K. 441. a.
30

Geometrische Abhandlungen

Zweyte Sammlung

Anwendungen der Geometrie und Trigonometrie

von

Abraham Gotthelf Kästner.

Der mathem. Anfangsgr. I. Theils IV. Abtheil.

Mit 4 Kupfern.

Göttingen
im Verlag bey Vandenhoek und Ruprecht
1791.

KOEN. BIBL.
DER
UNIVERS.
HALLE.

Pb 1148 a

(1,4)

Innhalt

zu Lagen der Ebenen.

1. Eines gegebenen Winkels Schenkel, haben gegebene Neigungen; Man sucht die Neigung seiner Ebene = = S. 1

2. Lagen der Kante eines Prisma, gegen Ebene und Seiten der Grundfläche 13

Neigungen der Seitenflächen gegen die Grundfläche 8; = = 14

Und gegen einander 18; = 16

3. Analytische Formeln für Parallelepipeden = = = = 20

Parallelepipeden gegebner Grundfläche und Höhe 10; = = 22

Berechnung eines Pp. aus dem was man ausen an ihm um eine körperliche Ecke bequem messen kann 22; = 24

Innhalt durch Grundfläche, Kante, Winkel und Neigung jeder Seitenfläche 26; = = = 25

Figur des Feldspaths 29; = 26

des disdiaklastischen Spaths 31; 28

Innhalt.

Seite

Pyramidennetze.

4. Netz der senkrechten Pyramide, wo gleiche Dreyecke um die Spitze liegen : 31
Netz des senkrechten Kegels 19; : 34
Sternkegel 33; : : 37
Netz des abgekürzten Kegels 37; 38
Anwendung auf Landcharten 38; 39
Zur Geometrie der Mäntel 53; 44
5. Netz einer ungleichseitigen Pyramide 45
Ueber das Netz des ungleichseitigen Kegels 18; : 48
Und dessen Fläche 27; : : 49

Beweis der Ausrechnung der Pyramiden durch Gränzen.

6. Arithmetischer Lehnsatz: Summe nach einander folgender Quadrate ganzer Zahlen, von 1 an : : : 51
Kugelpyramiden XVII; : : 54
Quotient den die Summe mit dem Würfel der Zahl dividirt giebt. XX; 55
Kann so nah an $\frac{1}{3}$ gebracht werden als man will.
Quotient den die Summe, um das letzte Quadrat vermindert mit dem Würfel dividirt giebt; XXXII; : : 59
Läßt sich auch so nah als man will an $\frac{1}{3}$ bringen.

7. Aus-

Innhalt.

Seite

7. Ausrechnung der Pyramiden durch Gränzen : : : : 60
8. Einer Pyramide Höhe und Innhalt aus Abmessungen an ihrer Grundfläche zu berechnen : : : : 67
9. Pontons : : : : 71
Arten derselben; 36. : : 79
Maasse die eben so berechnet werden 57. : : : : 89
10. Körper deren Flächen sich gegen die Kugelfläche verhalten wie die Körper selbst gegen die Kugel : : 90
11. Summe der Cotangenten der drey halben Winkel eines Dreyecks : 