem Wendecirkel des Krebses, so muß es unter dem Südpole Nacht werden, und die Sonne nun da gar nicht aufgehen, und zwar unter und um so viele Grade vom Südpole, Fig. 41. als sie sich, auf dem Bogen KQ gemessen, vom Aequator entfernet; unter dem Nordpole muß sie nun gar nicht untergehen, sondern beständig umlaufen. Die Sonne kömmt auch nun den Menschen, die auf der Seite des Aequators hin gegen den Nordpol wohnen, täglich höher, ihre Tage müssen also länger, und ihre Nächte kürzer werden. Unter dem nördlichen Polarcirkel selbst muß die Sonne so viel Grade, vom Pole T an gezählet, umlaufen, um so viel Grade sie höher auf dem Bogen KQ gerücket ist, und so hoch muß sie auch unter dem Nordpole selbst am Himmel stehen. Hat sie in K den Wendecirkel des Krebses erreichet, so muß es unter dem ganzen Polarcirkel, also von 66° 31′ nördlicher Breite an, gar nicht Nacht werden, sondern die Menschen, die Fig. unter dem Polarcirkel NO Fig. 41 wohnen, und 41. deren Horizont KE, oder die Ekliptik selbst ist, müssen die Sonne um Mitternacht zwar ganz am Rande des Horizonts, aber doch noch erblicken, unter dem ganzen südlichen Polarcirkel von Rs an, muß es denn völlig Nacht seyn, und die gerade darunter oder hart daran wohnen, die Sonne kaum erblicken, und ihr Tagebogen muß ungemein klein seyn.

Das Gegentheil von alle dem geschiehet, wenn die Sonne wieder niedersteiget. Kömmt sie wieder an

an den Aequator, so ist wieder auf der Erde Tag und Nacht gleich, und so wie sie sich dem Wendecirkel des Steinbocks EM nähert, fänget sie an den Ländern unter dem südlichen Polarcirkel umzulaufen und denen unter dem nördlichen Polarcirkel gar nicht aufzugehen, bis, wenn sie endlich den Wendecirkel des Steinbocks erreicht hat, es unter dem nördlichen Polarcirkel völlig Nacht ist.

Es müssen auch aus eben diesen Gründen die Tag und Nachtlängen auf der Erde, außer denen, die unter dem Aequator wohnen, verschieden seyn, und je näher nach den Polen hin, desto mehr verschieden werden. Unter den nachherigen Problemen wird eines vorkommen, wie man die Tag- und Nachtlänge an einem gegebnen Tage unter einer gegebnen Polhöhe berechnet.

So verschieden nun auch die Tag- und Nachtlängen durch alle Tage des Jahrs an einem Orte seyn mögen, so ist es doch sehr richtig, wenn man durchs ganze Jahr die Zeit zusammenrechnet, welche die Sonne für jeden Ort über und unter dem Horizont zubringet, und die Strahlenbrechung nicht in Anschlag bringet, daß für jeden Ort auf der Erde die Sonne genau die Hälfte des Jahrs über, und die Hälfte unter dem Horizonte ist, daß also jeder Ort gleich lange Tag und gleich lange Nacht hat. Das trift so gut unter dem Aequator als unter den Polen ein, wo die Sonne umläuft, als unter allen geographischen Breiten. Rechnet man mit auf die Strahlenbrechung, wodurch die Sonne immer et-

was höher scheinet, als sie würklich stehet, und man sie schon über dem Horizont erblicket, wenn sie noch nicht würklich aufgegangen ist, auch sie noch eine kurze Zeit stehet, wenn sie schon untergegangen ist, so stehet jeder Ort auf der Erde die Sonne das Jahr hindurch mehrere Zeit über dem Horizonte, als sie unter dem Horizonte zu seyn scheinet. Es ist also an jedem Orte alles durchs ganze Jahr zusammengenommen, länger Tag als Nacht, welches den Bewohnern der Länder unter dem Polarcirkel sehr zu statten kömmt, wo ohnedem die Strahlenbrechung stärker ist. Kömmt hiezu noch die Dämmerungszeit, so siehet man sehr einleuchtend, daß allen Bewohnern der Erde mehr Tag als Nacht zugetheilet ist, auch die Bewohner außer dem Aequator würklich mehr Lichtzeit als Finsternißzeit haben, als die unter dem Aequator haben, weil dort die Dämmerungszeit am kürzesten ist, indem die Sonne senkrecht daselbst unter den Horizont sinket.

§. 208. Wir haben noch einige Erklärungen nachzuholen, ehe wir zu den Auflösungen einiger Aufgaben als Anwendungen der sphärischen Trigonometrie schreiten.

Da die Sonne durch ihre Bahn die Ekliptik beschreibet, welche man in zwölf Theile oder himmlische Zeichen, jedes von 30 Grad groß, eingetheilet hat, so hat man von dem Punkt, wo die Sonnenbahn den Aequator durchschneidet, und den man, wie wir schon erwähnet haben, Null des Widders ♈ nennet, welches auch einer der Aequinoktialpunkte ist, auf den Graden der Ekliptik

tik zu zählen angefangen, und nennet die Entfernung der Sonne in Graden, von diesem Punkte an, **Grade der Länge.** So ist z. E. wenn die Sonne das Zeichen des Widders durchlaufen ist, und in das Zeichen des Stiers tritt, sie 30° von ♈ entfernet oder ihre Länge ist = 30°. Hat sie zum Exempel noch 10° 12′ im Stiere zu ückgeleget, so wäre ihre Länge 10° 12′ im Stiere, und sie wäre 40° 12′ nun von ♈ entfernet.

§. 209. Die Entfernung der Sonne vom **Nullgrad** des Widders, aber nicht wie im vorhergehenden Paragraphen in **Graden der Ekliptik**, sondern in **Graden des Aequators** wo man vom ♈ Grad des Widders, dem Durchschnittspunkte des Aequators mit der Ekliptik, anfänget, nennet man die **gerade Aufsteigung** der Sonne, oder ihre **Rektascension**. So ist z. E. Fig. 41. wenn C der Durchschnitt des Aequators nach der Ekliptik ist, oder = ♈ der Bogen CQ die **gerade Aufsteigung** der Sonne, wenn die Sonne eben den Wendecirkel des Krebses erreichet hat, da = 90°, und ihre Länge wäre denn CK auf dem Bogen der Ekliptik gezählet, welches hier, wenn sie eben den Wendecirkel erreichet hat, in 30° der Zwillinge seyn würde. Hatte die Sonne den 2ten Grad der Jungfrau erreicht, so würde ihre Rektascension fast 155° seyn. Dieser Punkt des Aequators, da man von ♈ bis zu ihm die Grade der **Rektascension** zählet, gehet mit der Sonne allezeit zu gleicher Zeit durch den Meridian, welches sehr begreiflich ist, da die Sonne sich eben senkrecht über ihm befindet. Im §. 194 ist schon etwas hievon gehandelt.

Eben so zählet man auch die Rektascension eines Sterns, von ♈ an in **Graden des Aequators.** Man wird alles dieses am besten verstehen, wenn man sich in Gedanken unter den Aequator versetzet. Denen Menschen, die da wohnen, gehet also der Aequator durchs Zenith, und die Pole liegen in ihrem Horizont. Da die Tagebogen aller Sterne parallel mit dem Aequator sind, so werden die Sterne, die zu gleicher Zeit aufgehen, auch zu gleicher Zeit mit dem Punkte des Aequators, der zu gleicher Zeit mit ihnen aufgieng, im Meridian stehen, da die Bewegung der Sterne sowohl, als des Aequators einmal in 24 Stunden herum ist.

Wenn wir auch nun unter der schiefen Sphäre wohnen, und die Sterne uns schief aufgehen, so hindert das doch an ihrer Bewegung nicht, es werden dennoch diese Sterne, die den Bewohnern des Aequators zu gleicher Zeit aufgiengen, dennoch bey uns mit dem Punkte des Aequators, darauf sie senkrecht standen, durch den Meridian gehen, denn alle Meridiane stehen auf dem Aequator senkrecht.

Man sagt also, daß alle Sterne, die zu gleicher Zeit durch den Meridian gehen, eine gleiche Rektascension haben, also auch perpendikular über einander stehen, auf einem Bogen, der also perpendikulär auf den Aequator gezogen ist, und also alle diese mit diesem Punkt des Aequators, darauf dieser perpendikuläre Bogen stehet, durch den Meridian gehen.

Dieses zu erläutern, sey Fig. 42 AQ ein Theil des Aequators, BM ein Theil des Meridians, in

N und P mögen Sterne seyn, die mit dem Punkte M des Aequators zu gleicher Zeit durch den Meridian eines Ortes gehen. Nun ist ja dieser Punkt M der Durchschnitt deß Aequators mit der Ekliptik, oder er ist es nicht. Ist er es, nun so wäre die Rektascension dieser Sterne = Null. Ist er es nicht, wie die meisten Fälle sind, nun so ist die Rektascension dieser Sterne nun noch so viel Grade, als man von ♈ von Abend gegen Morgen zählet §. 194 bis an den Punkt, wo der Verticalkreis, in welchem er ist, auf dem Aequator stehet. Die himmlischen Körper haben also eine verschiedne Rektascension, die zu verschiednen Zeiten durch den Meridian gehn. Ein Stern, der eine Stunde früher oder später durch den Meridian gehet, als ein andrer, hat 15 Grad Differenz in der Rektascension mit diesem, weil auf eine Stunde 15 Grade gehen. Es wird nicht schwer seyn, auch Minuten und Secunden der Zeit in Theile der Grade zu verwandeln. §. 199.

§. 210. Wir haben schon im §. 195 etwas von der **Declination** der Sonnen und der Gestirne geredet. Es können, wie man leicht siehet, Fig. 42 die Sterne NP, eine gleiche Rektascension, wie auch hier ist, haben, aber ihre Declination NM und PM ist verschieden. Ist das Gestirne nach dem Nordpole hin über dem **Aequator** erhaben, so heißt dieses die **nördliche Declination**, stehet es über dem **Aequator** nach dem Südpol hin, so heißt es die **südliche Declination**. Die Declination der Fixsterne ändert sich nie, aber wol die Declination der Sonne, des Mondes und der Planeten. Die Ver-

Fig. 42.

clination der Sonne kann nie über 23° 29′ **nördlich**, und auch nicht mehr **südlich** werden, weil die Ekliptik, worinn sie immer ist, nicht über den Aequator erhaben ist. Wenn man die Polhöhe, oder Aequatorhöhe, und die Höhe der Sonnen am Mittage, über dem Horizont weis, so ist ihre Declination bald gefunden. Z. E. der Aequator stehet unter der Polhöhe 52° nördlicher Breite um 38° über dem Horizont erhaben, §. 201, und die Sonne stehe am Mittage 60 Grad hoch am Himmel, so ist ihre Entfernung auf einem senkrechten Bogen vom Aequator, oder ihre Declination 60° — 38° = 22 Grad nördlich. Sie stehe aber auch unter eben der Polhöhe nur 23° hoch am Himmel im Mittage, so hat sie 38° — 23° = 15° südliche Abweichung.

§. 211. Die Rektascension hätten wir nun erkläret, man findet aber auch bey den Astronomen, daß von der **schiefen Aufsteigung** oder **Obliqe ascension** geredet wird.

Die **schiefe Aufsteigung** eines Gestirns ist die Entfernung des Aequinoktialpunkts oder ♈ von dem Punkte des Aequators, der mit dem Gestirne zu gleicher Zeit aufgehet, sie wird gleichfalls von ♈ an, in Graden auf dem **Aequator** gemessen. Es sey Fig. 43 HZPO der **Meridian**; P der **Welepol**; HO der **Horizont**; EC ein Bogen des **Aequators**, der über dem Horizonte sich befindet, in S ein Stern. Der Punkt B des Aequators gehe mit dem Sterne zu gleicher Zeit durch den Meridian, und der Punkt C des Aequators gehe mit dem Sterne zu gleicher Zeit auf, so ist

Fig. 43.

von

von ♈ bis B auf den Aequator gezählet, die **Rektascension** des Sternes S von ♈ bis C auf den Aequator gezählet, seine **Obliqascension**. (♈ ist hier auf der Figur unter dem Horizonte).

Eben so wird auch die **schiefe Absteigung** oder **Obliqdescension** eines Gestirns, die Entfernung von ♈ bis an den Punkt des Aequators, der mit dem Gestirne zu gleicher Zeit untergehet.

Der Unterschied des Bogens zwischen der **Rechtaufsteigung** und der **schiefen Aufsteigung** heißt die **Ascensionaldifferenz**. Die alten Astronomen gebrauchten sie häufiger, jetzt wird sie nicht so viel mehr angewendet.

§. 212. Wir redeten im §. 208 von der **Länge** der Sonnen oder eines Gestirns, und zeigten, daß es seine Entfernung von ♈ in Graden der Ekliptik sey. Eben so findet man auch in astronomischen Büchern den Ausdruck der Grade der **Breite** eines Gestirns, welches man von Graden der Breite auf der Erden sehr wohl unterscheiden muß. Man gebrauchet sich dieses Ausdrucks vorzüglich bey der Berechnung der Planeten, die sich immer um die Ekliptik herum befinden.

Die **Breite** eines Sterns ist seine Entfernung von der **Ekliptik** durch einen Bogen, der senkrecht auf der Ekliptik stehet, gemessen. Ich will mich gleich durch eine Figur deutlicher erklären.

Es sey Fig. 44. ♈Q ein Stück des **Aequators**, bey ♈ die Intersektion des Aequators mit der **Ekliptik**, in S ein Stern. Der Bogen SM Fig. 44.

sey senkrecht auf den Aequator gezogen, der Bogen SB sey senkrecht auf die Ekliptik gezogen, so ist ♈B die **Länge** des Sterns, und der Bogen SB seine **Breite**, so wie ♈M auf dem Aequator seine **Rekta censsion**, und SM seine **Declination** ist.

Da ein Stern näher als der andre der **Ekliptik** ist, so siehet man leicht, daß manche Sterne einerley Länge, aber verschiedne Breite haben können, so wie sie auch gleichfalls von verschiedener Länge und Breite seyn können. Der Stern in P hat z. E. mit dem Sterne in S einerley **Länge**, weil der Bogen ♈B für beyde einerley ist, aber verschiedene Breite, des Sterns S Breite ist SB, und des Sterns P Breite PB, und kleiner als des erstern Breite.

Es heißen daher auch die Bogen, welche man senkrecht auf die Ekliptik ziehet, Cirkel der Breite.

Es ist sehr begreiflich, wenn man die Länge und Breite eines Sterns weis, man auch seine Stelle am Himmel wisse, welches man auch durch die Rekte ascension und Declination desselben bestimmen kann; so wie auf der Erde die Lage eines Orts durch seine geographische Länge und Breite sich bestimmet.

Der gewöhnliche Gebrauch der Astronomen pfleget nun zu seyn, daß sie die Rektascension und Declination eines Gestirns beobachten, und nachher daraus durch die sphärische Trigonometrie daher auf die Länge und Breite desselben Schlüsse machen, auf welche Art denn auch die astronomischen Tafeln der Planeten, und die Verzeichnisse der Lagen der Fixsterne entstanden sind.

§. 213. Wir hatten diese ziemlich lange Vorbereitung nöthig, wenn uns nachher die Auflösung der Aufgaben, wodurch wir einige kleine Anwendungen der sphärischen Trigonometrie in Ansehung der sphärischen Astronomie geben wollen, verständlich seyn sollten. Das heißt denn aber freylich noch lange nicht Astronomie studiret. Auch auf praktische Handgriffe können wir uns in diesen kleinen Anwendungen nicht einlassen, weil das alles nicht hieher gehöret, und man solches in großen astronomischen Werken suchen, und vieles auch durch Erfahrung lernen muß. Wir fangen die Auflösung einiger Probleme an.

§. 214. **Es sey gegeben Fig. 45. die Länge der Sonnen und die gröste Schiefe der Ekliptik, oder der Winkel welchen die Ekliptik mit dem Aequator machet, man suchet die Declination der Sonne.** Fig. 45.

Wir haben in den vorhergehenden Paragraphen bereits alle die Wörter erkläret, welche in diesem Problem vorkommen, also können wir uns nun jetzt darauf berufen.

Es sey nun in P der Pol; AQ der Aequator; HR der Horizont; EK die Ekliptik; ♈ der Ort, wo die Ekliptik den Aequator durchschneidet. Die Sonne sey auf der Ekliptik in M, so ist ♈M die Länge der Sonne, die gegeben ist, der Winkel M♈T = dem Winkel, den die Ekliptik mit dem Aequator machet = 23° 29′ auch gegeben. Man suchet den Bogen MT = der Declination der Sonne. §. 195. Weil pT, auch AQ senkrecht stehet, §. 195, so haben wir hier mit einem rechten Fig. 45.

winklichten Triangel zu thun, und bey T ist ein rechter Winkel, man suchet also in dem Triangel Mo ♈ T aus der Hypotenuse Mo ♈ den Winkel Mo ♈ T und den rechten Winkel bey T den Cathetum TM. Oder nach §. 55. 56. Fig. 9. suchet man auch H, M, R die P. Es wird also §. 55. 56 gehörig substituiret, folgender Schlus gelten.

rad : sin. o♈M = sin. Mo♈T : sin. MT

oder sinus totus : sinus der gegebenen Länge der Sonnen = der sinus der Schiefe der Ekliptik mit dem Aequator : sinus der Declination der Sonnen.

Woraus sie sich denn leicht finden läßt.

Exempel. Die Sonne stehe in 18° 40′ des Stiers, so ist ihre **Länge** = dem 30°, die sie schon im Widder zurück geleget hat, + diese 18° 40′ im Stier. Zusammen 48° 40′. Die Schiefe der Ekliptik, wie allezeit, 23° 29′. Folglich

log. sin. 48° 40′	=	9,8755706
log. sin. 23° 29′	=	9,6004090
		19,4759796
log. sin. tot.	=	10,0000000

also

log sin Declination der Sonne = 9,4759796
oder sinus des Bogens MT.

Dieser Logarithme gehöret fast zum sinus von 17° 24′, welches die Declination der Sonne ist. Wenn man P als den Nordpol betrachtet, so ist diese Declination nördlich, weil die Sonne sich zwischen dem Aequator und Wendecirkel des **Krebs**-

ses

ses befindet. Es wird dieses auf den 9ten May und 3ten August treffen, doch davon weiter unten.

Noch ein Exempel, wo die Declination südlich ist. Die Sonne stehe im 16° 22′ des Schützen, wie stark ist ihre Declination? Ihre Länge ist alsdenn 30° in der Waage + 30° im Scorpion + 16° 22′ im Schützen, zusammen = 76° 22′. Also logarithmisch auf die vorhergehende Art berechnet,

log. sin. 76° 22′ = 9,9875876
log. sin. 23° 29′ = 9,6004090

19 5879966
log. sin. totus = 10 0000000

9,5879966 = log. sin. der Declination der Sonne. Es gehöret dieser Logarithme zum sinus 22° 47′ und einigen Secunden, und zwar ist diese Declination südlich, weil die Sonne sich zwischen dem Aequator und Wendecirkel des **Steinbocks** befindet. Sie wird treffen auf den 8ten December und 4ten Januar.

Anmerkung. Wir haben hier die Länge der Sonnen als gegeben angenommen, wie man sie finden könne, wird weiter unten vorkommen, obschon diese Methode nicht die strengste ist. Wenn an statt der Länge das Datum gegeben ist, so findet man aus dem Datum nach der unten vorkommenden Methode auch leicht die Länge der Sonnen. Will man sich bey nicht sehr strenge genauen Observationen und Rechnungen mit der **mittlern** Länge der Sonnen behelfen; so ist es sehr begreiflich, daß, da die Sonne im ganzen Jahre oder 365¼ Tagen 360° in der Ekliptik

kliptik zurücklegt, welches 1296000 Secunden sind, dieses auf jeden Tag 1296000 Secunden = $\frac{}{365\frac{1}{4}}$ 59 Minuten, 8, 3 Secunden bringet, so viel Tage also vom Aequinoktio oder ♈ oder Null der Waage verflossen sind, hat man nur dieses so vielmal zu addiren, oder vielmehr mit der Zahl der Tage zu multipliciren. Es trift aber dieses nicht allezeit genau mit der wahren Länge der Sonnen überein, und nur im Anfange des Januars und des Julius. Die übrige Zeit ist die Länge der Sonne höchstens fast 2 Minuten mehr oder weniger, worauf es bey manchen Rechnungen so strenge nicht ankömmt. Doch hievon können wir nicht ausführlich reden, weil wir keine Astronomie hier lehren, sondern nur einige Anwendungen der sphärischen Trigonometrie zeigen.

Wenn die Sonne den Wendecirkel des Krebses erreichet hat, so ist ihre Länge von ♈ an = 90° ist sie also weiter, so muß man im Calcul das Complement von 90° nehmen, und daraus ihre Declination berechnen. Eben das gilt, wenn sie von ♎ den Wendecirkel des Steinbocks berühret hat, und nun weiter ist.

§. 215. Wir fanden in dem vorhergehenden §. aus der Länge der Sonnen, und der Schiefe der Ekliptik die Declination der Sonnen. Es ist also gleich einleuchtend, daß man aus der **Declination** der Sonnen und der **Schiefe** der **Ekliptik** die **Länge** der Sonnen oder ihre Stelle in der Ekliptik wird finden können. Das ist Fig. 45, den Bogen ♈M.

Es

Es geschiehet durch eben die Proportion, die wir §. 241. gebrauchten. Man hat nur nöthig, die zu suchende Länge der Sonnen zum vierten Gliede zu machen.

sin. M☌T : sin. MT = rad : sin. ☌M

oder

der sinus des Winkels der Schiefe der Ekliptik
zum sinus der Declination der Sonne
wie der sinus totus
zum sinus der Länge der Sonne.

Exempel. Es sey die Declination der Sonne 17° 24′, der Winkel der Schiefe der Ekliptik 23° 29′, man suchet ihre Länge logarithmisch.

log. sin. totus	=	10,0000000
log. sin. 17° 24′	=	9,4757304
		19,4757304
log. sin. 23° 29′	=	9,6004090

also log. sin. der Länge der Sonne = 9,8753214
Dieser Logarithme gehöret fast zum Bogen von 48° 38′, welches die gesuchte Länge der Sonnen ist.

Anmerkung. Ob dieser gefundne Bogen der Länge von ♈ des **Widders** nach dem Berührungspunkt der Ekliptik am Wendecirkel des Krebses hin gezählet werden müsse, also in diesem Falle die Sonne im 18° 38′ des **Stiers** sey, oder ob man ihn von ♈ der **Waage** nach dem Wendecirkel des Krebses hin nehmen müsse, und er also nur das Complement zu 180° sey, müssen die Umstände lehren. Im letztern Fall wäre die Länge der Sonnen 180° — 48° 38′ = 131° 22′, welches

im

im 11° 22′ des Löwens seyn würde. Eben dieses gilt auch, wenn man nun weiter fortzählet über die Waage hinaus, oder in dem dritten und vierten Quadranten, da auch in beyden zweymal die Declination gleich ist.

§. 216. Es sey gegeben die Länge der Sonnen die Schiefe der Ekliptik, man suchet daraus ihre Rektascension.

Wir haben hier abermals mit dem rechtwinklichten Triangel MoγT zu thun, Fig. 45. Fig. 45.

Es sey nun oγM die Länge der Sonnen; MoγT der Winkel, den die Ekliptik mit dem Aequator machet, oder die Schiefe der Ekliptik, so ist oγT die Rektascension, die gesuchet wird, §. 209, weil AQ der Aequator ist. Es wird also einer der Perpendikel in diesem rechtwinklichten Triangel gesuchet.

Nach §. 55. 56. Fig. 9. ist nun im Triangel MoγT gegeben, H, M, R, man suchet B. Nach §. 56. in 4 gilt alsdenn folgende Proportion

rad : cos. M = tang. H : tang. B

Hier gehörig angewendet

rad : cosinus MoγT = tang. oγM : tang. oγT

oder

der sinus totus
zum cosinus der Schiefe der Ekliptik
wie der tangens der Länge der Sonnen
zum tangens der Rektascension.

Exem-

Exempel. Die Sonne stehe im 23° 30′ des **Stiers**, wie groß ist ihre **Rektascension**?

Ihre Länge ist alsdenn, die gegeben war, 30° im Widder + 23° 30′ im Stier = 53° 30′. Die Schiefe der Ekliptik, wie gewöhnlich, = 23° 29′. Nun ist

log. cos. 23° 29′	=	9,9624527
log. tang. 53° 30′	=	10,1307911
		20,0932438
log. sin. tot.	=	10,0000000

also log. tang. d. Rektascension = 10,0932438

Dieser Logarithme gehöret fast zu 51° 6′, welches also der Bogen ☊♈ oder die Rektascension der Sonne ist. Es trift dieses auf den 14ten May.

Ein andres Exempel, wo die Sonne über die Berührung des Wendecirkels des Krebses hinaus ist, also sich im zweyten Quadranten befindet.

Die Sonne stehe im 4° 31′ der **Jungfrau**, wie groß ist ihre **Rektascension**?

Ihre **Länge** ist alsdenn durch die fünf Zeichen Widder, Stier, Zwillinge, Krebs und Löwe jedes 30° = 150° und noch 4° 31′ in der Jungfrau; zusammen = 154° 31′. Das Complement davon zu 180° ist 25° 29′. Dieses muß man nun gebrauchen.

Also

log. cosin. 23° 29′ = 9,9624527
log. tang. 25° 29′ = 9,6781709
19,6406236
log. sin totus = 10,0000000
also log. tang. der Rektascension = 9 6406236

Dieser Logarithme gehöret fast zu 23° 37′. Diese gleichfalls von 180° abgezogen, bleibt 156° 23′, welches die Rektascension oder der Bogen des Aequators von Null des Widders bis ♈ Fig. 45. gezählet ist. Diese Rektascension trift auf den 27sten August.

Es sey die Sonne im 4° 58′ des Scorpions, also schon im dritten Quadranten; ihre Länge ist also 30° ♈ + 30° ♉ + 30° ♊ + 30° ♋ + 30° ♌ + 30° ♍ + 30° ♎ + 4° 58′ ♏ = 214° 58′. Wir müssen nun hier im dritten Quadranten den Bogen gebrauchen, den die Sonne schon über Null der Waage absolviret hatte, nemlich 30° in der Waage, und 4° 58′ im Scorpion = 34° 58′.

also log. cos. 23° 29′ = 9,9624527
log. tang. 34° 58′ 9,8446889
= 19,8071416
log. sin. totus = 10,0000000
log. tang. der Rektascension = 9,8071416

Dieser Logarithme gehöret fast zu 32° 41′. Dieses zu 180° addiret, weil die Sonne schon im dritten Quadranten ist, giebet 212° 41′ der Rektascension, welche auf den 28sten October fällt.

Noch

Noch ein Exempel, da die Sonne schon im vierten Quadranten sich befindet. Sie stehe im 25° 46′ des **Wassermanns**. Weil bey Null der Waage die Ekliptik den Aequator durchschneidet, und die Sonne auch schon vom Wendecirkel des **Steinbocks** weg ist, also schon über 90° vom Aequator, so muß man jetzt das Complement ihrer Länge zu 180° wieder in der Rechnung gebrauchen. Bis Null des Steinbocks sind 90°, der Steinbock selbst 30° und nun noch 25° 46′ im Wassermann; zusammen 145° 46′, es ist also das Complement dieser Größe zu 180° = 34° 14′. Also

log. cos 23° 29′	=	9 9624527
log. tang. 34° 14′	=	9, 83-7963
		19 7952490
log. sin. tot.	=	10 0000000
log. tang. der Rektascension	=	9, 7952490

Dieser Logarithme gehöret fast zu 31° 58′. Dieses nun von 360° abgezogen, lässet 328° 1′ für die Rektascension der Sonne, welches auf den 14ten Februar fällt.

§. 217. **Es läßt sich aber auch diese Rektascension der Sonne aus der größten Schiefe der Ekliptik und der Declination der Sonne finden**, oder Fig. 45. der Bogen ♈T läßt sich auch aus dem Winkel M♈T und Bogen MT finden; so wie wir ihn in der vorhergehenden Aufgabe aus dem Winkel M♈T und dem Bogen ♈M gefunden hatten.

Es sey also gegeben die Schiefe der Ekliptik und die Declination der Sonnen, man suchet ihre Rektascension. Hier ist also §. 55. nach Fig. 9 gegeben R, M, P, man suchet B. Nach §. 55. 56. in 6 gilt nun folgende Proportion

r : cot. M = tang. P : sin. B. oder

hier angewendet

sin. tot. : cotang. M♈T = tang MT : tang. ♈T

der sinus totus
zum cotang. der Schiefe der Ekliptik
wie der tangens der Declination der Sonne
zum sinus ihrer Rektascension.

Exempel. Es sey die Declination der Sonne 12° 55′ nördlich, wie groß ist ihre Rektascension?

Es ist also

log. cotang. 23° 29′	=	10,3620437
log. tang. 12° 55′	=	9,3604736
		19,7225173
log. sin. totus	=	10,0000000

log. sinus der Rektascension = 9,7225173

Dieser Logarithme gehöret fast zu 31° 52′, welches die Rektascension ist, oder der Bogen ♈M.

Anmerkung. Die gegebene Declination der Sonne 12° 55′ war hier im ersten Quadranten genommen, und trift auf den 24ten April. Wenn man aber die Lage der Ekliptik gegen den Aequator betrachtet, so ist es einleuchtend, daß diese Declination viermal, nemlich in jedem Quadranten einmal

mal, also zweymal nördlich und zweymal südlich statt finden müsse. Wäre also nichts mehr als die bloße Declination gegeben, denn die Schiefe der Ekliptik ist ohnedem bekannt, so ließen sich vier Bogen des Aequators von Null des Widders für die Rektascension angeben, die alle sehr verschieden wären. Hier in dieser Aufgabe sind sie nun schon auf zwey eingeschränket, weil die Declination als nördlich angegeben ist. Es kann die Sonne diese Declination haben, wenn sie im Stiere ist, und also nach dem Wendecirkel des Krebses herauf steiget; sie kann sie aber auch haben, wenn sie im Löwen ist, und also vom Wendecirkel des Krebses nach dem Aequator herab steiget. Im ersten Falle, den wir hier auch im Exempel genommen haben, würde, wie wir gefunden haben, ihre Rektascension 31° 52′ seyn, und auf den 24sten April fallen; im zweyten Falle müste man diese gefundene Rektascension von Null der Waage zurück zählen, oder welches einerley ist, von 180° abziehen, und alsdenn würde die Rektascension von Null des Widders an, wo man sie zu zählen anfängt = 180° — 31° 52′ = 148° 8′ seyn, welches auf den 19ten August fällt. Es muß also nicht nur gegeben seyn, ob die Declination nördlich oder südlich, sondern auch in welchem Quadranten sie sey, oder auf welcher Seite des Colurs der Solstitien.

§. 218. **Es ist gegeben die Länge der Sonnen, und die Schiefe der Ekliptik, daraus den Winkel zu finden, welchen die Ekliptik mit dem Meridian macher.** Fig. 45.

Es ist uns aus §. 209. bekannt, daß die Ekliptik sich mit dem ganzen Himmel um die Erde zu bewegen scheinet, und der Punkt der Ekliptik, wo die Sonne stehet, mit dem Punkte des Aequators, worüber sie sich senkrecht befindet, zu gleicher Zeit durch den Meridian gehet. Da die Sonne ihre Länge beständig ändert, indem sie immer weiter in der Ekliptik fort gehet, so wollen wir in dieser Aufgabe die Länge der Sonnen eben um Mittag annehmen.

Es sey nun Fig. 45. PT ein Meridian, o♈M die Länge der Sonnen, der Winkel M♎♈T die Schiefe der Ekliptik, so ist in dem Triangel M♎♈T dieses gegeben, nebst dem rechten Winkel bey T. Man suchet den Winkel bey M, oder den Winkel o♈MT, welches der Winkel ist, den die Ekliptik mit dem Meridian machet. In der Lehre von den rechtwinklichten Triangeln in §. 55. 56. in 4 findet man dafür folgende Proportion.

r: cos. H = tang. M: cot. N.

oder hier ausgedrücket

sinus totus: cosin. o♈M = tang. M♎♈T: cot. o♈MT

der sinus totus

zum cosinus der Länge der Sonnen,

wie der tangens der Schiefe der Ekliptik

zum cotangens des Winkels, den die Ekliptik mit dem Meridiane machet.

Exempel. Die Sonne stehe im 2° 40′ des Widders, welches am 23 Merz seyn wird. Die Schiefe der Ekliptik ist, wie wir immer annehmen, 23° 29′, so ist

log.

log. cos. 2° 40′ = 9,9995297
log. tang. 23° 29′ = 9,6379563
19,6374860
log. sin. tot. = 10,0000000
also log. cot. des Winkels d. Ekliptik mit dem Merid. 9,6374860

Dieser Logarithme gehöret fast zu 23° 28′. Da es der Logarithme des cotangens ist, so ist also der würkliche Winkel = 66° 32′ = dem Winkel bey M.

§. 219. **Es ist gegeben die Höhe der Sonnen am Mittage über dem Horizont, imgleichen die Declination der Sonne, daraus die Aequatorhöhe und Polhöhe eines Orts zu finden.**

Wir haben aus den vorhergehenden Paragraphen sattsam gesehen, wie man die Declination der Sonne findet, und kann man auch, wenn man sie nicht berechnen will, aus den jährlich herausgegebnen astronomischen Ephemeriden, wie zum Exempel die Berlinischen von Herrn Bode sind, sie für jeden Tag aufsuchen.

Wir haben nun bey der Auflösung dieser Aufgabe noch folgendes zu bemerken. Es kann die Declination der Sonne nördlich seyn, welches von Null des **Widders** bis Null der **Waage** ist, oder auch südlich, welches von Null der **Waage** bis an Null des **Widders** statt findet.

Es sey Fig. 46. Z das Zenith; HR der Horizont; HP der Meridian des Orts; HD die Höhe

der Sonnen über dem Horizont an dem gegebnen Tage im Mittage AQ der Aequator, so ist, weil DT die Ekliptik, AD die Declination der Sonnen für den Tag, im Mittag, die auch gegeben ist, und HA die Aequatorhöhe, die an jedem Orte immer gleich ist, und PR die Polhöhe des Orts oder seine geographische Breite §. 201. Ist also, wenn die Declination nördlich ist, HD oder die Höhe der Sonnen im Mittage, und AD die Declination der Sonnen bekannt, so ist HA = HD — AD, oder die Aequatorhöhe ist gleich der Höhe der Sonnen über dem Horizont, **Minus** der Declination der Sonnen. Da nun aus §. 201. bekannt ist, daß die Aequatorhöhe, **Plus** der Polhöhe = 90°, so hat man nur nöthig, von 90° die gefundne Aequatorhöhe abzuziehen, so wird dadurch die Polhöhe bekannt werden.

Hat die Sonne eine südliche Declination, oder ihre Höhe sey am Mittage HT, so ist also TA ihre Declination, die man nach den in den vorhergegangenen §. ausgeführten Problemen finden kann, so wird alsdenn die Aequatorhöhe HA = HT + TA, oder gleich der Höhe der Sonnen im Mittage, **Plus** ihrer Declination seyn, und diese Aequatorhöhe gleichfalls von 90° abgezogen, giebt die Polhöhe PR, welches denn auch die geographische Breite ist.

§. 220. **Anmerkung.** Es ist dieses ein sehr brachbares Problem, die geographische Breite eines Orts zu finden. Wenn keine Mittagslinie vorhanden

den ist, in deren Ebene der Quadrant, oder wenn man es nicht anders hat, ein gutes Astrolabium gestellet wird, so darf man nur einige Zeit vorher, wenn es gegen Mittag gehet, anfangen Sonnenhöhen zu nehmen, die immer zunehmen werden, bis die Sonne durch den Meridian ist, und wieder zu sinken anfängt. Die gröste von diesen Höhen ist die Höhe der Sonnen am wahren Mittage.

Zweyte Anmerkung. Man nimmt beym Observiren der Sonnenhöhen die Höhe des obern oder des untern Randes der Sonne. Nimmt man die Höhe des untern Randes, so muß man also den halben Durchmesser der Sonnenscheibe zu der gefundnen Höhe **addiren**, um die Höhe des Mittelpunkts der Sonne zu bekommen. Nimmt man die Höhe des obern Randes, so muß man den halben Durchmesser der Sonnenscheibe davon **subtrahiren**, um die Höhe des Mittelpunkts der Sonnenscheibe zu erhalten. Es ist aber der **scheinbare** Durchmesser der Sonnenscheibe verschieden, und aus optischen Gründen zu einer Jahrszeit etwas gröser als zu der andern. Da aber der halbe Durchmesser der Sonne nie **kleiner** wird als 15 Minuten und 47 Secunden, und nie **gröser** als 16 Minuten 19 Secunden, so kann man, wenn man nicht **genau** strenge zu verfahren Ursache hat, diesen **halben** Durchmesser der Sonne in der mitlern Gröse zu 16′ 3″. annehmen, wo man nur in Secunden irren kann.

Dritte Anmerkung. Man muß bey diesen Observationen allerdings auch auf die Strahlenbre-

brechung Rücksicht nehmen, wodurch ein Körper allezeit höher am Horizonte erscheinet, und diese größere durch die Strahlenbrechung verursachte **scheinbare** Höhe von der **gefundnen** Höhe abziehen, um die **wahre** Höhe zu erhalten.

Wir wollen hier eine Strahlenbrechung für die Oerter auf der Erde, die unter der **gemäßigten** Zone liegen, nach den **Bradley** einrücken. Es ist dabey eine mittlere Dichte der Luft angenommen. Die Luft kann dichter, auch dünner seyn, und das kann allerdings die Strahlenbrechung verändern, allein man kann sich doch dieser Tafel ohne großen Fehler bedienen.

scheinbare Höhe.		Strahlen brechung.		scheinbare Höhe		Strahlen brechung.	
Gr.	Min.	Min.	Sec.	Gr.	Min.	Min.	Sec.
0.	0.	33.	0.	13.	0.	4.	3.
0.	30.	28.	22.	13.	30.	3.	54.
1.	0.	24.	29.	14.	0.	3.	45.
1.	30.	21.	15.	14.	30	3.	38.
2.	0.	18.	35.	15.	0	3.	30.
2.	30.	16.	24.	15.	30.	3.	24.
3.	0.	14.	36.	16.	0.	3.	17.
3.	30.	13.	6.	16.	30	3.	10.
4.	0.	11.	51.	17.	0.	3.	4.
4.	30.	10.	48.	17.	30.	2.	59.
5.	0.	9.	54.	18.	0.	2.	54.
5.	30.	9.	8.	18.	30.	2.	49.
6.	0.	8.	28.	19.	0.	2.	44.
6.	30.	7.	51.	19.	30.	2.	39.
7.	0.	7.	20.	20.	0.	2.	35.
7.	30.	6.	53.	20.	30.	2.	31.
8.	0.	6.	29.	21.	0.	2.	27.
8.	30.	6.	8.	21.	30.	2.	23.
9.	0.	5.	48.	22.	0.	2.	20.
9.	30.	5.	31.	23.	0.	2.	14.
10.	0.	5.	15.	24.	0.	2.	7.
10.	30.	5.	0.	25.	0.	2.	2.
11.	0.	4.	47.	26.	0.	1.	56.
11.	30.	4.	34.	27.	0.	1.	51.
12.	0.	4.	23.	28.	0.	1.	47.
12.	30.	4.	13.	29.	0.	1.	43.

scheinbare Höhe.		Strahlenbrechung.		scheinbare Höhe		Strahlenbrechung.	
Gr.	Min.	Min.	Sec.	Gr.	Min.	Min.	Sec.
30.	0.	1.	38.	47.	0.	0.	53.
31.	0.	1.	35.	48.	0.	0.	51.
32.	0.	1.	31.	49.	0.	0.	49.
33.	0.	1.	28.	50.	0.	0.	47.
34.	0.	1.	24.	52.	0.	0.	44.
35.	0.	1.	21.	54.	0.	0.	41.
36.	0.	1.	18.	56.	0.	0.	38.
37.	0.	1.	16.	58.	0.	0.	36.
38.	0.	1.	13.	60.	0.	0.	33.
39.	0.	1.	10.	65.	0.	0.	26.
40.	0.	1.	8.	70.	0.	0.	20.
41.	0.	1.	5.	75.	0.	0.	15.
42.	0.	1.	3.	80.	0.	0.	10.
43.	0.	1.	1.	85.	0.	0.	5.
44.	0.	0.	59.	90.	0.	0.	0.
45.	0.	0.	57.				
46.	0.	0.	55.				

Vierte Anm. Es ist noch sehr einleuchtend, daß das, was wir im vorhergehenden § sagten, für eine Hälfte der Erdkugel gilt. Es mag nun für die nördliche Hälfte seyn, so wird es bey der südlichen Hälfte sich eben umgekehrt befinden. Wir wollen jetzt zum Beyspiel Fig. 46. die Bewohner der Erde neh-

nehmen, die den Punkt N zum Zenith haben, sie werden Antipoden von denen seyn, welchen der Punkt Z das Zenith war. Beyde werden einerley Horizont haben, und ihr Pol wird in S seyn, sie werden auch einerley Polhöhe haben, nur ist sie südlich. Wenn also die Declination der Sonne nördlich ist, und denen auf der nördlichen Halbkugel Mittags in D stehet, so ist zwar bey den Antipoden Mitternacht, aber wenn es nun bey den Nördlichen Mitternacht ist, so ist bey den südlichen Antipoden Mittag, die Sonne wird ihnen in d stehen, wenn man AD = Rd nimmt, ihre mittägliche Höhe wird also Rd seyn; es ist also ihre Declination dQ, und ihre Aequatorhöhe wird Rd + dQ oder = der mittäglichen Höhe, **Plus** der Declination seyn, da sie zu eben der Zeit den Nördlichen = der mittäglichen Höhe, **Minus** der Declination war. Hat die Sonne eine südliche Declination, und stehet den Nördlichen in F, und also der nördlichen Bewohner Aequatorhöhe = der mittäglichen Höhe, **Plus** der Declination ist, so wird sie den Südlichen in T seyn, und ihre Aequatorhöhe = der mittäglichen Höhe, **Minus** der Declination seyn.

§. 221. Exempel hievon nach §. 219.

Es sey die Höhe der Sonnen am Mittage gefunden 57° 56′, die **nördliche** Declination der Sonnen sey für den Tag 20° 14′, so ist die Aequatorhöhe 57° 56′ — 20° 14′ = 37° 42′, also die Polhöhe 90° — 37° 42′ = 52° 18.

Es sey an eben dem Orte die Höhe der Sonnen Mittags 17° 29′, die südliche Declination der Sonne

Sonne 20° 13′, so wird die Aequatorhöhe seyn 17° 29′ + 20° 13′ = 37° 42′, also die Polhöhe 90° — 37° 42′ = 52° 18′. Es ist dieses die Polhöhe für Braunschweig.

Noch ein Exempel weitläuftiger ausgeführet, wo auf die Strahlenbrechung mit Rücksicht genommen ist. Ich nahm am 1sten December 1786 mit einem großen Astrolabium, durch welches man, mit Hülfe eines Nonius einzelne Minuten finden kann, und welches Perspektive mit Kreuzfäden hat, die Sonnenhöhe am wahren Mittage, und fand:

scheinbare Höhe des untern Randes der Sonne	—	16° 20′	
dazu addiret den halben Durchmesser der Sonnenscheibe	—	16′	3″
also scheinbare Höhe des Mittelpunkts der Sonne	=	16° 36′	3″
abgezogen nach der Tafel §. 220, wie viel sie durch die Strahlenbrechung höher scheinet	—	3′	10″
also wahre Höhe der Sonnen	=	16° 32′	53″
dazu addiret, die südliche Abweichung der Sonne für den Tag		21° 51′	50″
giebt die **Aequatorhöhe**		38° 24′	43″
dieses von 90° abgezogen		90°	
giebt die Polhöhe		51° 35′	17″

welches die Polhöhe von Holzminden bis auf eine Kleinigkeit seyn wird, weil ich mit meinem Instrumente keine Secunden nehmen konnte. Eben dieses

ses ist auch durch andre mittägliche Sonnenhöhen bis auf kleine Variationen so gefunden.

§. 222. Es ist leicht begreiflich, daß nach dem vorhergehenden Problem, auch umgekehrt, **wenn die Aequator- oder Polhöhe gegeben ist,** (denn eins bestimmt das andre) **imgleichen die Declination der Sonne, sich auch ihre mittägliche Höhe finden läßt.**

Es sey also Fig. 46, HR der Horizont, die Polhöhe PR, so suchet man daraus die Aequatorhöhe, HA, indem man PR von 90° abziehet. Es sey ferner gegeben die Declination AD, so ist die mittägliche Höhe der Sonnen HA + AD, wenn die Declination nördlich ist, und HA — AF, wenn sie südlich ist. Oder im ersten Falle die Höhe der Sonnen am Mittage = der Aequatorhöhe, **Plus** der Declination, und im zweyten Falle, die Aequatorhöhe **Minus** der Declination. Fig. 46.

Exempel, die Polhöhe sey = 52° 18′, so ist die Aequatorhöhe = 90° − 52° 18′ = 37° 42′, die Declination der Sonne sey nun nördlich 20° 14′, so ist die mittägliche Höhe der Sonnen 37° 42′ + 20° 14′ = 57° 56′.

Es bleibe die Polhöhe und folglich die Aequatorhöhe eben so, die südliche Declination sey 20° 13′, so ist die mittägliche Höhe der Sonnen 37° 42′ — 20° 13′ = 17° 29′.

§. 223. **Es ist gegeben die Aequatorhöhe, die mittägliche Höhe der Sonnen, und die Schiefe der Ekliptik, daraus die**

die Länge der Sonnen, oder ihren Ort in der Ekliptik zu finden.

Wir haben hier wieder mit einem rechtwinklichten Triangel zu thun. Es sey also Fig 45 gegeben, die mittägliche Höhe der Sonnen über dem Horizont NM, die Aequatorhöhe NT, so wird dadurch zugleich die Declination MT bekannt, oder mitgegeben, sie ist NM — NT = MT. Oder auch wenn die Declination südlich, und NS die Höhe der Sonnen, so ist sie NT — NS. Fig. 45.

Wir wollen den erstern Fall nehmen. Es ist also in dem Triangel MoνT bekannt MT, MoνT und der rechte Winkel bey T, und es läßt sich also daraus die Länge der Sonnen, oder ihre Entfernung auf der Ekliptik von Null des Widders leicht finden.

Nur muß man noch wissen, in welchem Quadranten sie ist. Ist sie in dem ersten Quadranten vom Widder bis zum Krebs, so ist das Gefundne ihre Entfernung vom Null des Widders. Ist sie in dem 2ten Quadranten vom Krebse nach der Waage hin, so wäre das Gefundne von Null der Waage an nach dem Krebse hin, oder das Complement zu 180°, ist sie in dem dritten Quadranten, welches geschieht, wenn ihre Declination südlich wird, von der Waage nach dem Steinbock hin, so ist das Gefundne der Ueberschuß über 180°, und ist sie in dem 4ten Quadranten, so würde das Gefundne das Complement zu 360° seyn.

Es ist einleuchtend, daß man aus obigen datis auch die Rektascension der Sonne, oder den Bogen oνT finden kann.

Exem-

Exempel. Es sey die mittägliche Höhe der Sonnen gefunden 57° 56′, die Aequatorhöhe sey 37° 42′, so ist die Declination der Sonnen, oder in diesem Falle der Bogen MT = 57° 56′ — 37° 42′ = 20° 14′.

Es ist also nach §. 55, 56 Fig. 9 in dem Triangel MoγT bekannt, der Bogen P, der Winkel M und der rechte Winkel, man suchet H. Daselbst in 6 ist nun die Proportion sin. M : sin. P = rad. : sin. H.

und hier angewendet

sin. 23° 29′ : sin. 20° 14′ = sin. tot. : sinus der Länge der Sonne.

Logarithmisch

log. sin. totus	=	10, 0000000
log. sin. 20° 14′	=	9, 5388804
log. sin. 23° 29′	=	19, 5388804
		9, 6004090

also log. sin. der Länge der Sonnen = 9, 9384714

Dieser Logarithme gehöret fast zu 60° 13′. Ist nun die Sonne im ersten Quadranten, so wäre sie also von Null des Widders 60° 13′ auf der Ekliptik entfernet. Da nun 30° für den Widder und 30° für den Stier sind, so befände sie sich in 0 Grad 13′ der Zwillinge. Wäre sie bey eben der mittäglichen Höhe im 2ten Quadranten, so wäre das Gefundene die Entfernung von Null der Waage, oder das Complement zu 180°, also die Länge der Sonnen 180° — 60° 13′ = 119° 47′, und die Sonne ist im 29° 47′ des Krebses.

Wir unterlassen, Exempel zu geben, wenn die Sonne in den südlichen Zeichen im 3ten und 4ten Quadranten ist, weil sie ein jeder hieraus leichtlich selbst wird machen können.

§. 224. **Es ist gegeben die Polhöhe und die Declination der Sonnen, daraus läßt sich die Morgen- und Abendweite der Sonnen, (oder ihre Entfernung vom wahren Westen und Osten) ihr Azimuht, und ihre Ascensionaldifferenz finden.**

Fig. 47. Es sey Fig. 47. HR der Horizont; AQ der Aequator; EL die Ekliptik; P der Pol; DS die Declination der Sonnen §. 195. PR die Polhöhe; AH = RQ die Aequatorhöhe = dem Winkel bey O nach §. 184. 195. denn da der Cirkel PHQR der Meridian ist, dieser aber durch die Pole des Aequators und das Zenith gehet, welches der Pol des Horizonts ist, so muß (laut §. 429. 432 Geom. 2ter Theil) der Aequator und Horizont auch durch den Pol des Meridians gehen. Da sie beyde dadurch gehen und doch beyde nicht in einer Ebene sind, so muß sich daselbst ein Pol des Meridians finden, wo Horizont und Aequator einander schneiden, also hier in O. Da der Meridian den Himmel für jeden Ort in 2 Theile theilet, so muß OR ein Quadrant seyn, imgleichen auch OQ, also da RQ = AH = Elevation des Aequators, so ist RQ = AH das Maaß des Winkels O, unter dem sich der Aequator und Horizont schneiden, und da OR ein Quadrant und PR ein Stück des Meridians, so wird in O die Morgenweite seyn müssen, also OS die Morgenweite, oder die Entfernung

nung der Sonne beym Aufgange vom wahren Ostpunkte am Horizonte, im Sommer nach Norden herum gezählet und im Winter nach Süden. Denn am Aequinoktientage gehet sie würklich in Osten auf §. 185.

Wir haben nun den Triangel ODS zu betrachten, der rechtwinklicht ist. Darinn suchen wir den Bogen OS als die Morgenweite (amplitudinem ortivam), dazu ist gegeben bey D rectus, denn PD ist ein auf dem Aequator stehender Vertikalcirkel, der Winkel O = der Aequatorhöhe, und noch DS = der Declination.

Nach §. 55. 56 ist gegeben MRP, man suchet H. Das giebt daselbst §. 56 in 6, Fig. 9 folgende Proportion

sin. M : sin. P = rad : sin. H

hier angewendet.

Der sinus der Aequatorhöhe
zum sinus der Declination der Sonne
wie der sinus totus
zum sinus der Morgenweite.

Exempel. Es sey die Polhöhe 51° 37′, so ist die Aequatorhöhe = 38° 23′, die Sonne stehe am 15ten April im 25° 22′ des Widders, so wird ihre Declination 9° 49′ seyn.

logarithmisch

log. sin. totus	=	10 0000000
log. sin. der Declination der Sonne	=	9,2317145
		19,2317145
log. sinus der Aequatorhöhe	=	9 7530355
log. sin. der Morgenweite	=	9,4786790

Dieser Logarithme gehöret fast zu 15° 57′. Da die Sonne jetzt in den nördlichen Zeichen ist, so muß von Osten nach Norden auf dem Horizont die Zählung geschehen; so viel ist also die Sonne beym Aufgange vom wahren Osten entfernet, und gehet also ungefähr 2° über Ost-Nord-Ost nach Norden hin auf.

Die Abendweite wird auf eben die Art gefunden. Da die Sonne, oder vielmehr die Erde immer in ihrer Laufbahn forteilet, also ihre Länge, folglich auch ihre Declination beständig verändert, so muß man natürlich ihre Declination für die Stunde ihres Unterganges wissen, wenn man ihre Abendweite suchen will. Doch ein Exempel für die Abendweite an einem Tage, da sich ihre Declination nicht merklich ändert, am 21 Junius als am Solstitientage, ihre Declination ist alsdenn 23° 29′.

log. sin. tot.	=	10,0000000
log. sin. 23° 29′	=	9,6004090
		19,6004090
log. sin. 38° 23′	=	9,7930355
log. sin. der Abendweite	=	9,8073735

Dieser Logarithme gehöret fast zu 39° 56′. Da die Sonne in den nördlichen Zeichen ist, so muß das von Westen nach Norden auf dem Horizonte gezählet werden, und so viel vom wahren Westen ist der Punkt ihres Untergangs, welches zwischen Nordwest, ⅛ West und Nordwest, fast gänzlich Nordwest seyn wird.

Wir wollen doch auch Exempel geben, wenn die Sonne in den südlichen Zeichen, oder ihre Declination südlich ist,

Es bleibe die Polhöhe, als in den vorhergehenden Exempeln angenommen ist. Die Sonne stehe am 1sten December im 9° 10′ des **Schützen**, also ihre Declination ist 21° 50′.

log. sin. tot. =	10,0000000
log. sin. 21° 50′ =	9,5704355
	19,5704355
log. sin. 38° 29′ =	9,7930355
log. sin. der Morgenweite =	9,7774000

Dieser Logarithme gehöret fast zu 36° 11′. Dieses muß auf dem Horizonte von Osten nach Süden gezählet werden, und so weit gehet die Sonne vom wahren Ostpunkt auf, welches zwischen Südost, ½ Ost und Südost seyn wird.

Es sey ihre Declination des Abends beym Untergange (die zu dieser Zeit wenig verschieden ist) an diesem Tage 2 Minuten mehr, so wird man finden

log. sin. tot. =	10,0000000
log. sin. 21° 52′ =	9,5710656
	19,5710656
log. sin. 38° 23′ =	9,7930355
log. sin. der Abendweite =	9,7780301

Dieser Logarithme gehöret fast zu 36° 50′. Man zählet, da die Sonne in den südlichen Zeichen ist, von Abend gegen Süden, und so weit gehet sie vom wahren Westpunkte unter, welches zwischen Südwest, ½ Südwest und Südwesten ist.

Anmerkung. Da wir der Himmelsgegenden gedacht, und noch zuweilen gedenken werden, so wollen wir doch eine Tafel hinschreiben, wie sie um den ganzen Horizont herum genannt werden, und wie weit sie von einander entfernet sind. Man hat den ganzen Horizont in 4 Hauptgegenden, **Ost**, **West**, **Süd** und **Nord** eingetheilet, wo jedes von dem andern 90° entfernet ist. Zwischen jede zwey Hauptgegenden in der Mitte hat man wieder eine Theilung gemacht, die also von jeder der Hauptgegend, zwischen welcher sie lieget, 45° entfernet ist. Zwischen **Osten** und **Süden** lieget in der Mitte **Südost**, zwischen **Osten** und **Norden** in der Mitte **Nordost**. Zwischen **Westen** und **Süden** in der Mitte **Südwest**, und zwischen **Westen** und **Norden** in der Mitte **Nordwest**. Nun zwischen einer Hauptgegend und einer von den Gegenden, als **Südost**, **Nordost**, **Südwest** und **Nordwest** hat man wieder eine Theilung gemacht, die von der Hauptgegend und dieser Theilung wieder gleich weit abstehet, und wir nachher benennen werden, und denn wieder den Zwischenraum zwischen zwey Gegenden abermal in zwey gleiche Theile getheilet und benennet, wodurch man auf die Art 32 Himmelsgegenden bekommen hat, die sich auch auf dem Compas befinden, und von den Schiffern und bey dem Azimuht auf der Erde gebrauchet werden. Wir wollen vom Meridian anfangen und den Null setzen, und bis Osten zählen, hin und zurück, denn wieder vom Meridian bis Westen hin und zurück. Denn von Nord bis Ost hin und zurück, denn von Nord bis West hin und zurück.

Süden

Süden = =	0		90°
Süd ¼ Südost	11° 15′		78° 45′
Süd-Südost	22° 30′		67° 30′
Südost ¼ Süd	33° 45′	zurück ge-	56° 15′
Südost	45°	zählet von	45°
Südost ¼ Ost	56° 15′	Osten nach	33° 45′
Ost-Südost	67° 30′	Süden	22° 30′
Ost ¼ Südost	78° 45′		11° 15′
Ost =	90°		0

Süden	0		90°
Süd ¼ Südwest	11° 15′	zurück ge-	78° 45′
Süd-Südwest	22° 30′	zählet	67° 30′
Südwest ¼ Süd	33° 45′	von	56° 15′
Südwest	45°	Westen	45°
Südwest ¼ West	56° 15′	nach	33° 45′
West-Südwest	67° 30′	Süden	22° 30′
West ¼ Südwest	78° 45′		11° 15′
West	90°		0

Nord	0		90°
Nord ¼ Nordost	11° 15′	zurück	78° 45′
Nord-Nordost	22° 30′	gezäh-	67° 30′
Nordost ¼ Nord	33° 45′	let von	56° 15′
Nordost	45°	Ost	45°
Nordost ¼ Ost	56° 15′	nach	33° 45′
Ost-Nordost	67° 30′	Nord	22° 30′
Ost ¼ Nordost	78° 45′		11° 15′
Ost	90°		0

Nord	0		90°
Nord ¼ Nordwest	11° 15′	zurück	78° 45′
Nord-Nordwest	22° 30′	gezäh-	67° 30′
Nordwest ¼ Nord	33° 45′	let von	56° 15′
Nordwest	45°	West	45°
Nordwest ¼ West	56° 15′	nach	33° 45′
West-Nordwest	67° 30′	Nord	22° 30′
West ¼ Nordwest	78° 45′		11° 15′
West	90°		0

Fig. 9. §. 225. Die Ascensionaldifferenz ist in dem Triangel SOD die OD oder der andre Cathetus dieses rechtwinklichten Triangels. Es durchschneidet nemlich bey ♈ die Ekliptik den Aequator, also ist ♈D die **Rektascension** §. 209. ♈O die **Obliqascension**, folglich OD die **Ascensionaldifferenz**.

In dem Triangel SOD ist nun gegeben §. 224. der rechte Winkel bey D die Aequatorhöhe oder der Winkel bey O, und der Bogen SD, oder die Declination, man suchet OD.

Nach §. 55. 56. Fig. 9. würde man also aus M, P, R die B suchen; das giebt §. 56 in 6 folgende Proportion.

r : cot. M = tang. P : sin. B

hier angewendet.

sinus totus
zum cotangens der Aequatorhöhe
wie der tangens der Declination
zum sinus der Ascensionaldifferenz.

Erem-

Exempel. Es sey wie §. 224. die Aequatorhöhe = 38° 23′, die Sonne stehe am 15ten Junius im 24° der **Zwillinge**, so wird die Declination 23° 20′ seyn.

also log. cot. 38° 23′	=	10,1012108
log. tang. 23° 20′	=	9,6348378
		19,7360486
log. sin. tot.	=	10,0000000
log. sin. der Ascensionaldifferenz	=	9,7360486

Dieser Logarithme gehöret fast zu 33°, und das ist die Ascensionaldifferenz der Sonnen für diesen Tag.

§. 226. Die **Descensionaldifferenz** wird, wie ganz natürlich ist, auf eben dieselbe Art gefunden, und wenn Fig. 47. O der Punkt des Aequators wäre, der mit der Sonnen zugleich untergienge, so wäre ▽D ihre **Rektdescension**; ▽O ihre **Obliqdescension** und OD ihre **Descensionaldifferenz.** Es ist nicht nöthig, hievon ein Exempel zu geben, da der vorhergehende § es deutlich genug zeiget, wie man auch diese finden soll.

§. 227. Es wird leicht seyn, auch hieraus die Obliqascension und Obliqdescension zu finden. Ist die Sonne, wie Fig. 48 anzeigen soll, in den nördlichen Zeichen, also ▽D ihre Rektascension, ▽O die Obliqascension und OD die Ascensionaldifferenz, so muß von ▽D die OD abgezogen werden, um die **schiefe Aufsteigung** ▽O zu finden; oder alsdenn ist die schiefe Aufsteigung = der Rektascen-

Fig. 48

sion **Minus** der Ascensionaldifferenz. Z. E. es sey die Summe im 24° der Zwillinge, so ist die Rektascension = 83° 27′

§. 225. die Ascensionaldifferenz = 33

also die Obliqascension = 50° 27′

Fig. 48. 49. Ist die Sonne in den südlichen Zeichen, wie Fig. 49 vorstellen soll; also ♈D ihre Rektascension, ♈O die Obliqascension, OD die Ascensionaldifferenz, so muß, um ♈O = der **Obliqascension** zu finden, die gerade Aufsteigung ♈D zu der Ascensionaldifferenz OD addiret werden, wie schon aus der Figur sattsam erhellt.

§. 228. Aus den gegebnen datis §. 224 läßt sich auch noch das Azimuht der Sonne finden. Wir haben §. 187 sattsam erkläret, was das Azimuht eines Gestirnes sey; wenn nun Fig. 48. 49a, der Bogen EHQR der Meridian ist, in S die Sonne, Fig. 48. 49a. HO die Entfernung des Durchschnitts des Aequators und des Horizonts vom Punkte H an, wo der Meridian den Horizont schneidet = 90°, so ist Fig. 48 HS = HO + OS und Fig. 49a, HS = HO − OS oder HS = dem Azimuht; oder das Azimuht ist nach den Umständen, wie §. 224, 225, 227 lehret, 90° = OS.

§. 229. Die Mathematiker haben die Zeit, welche die Erde auf eine Umwälzung zubringet, in 24 gleiche Theile getheilet, welche sie Stunden nennen. Da der Aequator als Cirkel aus 360° bestehet, so wird es sich leicht finden lassen, wie viel von diesen

diesen Graden in einer Stunde durch den Meridian gehen, nemlich 15°; und daraus auch eben so leicht, wie viel in einer Minute oder Secunde dadurch passiren. Es ist ein einfaches Exempel aus der Regel Detri, man heißt das: **Theile des Aequators in Zeit verwandeln.** So kann man auch auf eben die Art verfahren, wenn einem die **Zeit** gegeben ist, um zu wissen, wie viel Theile des Aequators unter der gegebenen Zeit durch den Meridian gehen. Man heißt das: **Zeit in Theile des Aequators verwandeln.** Wir haben hiernach folgende Tafeln verzeichnet, welche wir bey den folgenden Aufgaben gebrauchen werden.

Theile des Aequat.	Zeit		Theile des Aequat.	Zeit	
Grade.	St.	Min.	Grade.	St.	Min.
1.	0.	4.	70.	4.	40.
2.	0.	8.	80.	5.	20.
3.	0.	12.	90.	6.	0.
4.	0.	16.	100.	6.	40.
5.	0.	20.	125.	8.	20.
6.	0.	24.	150.	10.	0.
7.	0.	28.	175.	11.	40.
8.	0.	32.	200.	13.	20.
9.	0.	36.	225.	15.	0.
10.	0.	40.	250.	16.	40.
15.	1.	0.	275.	18.	20.
20.	1.	20.	300.	20.	0.
30.	2.	0.	330.	22.	0.
40.	2.	40.	360.	24.	0.
50.	3.	20.			
60.	4.	0.			

Theile des Aequat.	Zeit		Theile des Aequat.	Zeit	
Minuten.	Min.	Sec.	Secunden.	Sec.	Tert.
1	0.	4.	1.	0.	4.
2.	0.	8.	2.	0.	8.
3.	0.	12.	3.	0.	12.
4.	0.	16.	4.	0.	16.
5.	0.	20.	5.	0.	20.
6.	0.	24.	6.	0.	24.
7.	0.	28.	7.	0.	28.
8.	0.	32.	8.	0.	32.
9.	0.	36.	9.	0.	36.
10	0.	40.	10.	0.	40.
15.	1.	0.	15.	1.	0.
20.	1.	20.	20.	1.	20.
30	2.	0.	30.	2.	0.
40.	2.	40.	40.	2.	40.
50.	3.	20.	50.	3.	20.
55.	3.	40.	55.	3.	49.
60.	4.	0.	60.	4.	0.

und auch so umgek. Zeit im Theile d. Aequat. anzug.

Zeit	Theile des Aequat.	Zeit	Theile des Aequat.	
Stunden.	Grade.	Minuten.	Gr.	Min.
1.	15.	1.	0.	15.
2.	30.	2.	0.	30.
3.	45.	3.	0.	45.
4.	60.	4.	1.	0.
5.	75.	5.	1.	15.
6.	90.	6.	1.	30.
7.	105.	7.	1.	45.
8.	120.	8.	2.	0.
9.	135.	9.	2.	15.
10.	150.	10.	2.	30.
11.	165.	11.	2.	45.
12.	180.	12.	3.	0.
16.	240.	16.	4.	0.
20.	300.	20.	5.	0.
24.	360.	24.	6.	0.
		30.	7.	30.
		35.	8.	45.
		40.	10.	0.
		45.	11.	15.
		50.	12.	30.
		55.	13.	45.
		60.	15.	

Zeit			Theile des Aequat.		
Secunden.	Min.	Sec.			
1.	0.	15.			
2	0.	30.			
3	0.	45.			
4.	1.	0.			
5.	1.	15.			
6.	1.	30.			
7.	1.	45.			
8.	2.	0.			
9.	2.	15.			
10.	2.	30.			
11.	2.	45.			
12.	3.	0.			
16.	4.	0.			
20.	5.	0.			
24.	6.	0.			
30.	7.	30.			
35.	8.	45			
40.	10.	0.			
45.	11.	15.			
50.	12.	30.			
55.	13.	45.			
60.	15.	0.			

Anmerkung.

Man muß hier wohl bemerken, daß diese Tafeln nur auf die würkliche **einmalige** Umwälzung der Erde Rücksicht nehmen, ohne daß man sich darum bekümmert, ob man nun die Sonne, nach dieser vollendeten **einmaligen** Umwälzung der Erde, wieder an der gestrigen Stelle siehet. Es ist einiger Unterschied, wenn man berechnen will, wie viel Theile des Aequators durch den Meridian gegangen

sind, wenn die Sonne in einem gewissen Bogen am Himmel stand, bis sie wieder den Bogen erreichte, z. E. wie viel Theile des Aequators durch den Meridian gegangen sind, von dem Punkte, da die Sonne gestern im Meridian stand, bis sie heute wieder in den Meridian kömmt. Man nennet dieses **Theile des Aequators in Sonnenzeit**, oder **Sonnenzeit in Theile des Aequators verwandeln.** Die Ursache lieget darinn, weil die Sonne (oder vielmehr die Erde) in ihrer Laufbahn immer weiter rücket, und also ihre Rektascension in 24 Stunden merklich ändert, welches, wenn man es durch die Regel Detri suchet, da die Sonne in 365 Tagen 6 Stunden 9 Minuten 11 Secunden, 360° am Himmel zurückgeleget hat, und denn wieder auf eben dem Punkte stehet, auf 24 Stunden in einem **mittlern** Durchschnitt 59′ 8″ 12‴ bringet, um so viel sie ihre Rektascension geändert hat, obschon dieses nicht **immer** mit der würklichen Veränderung der Rektascension in 24 Stunden zutrift, so ist doch der Unterschied nicht groß. Doch davon unten. So viel mehr also muß von dem Aequator in 24 Stunden noch durch den Meridian gehen, ehe die Sonne wieder im Meridian stehet, welches auf jede Stunde 2′ 27″ 50‴, oder in einer runden Zahl 2″ 28‴ bringet, also auch auf jede Minute 2‴ 28‴, und auf jede Secunde 2‴ 28‴‘ brächte.

Es ist also ganz natürlich, daß man dieses zu einem gegebnen Bogen addiren muß, der in einer gegebnen Zeit nach vorhergehender Tafel in reflektive Stunden, Minuten oder Secunden, durch den Meridian

eidian gehet, um zu wissen, wie viel vom Aequator in gegebner Sonnenzeit dadurch gehet. Durch die einfache Regel Detri läßt es sich finden, wie viel Sonnenzeit ein gegebner Bogen des Aequators erfordert; man müßte nemlich schließen:

360° 59′ 8″ 20‴ vom Aequator: 24 Sonnenstunden = wie der gegebne Bogen des Aequators: zu der zu suchenden Sonnenzeit.

§. 230. Hieraus entstehen nun folgende Tafeln, Theile des Aequators in Sonnenzeit, oder Sonnenzeit in Theile des Aequators zu verwandeln.

Theile des Aequators in Sonnenzeit.

Theile des Aequat.	Zeit				Theile des Aequat.	Zeit		
Grade	St.	Min.	Sec.	Tert.	Grade.	St.	Min	Sec.
1.	0.	3.	59.	20.	125.	8.	17.	32.
2.	0.	7.	58.	40.	150.	9.	58.	16.
3.	0.	11.	58.	1.	175.	11.	27.	59.
4.	0.	15.	57.	22.	200.	13.	17.	44
5.	0.	19.	56.	42.	225.	14.	53.	22.
6	0.	23.	56.	2.	250.	16.	37.	10.
7.	0.	27.	55.	23.	275.	18.	6.	51.
8.	0.	31.	54.	44.	300.	19.	56.	30.
9.	0.	35.	54.	3.	330.	21.	56.	10.
10.	0.	39.	53.	24.	360.	23.	56.	2.
15	0.	59.	50.	6.				
20.	1.	19.	46.					
30.	1.	59.	40.					
40.	2.	39.	33.					
50.	3.	19.	26.					
60.	3.	59.	20.					
70.	4.	39.	13.					
80.	5.	19.	6.					
90.	5.	59.	0.					
100.	6.	38.	50.					

Theile des Aequators in Sonnenzeit.

Theile des Aequat.	Zeit			Theile des Aequat.	Zeit	
Minuten.	Min.	Sec.	Tert.	Secunden.	Sec.	Tert.
1.	0.	3.	59.	1.	0.	3.
2.	0.	7.	58.	2.	0.	7.
3.	0.	11.	58.	3.	0.	11.
4.	0.	15.	57.	4.	0.	15.
5.	0.	19.	56.	5.	0.	19.
6.	0.	23.	56.	6.	0.	23.
7.	0.	27.	55.	7.	0.	27.
8.	0.	31.	54.	8.	0.	31.
9.	0.	35.	54.	9.	0.	35.
10.	0.	39.	53.	10.	0.	39.
15.	0.	59.	50.	20.	1.	19.
20.	1.	19.		30.	1.	59.
30.	1.	59.		40.	2.	39.
40.	2.	39.		50.	3.	19.
50.	3.	19.		60.	3.	59.
60.	3.	59.				

Sonnenzeit in Theile Aequators.

Zeit	Theile des Aequat.			Zeit	Theile des Aequat.			
Stund.	Gr.	Min.	Sec.	Min.	Gr.	Min.	Sec.	Tert.
1.	15.	2.	28.	1.	0.	15.	2.	28.
2.	30.	4.	56.	2.	0.	30.	4.	56.
3.	45.	7.	24.	3.	0.	45.	7.	24.
4.	60.	9.	52.	4.	1.	0.	9.	
5.	75.	12.	20.	5.	1.	15.	12.	
6.	90.	14.	48.	6.	1.	30.	14.	
7.	105.	17.	16.	7.	1.	45.	17.	
8.	120.	19.	44.	8.	2.	0.	19.	
9.	135.	22.	12.	9.	2.	15.	22.	
10.	150.	24.	40.	10.	2.	30.	34.	
11.	165.	27.	8.	11.	2.	45.	36.	
12.	180.	29.	36.	12.	3.	0.	29.	
16.	240.	39.	28.	16.	4.	0.	36.	
20.	300.	49.	20.	20.	5.	1.	8.	
24.	360.	59.	12.	24.	6.	0.	58.	
				30.	7.	31.	10.	
				40.	10.	1.	44.	
				60.	15.	2.	28.	

Sonnenzeit in Theile des Aequators

Zeit	Theile des Aequat.		
Secunden.	Min.	Sec.	Tert.
1.	0.	15.	2.
2.	0.	30.	4.
3.	0.	45.	7.
4.	1.	0.	9.
5.	1.	15.	12.
6.	1.	30.	14.
7.	1.	45.	17.
8.	2.	0.	19.
9.	2.	15.	22.
10.	2.	30.	24.
11.	2.	45.	26.
12.	3.	0.	29.
16.	4.	0.	36.
20.	5.	1.	8.
24.	6.	0.	58.
30.	7.	31.	10.
40.	10.	1.	44.
60.	15.	2.	28.

§. 231. **Es ist gegeben die Länge der Sonnen, oder ihr Ort in einem himmlischen Zeichen, oder das Datum, (weil sich von diesen dreyen aus einem das andre finden läßt) daraus läßt sich die Tag- und Nachtlänge, also auch der Auf- und Untergang der Sonne finden.**

Es wird bey dieser Aufgabe blos darauf ankommen, daß man wisse, wie lange Zeit darauf hingehet, ehe der Punkt des Bogens des Aequators, worüber sich die Sonne **senkrecht** befindet, und mit dem sie also zugleich durch den Meridian gehet §. 209. vom Aufgange der Sonne bis zum Mittage in den Meridian kömmt. Man erhält dadurch die **halbe** Tageszeit, weil so viel Zeit vom Aufgange der Sonne bis zum Mittage gehöret, als vom Mittage bis zum Untergange der Sonnen. Weis man die **halbe** Tagesdauer, so weis man auch die **ganze**, also die Taglänge, folglich das von 24 Stunden abgezogen, auch die Nachtlänge, und folglich noch durch eine sehr leichte Rechnung die Zeit des Aufganges, und Untergangs der Sonne.

Fig. 49b. Es sey Fig. 49b ZHN der Meridian; HR der Horizont; EL die Ekliptik; AQ der Aequator; PR die Polhöhe; ♈ der Ort, wo die Ekliptik den Aequator durchschneidet; so ist ♈S die Länge der Sonnen §. 208. ♈D ihre Rektascension, ♈O ihre Obliqascension §. 211. und der Bogen OD die Ascensionaldifferenz §. 211. der Bogen SD aber die Declination der Sonne §. 195.

Da die Schiefe der Ekliptik bekannt ist, nemlich 23° 29′, so läßt sich daraus nach §. 214. die Declination, oder der Bogen DS finden. Aus der Polhöhe und der Declination der Sonne läßt sich nun nach §. 225. die Ascensionaldifferenz, oder der Bogen OD finden. Da der Punkt D zu gleicher Zeit, wie aus dem vorhergehenden erhellet §. 209. mit der Sonne durch den Meridian gehet, so habe ich nur nöthig, den Bogen AD in Sonnenzeit zu verwandeln, um zu wissen, wie lange es dauret, ehe der Punkt D in den Meridian kömmt. Nun ist der Bogen AO ein Quadrant; denn da immer vom Aequator ein halber Cirkel über dem Horizonte ist §. 194. der Bogen AH aber der Meridian ist, so muß vom Horizonte bis zum Meridian, oder der Bogen AO ein Quadrant seyn. Wenn man also den Quadranten AO in Sonnenzeit verwandelt, und dazu die in Zeit verwandelte Ascensionaldifferenz OD addiret, so wird man die halbe Tageszeit erhalten, aber **wohl zu merken** für die nördliche Hämisphäre, wenn die Sonne in den **nördlichen** Zeichen ist.

Ist die Sonne in den südlichen Zeichen für unsre Halbkugel im Winter, so ist, da die Tagebogen der Sonne sich in Ansehung unser, die wir in der nördlichen Hämisphäre wohnen, unter dem Aequator befinden nach Fig. 50 von dem in Sonnenzeit verwandelten Quadranten AO, die in Zeit verwandelte Ascensionaldifferenz OD abzuziehen, um die halbe Tageszeit zu erhalten. In der südlichen Hämisphäre ist von dem, was in diesem § angegeben, eben das Gegentheil zu thun, wie jeder auch leicht einsehen wird. Fig. 50.

Also: Es sey die Polhöhe = P
die gegebne Länge der Sonnen = L
die Schiefe der Ekliptik = a
die Declination der Sonnen = d
die Ascensionaldifferenz = δ
so ist nach §. 214. die Declination der Sonnen oder
$\sin. d = \frac{\sin. L . \sin. a}{\sin. totus}$ und nach §. 225. die
Ascensionaldifferenz oder $\sin. \delta = \frac{\tang. P . \tang. d}{\sin. tot.}$
also da nach dem vorhergehenden aus der Declination der Sonne, und Ascensionaldifferenz die halbe Tageslänge gesuchet wird, so ist für die nördliche Hämisphäre, wenn die Sonne in den nördlichen Zeichen ist, die halbe Tageslänge $90° + \frac{\tang P . \tang. d}{\sin tot.}$ und das in Zeit verwandelt.

Ist sie in den südlichen Zeichen: die halbe Tageslänge $= 90° - \frac{\tang. P . \tang. d}{\sin tot.}$ und das in Zeit verwandelt. Für die südliche Hämisphäre, wenn die Sonne in den nördlichen Zeichen ist, die Tageslänge $= 90° - \frac{\tang. P . \tang. d}{\sin. totus}$

Ist sie in den südlichen Zeichen
die halbe Tageslänge $90° + \frac{\tang P . \tang. d}{\sin. totus}$
und das in Zeit verwandelt.

§. 232.

§. 238. Es gelten diese Formeln vom Aequator an bis an den Polarcirkel, oder bis an 66° 31′ nördlicher oder südlicher Breite, wo die Sonne umzulaufen anfänget, und auch zu gewissen Zeiten gar nicht aufgehet, also würden diese Formeln nicht fürs ganze Jahr brauchbar seyn; wir wollen davon weiter unten reden §. 244.

Zweyte Anmerkung. Es ist sehr begreiflich, wenn blos das Datum des Tages gegeben ist, daß aus diesem sich die Länge der Sonne, weil man weis, wannenher sie in ein himmlisches Zeichen tritt, finden lasse, indem sie nach einer mittlern Bewegung täglich um 59′ 8″ 20‴ ihre Rektascension ändert. Man kann also auch hiemit das Problem auflösen.

Dritte Anmerkung. Wenn man die Mühe des Rechnens ersparen will, kann man in den Astronomischen Ephemeriden, die gewöhnlich zwey Jahr vorher schon herauskommen, z. E. Bodens Astronomischen Jahrbuche, die Declination der Sonne für jeden Tag finden und also das Problem mit leichte Mühe auflösen, woselbst sich auch für jeden Tag die Länge der Sonnen findet.

Vierte Anmerkung. Wenn man den sinus totus = 1 annimmt, so wird die halbe Tageslänge genau gefunden, wenn man die natürliche Tangente der Declination der Sonnen mit der natürlichen Tangente der Polhöhe multipliciret, dieses Produkt unter den natürlichen Sinussen aufsuchet, es nach §. 230. in Zeit verwandelt, und alsdenn zu 5 St. 59′

(als welche 90° ausmachen) addiret, wenn die Sonne in den nördlichen Zeichen ist, oder davon subtrahiret, wenn sie sich in den südlichen Zeichen befindet. Unter der südlichen Hämisphäre thut man das Gegentheil. Es giebt dieses die halbe Tageszeit und gilt bis an die Polarcirkel oder bis 66° 31′ Polhöhe.

Fünfte Anm. Da die Declination der Sonnen am längsten Tage 23° 29′, wenn sie nemlich die Wendecirkel erreichet hat, so läßt sich auch durch dieses Problem der längste Tag oder auch der kürzeste Tag, folglich auch die kürzeste und längste Nacht bis an die Polarcirkel finden.

§. 233. Exempel über §. 231. und 232.

Braunschweig lieget unter dem 52° 19′ nördlicher Breite, wie lang ist daselbst am 16ten May der Tag, und wie lang die Nacht, wanneher gehet die Sonne daselbst auf, und wanneher gehet sie unter?

Erstlich also die halbe Tageslänge gesuchet. Die Sonne ist am 16ten May 25° 25′ im **Stier**, also ihre Länge 55° 25′, folglich ihre nördliche Declination 19° 8′, also die halbe Tageslänge §. 231. $= \frac{\text{tang. } 52° 19' + \text{tang. } 19° 8' + 90°}{\text{sin. totus}}$, und dieses nun in Sonnenzeit nach §. 230. verwandelt.

logarithmisch.

log. tang.	52° 19′	=	10,1121446
log tang.	19° 8′	=	9,5402453
			19,6523899
log. sin. totus		=	10,0000000
log. sin. d. Ascensionaldiffer.		=	9,6523899

Dieser passet fast zu 26° 41′ 20″, dazu nach §. 231. 90° addiret und das nach §. 230. in Zeit verwandelt.

Es giebt aber

| | | |

Folglich die Länge des ganzen Tages = 15 St. 30 Min. 52 Sec., wenn man dieses von 24 St. abziehet, die Länge der Nacht = 8 Stunden 29 Min. 8 Secunden.

Den Aufgang der Sonne an dem Tage zu finden, ziehet man die halbe Tageslänge von 12 Stunden, nemlich von Mitternacht bis Mittag ab, und der Aufgang der Sonne wird seyn um 4 Uhr 14 Min. 34 Secunden, und der Untergang ist der halbe Tagebogen selbst, die Sonne gehet unter um 7 Uhr 45 Min. 26 Secunden.

Es ist hiebey auf keine Strahlenbrechung Rücksicht genommen, nach welcher die Sonne in dieser Zeit ungefähr 4 Minuten eher gesehen wird, ehe sie würklich aufgegangen ist, und noch 4 Minuten gesehen wird, wenn sie schon würklich unter dem Horizonte sich befindet. §. 220.

Ein anders Exempel.

Wie lang ist der längste Tag in Braunschweig unter der Polhöhe 52° 19′, wanneher gehet die Sonne auf, und wanneher gehet sie unter?

Am längsten Tage ist die nördliche Declination der Sonnen 23° 29′, also die **halbe** Tageslänge §. 231. = tang. 52° 19′. tang. 23° 29′ + 90°,

	sin. totus	
log tang 52° 19′	=	10, 1121446
log. tang. 23° 29′	=	9, 6379563
		19, 7501009
log sin. tot.	=	10, 0000000
also log sin. d. Ascensionaldiffer.	=	9, 7501009

Die

Dieser Logarithme passet fast zu 34° 14′. In Zeit verwandelt nach §. 230.

30°	=	1 Stund.	59 Min.	40″		
4°	=	—	15	—	57″	
10′	=	—	—	—	39″	53‴
4′	=	—	—	—	15″	57‴
+ 90°	=	5	—	59	—	—
90° + 34° 13′	=	8 Stund.	15 Min.	32 Sec.	50 Tert.	

= der halben Tageslänge. Also die ganze Tageslänge 16 St. 31 Min. 5 Sec.

Die Nachtlänge 7 St. 28 Min. 55 Secund.

Die Sonne gehet auf um 3 Uhr 44′ 27″ und gehet unter um 8 Uhr 51′ 32″.

Hier ist abermal auf keine Strahlenbrechung Rücksicht genommen, nach welcher man unter dieser

Ab-

Abweichung der Sonne sie um $4\frac{1}{2}$ Minuten früher sehen würde, ehe sie aufgehet, und noch $4\frac{1}{2}$ Minuten, wenn sie schon untergegangen ist.

Noch ein Exempel. **Jaffanapatnam** auf der Insel Ceilon lieget unter dem 10ten Grad nördlicher Breite, wie lang ist da der **kürzeste** Tag?

Am kürzesten Tage ist gleichfalls die Declination 23° 29′, aber südlich also nach §. 231.

log. tang. 10°	=	9,2463188
log. tang. 23° 29′	=	9,6379563
	=	18,8842751
log. sin. totus	=	10,0000000
log. sin. der Ascensionaldiffer.	=	8,8842751

Dieser Logarithme gehöret fast zu 4° 23′. In Zeit verwandelt §. 230.

4°	=	0 St.	15′	57″
20′	=	„ —	1′	19″
3′	=	„ —	„	12″
4° 23′	=	0 St.	17′	28″
dieses von 90° in Zeit verwandelt abgezogen	=	5 —	59′	„
giebt zum halben Tagebogen	=	5 St.	41′	32″

Also der ganze Tag hat 11 St. 23′ 4 Sec.

Die Sonne gehet auf am kürzesten Tage um 6 Uhr 18 Minuten 28 Secunden, und gehet unter um 5 Uhr 41 Min. 32 Secunden.

Hier-

Hieraus läßt sich leicht schließen, daß also in Jaffanapatnam am längsten Tage die Sonne um 5 Uhr 43 Minuten 32 Secunden aufgehet, und um 6 Uhr 16 Minuten 28 Secunden untergehet. Der längste Tag ist daselbst 12 St. 32′ 56″ lang, ohne die Strahlenbrechung.

Tornea lieget unter dem 65° 50′ 50″ nördlicher Breite. Der längste Tag ist daselbst 11 St. 0′ 24″, die Sonne gehet auf um 0 St. 59′ 36″ oder fast um 1 Uhr und gehet unter um 11 Uhr 0 Min. 24 Sec.

§. 234. **Es ist gegeben die Polhöhe und die Länge der Sonnen oder auch ihre Declination, oder das datum, man suchet daraus den Anfang der Morgendämmerung und Ende der Abenddämmerung, imgleichen wanneher in der gemäßigten Zone die Dämmerung die ganze Nacht durch dauret.**

Das letztere von diesen Problemen ist leichter und bequemer aufzulösen, als das erstere, also wollen wir das zuerst vornehmen. Durch Erfahrung und Berechnung hat man angenommen, daß die Dämmerung anfänget, und aufhöret, wenn die Sonne 18° unter dem Horizonte ist §. 188. Es wird also bey der Aufgabe, wanneher die Dämmerung die ganze Nacht dauret, darauf ankommen, zu finden, wenn die Sonne die ganze Nacht nie 18° tief unter den Horizont kömmt. Es ist sehr begreiflich, daß das in der nördlichen Hämisphäre nur geschehen kann, wenn die Sonne in den nördlichen Zeichen sich befin-

det,

det, und in der südlichen Hämisphäre, wenn sie in den südlichen Zeichen ihren Lauf hat. Es kömmt hiebey die Höhe des Aequators über dem Horizont, und also auch die Polhöhe mit in Betrachtung, wie wir gleich sehen werden.

Fig. 51. Es sey Fig. 51. HR der Horizont; AQ der Aequator; ZHNR der Meridian; ZAN der südliche; ZRN der nördliche; AS = QS die Declination der Sonne; SS also der Bogen, den sie beschreibet von Mittag bis Mitternacht, HA = QR die Aequatorhöhe.

Wenn nun also der Bogen SR, wo die Sonne um Mitternacht in S ist, kleiner ist als 18°, so dauret die Dämmerung die ganze Nacht fort, denn um Mitternacht ist die Sonne am tiefsten unter dem Horizont und steiget denn wieder höher. Es ist aber SR = QR − QS, oder da QS = AS = der Declination der Sonne, und QR = HA = der Aequatorhöhe, so ist SR = HA − AS = **der Aequatorhöhe, Minus der Declination der Sonne.** Wenn man also die Declination der Sonne von der Aequatorhöhe abziehet, und das, was herauskömmt, ist kleiner als 18°, so dauret die Dämmerung die ganze Nacht.

Hieraus folget erstlich, daß die Dauer der Dämmerung durch die ganze Nacht erst unter der Polhöhe 48° 31′ anfangen kann, und vom Aequator bis dahin nicht möglich ist. Es ist die gröste Declination der Sonnen 23° 29′, es muß also dieses Gröste von der Aequatorhöhe abgezogen = 18° seyn, und wo das nicht ist, da kann die, die ganze

Nacht

Nacht durch daurende Dämmerung gar nicht seyn, weil die Sonne, wenn sie ihre gröste Declination hat, die wenigste Tiefe unter dem Horizont um Mitternacht hat, wie das schon aus der Betrachtung der Figur erhellet. Es sey nun x = der Aequatorhöhe, so muß x — 23° 29′ = 18° also die Polhöhe 48° 31′,

x = 41° 29′

und hier dauret doch die unaufhörliche Dämmerung in strengem Verstande nur eine Nacht, weil die Declination der Sonne gleich wieder kleiner wird.

Um also die Zeit zu wissen, wo für eine Polhöhe über 48° 31′ oder 41° 29′ Aequatorhöhe die Dämmerung durch die ganze Nacht zu dauren anfänget, und wanneher sie aufhöret, durch die ganze Nacht zu dauren, so ziehe man Fig. 51. von dem Bogen QR oder der Aequatorhöhe den Bogen RS oder 18° ab, so bleibt die Declination der Sonnen SQ und es wird also hiedurch angezeiget, welches die gröste Declination der Sonne sey, da die Dämmerung anfängt die ganze Nacht zu dauren. Hat man diese Declination der Sonne, so kann man daraus die Länge der Sonnen durch Rechnung §. 215. oder aus den Ephemeriden finden, und also auch das datum des Tages, also auch wie viel Tage noch hin sind, ehe sie den Wendecirkel erreichet, und wieder so weit herabsteiget, bis sie eben die Declination hat, da die fortdaurende Dämmerung aufhöret, und also die Zeit dieser beständigen Dämmerung bestimmen.

Exempel. Braunschweig lieget unter dem 52° 19′ Polhöhe, also ist seine Aequatorhöhe =

37°

37° 41′, davon abgezogen 18°, bleibt 19° 41′ als die Declination der Sonnen, wo die beständige Dämmerung anfängt und aufhöret. Es hat aber die Sonne diese Declination, wenn sie in den nördlichen Zeichen ist, am 19ten May, und ohngefähr am 27sten Julius, in dieser Zwischenzeit höret die Dämmerung des Nachts nicht auf.

Petersburg lieget unter dem 59° 56′ nördlicher Breite, also seine Aequatorhöhe ist 30° 4′, davon 18° abgezogen, bleibt 12° 4′ für die Declination der Sonne, wenn die beständige Dämmerung anfängt und aufhöret. Dieses trift ungefähr auf den 3ten April und endiget sich den 21ten August.

Tornea in Schweden, lieget unter dem 65° 50′ 50″ nördlicher Breite, also seine Aequatorhöhe 24° 9′ 10″, davon 18° abgezogen, bleibt 6° 9′ 10″, die beständige Dämmerung fängt da an den 5ten April und endigt sich den 6ten September.

§. 235. Nun zu der Auflösung des ersten Satzes in §. 234. **Aus der Polhöhe und Länge der Sonnen den Anfang der Morgendämmerung, und Ende der Abenddämmerung zu finden.**

Es wird diese Aufgabe etwas ähnliches mit der §. 231. haben, wodurch die Aufgabe wegen Aufgangs und Untergangs der Sonnen aufgelöset wurde. Wir nehmen immer hiebey an, daß die Morgendämmerung anfängt und die Abenddämmerung aufhöret, wenn die Sonne 18° unter dem Horizonte ist. Die 52ste Figur mag unsre Betrachtungen erläutern.

Es

Es sey Fig. 52 HR der Horizont; PR die Polhöhe; AQ der Aequator; OS die Declination der Sonnen; ZDN ein Verticalcirkel, der also senkrecht auf dem Horizonte stehet, und durch das Zenith und Nadir in Z und N gehet; DS also die Tiefe der Sonnen unter dem Horizonte, hier zu 18°, wo die Dämmerung angehet und aufhöret, angenommen; ZAH der Meridian.

Da OS die Declination der Sonnen, also SO auf dem Aequator AQ senkrecht stehet, so wird der Punkt O mit der Sonne zu gleicher Zeit durch den Meridian gehen. §. 209. Ich habe also nur nöthig zu wissen, wie lange Zeit darauf hingehet, oder welches einerley ist, ich habe nur nöthig, wenn ich den Bogen AO kenne, ihn in Sonnenzeit zu verwandeln, um nun zu wissen, wie viel Zeit vom Anfange der Dämmerung bis zum Mittag verfließet, so weis ich auch den Anfang der Morgendämmerung. Ich kann nun auf eben die Art das Ende der Abenddämmerung finden; auch allenfalls, da es mir bey der Dämmerung auf etliche Secunden mehr oder weniger nicht ankommen kann, indem ihre Anfangs- und Endigungszeit ohne dem von der verschiednen Beschaffenheit der Luft verändert wird, so kann ich sie nur für den Tag mit der Morgendämmerung gleich annehmen, ob schon unter der Zeit die Sonne ihre Länge, also auch ihre Declination und Rektascension geändert hat.

Es wird nun darauf ankommen, den Bogen des Aequators AO zu bestimmen, und alsdenn ist die Aufgabe aufgelöset. Dieser läßt sich durch den Triangel PSZ finden, weil der Bogen AO, wie wir

bald sehen werden, das Maaß des Winkels P in diesem Triangel ist; ist also dieser Winkel bekannt, so ist auch der Bogen AO dadurch bekannt geworden.

Um den Winkel P zu finden, müssen wir hier das Problem §. 173 vornehmen: Aus drey gegebnen Seiten eines Triangels seine Winkel zu finden; denn im Triangel PZS sind alle drey Seiten bekannt.

PZ = dem Complemente der Polhöhe zu 90° (weil Z das Zenith) oder also auch PZ = der Aequatorhöhe ZS = ZD + DS, und da ZD ein Quadrant, und DS = 18° angenommen ist = 108°.

PS = PO − OS = 90° — der Declination der Sonne.

Nun ist auch der Bogen AO das Maaß des Winkels P; denn AH + PR = 90° (weils die Aequator- und Polhöhe zusammen ist), also auch AP = 90° (weil HPR 180° sind).

Es ist aber laut §. 140.

$$\sin.\tfrac{1}{2}P = r\sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(ZS+PS-PZ).\sin.\tfrac{1}{2}(ZS+PZ-PS)}{\sin.PZ\sin.PS}}$$

Kennet man den halben Winkel P, so kennet man auch den ganzen, folglich auch sein Maaß, den Bogen AO. Den in Sonnenzeit verwandelt nach §. 230

wird die Zeit vom Anfange der Morgendämmerung bis zum Mittag geben; dieses von 12 Stunden abgezogen, giebt den Anfang der Morgendämmerung, und die verwandelte Zeit des Bogens AO das Ende der Abenddämmerung.

§. 236. Hievon nun Exempel. Es sey die Polhöhe, wie in Braunschweig 52° 19′ wanneher fänget am 27ten August die Morgendämmerung an, und hört die Abenddämmerung auf?

Am 27sten August stehet die Sonne im 4ten Grad der Jungfrau, und ihre Declination ist 10° 2′
hier ist also PZ = 37° 41′
ZS = 108°
PS = 90° — 10° 2′ = 79° 58′

also nach der Formel des vorhergehenden Paragraphen.

$$\sin \tfrac{1}{2}P = \frac{r \sqrt{\sin. \tfrac{1}{2}(108^\circ + 79^\circ 58' - 37^\circ 41') . \sin. \tfrac{1}{2}(108^\circ + 37^\circ 41' - 79^\circ 58')}}{\sqrt{\sin. 37^\circ 41' . \sin. 79^\circ 58'}}$$

$$= \frac{r \sqrt{\sin. \tfrac{1}{2}(150^\circ 17') . \sin. \tfrac{1}{2}(65^\circ 43')}}{\sqrt{\sin. 37^\circ 41' . \sin. 79^\circ 58'}}$$

$$= \frac{r \sqrt{(\sin. 75^\circ 8' 30'' . \sin. 32^\circ 51' 30'')}}{\sqrt{\sin. 37^\circ 41' . \sin. 79^\circ 58'}}$$

Wir wollen hier die Secunden negligiren. Also logarithmisch

log. sin. 75° 8′ =	9,9852133
log sin. 32° 51′ =	9,7343529
den √ ausgezogen oder durch 2 dividiret, giebt den Logarithmen	19,7195662
	9,8597831
dazu den log. sin. totus addiret =	10,0000000
giebt den Logarithmen	19,8597831

Dieses ist der Logarithme des Zählers.

log. sin. 37° 41′ =	9,7862522
log. sin. 79° 58′ =	9,9933068
daraus logarithmisch den radix	19,7795590
giebt den Log. :2	9,8897795

Dieses ist der Logarithme des Renners.

Also Logarithme des Zählers	19,8597831
Logarithme des Renners	9,8897795
giebt Logarithme sinus $\frac{1}{2}$P =	9,9700036

Dieser gehöret fast zum sinus 68° 57′, also der **ganze** Winkel P = 137° 54′. So groß ist nun auch der Bogen AO, der ihn misset. Den nun in Sonnenzeit verwandelt nach §. 230

125°	=	8 St. 17′ 32″
10°	=	— 39′ 53″
2°	=	— 7′ 58″
50′	=	— 3′ 19″
4′	=	— — 15″
137° 54′	=	9 St. 8 M. 57 Sec.

Das ist nun von Mittag bis zum Anfange der Morgendämmerung. Dieses von 12 Stunden abgezogen, giebt

giebt 2 Uhr 51′ 3″, wo an dem Tage die Morgendämmerung anfänget. Sie endiget sich Abends um 9 Uhr 8 Min. 57 Secunden.

Noch ein Exempel.

Wanneher fängt die Morgendämmerung an, und höret die Abenddämmerung auf, am Aequinoktientage unter der Polhöhe von Braunschweig, 52° 19′.

nach §. 235 ist hier gleichfalls PZ = 37° 41′
ZS = 108° —

und weil die Declination am Aequinoktientage = 0, weil die Sonne im Aequator läuft PS = 90° —

log.

Also $\sin. \frac{1}{2} P = r \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(108° + 90° - 37° 41') . \sin. \frac{1}{2}(108° + 37° 41' - 90°)}{\sin. 37° 41' . \sin. 90°}}$

$= r \sqrt{\frac{(\sin. 80° 9' . \sin. 27° 50')}{\sin. 37° 41' . \sin. 90°}}$

log sin. 80° 9′ = 9,9935504
log sin. 27° 50′ = 9,6692250
19,6627754
√ daraus :2
9,8313877
log sin. totus = 10,0000000
Logarithme des Zählers 19,8313877

Ferner:
log. sin 37° 41′ = 9,7862522
log. sin. 90° = 10,0000000
19,7862522
√ daraus :2
Logarithme des Nenners = 9,8931261
Also Logarithme des Zählers 19,8313877
Logarithme des Nenners 9,8931261
Logarithme sinus ½ P = 9,9382616

Dieser Logarithme gehöret fast zu 60° 10′, also der ganze Winkel P = 120° 20′, welches folglich auch der Bogen AO Fig. 52 ist, der ihn misset. Diesen nun in Sonnenzeit verwandelt. §. 230.

100° = 6 St. 38′ 50″
20° = 1 ″ 19′ 46″
20′ = — 1′ 19″
120° 20′ = 7 St. 59′ 55″

Abgezogen von 12 Stunden, giebt 4 Uhr 0 Min 5″ denn fängt die Morgendämmerung an. Die Abend-

dämmerung endiget sich um 7 Uhr 59 Min. 55 Secunden. Oder in einer runden Zahl; die Morgendämmerung fängt um 4 Uhr an und endiget sich die Abenddämmerung um 8 Uhr.

Wir wollen doch noch ein Exempel geben, wenn die Sonne, in Ansehung unser nördlichen Hämisphäre, jenseit des Aequators sich befindet.

Wanneher fängt die Morgendämmerung an, und endiget sich die Abenddämmerung am 5ten December? Es sey hier abermals die Braunschweigische Polhöhe 52° 19′.

Hier ist der Bogen PS = 90° + der Declination der Sonne, (denn die Sonne ist in Ansehung unser jenseits des Aequators in den südlichen Zeichen) und da die Declination am 5ten December 22° 25′, so ist also

PS = 112° 25′
PZ = 37° 41′
ZS bleibt = 108° —

sin.

$$\sin.\tfrac{1}{2}P = r\sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(108^\circ + 112^\circ 25' - 37^\circ 41')\ \sin.\tfrac{1}{2}(108^\circ + 37^\circ 41' - 112^\circ 25')}{\sin.37^\circ 41' . \sin.112^\circ 25'}}$$

$$= \frac{r\sqrt{(\sin.91^\circ 22' . \sin.16^\circ 38')}}{\sqrt{\sin.37^\circ 41' . \sin.112^\circ 25'}}$$

log.

logarithmisch.

log. sin 91° 22′ = log. sin. 88° 38′ = 9,9998764
log. sin. 16° 38′ = 9,4567392
19,4566156
√ daraus : 2
9,7283078
dazu log. sin. tot. = 10,0000000
also log. des Zählers = 19,7283078

Ferner:

log sin. 37° 41′ = 9,7862522
log. sin. 112° 25′ = log. sin. 67° 35′ = 9,9658764
19,7521286
√ daraus : 2
Logarithme des Nenners = 9,8760645
also Logar. des Zählers 19,7283078
Logarithme sin. $\frac{1}{2}$ P = 9,8522435

Dieser Logarithme gehöret fast zu 45° 22′. Also ist der ganze Winkel P = 90° 44′, und so groß auch der Bogen AO, der ihn misset.

Nun in Sonnenzeit verwandelt nach §. 230.

90°	=	5 St. 59′
40′	=	— 2′ 39″
4′	=	— — 16″
90° 44′	=	6 St. 1 M. 55 Sec.

Dieses von 12 Stunden abgezogen, giebt 5 Uhr 58 Min. 5 Sec. da fängt die Morgendämmerung an, die Abenddämmerung endiget sich um 6 Uhr 1 Min. 55 Secunden.

Anmer-

Anmerkung. Man hat hiebey nicht Rücksicht genommen auf eine trübe Witterung, auf Kälte und Wärme der Luft, welches die Dämmerung um etwas verspäten oder beschleunigen kann.

§. 237. Es ist gegeben die Polhöhe, die Declination der Sonne, imgleichen die Zeit des Tages, daraus die Höhe der Sonnen über dem Horizont zu finden.

Es können bey diesem Problem drey Fälle vorkommen, die Declination der Sonne kann **nördlich**, sie kann **südlich**, sie kann auch **Null** seyn, nemlich, wenn die Sonne sich im Aequator befindet, oder am Aequinoktientage.

Wir wollen erst davon reden, wenn die Declination nördlich ist. Es sey Fig. 53 HR der Horizont; AQ der Aequator; PR die Polhöhe; DS die Declination der Sonne; Z das Zenith; also MZ ein Vertikalkreis, der auf dem Horizonte senkrecht stehet §. 183. MS die Höhe der Sonnen über dem Horizont, welche man suchet; DA der Stundenbogen auf dem Aequator, wo der Punkt D mit der Sonne zugleich durch den Meridian gehet. §. 194. 209. Fig. 53.

Man siehet leicht ein, da ZM = 90°, wenn ZS bekannt wäre, oder das Complement der Höhe der Sonnen zu 90°, oder bis ans Zenith, man alsdenn auch sehr leicht MS, oder die Höhe der Sonnen finden könnte. Sie wäre nemlich 90° — ZS, dieses ZS wollen wir also suchen, um daraus MS zu bestimmen.

Es ist uns aber in dem sphärischen Triengel ZPS verschiednes bekannt, wodurch man ZS finden kann,

kann, der Bogen ZP, er ist, weil PR = der Polhöhe, und gegeben ist = dem Complemente der Polhöhe zu 90° = der Aequatorhöhe = ZP.

Ferner ist bekannt PS = DP − DS = 90° − der gegebnen Declination.

Ferner ist bekannt der Winkel bey P. Denn weil PR + AH = 90°, so ist auch AP als das übrige des halben Cirkels = 90°, folglich AD das Maaß des Winkels P. Aber AD ist der Bogen des Aequators, von der gegebnen Zeit bis da die Sonne in den Meridian tritt; wenn man also diese Zeit aus der gegebnen Stunde berechnet, und denn diese Zeit in Bogen des Aequators nach der Tafel §. 230. verwandelt, so hat man das Maaß des Winkels P, oder den Winkel P.

Also gegeben PZ, PS und der Winkel P oder in dem Triangel SZP sind gegeben, 2 Seiten und der eingeschloßne Winkel, man suchet die dritte dem gegebnen Winkel gegenüberstehende Seite. Nach §. 144. gilt nun folgende Proportion:

sinus totus
zum cosinus P oder cosinus des gegebnen Stunden-Winkels
wie der tangens der kleinsten gegebnen Seite
zum tangens des ersten Abschnitts, der durchs Perpendikel geschieht

Es wird sich nun aus den Umständen §. 144. ergeben, ob das Perpendikel innerhalb oder außerhalb des Triangels falle.

Man

Man schließe alsdenn ferner:

des cosinus des ersten Segments
zum cosinus des zweyten Segments
wie der cosinus der kleinsten gegebnen Seite
zum cosinus der gesuchten Seite, oder hier zum cosinus ZS

und es wird hiedurch die Aufgabe aufgelöset werden.

Exempel. Wie hoch stehet die Sonne unter der Polhöhe 51° 37′ nördlicher Breite am 15ten Junius um 9 Uhr des Morgens?

An dem Tage ist DS oder die Declination 23° 20′ also PS = 66° 40′.

ZP = dem Complemente der Polhöhe zu 90° = 38° 23′, der Stundenbogen AD, weil von 9 Uhr bis 12 Uhr drey Stunden sind, und diese Zeit nach §. 230. in Bogen verwandelt = 45° 7′ 24″, so groß ist der Winkel P.

Es ist hier also ZP die kleinste unter den gegebnen Seiten und das Perpendikel ZK fällt auf PS, also nun geschlossen:

sin. tot.: cos. 45° 7′ 24″ = tang. 38° 23′: tangens des ersten Segments

also tangens des ersten Segments =

$$\frac{\text{tang. } 38^\circ 23' \cdot \text{cos. } 45^\circ 7'}{\text{sin. tot.}}$$

loga-

logarithmisch

log. cos. 45° 7′	=	9,8485989
log. tang. 38° 23′	=	9,8987892
		19,7473881
log. sin. tot.	=	10,0000000
log. tang. des ersten Segments	=	9,7473881

Dieser Logarithme gehöret fast zum tangens 29° 12′.

Aus den Umständen, die §. 144. anzeiget und erläutert, fällt das Perpendikel innerhalb des Triangels auf SP. Da der erste Abschnitt von SP = 29° 12′, die Seite SP aber selbst war 66° 40′, so ist also das 2te Segment = 66° 40′ — 29° 12′ = 37° 28′.

Man schließe ferner:

cos. 29° 12′ : cos. 37° 28′ = cos. 38° 23′ : cos. SZ

und $\cos. SZ = \frac{\cos. 37° 28′ . \cos. 38° 23′}{\cos. 29° 12′}$

also

log. cos. tot. 37° 28′	=	9,8996604
log. cos. 38° 23′	=	9,8942463
		19,7939067
log. cos. 29° 12′	=	9,9409755
also log. cos. SZ	=	9,8529312

Dieser Logarithme gehöret fast zu 45° 28′. Der Logarithme des cosinus ist, so ist also SZ = 44° 32′. Folglich MS oder die Höhe der Sonnen zu der gegebnen Zeit über dem Horizonte = 90° — 44° 32′ = 45° 28′ = MS.

Wie

Wir kommen auf den Fall, wenn die Declination südlich ist. Da in Ansehung der nördlichen Sphäre die Sonne sich alsdenn jenseits des Aequators oder unter dem Aequator befindet, so muß zu dem Quadranten DP die Declination zu addiret werden, um die Seite PS des Triangels zu bekommen. Alles übrige bleibt, wie in dem vorhergehenden Falle, und wird auf die nemliche Art aufgelöset.

Wie hoch stehet die Sonne unter der Polhöhe 51° 37′, am ersten December des Morgens um 9 Uhr?

Die Declination der Sonne ist an dem Tage 21° 52′, also der Bogen PS = 90° + 21° 52′ = 111° 52′, ZP = 38° 23′.

Der Winkel bey P, wie im vorhergehenden Exempel, = 45° 7′.

Nun geschlossen:

sinus totus: cos. 45° 7′ = tang. 38° 23′: tang. des ersten Segments.

Dieses giebt den tangens des ersten Segments logarithmisch berechnet 29° 12′. Aus den Umständen des §. 144. erhellet, daß das Perpendikel innerhalb des Triangels fällt, also das erstere Segment würklich 29° 12′ ist.

Das zweyte Segment ist also 111° 52′ — 29° 12′ = 82° 40′.

Nun ferner geschlossen:

cos. 29° 12′: cos. 82° 40′ = cos. 38° 23′: cos. ZS

Dieses logarithmisch berechnet, findet sich, daß cos. ZS = 83° 25′ sey. Dieses nun von 90° ab-

gezogen giebt die Höhe der Sonnen zu der verlangten Stunde = 6° 35′ = MS.

Es ist noch der dritte Fall übrig, wenn die Declination Null ist, oder die Sonne am Aequinoctientage sich im Aequator befindet. Hiezu wollen wir, um desto verständlicher zu seyn, eine eigene Figur zeichnen. Es sey abermal das Problem, wie vorher. Wie hoch stehet die Sonne Morgens um 9 Uhr unter der Polhöhe 51° 37′?

Fig. 54a. Es sey Fig 54a HR der Horizont, AQ der Aequator, PR die Polhöhe, ZP das Complement der Polhöhe zu 90° = der Aequatorhöhe = AH, hier ist PS = 90°.

PZ = 38° 23′

AS das Maas des Winkels P = 45° 7′

man suchet ZS

Man schließe

sin. tot. : cos. 45° 7′ = tang. 38° 23′ : tang. des ersten Abschnitts

Logarithmisch berechnet giebt das 29° 12′ für das erste Segment. Da das Perpendikel laut den Umständen des §. 144. innerhalb des Triangels fällt, so ist das 2te Segment = 90° — 29° 12′ = 60° 48′, also

cos. 29° 12′ : cos. 60° 48′ = cos. 38° 23′ : cos. der gesuchten Seite ZS.

Dieses nun logarithmisch berechnet:

log.

log. cos. 60° 48′	=	9,6882949
log. cos. 38° 23′	=	9,8942463
		19,5825412
log. cos. 29° 12′	=	9,9409755
log. cos. ZS	=	9 6415657

Dieser Logarithme gehöret fast zu 25° 59′. Da er cosinus ist, so ist also ZS würklich 64° 1′. Das von 90° abgezogen, oder von MZ, giebt 25° 59′ = MS oder = der Höhe der Sonnen über dem Horizonte zu der im Problem gegebnen Zeit.

Anmerkung. Es ist dieses das Problem, welches sich die Jesuiten in China bedienten, als der Kaiser von China seine mathematischen Mandarins mit ihnen streiten lies, um die Jesuiten, wenn sie überwänden, zu Obermathematikern zu machen, weil sie auch den ganz in Unordnung gerathenen Calender verbessern sollten, und welches die chinesischen Mandarins nicht auflösen konnten. Die Jesuiten hatten alle ihre Probleme leichtlich aufgelöset. Nun stellten die Jesuiten einen Stab senkrecht in die Erde, und frugen die Chinesen, bis wohin der Schatten dieses Stabes zu einer bestimmten Stunde fallen würde. Wusten sie zu dieser bestimmten Zeit die Höhe der Sonnen, so war dieses Problem sehr leicht aufzulösen. Sie hatten nur alsdenn mit einem ebenen Triangel zu thun. Es sey Fig. 45b MS die Höhe der Sonnen, ab der Stab und bc der Schatten, CM der Horizont, so war der Winkel acb, der Winkel der Sonnenhöhe, bey b ein rechter Winkel, also der Winkel Fig. 45b.

cab auch bekannt, imgleichen auch die Höhe des Stabes oder die ab. Also konnten sie schließen: rad: tang. bac = ab: bc. §. 500. Trigon. 2ter Theil. Wir haben z. E. die Höhe der Sonnen in dem vorhergehenden Exempel am Aequinoktientage, unter der Polhöhe 51° 37 Minuten um 9 Uhr 25° 29′ gefunden. Der Stab ab soll nun 40 Zoll hoch seyn. Da der Winkel acb = 25° 29′ und bey b ein Rectus, so ist der Winkel bac das Complement zu 90° = 64° 31′, also
rad: tang. 64° 31′ = 40 Zoll: bc, und das logarithmisch berechnet, giebt für bc oder der Länge des Schattens, ohne auf den Halbschatten Rücksicht zu nehmen 83, 92 Zoll. Aber die Mandarins konnten das nicht auflösen und die Jesuiten siegeten.

§. 238. **Es sey gegeben die Polhöhe, die Declination der Sonnen und die Höhe der Sonnen, daraus die Zeit des Tages zu finden.**

Es sind bey dieser Aufgabe abermal drey Fälle, 1) wenn die Sonne im Aequator ist, 2) wenn sie in den nördlichen Zeichen sich befindet, 3) wenn sie in den südlichen Zeichen ist. Wir wollen den ersten Fall auch zuerst vornehmen.

Fig. 55. Es sey Fig. 55. HR der Horizont: AQ der Aequator, in Z das Zenith, PR die Polhöhe, also ZP ihr Complement zu 90° = der Aequatorhöhe = AH. MS = der Höhe der Sonnen, also ZS = 90° — der gegebnen Höhe.

Es wird darauf ankommen, daß wir den Bogen AS finden, und den in Zeit verwandeln, so haben

haben wir die Aufgabe aufgelöset. Wir könnten nun wohl dazu den Triangel ZPS gebrauchen, worinn uns alle Seiten bekannt sind, und daraus den Winkel P finden, welcher das Maas des Bogens AS ist, weil AP = 90°, und denn AS in Zeit verwandeln; wir wollen jetzt aber bey diesem Falle eine noch kürzere Methode erwählen und den Triangel AZS gebrauchen, von welchem wir auch genugsam wissen, um den Bogen AS zu finden.

In diesem Triangel AZS ist uns bekannt:
ZS = ZM — MS = 90° — der gegebnen Höhe
ferner AZ = der Polhöhe, weil HZ = 90° und
HA = der Aequatorhöhe.

Ferner der rechte Winkel bey A (weil AZP der Meridian, ein Circulus Maximus, durch des Aequators Pol gehet, und ihn also unter rechten Winkeln schneidet.)

Wir haben also in dem rechtwinklichten Triangel AZS bekannt: einen Cathetus, die Hypotenuse und den rechten Winkel oder nach §. 55. 56. PHR, man suchet B.

Nun findet man §. 56 in 3.
cos. P : r = cos. H : cos. B. hier gehörig substituiret.
cos. AZ : sinus totus = cos. ZS : cos. AS.

Wenn man AS gefunden hat, so verwandle man es nach §. 230. in Zeit, und die Aufgabe ist aufgelöset. Man findet alsdenn die Zeit, welche es noch dauret, ehe es Mittag ist, die von 12 Uhr abgezogen, giebt die Morgenstunde, und sie selbst die Zeit, die vom Mittag an verflossen ist.

Exempel. Es sey die Polhöhe 51° 37′, die Sonne stehe am Aequinoktientage 25° 59′ hoch, wie viel ist alsdenn die Uhr? Hier ist ZS = 90° — 25° 59′ = 64° 1′, also die Proportion wird seyn.

cos. 51° 37′ ; sinus tot. = cos. 64° 1′ : cos. AS.

logarithmisch

log. sin tot.	=	10,0000000
log. cos. 64° 1′	=	9,6415828
		19,6415828
log. cos. 51° 37′	=	9,7930355
log. cos. AS	=	9,8485473

Dieser Logarithme gehöret fast zu 44° 52′ 36″. Da er zum cosinus gehöret, so ist der Bogen würklich 45° 7′ 24″, das nun in Zeit verwandelt:

40°	=	2 St.	39′	33″	
5°	=	" —	19′	56″	42‴
7′	=	" —	"	27″	37‴
24″	=	" —	"	1″	34‴
45° 7′ 24″	=	2 St.	59′	48″	53‴

Das von 12 Uhr abgezogen giebet 9 Uhr 0 Minuten 41 Secunden 7 Tertien. Weil wir das letztere Exempel des vorhergehenden §. umgekehrt haben, so müste hier eigentlich 9 Uhr seyn, und sind 41 Secunden 7 Tertien zu viel, welches daher kömmt, weil wir die Secunden negligiren. Der zweyte Fall, wenn sich die Sonne in den nördlichen Zeichen befindet.

Es

Es sey Fig. 56. HR der Horizont; AQ der Aequator; PR die Polhöhe; Z das Zenith; PZ das Complement der Polhöhe zu 90°, also auch = der Aequatorhöhe; DS die Declination; MS die Höhe der Sonne über dem Horizont.

Es sind uns nun in dem Triangel ZPS alle Seiten bekannt, und wollen wir aus seinen drei Seiten den Winkel bey P suchen, weil sein Maas der Bogen AD ist, indem PA = 90°, so haben wir auch dadurch den Bogen AD, und den in Sonnenzeit nach §. 230. verwandelt; so ist das die Zeit, die noch entweder an 12 Uhr am Vormittage fehlet, oder die Nachmittagszeit von 12 Uhr an gezählet. Wir rechnen aber hier nicht darauf, daß die Sonne unterdessen schon um etwas ihre Declination verändert hat, worauf man bey strenger Genauigkeit Rücksicht nehmen müste, ohngeachtet es nicht viel bedeutet; auch sagen wir nichts von der Strahlenbrechung, wodurch die Sonne etwas höher scheinet, wie wir schon an einem andern Orte gesagt haben. Wie der Winkel P aus den drey Seiten des Triangels gefunden wird, ist schon aus §. 140. bekannt.

Exempel. Es sey die Höhe der Sonnen 48° 7′ Vormittags; die Polhöhe 51° 21′; der Tag, da dieses observiret wird, der 14te April, wo die Declination der Sonnen 9° 28′ nördlich ist; wie viel ist es denn an der Uhr? nemlich in Sonnenzeit. In dem Triangel PZS ist also ZS = ZM — MS, hier = 90° — 48° 7′ = 41° 53′.

Ferner PS = PD — DS, hier = 90° — 9° 28′ = 80° 32′.

PZ = der Aequatorhöhe, hier = 38° 39′.

Man suchet den Winkel P. Nach der Formel §. 140. ist

$$\sin.\tfrac{1}{2}P = r\sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(ZS+PS)-PZ)\sin.\tfrac{1}{2}(ZS+PZ-PS}{\sin.PZ.\sin.PS}}$$

hier

hier angewendet:

$$\sin \tfrac{1}{2}P = r \cdot \frac{\sqrt{\sin. \tfrac{x}{2}(41^\circ 53' + 80^\circ 32' - 38^\circ 39') \cdot \sin. \tfrac{x}{2}(41^\circ 53' + 38^\circ 39' - 80^\circ 32')}}{\sqrt{\sin. 38^\circ 39' \cdot \sin. 80^\circ 32'}}$$

$$= \frac{r\sqrt{(\sin. 41^\circ 53' \cdot \sin. 0)}}{\sqrt{\sin. 38^\circ 39' \cdot \sin. 80^\circ 32'}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{\sin 38^\circ 39' \cdot \sin. 80^\circ 32'}}$$

Null oder es ist eben Mittag.

Wenn die Sonne in den südlichen Zeichen ist, so ist sie also in Ansehung der nördlichen Hämisphäre unter dem Aequator, und also PS **größer** als 90° oder = 90° + der Declination. Mit allen übrigen wird, wie im vorhergehenden Exempel, verfahren, wie folgendes Exempel zeigen mag.

Es sey die Höhe der Sonnen am ersten December = 16° 32′ unter der Polhöhe 51° 21′, die Declination der Sonne ist alsdenn 21° 52′; wie viel ist alsdenn die Tageszeit?

hier ist ZS = 90° − 16° 32′ = 73° 28′
PS = 90° + 21° 52′ = 111° 52′
PZ = 38° 39′.

Wenn man nun auf die verschiedentlich schon angeführte Art, wie auch noch im vorhergehenden Exempel geschehen ist, verfähret, so wird man finden, daß der Bogen AD, welcher den Winkel bey P misset, = 4° 52′ sey, und daß dieses nach §. 230. in Sonnenzeit verwandelt, 19 Minuten 23 Secunden giebet, welche also von 12 abgezogen zur Tageszeit 11 Uhr 40′ 37″ geben oder auf den Nachmittag 12 Uhr 19 Minuten 23 Secunden.

§. 239. **Es ist gegeben die Polhöhe, die Declination der Sonne (oder auch das datum) und das Azimuht der Sonne, daraus die Tageszeit zu finden.**

Fig. 57. Es sey Fig. 57. HR der Horizont; AQ der Aequator; PR die Polhöhe; DS die Declination der Sonne; HAZP der Meridian; Z das Zenith; HN das Azimuht. §. 187.

Man

Man suchet den Winkel P oder den Stundenwinkel, welchen man in Zeit verwandelt, weil dieser Winkel durch den Bogen des Aequators AD gemessen wird.

Um ihn zu finden, müssen wir den Triangel ZPS betrachten. In diesem Triangel ist uns bekannt, der Bogen PS = 90 — der Declination der Sonne, (wenn die Sonne in nördlichen Zeichen ist).

Der Bogen PZ = dem Complemente der Polhöhe zu 90° = der Aequatorhöhe.

Der Winkel bey Z, welcher das Complement des Winkels HZN (der durch den Azimuthalbogen HN, der hier gegeben ist, gemessen wird) zu 180° ist. Also aus zwey Seiten, und dem der einen Seite opponirten Winkel, wird gesuchet, der von beyden Seiten eingeschloßne Winkel. §. 143. Man findet diese Aufgabe aufgelöset, §. 167. 168.

Exempel. Wannenher stehet die Sonne am 10ten Junius unter der Polhöhe 52° 19′ (welches auch die Polhöhe von Braunschweig ist) grade des Morgens in Osten?

Hier ist gegeben die Declination an dem Tage 23° 2′ = DS.

Ferner aus der Polhöhe PR ihr Complement zu 90° = der Aequatorhöhe = 37° 41′ = PZ. PS = 90° — 23° 2′ = 66° 58′.

Das

Das Azimuht ist HN, und weil die Sonne gerade in Osten stehen soll, und von Osten bis Mittag 90° sind, so ist HZN, der durch den Bogen HN gemessen wird, = 90°, also auch das Complement dieses Winkels zu 180° oder der Winkel PZS = 90°.

Man könnte nun hier die Auflösung §. 167. anwenden, aber man in diesem Exempel kürzer dazu kommen, und weil bey Z ein rechter Winkel ist, den Triangel PZS als einen rechtwinklichten Triangel behandlen. Man würde auch finden, wenn man die Auflösung §. 167. anwendete, daß er so muß behandelt werden. In dem in diesem Falle rechtwinklichten Triangel PZS ist nun gegeben ein Cathetus, PZ die Hypotenuse, PS und der rechte Winkel bey Z, oder nach §. 55. RBH, man suchet M.

Es wir also nach §. 56. in 3 die dasigen Zeichen hier angewendet, folgende Proportion gelten.

sin. tot: cotang. PS = tang. PZ : cos : ZPS oder
sin. tot: cotang. 66° 58′ = tang 37° 41′ : cos. ZPS

log cotang. 66° 58′	=	9,6285540
log sin. 37° 41′	=	9,8878554
		19,5164094
log. sin. totus	=	10,0000000
log. cos. ZPS	=	9,5164094

Dieser Logarithme gehöret fast zu 19° 10′. Da er vom cosinus ist, so ist also der würkliche Winkel 70° 50′ = dem Bogen des Aequators, der ihn misset. Diesen Bogen nun nach §. 230. in Zeit verwandelt.

70°

70°	=	4 St. 39′ 13″
50′	=	— 3′ 19″
		4 St. 42′ 32″

abgezogen von 12 Uhr giebet 7 Uhr 17′ 28 Secunden Sonnenzeit, alsdenn stehet die Sonne den Tag grade in Osten. In Westen weil dieses vom Meridian an eben auch 90° Azimuht hat, würde sie den Tag um 4 Uhr 42′ 32″ stehen. Man siehet hieraus, daß die Sonne nicht alle Tage des Morgens um 6 Uhr grade in Osten und Abends um 6 Uhr grade in Westen stehe. Sie thut dieses nur am Aequinoktientage.

Ein andres Exempel, wo die Declination südlich ist. Wannenher stehet die Sonne am 24 Oct. unter der Polhöhe 52° 19′, grade in Südosten?

Am Horizonte gezählet, vom Meridian bis Südosten, sind grade 45°, also das Azimuht oder HN ist hier = 45°, also der Winkel HZN = 45°, folglich sein Complement zu 180° = oder der Winkel PZS = 135°.

Der Bogen PZ wie vorher = 37° 41′.

Der Bogen PS = 90° + der Declination, und weil die Declination an dem Tage = 11° 49′ = 90° + 11° 49′ = 111° 49′.

Ich muß hier noch den Winkel bey S suchen §. 167. Aus §. 124. hier gehörig applicirt, erhellet, er sey 28° 25′. Er ist nach §. 110. der letzten Angabe in der dort befindlichen Tafel nach spitzig, also würklich 28° 25′.

Da nun die Winkel PZS und der Winkel bey S ungleichartig sind, so fällt das Perpendikel außer-

außerhalb des Triangels §. 98 Folglich ist nach §. 167. die Differenz der beyden Winkel, die an der Spitze durchs Perpendikel bey P entstehen, zu nehmen, um den Winkel P zu bekommen.

Wir schließen nun nach §. 167.

cotang. 135° : sin. tot. = cos. 37° 41′ : cotang. des ersten Winkels, der durchs Perpendikel an der Spitze entstehet.

logarithmisch

log. cosin. 37° 41′	=	9, 8983968
log. sin. totus	=	10 0000000
		19, 8983968
log. cotang. 135° = log. cot. 45°	=	10 0000000

log. cot. des ersten Winkels an der Spitze = 9, 8983968

Dieser Logarithme gehöret zu 38° 22′. Da er zum cotangens gehöret, so ist der würkliche Winkel 51° 38′. Aber er ist nach den Umständen §. 74. stumpf, also muß man sein Complement zu 180′ nehmen. Er ist also würklich = 128° 22′.

Man schließe nach §. 167. ferner

tang. 111° 49′ : tang. 37° 41′ = cosin. 128° 22′ : cosin. des zweyten Winkels durchs Perpendikel an der Spitze

logarithmisch

log. cosin. 128° 22′ = log. cos. 51° 38′ = 9,7928760
log. tang 37° 41′ = 9,8878554

log. tang. 111° 49′ = log. tang. 68° 11′ = 19,6807214
19,3976047

also log. cosin. des 2ten Winkels an der Spitze = 9,2831167

Dieser Logarithme gehöret fast zu 11° 4′; da er für den cosinus ist, so ist der würkliche zweyte Winkel = 78° 56′.

Der Winkel P ist nun hier = der Differenz bey dem Winkel = 128° 22′ − 78° 56′ = 49° 26′ = dem Bogen des Aequators AD. Diesen Bogen nun nach §. 230 in Zeit verwandelt.

40°	=	2 St. 39′ 33″
9°	=	— 35′ 54″
20′	=	— 1′ 19″
6′	=	— 0′ 24″
49° 26′	=	3 St. 17′ 10″

Dieses abgezogen von 12 Uhr bleibt 8 Uhr 42 Minuten 49 Secunden, denn stehet die Sonne am 24 Oct. unter der Polhöhe 52° 19′ grade in Südosten.

Am Aequinoktientage ist der Stundenwinkel P sogleich aus dem gegebnen Azimuht zu finden, welches nur in Zeit nach §. 229. verwandelt werden darf, da die Sonne grade über dem Aequator läuft und zum Tagebogen einen halben Circulum maximum von Osten nach Westen hat.

§. 240. Es sey gegeben die Länge und die Breite zweyer Oerter auf der Erde, dadurch ihre wahre Distanz von einander zu finden.

Da die Erde eine Kugel ist, so wird die Distanz zweyer Oerter auf derselben allezeit der Bogen eines Circulus maximus seyn, weil es der näheste von einem gegebenen Orte auf der Kugel zu dem andern ist (§. 445. Geom. 2ter Theil.) Es sey nun Fig. 58. AQ der Aequator, P der Pol, PM, PN verschiedne Meridiane, L und l zwey verschiedne Oerter auf der Erde, so ist ML und NI ihre geographische Breite und AM und AN ihre Länge, und MN die Differenz ihrer Länge.

Fig. 58.

Man

Man erhält also einen Triangel PLl, in welchem der Bogen Ll die wahre Distanz beyder Oerter ist, weil es der Bogen eines Circuli maximi ist.

In diesem Triangel ist nun gegeben:

PL das Complement der Breite zu 90° von ML, Pl das Complement der Breite zu 90° von Nl, imgleichen auch der Winkel LPl, welcher durch den Bogen des Aequators MN, der die Differenz beyder Meridiane ist, gemessen wird.

Also man suchet aus zwey gegebnen Seiten PL und Pl und dem eingeschlossenen Winkel bey P die dritte Seite Ll, die man, wenn man sie gefunden hat, in geographische Meilen verwandeln kann, deren, wie bekannt, 15 auf einen Grad eines Circuli maximi auf der Kugel gehen. Man muß diese Aufgabe auflösen nach §. 144.

Exempel: wie weit liget Mayland und London von einander?

Mayland lieget unter dem 26° 51′ Länge und 45° 28′ nördlicher Breite. London lieget unter dem 17° 43′ Länge, und unter dem 51° 31′ nördlicher Breite.

Da der Bogen AN = 26° 51′ und der Bogen AM = 17° 43′, so ist der Bogen MN = 9° 8′ = dem eingeschlossenen Winkel bey P.

Ferner die Seite PL = PM − ML = 90° − 51° 31′ = 38° 29′.

Die Pl = PN − Nl = 90° − 45° 28′ = 44° 32′ also nach §. 144.

sinus totus : cosin. 9° 8′ = tang. 38° 29′ : tang. lm

logarithmisch

log. tang. 38° 29′	=	9 9003459
log. cosin. 9° 8′	=	9 9944587
		19 8948046
log. sin. totus	=	10 0000000
log. tang. lm	=	9, 8948046

Dieser Logarithme gehöret fast zum tangens 38° 7′. Aus den Umständen des §. 144 erhellet, daß das Perpendikel Lm innerhalb des Triangels fällt. Es ist also Pm = lP − lm = 44° 32′ − 38° 7′ = 6° 25′.

Ferner geschlossen nach §. 144.

cos. 38° 7′ : cos. 6° 25′ = cos. 38° 29′ : cos. Ll

also

log. cos. 38° 29′	=	9, 8936448
log. cos. 6° 25′	=	9, 9972708
		19, 8909156
log. cos. 38° 7′	=	9, 8958398
log. cos. Ll oder der Distanz beyder Oerter	=	9, 9950758

Dieser Logarithme gehöret fast zu 81° 24′. Da er Logarithme des cosinus ist, so ist der würkliche Bogen Ll = 8° 46′. Den nun in geographische Meilen verwandelt.

8°	= 8 . 15	=	120
36′	=	=	9
8° 36′	=	=	129 Meilen.

So

So weit ist London von Mayland, wenn man den nächsten Weg über den Circulum maximum machen könnte, entfernt.

Zweytes Exempel. Wie weit lieget Braunschweig und die Insel Otahaiti von einander?

Die 59 Figur mag es erläutern. Braunschweig lieget unter dem 52° 19′ nördlicher Breite, und 28° 12′ der Länge. Die Venusspitz aus Otahaiti lieget unter dem 17° 29′ südlicher Breite und 227° 6′ Länge. Fig. 59.

Es sey nun Fig. 59. AQ der Aequator; P der Pol; AM = 28° 12′ Länge; AN = 227° 6′ Länge; so ist MN = AN — AM = 227° 6′ — 28° 12′ = 198° 54′ = dem Bogen des Aequators MN = dem Winkel MPN.

Die Seite PL = PM — ML = 90° — 52° 19′ = 37° 41′.

Die Pl = PN + Nl = 90° + 17° 29′ = 107° 29′, man suchet den Bogen Ll. Nun ist nach §. 144.

finus totus : cosinus 198° 54′ = tangens 37° 41′ : tangens des ersten Abschnitts durchs Perpendikel.

log. tang. 37° 41′ = 9.8878514
log. cos. 198° 54′ = log. cos. 18° 54′ = 9.9719303

log. sin. totus = 19.8637857
= 10.0000000

log. tang. des ersten Abschnitts = 9.8637857

Dieser Logarithme gehöret zu 36° 9′. Nach den Betrachtungen des § 144. ist hier der Winkel bey P und der Abschnitt durchs Perpendikel gleichartig, also hier beyde stumpf. Folglich der erste Abschnitt das Complemenz zu 180°, folglich = 180° — 36° 9′ = 143° 51′. Da nun Pl = 107° 29′, so fällt das Perpendikel außerhalb des Triangels, und der 2te Abschnitt ist 143° 51′ — 107° 29′ = 36° 22′.

Man

Man schließe nun ferner: cos 143° 51′ : cos. 36° 22′ = cos. 37° 41′ : cos. LI

logarithmisch

log. cos. 37° 41′ = 9. 8983968
log. cos. 36° 22′ = 9, 9059247
19 80432 5
log. cos. 143° 51′ = log. cos. 36° 9′ = 9, 9071293
log. cos LI = 9, 8971922

Dieser Logarithme gehöret fast zu 52° 8′. Da er zum cosinus gehöret, so ist der würkliche Bogen = 37° 52.

Allein aus den Betrachtungen §. 144. erhellet, daß LI größer als 90° oder stumpf sey. Es ist also dieser Bogen das Complement von 37° 52′ zu 180° = 142° 8′.

Nun den Bogen in geographische Meilen verwandelt.

142°	= 142.	15 Meilen =	2130 Meilen
8′	=		2
141° 8′	=		2132 Meilen

So weit ist die Venusspitze auf Othaheite von Braunschweig entfernet, wenn man den kürzesten Weg auf einem Bogen eines Circuli maximi nehmen könnte.

§. 241. Wir haben nun noch einige Fälle in dem vorhergehenden Problem zu berühren übrig.

Fig. 59. 1) Liegen zwey Oerter unter einerley Graden der Breite, nemlich entweder blos nördlicher oder blos südlicher Breite, also auf einem Parallelcirkel, wie z. E. Fig. 59 L und O seyn mag, so wäre der Bogen des Circuli maximi, den man zwischen L und O legen kann, auf eben die Art, wie im vorhergehenden §. gelehrt ist, zu finden.

2) Liegen zwey Oerter unter dem Aequator, wie z. E. M und N wären, so sind sie nur in Ansehung ihrer Länge verschieden, und ist also nur der Bogen MN, oder die Differenz ihrer Länge in Meilen zu verwandeln.

3) Haben die Oerter eine verschiedene Breite, aber einerley Länge, nemlich, daß sie unter einem und eben demselben Meridian lägen; es mag nun die Breite nördlich oder südlich, oder des einen Orts Breite nördlich, und des andern Orts südlich seyn, wie z. E. O und R, O und N, O und L wäre, so sind, da der Meridian ein Circulus maximus ist, die respektive Bogen OR, ON, OL in Meilen zu verwandeln, um die Entfernung dieser Oerter von einander zu wissen.

§. 242. Man kann aber nicht nur die Entfernung zweyer Oerter von einander, sondern auch ihr Azimuht, oder die Weltgegend leichtlich finden, unter welcher ein Ort von dem andern lieget. Gleichfalls

falls eine sehr nützliche Aufgabe, die im gemeinen Leben oft vorkommen kann.

Fig. 60. Es sey AQ der Aequator, P der Pol, PM der Meridian des einen Orts L, PN der Meridian des andern Orts l; so ist Ll der Bogen des Circuli maximi, der ihre Entfernung bestimmet. Man will wissen, nach welcher Gegend von L aus betrachtet l lieget, oder auch umgekehrt, wenn man in l ist, wissen, nach welcher Gegend L lieget. Es ist offenbar, daß das dadurch bestimmet wird, daß man weis, unter welchem Winkel der Circulus maximus, der zwischen beyde Oerter geleget wird, auf ihre Meridiane fället. Wenn man Fig. 61 sich das Zenith von L vorstellet, wodurch sein Meridian LS gehet in O Osten, in W Westen, in S Süden und in N Norden gedenket, also SWNO der Horizont ist, so ist von S durch W nach N das westliche Azimuht, und von S durch O nach N das östliche Azimuht. Wenn man nun Fig. 61 an dem Orte L ist, so liegen alle Oerter auf der Erde rund um L herum. Leget man von dem Orte L einen Bogen Ll durch beyde Oerter, so ist das Fig. 60 und 61 ihre Entfernung, und der Bogen SQ ihr Azimuht von L aus betrachtet. Fig. 60.

Es ist also Fig. 60 der Winkel lLM, oder von l aus betrachtet, der Winkel LlM. Ob das Azimuht östlich oder westlich sey, weis man aus den gegebnen Graden der Länge, die von Westen nach Osten gezählet werden, und da also offenbar ist, daß, wenn der nach seiner Lage zu suchende Ort mehr

Grade der Länge hat, als mein Ort, er in Anse-hung meines Orts im östlichen Azimuht sey, und hat er weniger Grade der Länge, im westlichen Azimuht.

Es ist aber, um nun den Winkel des Azimuhts zu finden, wie man leicht einsiehet, nothwendig, daß erst der Bogen Ll Fig. 60 aus dem vorhergehenden Problem §. 240 berechnet werde, alsdenn läßt sich da in dem Triangel PLl Fig. 60 der Winkel bey P und alle drey Seiten bekannt sind, blos nach §. 124 der Winkel bey L oder l, welchen man will, sehr leicht finden. Exempel. Die Insel Ferro lieget unter dem 360° Länge, Berlin unter dem 31° 2′ Länge, ostwärts also von Ferro, die Breite von Ferro ist 27° 47′, also Pl = 62° 13′, die Breite von Berlin ist 52° 31′, also PL = 37° 29′. Hieraus folget, daß Fig. 60 der Winkel bey P = 31° 2′ sey, woraus man ferner nach §. 240 folgert, daß Ll = 34° 4′ sey.

Wir schließen nun

sin. Ll : sin. P = sin. Pl : sin. PLl

hier also

sin. 34° 4′ : sin. 31° 2′ = sin. 62° 13′ : sin. PLl

log sin. 62° 13′ =	9,9468042
log. sin. 31° 2′ =	9,7122596
	19,6590638
log. sin. 34° 4′ =	9,7483099
log. sin. ILP oder seines Nebenwinkels ILM	9,9107539

Die-

Dieser Logarithme gehöret fast zu 54° 31′. Nun lieget Ferro westlicher als Berlin unter einem westlichen Azimuht von 54° 31′, oder beynahe Südwest ¼ West. §. 224.

Braunschweig lieget unter dem 28° 12′ Länge und 52° 19′ nördlicher Breite.

Petersburg lieget unter dem 48° Länge und 59° 56′ nördlicher Breite.

Nach der Berechnung des vorhergehenden Paragraphen, ist also seine Entfernung LI, 13° 18′, und nach Anweisung dieses § sein Azimuht von Braunschweig aus betrachtet, östlich 132° 28′, welches zwischen Nordost ¼ Ost und Nordost beynahe völlig Nordost fällt. §. 224.

§. 243. Es wird uns aus §. 204. noch bekannt seyn, daß Fig. 41 der Winkel KCQ, welchen die Ekliptik mit dem Aequator machet, 23° 29′ sey. So groß ist also der Bogen KQ oder QM. Also alle Menschen, welche in der Zone LHKQ vom Aequator bis an den Wendecirkel des Krebses, oder in der Zone AEQM vom Aequator bis an den Wendecirkel des Steinbocks wohnen, werden, weil die Sonne bis an beyde Wendecirkel gehet, die Sonne zu gewissen Zeiten des Mittags im Zenith haben.

Unter dem Aequator selbst muß das zweymal geschehen, nemlich an den Aequinoktientagen, weil

die Sonne denn über den Aequator gehet. Unter dem Wendecirkel des Krebses einmal, nemlich am Sommer-Solstitientage für die nördliche Hämisphäre am 21 Junius. Unter dem Wendecirkel des Steinbocks auch einmal am 21 December als am kürzesten Tage für die nördliche, und längsten Tage für die südliche Hämisphäre. Die übrigen Bewohner zwischen den Wendecirkeln haben die Sonne zweymal jährlich im Zenith. Die zwischen dem Aequator und Wendecirkel des Krebses, zwischen dem 21 Merz und 23 September, oder zwischen der Zeit, wenn die Sonne herauf und herab, nach den Wendecirkel des Krebses steiget; und die zwischen dem Aequator und Wendecirkel des Steinbocks wohnen, in unserm Winter-Halbenjahre zwischen dem 23 September und 21 Merz. Die Bewohner der Erde außerhalb den Wendecirkeln können die Sonne niemals im Zenith haben.

Es sey nun gegeben der Grad der Breite eines Orts zwischen dem Aequator eines Orts und den Wendecirkeln, man will wissen, welchen Tag diesem Orte und allen andern, die unter eben diesem Parallelcirkel liegen, die Sonne des Mittags im Zenith stehe?

Fig. 62. Die Grade der Breite Fig. 62 zwischen dem Aequator AQ und den Wendecirkeln FLED, sind gleich mit den Graden der Declination der Sonne. Wenn also die Sonne die Declination hat, als der gegebne Grad der Breite, oder Polhöhe des Orts zwischen

zwischen den Wendecirkeln beträget, so stehet die Sonne den Bewohnern dieses Paralleleirkels, den Tag, da sie diese Declination hat, senkrecht im Mittage über dem Kopfe, und es ist also am Mittage kein Schatten. Man kann denn aus der Declination der Sonnen, nach §. 215 die Länge der Sonnen, und daraus das datum des Tages finden.

Exempel. Jaffanapatnam, auf der Insel Ceilon, lieget unter dem 10ten Grade nördlicher Breite, wanneher stehet daselbst die Sonne des Mittages im Zenith? Antwort, am 10ten April, und am 27ten August, da sie eben die nördliche Declination von 10 Graden hat.

Othaheiti lieget unter dem 17° 29′ 13″ südlicher Breite. Die Sonne wird den Bewohnern dieser Insel am 11ten November und am 30ten Januar im Zenith stehen, weil sie alsdenn eben die südliche Declination hat.

§. 244. So wie es Gegenden auf der Erde giebet, wo die Sonne ihren Bewohnern zu einer gewissen Zeit am Mittag im Zenith stehet, so ist es auch einem jeden Anfänger schon vom Hörensagen wenigstens bekannt, daß es Länder zwischen den Polen und Polarcirkeln giebet, wo die Sonne einige Zeit gar nicht untergehet, sondern immer umläuft, so wie sie auch in diesen Ländern einige Zeit hindurch gar nicht aufgehet. Die Anwendung der Lehren von der Sphäre muß uns unterrichten, unter welchem Grad der Breite diese Länder anfangen, welchen Tag der Um-

lauf

lauf der Sonne anfänget, und welchen Tag er aufhöret, welchen Tag die Sonne ihnen gar nicht aufgehet, und welchen Tag sie wieder am Horizonte erscheinet, wie lange Zeit also diese Gegenden beständig Tag, und wie lange Zeit sie beständig Nacht haben. Wir wollen darüber eine Anweisung geben, wobey wir aber auf keine Refraktion Rücksicht nehmen wollen, als welche die Sonne immer etwas höher am Horizonte vorstellet.

Fig. 62. Die Fig. 62 mag dazu dienen, diese Lehre deutlich zu machen. Es sey AQ der Aequator; EL die Ekliptik oder Sonnenbahn; FL der Wendecirkel des Krebses; ED der Wendecirkel des Steinbocks; der Bogen LQ oder AE, der den Winkel LCQ des Durchschnitts des Aequators und der Ekliptik misset, $= 23° 29'$; mn verschiedne Declinationen der Sonnen. P und p die Pole; GH und IK die Polarcirkel.

Da man ohne großen Irrthum annehmen kann, daß die Sonne allezeit die halbe Erdkugel erleuchtet, so folget natürlich daraus, daß, wenn sie über den Aequator AQ läuft, sie in beyden Polen gesehen werden müsse, denn $QP = Qp$ ist $= 90°$, sie muß, da AQ oder der Aequator im Horizonte der Pole liegt, auch den Tag unter beyden Polen immer gesehen werden, und ihr Centrum den Horizont beschreiben. Sie entferne sich nun vom Horizonte um einen Grad, es sey das erste mn an C, oder ihre Declination sey $= 1$ Grad. Sie beschreibet alsdenn den Paralleicirkel rs. Da sie allezeit die halbe Erde erleuchtet, so wird sie nun erstlich um 1 Grad unter dem Nord-

Nordpol P am Himmel höher gestiegen seyn, und daselbst anfangen, umzulaufen, sondern auch einen Grad vom Nordpol, also unter dem 89 Grade werden sie selbige umlaufen sehen. Es mag dieses in t bey P seyn. Vom Südpol p hat sie denn schon ganz Abschied genommen, und berühret unter dem 89° südlicher Breite nur eben den Horizont, weil von 1 Grad nördlicher Declination bis 89° südlicher Polhöhe eben 90° sind.

Die Sonne sey 10 Grad vom Aequator entfernet, oder habe 10 Grad nördliche Declination, so fallen also beständig ihre Strahlen 10 Grad jenseits des Nordpols in l, da kann man sie immer sehen, oder sie läuft da nun um, weil von 10 Grad nördlicher Declination bis dahin 90° sind. Es ist also leicht begreiflich, daß man sie vom Südpol p an bis 80 Grad südlicher Breite in l gar nicht mehr sehen kann, oder sie daselbst gar nicht aufgehet, weil 10 Grad nördlicher Declination und 80° südlicher Breite eben wiederum 90° sind. Es ist auch sehr begreiflich, da die Sonne immer mehr vom Aequator, und bis 23° 29′ von ihm entfernet, man sie da immer umlaufen siehet, bis sie wieder herabgestiegen, und 10 Grad Declination wieder erreichet hat, da sie denn umzulaufen aufhöret. Ueberhaupt muß sie umzulaufen anfangen, an einem Parallelcirkel jenseit des Polarcirkels, wenn sie so viel Declination erreichet hat, als vom Pol bis dahin ausmachet, und umzulaufen aufhören, wenn eben die Declination statt findet.

Beym Südpol findet bey der südlichen Declination der Sonne eben dieses statt.

Da die Sonne nur bis 23° 29′ sich vom Aequator entfernet, so können also, wenn das geschiehet, ihre Strahlen nur beständig, ohne daß sie untergehet, bis 23° 29′ jenseits des Pols P, also in G hin fallen, wenn das geschiehet, wird sie unter dem Polarcirkel umlaufen, aber wenn man auf die Strahlenbrechung keine Rücksicht nimmt, auch nur den Tag umlaufen, weil sie sich dann wieder dem Aequator nähert. Der Polarcirkel ist 66° 31′ vom Aequator entfernet; also von 66° 31′ bis zum Pol fängt die Sonne an umzulaufen, so wie sie also auch von 66° 31′ bis zum Pol, zu gewissen Zeiten gar nicht gesehen werden kann.

Wenn also eine Polhöhe gegeben ist, es sey unter nördlicher oder südlicher Breite, die über 66° 31′ ist, und man will wissen, wie lange die Sonne dort gar nicht untergehet, so ziehe man diese gegebne Breite von 90°, so wird das, was herauskömmt, die Declination angeben müssen, die die Sonne erreicht haben muß, wenn sie anfängt, unter der Polhöhe gar nicht unterzugehen; und dieses Umlaufen der Sonne wird so lange dauren, bis sie wieder eben die Declination erreichet hat, da sie auf- und unterzugehen anfänget. Ist sie nun jenseits des Aequators bis auf eben den Grad der Declination gefallen, so wird sie unter der Polhöhe anfangen gar nicht aufzugehen, und dieses wird so

lange

lange dauren, bis sie sich wieder in eben der Declination jenseit des Aequators befindet. Aus dieser Declination der Sonne kann man nun ihre Länge, also auch den Tag finden, wenn dieses geschiehet.

Wohl zu merken, die Polhöhe muß über 66° 31′ seyn, denn bis dahin gehet die Sonne auf und unter, und gilt dafür, was §. 231. 232 sich befindet.

Es kömmt eben das heraus, wenn man also verfährt; man ziehe 66° 31′ von der gegebnen Polhöhe ab, was überbleibet, ziehe man von 23° 29′, als der größten Declination der Sonnen, ab. Was denn überbleibt, zeiget die Declination der Sonne für die Zeit an, da sie anfänget und aufhöret, unter der gegebnen Polhöhe umzulaufen.

Nähme man auf die Strahlenbrechung mit Rücksicht, so würde das diese Rechnung verändern, und man siehet die Sonne, wo sie umläuft, an allen den Orten länger über dem Horizonte, weil die Strahlenbrechung die Sonne höher vorstellet. Setzte man nach dem de la Caille die Strahlenbrechung, wenn die Sonne eben den Horizont berühret, zu 33 Minuten 30 Secunden, so wird man unter den Polen die Sonne 2 Tage länger umlaufen sehen, unter 80° Breite ohngefähr 4 Tage, unter 70 Grad 6 Tage, unter dem Polarcirkel, oder 66° 31′ etwa 22 Tage also 11 Tage früher und 11 Tage später, als die Rechnung ergiebet.

Nun

Nun kömmt hiezu noch die Dämmerung in diesen Gegenden, die ununterbrochen lange dauret, ehe es völlig Nacht wird. So fängt z. E. unter dem Nordpol die beständig daurende Dämmerung an, wenn die Sonne, in Ansehung des Nordpols, 18° unter dem Horizonte ist, welches am 29ten Januar geschiehet; am 21ten Merz, oder auf die Strahlenbrechung mit Rücksicht genommen, am 20ten Merz gehet die Sonne da auf, und fängt an umzulaufen; am 24 September, auf die Strahlenbrechung mit gesehen, nimmt sie vom Nordpol völlig Abschied, allein die beständige Dämmerung dauret bis den 12ten November. Völlig Nacht ist also nur unter dem Nordpol vom 12ten November bis an den 29ten Januar, und alsdenn ist noch der Mond die mehreste Zeit, wenn er am meisten erleuchtet ist, über dem Horizonte.

Doch es würde zu weitläuftig, und wider die Absicht dieses Capitels seyn, das nur einige Anwendungen der sphärischen Trigonometrie lehret, hievon weitläuftiger zu reden.

Nun hievon einige Exempel.

Wardhus lieget unter den 70° 22′ 36″ nördlicher Breite, wanneher fängt die Sonne daselbst an umzulaufen, und wanneher höret sie auf aufzugehen? 70° 22′, 36″ abgezogen von 90°, giebt 19° 37′, 24″, das ist die Declination der Sonne, wenn sie unter der Polhöhe von Wardhus anfänget und aufhöret umzulaufen, imgleichen auch die südliche Declination, wenn

wenn sie anfänget, gar nicht aufzugehen, und so lange gar nicht aufgehet, bis sie eben diese Declination wieder erreicht hat, ohne aber hiebey auf die Strahlenbrechung Rücksicht zu nehmen. Es geschehet dieses am 18ten May, und höret auf am 25ten Julius, so lange läuft die Sonne um, also 68 Tage. Sie fängt an, gar nicht aufzugehen, am 19ten November, und gehet gar nicht auf bis zum 22ten Januar, also durch 64 Tage.

Die Mitte von Spitzbergen lieget unter dem 78° nördlicher Breite. 78° von 90° abgezogen, giebt 12° nördlicher Declination, die Sonne fängt da an umzulaufen am 22ten April, und höret auf umzulaufen den 21ten August, sie läuft also um 121 Tage. Sie fänget an gar nicht aufzugehen am 25ten Oktober, und bleibt unter dem Horizonte bis am 16ten Februar, also gehet sie gar nicht auf 114 Tage.

§. 245. Man pfleget in den Anweisungen zu der Erdbeschreibung verschiedne Benennungen zu finden, welchen man den Erdbewohnern gegeben hat. Man hat sie theils von der Lage, welche die Länder, die sie bewohnen, in Ansehung des Standes der Sonnen haben, theils von den Lagen, die diese Länder unter einander selbst haben, benennet. So nennet man die Bewohner der Länder zwischen dem Aequator und den Wendecirkeln **Ohnschattigte**, weil alle zu gewissen Zeiten im Jahre des Mittags keinen Schatten wer-

sen, dieses geschiehet alsdenn, wenn die Sonne in ihrem Zenith stehet, welches, wie wir aus dem vorhergehenden wissen, in allen Oertern zwischen den Wendecirkeln zweymal im Jahre geschiehet §. 243. Man nennet die Bewohner dieser Länder der heißen Zone auch **Zweyschattigte**, weil sie zweymal im Jahre nicht nur gar keinen Schatten zu Mittage werfen, sondern auch ihr Schatten einmal im Jahre Mittags gegen Süden und einmal gegen Norden fällt. Dieses rühret daher, weil die Sonne in Ansehung ihres Zeniths entweder durch denselben gehet, oder nördlich, oder südlich, in Ansehung ihres Zeniths ihren Tagebogen hat. So werfen zum Exempel die Bewohner der Insel Ceilon, die unter 9, 10 Grad nördlicher Breite lieget, wenn die Sonne 10 Grad nördliche Declination hat, Mittags gar keinen Schatten, weil sie ihnen des Mittags grade über dem Kopfe stehet, welches zweymal im Jahre geschiehet; hat sie mehr nördliche Declination, so wird ihr Schatten Mittags nach Süden fallen, hat sie weniger nördliche Declination oder gar südliche, so wird ihr Schatten nach Norden fallen. Am 13ten bis 16ten April, und 27 bis 29ten August werden die verschiednen Bewohner auf Ceilon gar keinen Schatten Mittags werfen, vom 16ten April bis 27ten August wird ihr Schatten Mittags südlich seyn, und vom August bis wieder im April wird ihr Schatten Mittags nach Norden fallen.

Die Bewohner der Erde unter den Wendecirkeln sind zwar **einmal** im Jahre **Ohnschattigte**, aber

aber die übrige Zeit fällt der Schatten derer, die unter dem Wendecirkel des Krebses wohnen, allezeit Mittags gegen Norden, und die unter dem Wendecirkel des Steinbocks wohnen, allezeit Mittags gegen Süden.

Die Bewohner der Länder außer den Wendecirkeln bis an den Polarcirkel, sind **Einschattigte**; denen, die zwischen dem Wendecirkel des Krebses und dem nördlichen Polarcirkel wohnen, also von 23° 29′ bis 66° 31′ nördlicher Breite, fällt der Schatten allezeit Mittags gegen Norden, und denen, die zwischen eben diesen Graden südlicher Breite wohnen, allemal Mittags gegen Süden.

Die Bewohner unter den Polarcirkeln und zwischen den Polarcirkeln und den Polen sind, wenn die Sonne bey ihnen umläuft, **stets Umschattigte**, weil ihr Schatten nothwendig in 24 Stunden einen Kreis um sie beschreiben muß. Wenn die Sonne noch bey ihnen auf- und untergehet, werfen die Bewohner der nördlichen Polarländer allezeit Mittags ihren Schatten gegen Norden, und der südlichen Polarländer allezeit Mittags ihren Schatten gegen Süden.

§. 246. Da die Erde eine Kugel ist, wenigstens eben ohne großen Irrthum als solche angenommen werden kann, so hat man auch, in Ansehung der Lage der Länder gegen einander auf der Erde, einige

Benennungen gemacht. Vorzüglich sind folgende drey merkwürdig, die **Gegenbewohner**, die **Nebenbewohner** und die **Antipoden** oder Gegenfüßler.

Gegenbewohner sind solche, die unter **einem** und eben demselben Grad der Länge, oder Meridian, auch unter eben solcher Breite wohnen, nur, daß der einen geographische Breite **nördlich**, der andern **südlich** ist. Z. E. Braunschweig lieget unter dem 28° 12′ 51″ Länge, und unter 52° 19′ 18″ nördlicher Breite. Seine Gegenbewohner sind, die eben unter dem Grade der Länge, aber unter 52° 19′ 18″ südlicher Breite liegen, in Ansehung Braunschweigs trift dieses mitten in die Südsee, nach dem südlichen Polarcirkel hin. Die Gegenbewohner haben einerley Tageszeiten, weil sie einerley Meridian haben, aber verschiedne Jahrszeiten, da sie auf zwey verschiednen Seiten des Aequators wohnen.

Nebenbewohner sind solche, die unter einem Parallelcirkel, also unter gleicher nördlicher oder südlicher Breite wohnen, aber in Ansehung ihrer Länge oder ihrer Meridiane um 180° verschieden sind. Nachdem nun diese geographischen Breiten groß oder klein sind, nachdem sind diese 180° mehr oder weniger im Meilenmaaß. Die Leute, die unter dem Aequator aber 180° von einander wohnen, sind Nebenbewohner, und wie wir nachher sehen werden, Antipoden zugleich, und ihre Entfernung von einander ist 180. 15 = 2700 Meilen. Da die Parallelcirkel immer kleiner werden, so wie sie weiter vom

Aequa-

Aequator liegen, so werden auch 1000 von einander immer kleiner in Meilen, wie groß das nun sey, lehret §. 240. Die **Nebenbewohner** haben nun **einerley Jahrszeiten**, weil sie auf einerley Seite des Aequators liegen, aber eben **entgegengesetzte Tageszeiten**, weil sie 180° oder 12 Secunden von einander sind. Wenn es bey einem Mittag ist, so ist es bey dem andern Mitternacht u. s. w.

Exempel. Braunschweig lieget unter dem 52° 19′ nördlicher Breite und 28° 12′ 51″ Länge, seine Nebenbewohner werden auch unter dem 52° 9′ Breite, aber unter dem 28° 22′ 51″ + 180° = 208° 12′ 51″ Länge liegen, welches gerade auf die Fuchsinseln, die den Russen gehören, in kamtschatkischen Meere trift.

Wir haben noch von den **Antipoden** zu reden. Es sind solche Bewohner der Erden, die so wohnen, daß sie die Fußsohlen gegen einander kehren, oder e diametro einander entgegengesetzet sind.

Es lassen sich aber die **Antipoden** eines Orts, davon die Polhöhe und die Grade der Länge gegeben sind, ungemein leicht finden. Es sey Fig. 63. AQ der Aequator; P und p die Pole, PAp und PQp zwey Meridiane, die 180° von einander entfernet sind. Es werden also die Bewohner von A und Q im Aequator Antipoden seyn, weil AQ im Durchmesser der Kugel ist, und der Bogen über AQ 180° groß also seyn muß, und also des einen Zenith des andern Nadir seyn muß, und so auch umgekehrt.

Es sey MQ ein gegebner Grad der Breite; so wird auch M unter einem Grade der Länge liegen, der auch gegeben seyn muß. Man ziehe durch das Centrum C der Kugel von M aus eine gerade Linie, welche also auch ein Durchmesser ist, und nach N kömmt; es sind alsdenn bey C Vertikalwinkel und also gleich, folglich der Bogen MQ = dem Bogen AN. Gleichfalls werden, wenn aus P Vertikalkreise auf den Aequator AQ nach p hin geleget werden, eben so viel auf MN kommen müssen, und da AQ = 180° auch MN 180° seyn müssen. Also der Bogen über MN = 180°. MN sind also Antipoden.

Diese Betrachtungen geben nun eine leichte Regel: **Wenn die Grade der Länge und Breite eines Orts gegeben sind, so zähle man von dem gegebnen Grad der Länge an, 180° auf dem Aequator, und wo dieser Punkt hinfällt, auf dem Vertikalkreise so viel auf der andern Seite des Aequators Grade der Breite, als auf dieselts, die gegebne Polhöhe oder Breite beträget; wo dieser Punkt hintrift, ist der Punkt der Antipoden.**

Exempel. Braunschweig lieget unter dem 28° 12′ 51″ Länge und unter dem 52° 19′ nördlicher Breite. Seine Antipoden liegen also unter dem 208° 13′ der Länge, und 52° 19′ südlicher Breite, welches in die Südsee nach Neuseeland hin zu fällt.

Candi auf Ceilon lieget ungefähr unter dem 97° der Länge und 8° nördlicher Breite, seine Antipoden werden unter dem 277° der Länge und 8° süd-

südlicher Breite fallen, welches in die Südsee nach der Seite nach Mexico zu fällt.

Anmerkung. Da die Antipoden die gröste Entfernung zweyer Oerter von einander sind, indem ihre Entfernung 180° beträget, aber ein Grad 15 geographische Meilen ist, so kann also die gröste Entfernung eines Orts auf der Erde nie größer als 180. 15 = 2700 geographische Meilen seyn, so viel würden 180° eines Circuli maximi betragen, welches doch der kürzeste Weg zwischen zwey Punkten auf der Kugel ist. (§. 445. Geom. 2ter Th.) Daß man oft weitere Reisen auf der Erde, z. E. von London nach Canton in China machet, verursachet der Umweg, den man nehmen muß.

§. 247. Wir haben in diesen Anwendungen die vornehmsten Aufgaben aufgelöset, welche jemand aus der Astronomie und Geographie, der das Studium dieser Wissenschaften nicht zur Hauptbeschäftigung machet, gebrauchen möchte. Wir geben noch zum Schlusse dieser Betrachtungen über die sphärische Trigonometrie, eine Formel über den Flächeninhalt eines sphärischen Dreyecks, welche man recht gut bey Berechnung des Flächeninhalts der Länder, und andern Dingen gebrauchen kann.

Wir werden aber nur jetzt diese Formel angeben, und durch Exempel erläutern, aber nicht beweisen, sondern den Beweis davon bis in die Differentialrechnung versparen, aus welcher er sich sehr leicht führen läßt. Wir führen jetzt nur diese Formel an, weil sie doch in der sphärischen Trigonometrie am ersten gesucht wird.

Es heiße Fig. 64. der Radius einer gegebnen Kugel allgemein r, das Verhältniß des Diameters zur Peripherie = P = 3. 14. . . . Fig. 64.

Da die Winkel eines jeden sphärischen Triangels zusammen, oder ihre Summe allezeit mehr als 180° ausmachen §. 36., so heiße der Ueberschuß dieser Winkel über 180° = U.

Es ist alsdenn der Inhalt eines jeden sphärischen Dreyecks CAB Fig. 64. $= \frac{4r^2P\,U}{720}$.

Es verstehet sich von selbst, wenn die Winkel nicht gegeben sind, daß man aus den gegebnen datis die Winkel vorher suchen muß.

Ein leichtes Exempel. Es sey der sphärische Triangel gleichseitig, und jeder seiner Winkel = 90°, so ist U oder der Ueberschuß über 180° auch = 90°.

Die Kugel habe nun 4 Zoll Radius, so ist der Inhalt eines solchen sphärischen Dreyecks $= \frac{4.16.3.14.90}{720} = 25,12...$ Quadratzoll.

Ende der sphärischen Trigonometrie.

Verzeichnis neuer Bücher, so in der Meyerschen Buchhandlung zu Lemgo zur Jubilate-Messe 1790 fertig geworden sind.

Bibel alten und neuen Testaments mit vollständig erklärenden Anmerkungen, von W. F. Hezel 9ter Theil, gros 8.

— desselben Buchs 3ter Theil, 2te verbesserte Aufl. gr. 8.

Buhle, J. G., Grundzüge einer allgemeinen Encyclopädie der Wissenschaften, gros 8.

Depositenordnung, Gräflich Lippische, 4.

Description, abrégée de tousles Retranchemens, faits vers la fin de Septembre 1787. Aux environs de la célébre ville d'Amsterdam, & des Attaques du 1 d'Octobre par les Prussiens sous les ordres de son Alteſſe séréniſſime le duc Régnant de Brunswick ainsi que des inondations à l'entour de cette ville, d'après une carte exactement desſinée & gravée. 4. (In Commission.)

von Donop, W. G. L, historisch-geographische Beschreibung der Fürstlichen Lippischen Lande in Westphalen, 2te vermehrte Aufl. mit einer Karte, 8.

Erläuterung, kurze, aller Verschanzungen, welche zu Ende des Monats September 1787, in der Gegend der berühmten Stadt Amsterdam angelegt worden, der darauf am 1sten October unter Anführung des regierenden Herrn Herzogs von Braunschweig Hochfürstl. Durchlaucht vorgefallenen Preußischen Attaquen, nebst der daselbst veranstalteten Ueberschwemmung zu einer hiezu gehörigen genau verfertigten Charte 4 (In Commission.)

Ewalds, J. L., Predigten über die wichtigsten Lehren des Christenthums, 5tes Heft gros 8.

— desselben Buchs 12tes Heft, gros 8.

Häselers

Häseler's, J. F. Anfangsgründe der reinen Mathematik, 3ter Theil erste Abtheil., welcher die spärische Trigonometrie enthält, 8

Hoscher, J. M., Jahrbücher des Kaiserlichen Reichskammergerichts, 1ster B. 2ter Th. 8.

— — Sammlung merkwürdiger Rechtsfälle, 2ter B. 8.

Magazin, neues, westphälisches, zur Geographie 2c. 1ster B. 3tes Stück, 4.

Portrait, des Hrn. Geh. Regierungsrath Hezels, gros 8.

Religionsgeschichte, neueste, fortgesetzt von G. J. Plank, 2ter B. gros 8.

Repertorium aller Zeitschriften in alphabetischer Ordnung, gros 8.

Rullmann, G. W., die heiligen Schriften des neuen Bundes, übersetzt und mit Anmerkungen versehen, 1ste Abtheil, gros 8.

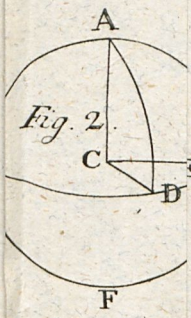


Fig. 2.

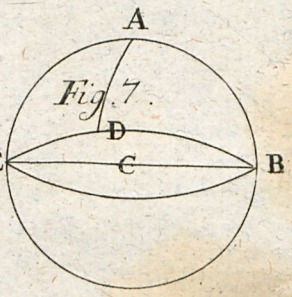


Fig. 7.



Fig. 8.

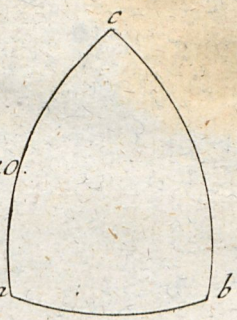


Fig. 10.



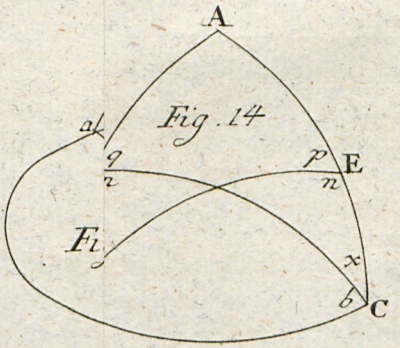
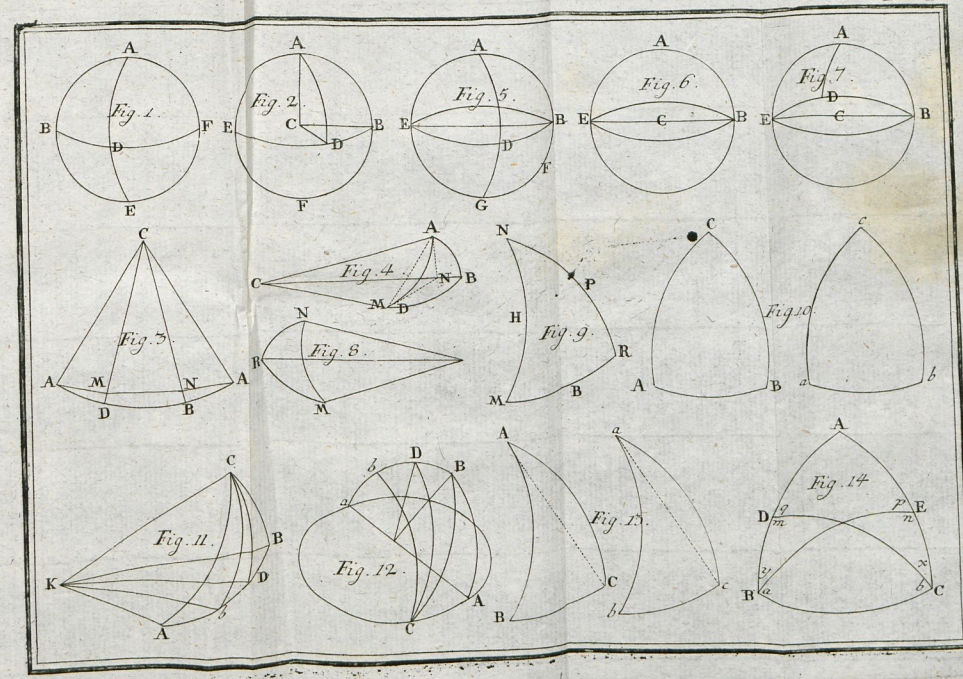


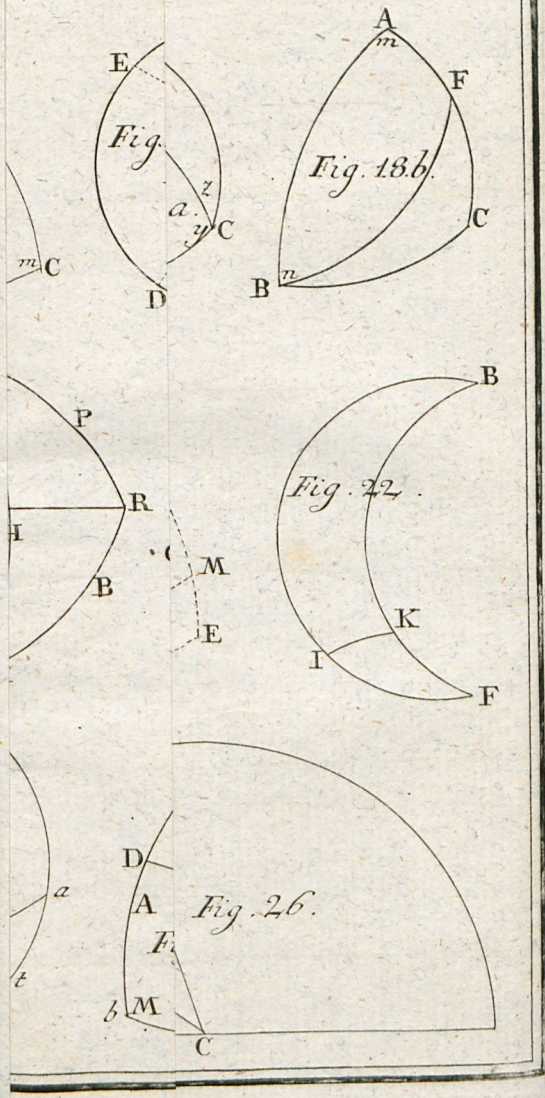
Fig. 14.

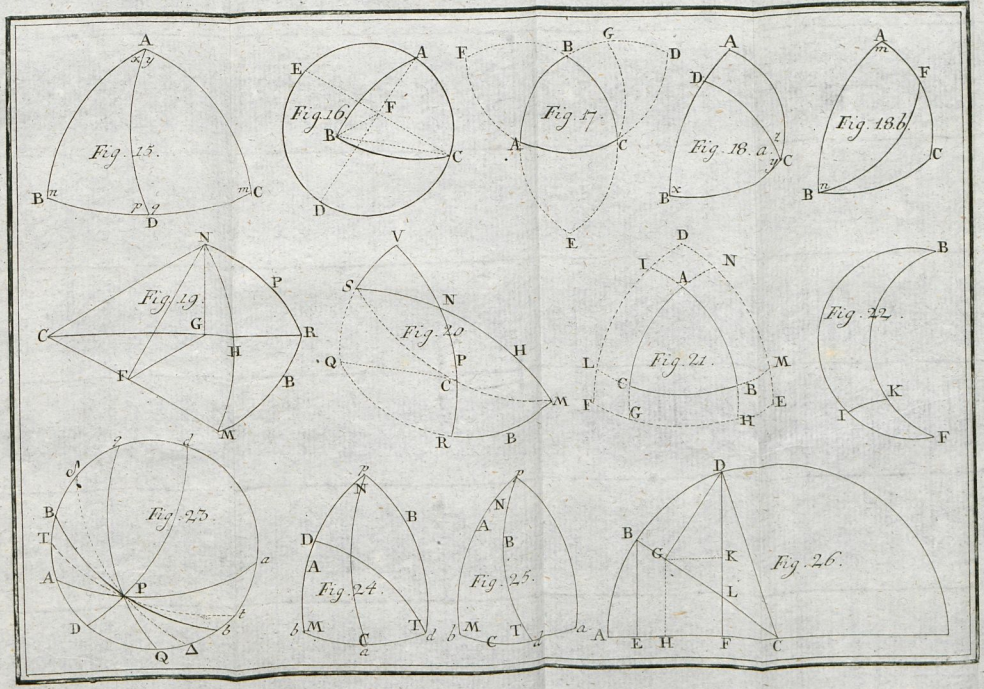


Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-812674-p0426-9

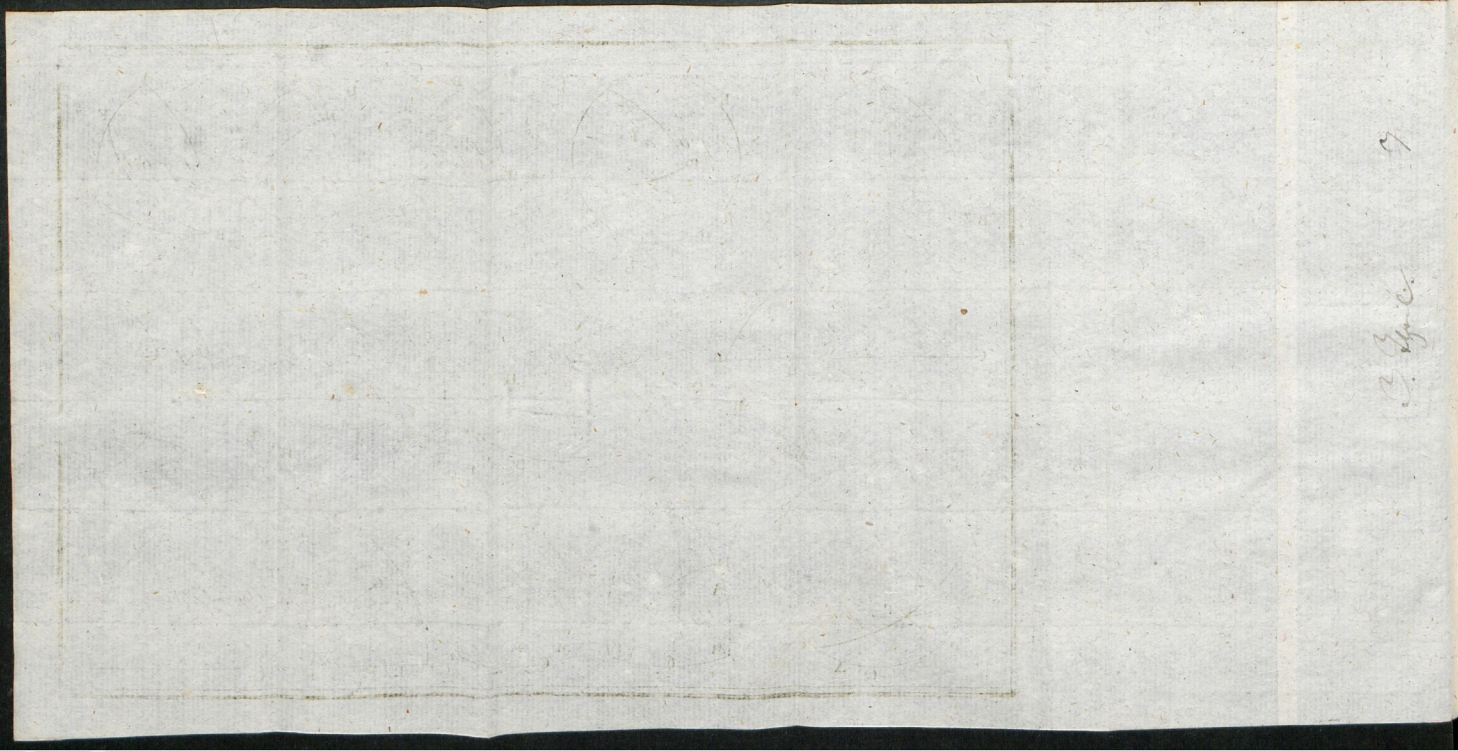


Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-812674-p0427-5


E
Fig.
z
a.
y
C
m
C
D
A
m
F
Fig. 18.b.
C
B
n
P
R
H
B
M
E
B
Fig. 22.
K
I
F
a
t
D
A
Fig. 26.
F
b
M
C



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-812674-p0430-1



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-812674-p0431-7

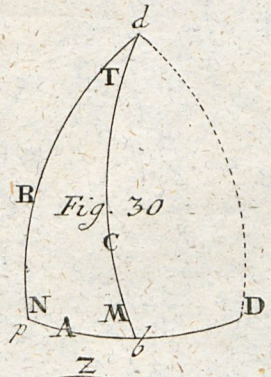
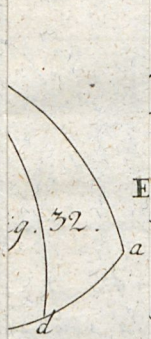


Fig. 30

27.



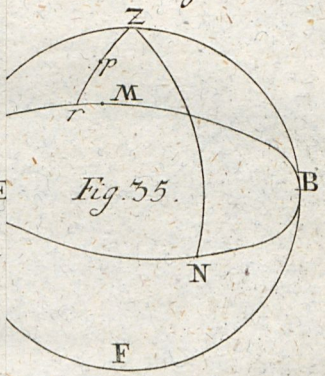


Fig. 35.



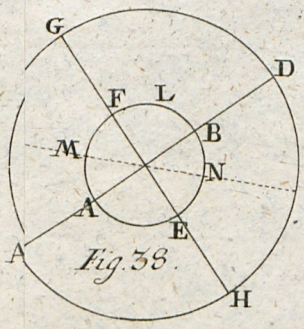
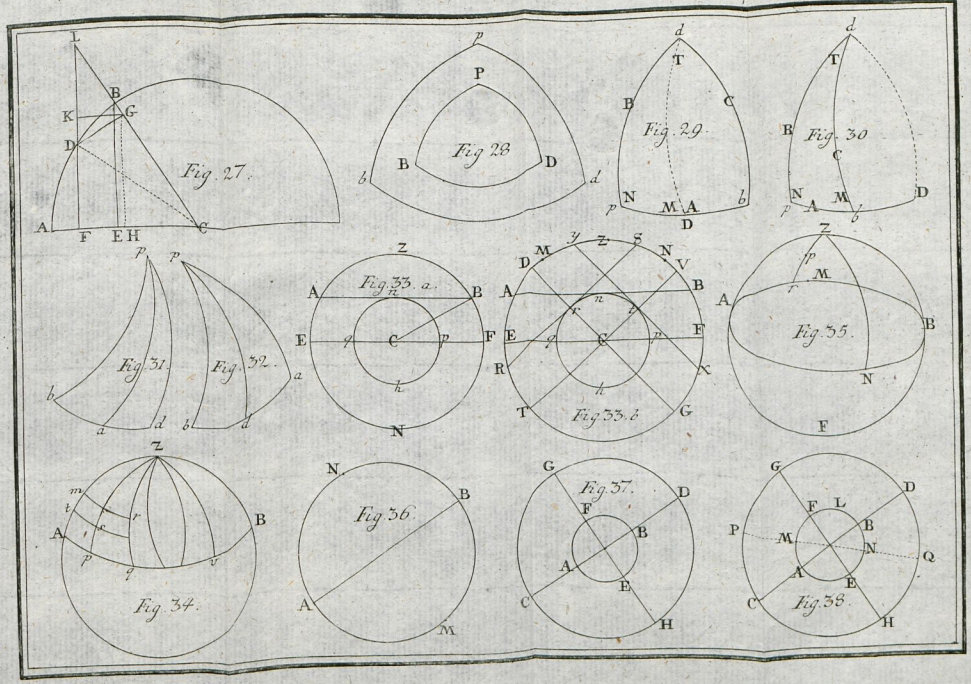
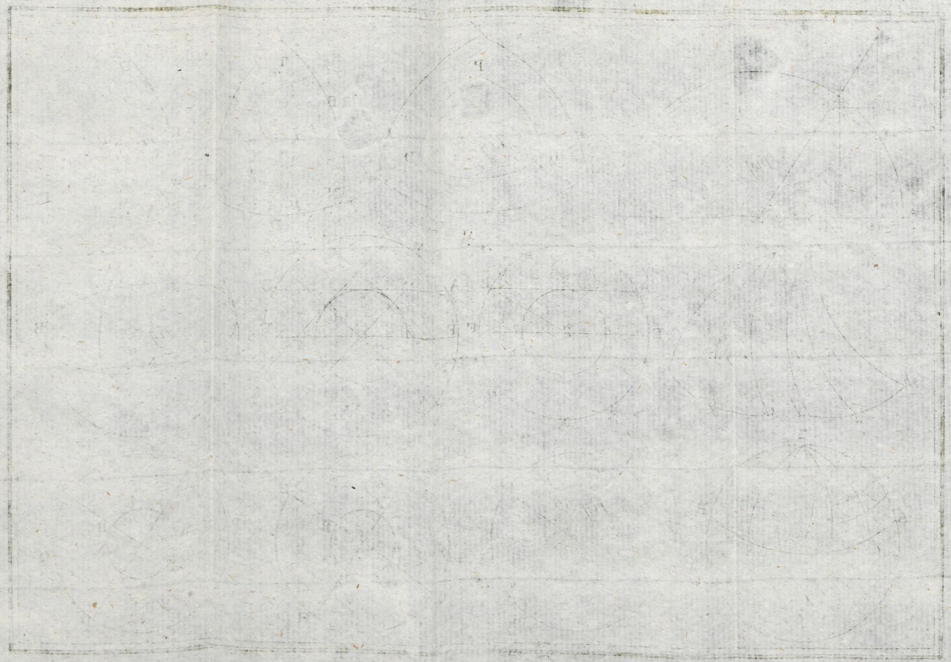


Fig. 38.



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-812674-p0434-4



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-812674-p0435-9

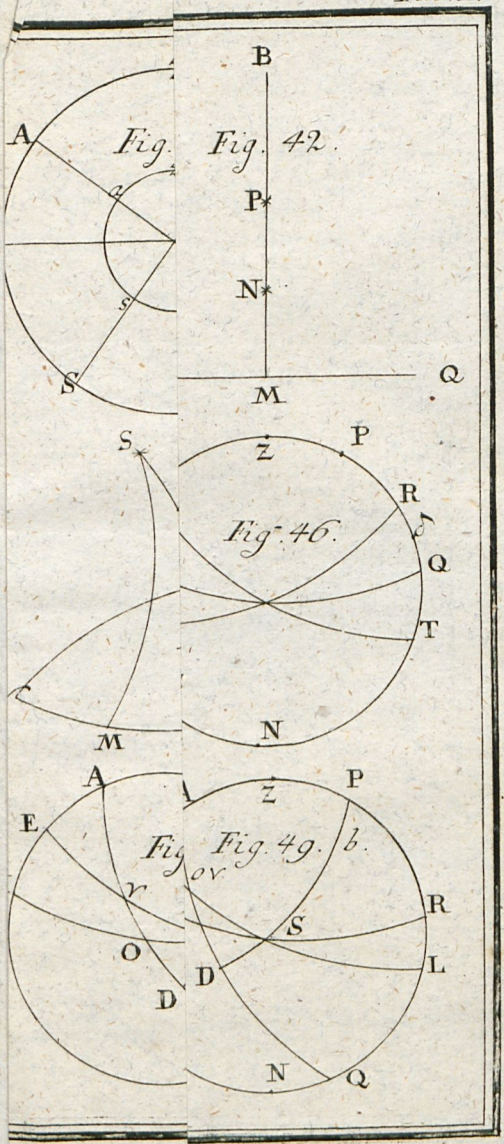


Fig. 42.
B
P
N
M
Q
A
S
Fig. 46.
S
Z
P
R
Q
T
N
M
Fig. 49.
A
E
O
D
Z
P
R
S
L
D
N
Q

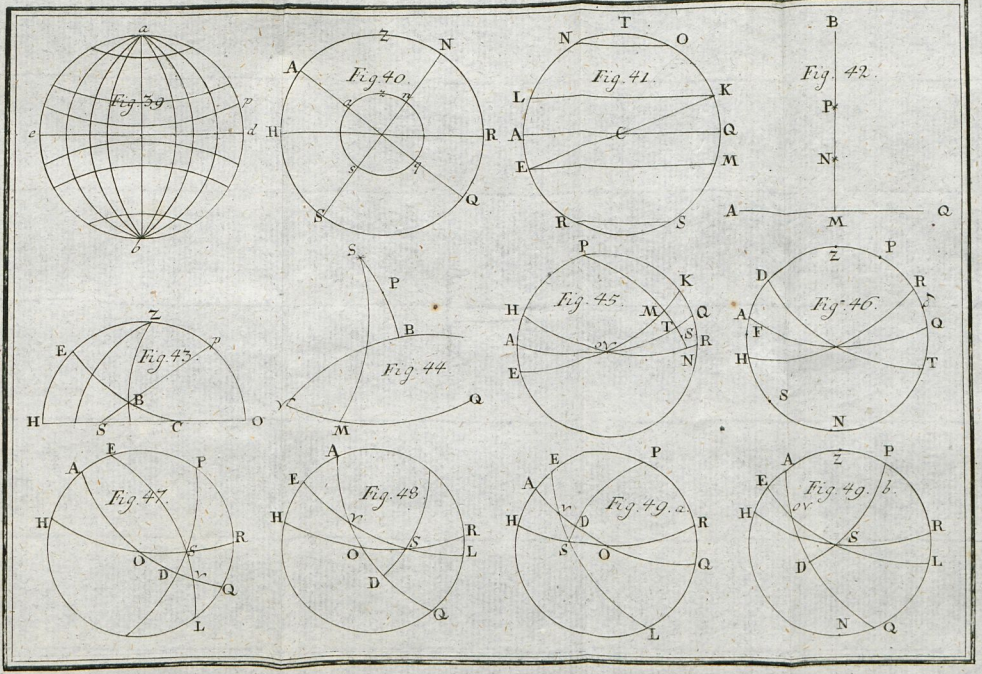
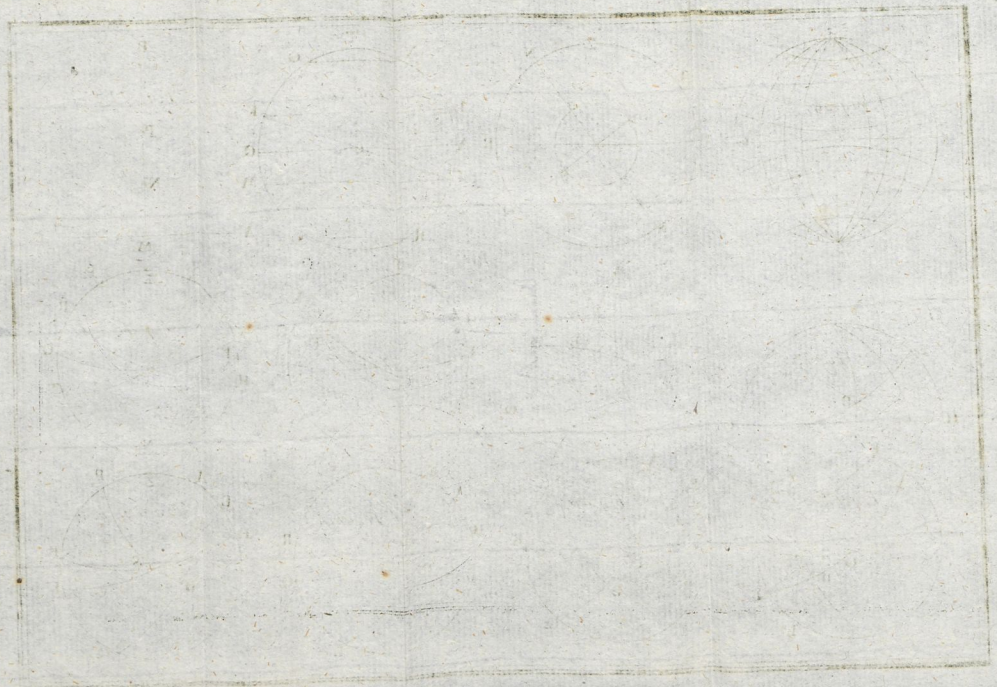


Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49. a.
Fig. 49. b.



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-812674-p0439-5



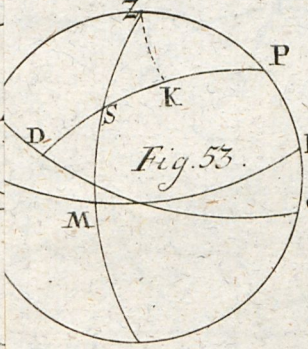


Fig. 53.

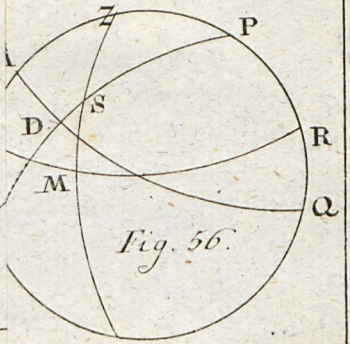


Fig. 56.

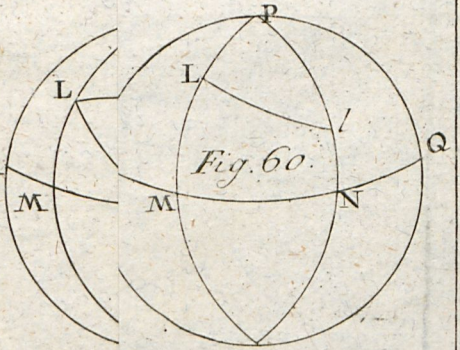


Fig. 60.

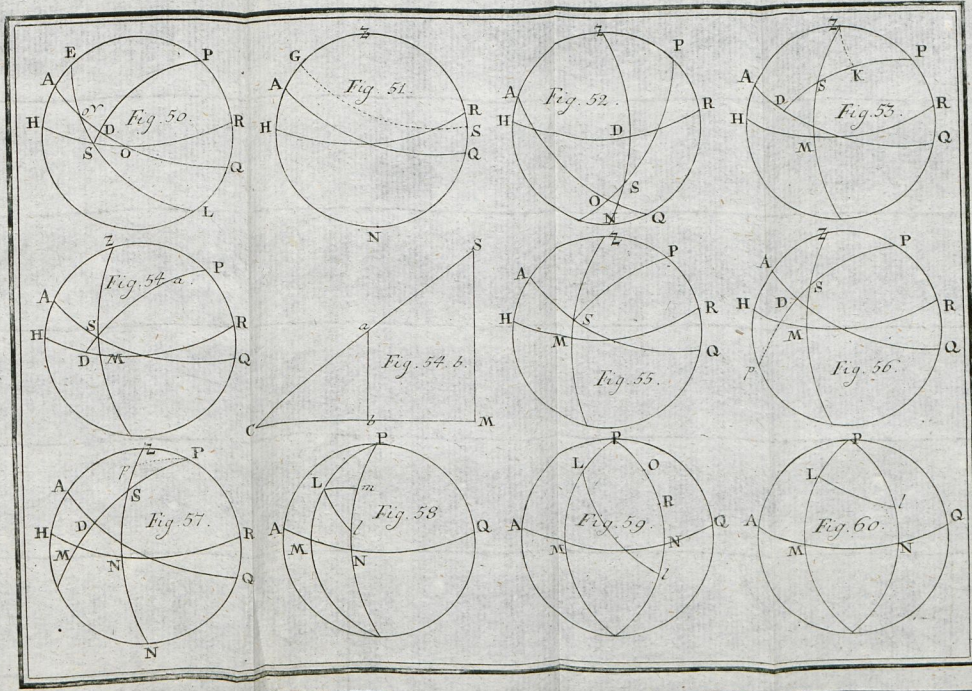
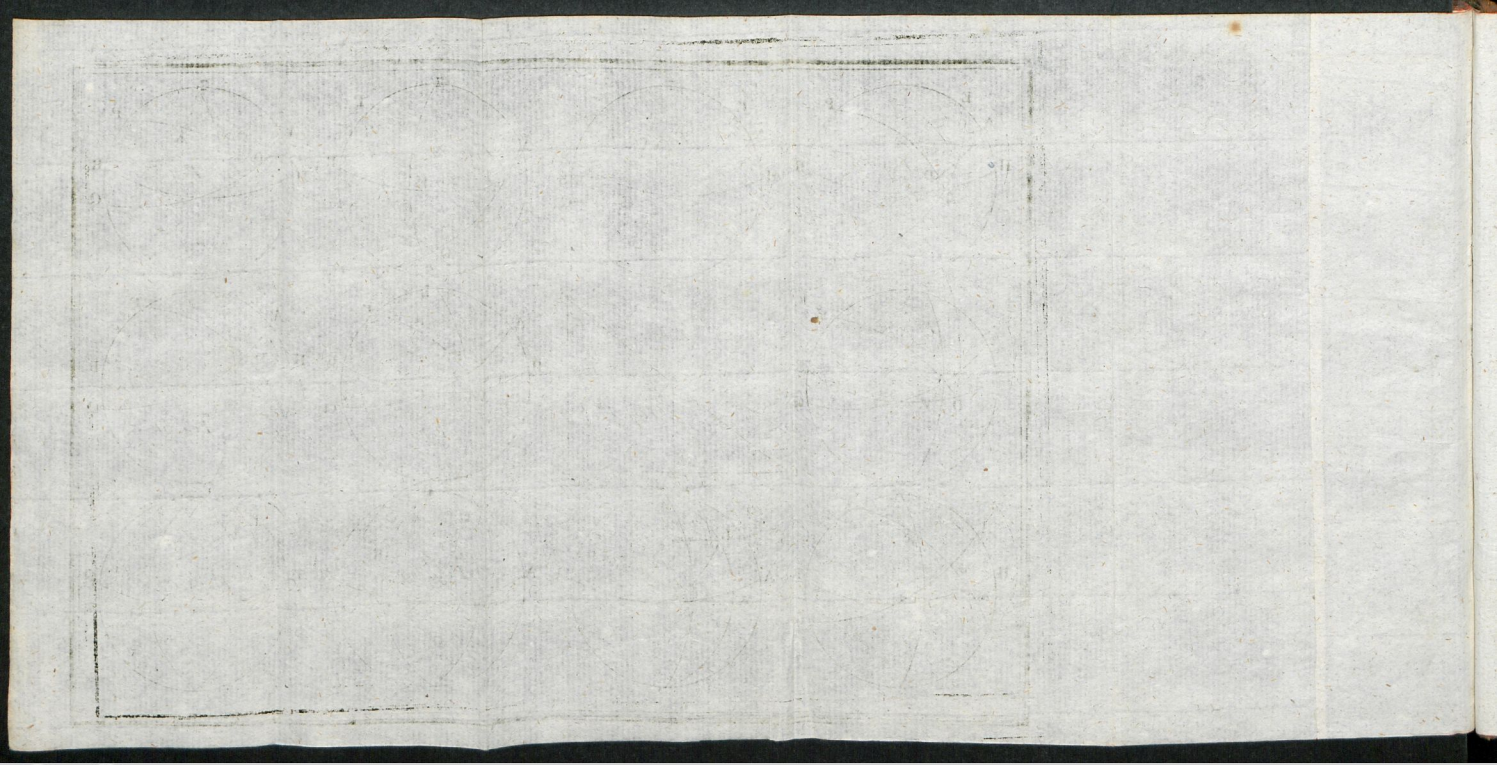
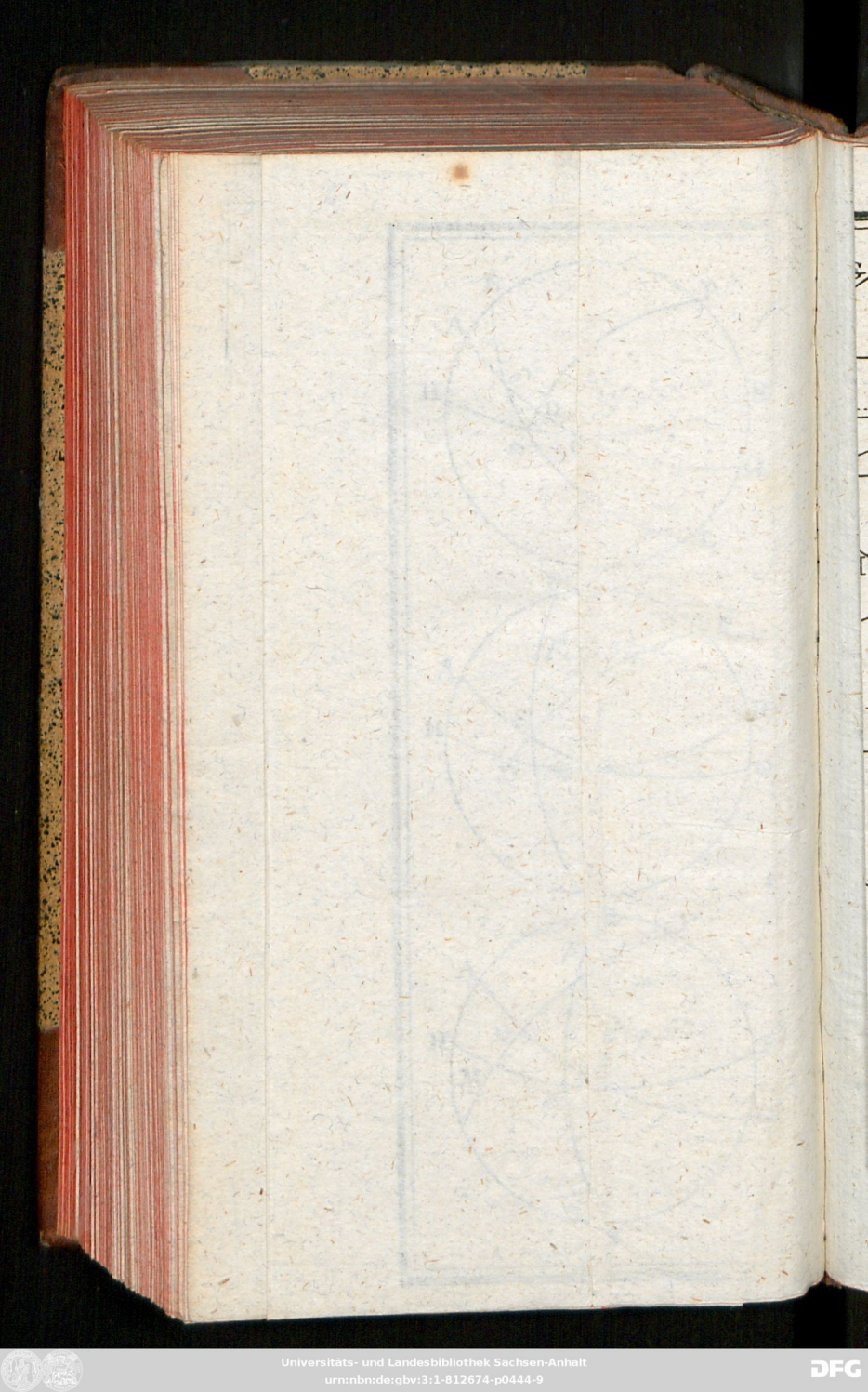


Fig. 50.
E
P
A
H
D
R
S
O
Q
L
Fig. 51.
Z
G
A
R
H
S
Q
N
Fig. 52.
Z
P
A
R
H
D
S
O
N
Q
Fig. 53.
Z
P
K
S
D
A
R
H
M
Q
Fig. 54. a.
Z
P
A
S
R
H
D
M
Q
Fig. 54. b.
S
a
C
b
M
Fig. 55.
Z
P
A
R
H
S
M
Q
Fig. 56.
Z
P
A
S
D
R
H
M
Q
p
Fig. 57.
Z
P
A
S
D
R
H
M
N
Q
Fig. 58.
P
L
m
A
Q
M
N
Fig. 59.
P
L
O
A
R
Q
M
N
Fig. 60.
P
L
A
Q
M
N



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-812674-p0443-4



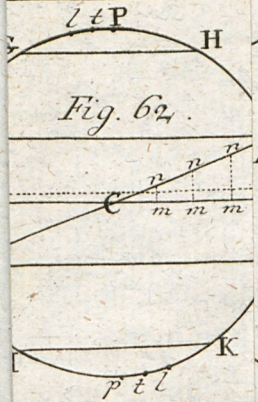
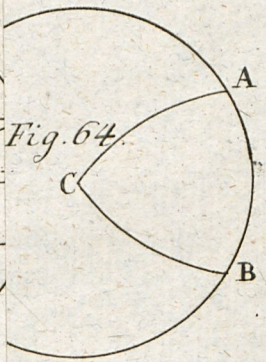


Fig. 62.

Fig. 64.



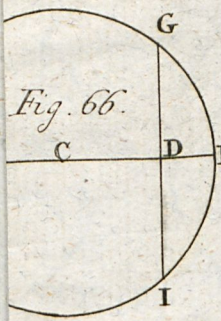
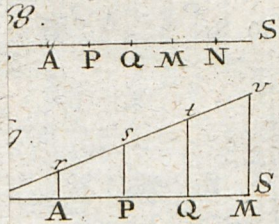


Fig. 66.



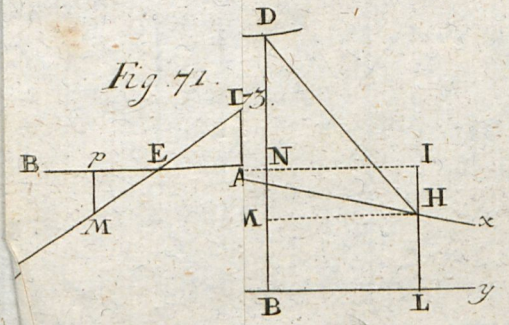


Fig. 71.

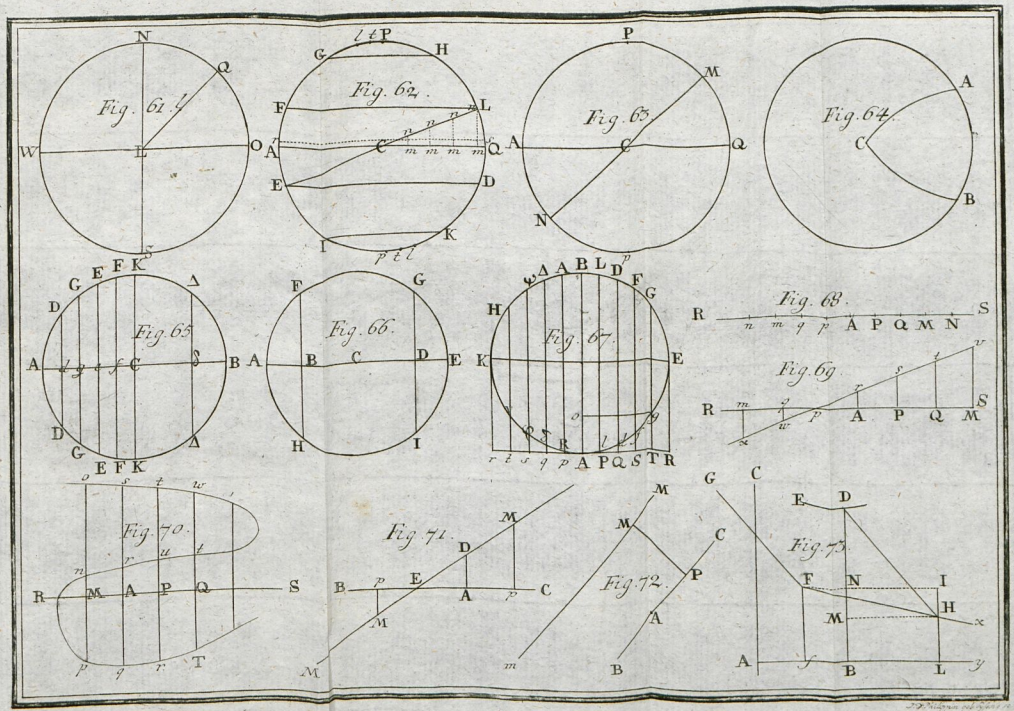
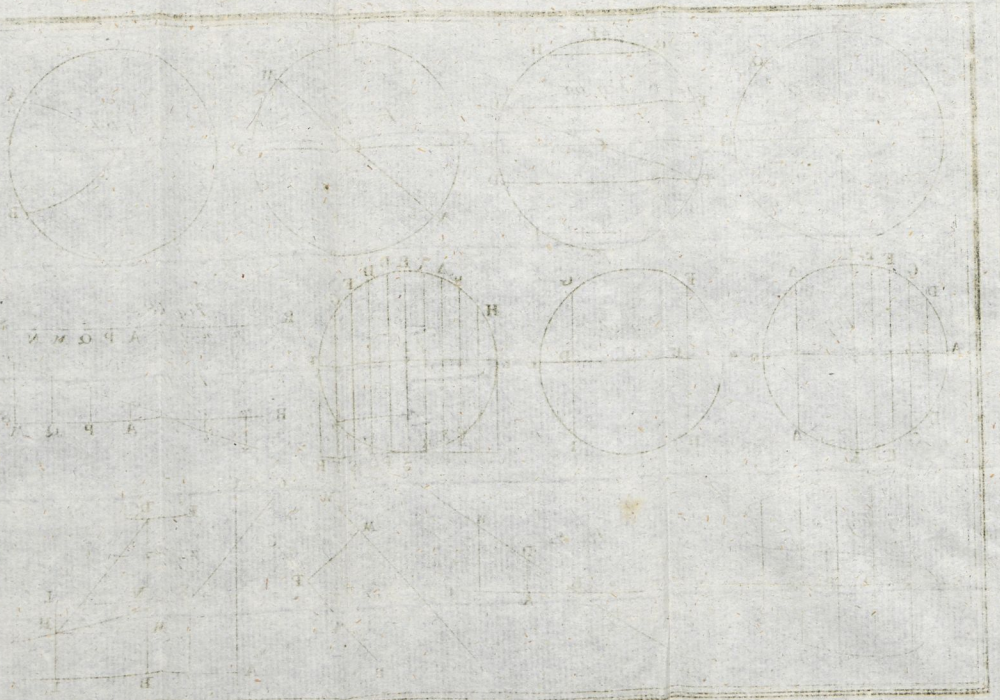
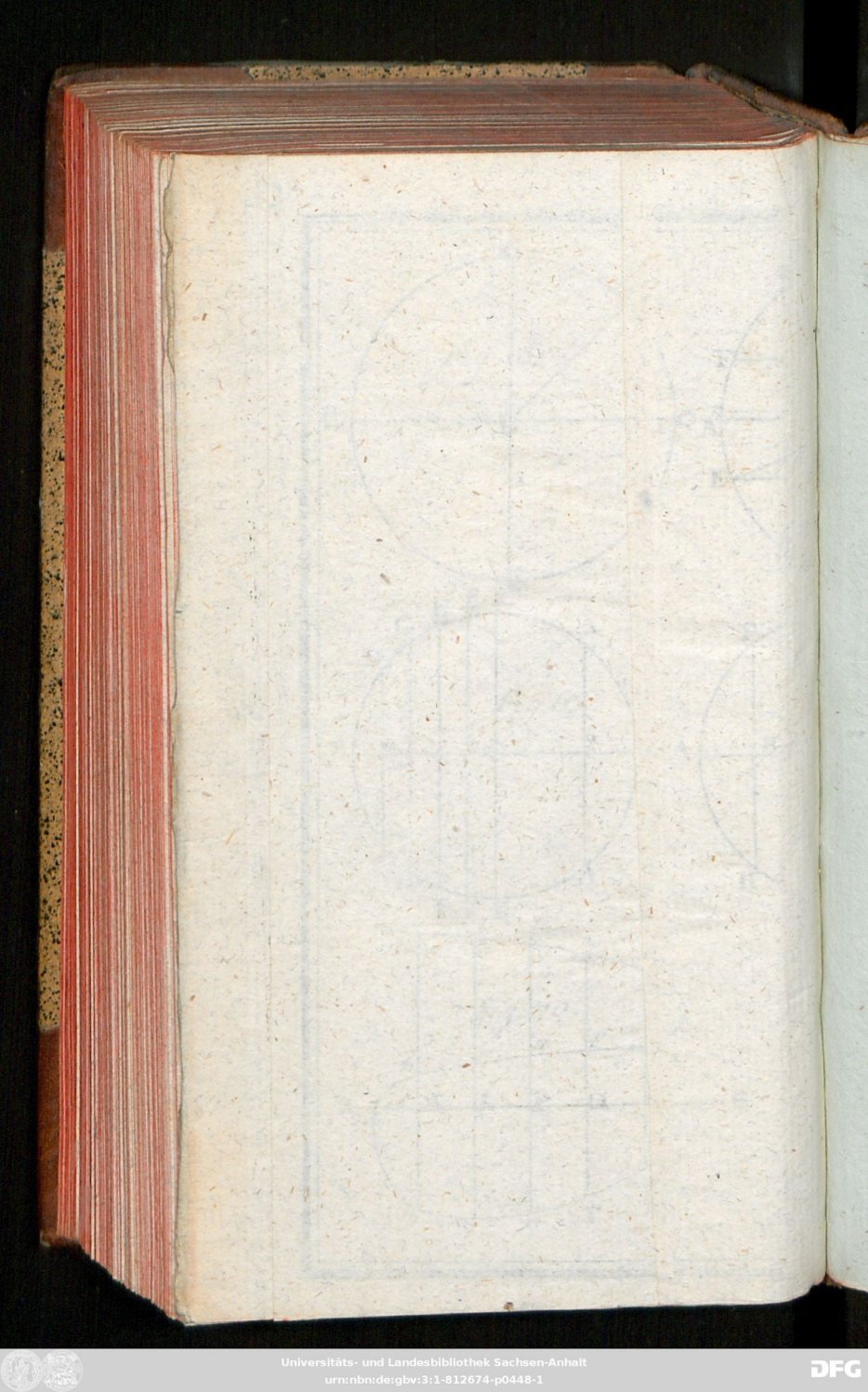


Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-812674-p0447-6



B 11270

3,1
VOIP

ULB Halle 3
007 544 57X

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-812674-p0451-8



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-812674-p0452-3

Johann Friedrich Häselers

Abts von Amelunxborn, Fürstl. Braunschweig-Lüneburg. Consistorialraths, Generalsuperintendenten und Predigers zu Holzmünden, der Königl. Societät der Wissenschaften zu Göttingen, und der Casselschen Societät der Alterthümer Correspondenten.

Anfangsgründe

der

reinen Mathematik

zum eignen Unterricht

vorzüglich für

Hauslehrer und Gelehrte

welche diese Wissenschaft nicht zur Hauptbeschäftigung machen.

Dritter Theil

welcher die sphärische Trigonometrie, etwas von ihrer Anwendung in der Astronomie, etwas von den Funktionen, die Kegelschnitte, und einiges von ihrer Anwendung enthält.

Lemgo,

im Verlage der Meyerschen Buchhandlung, 1790.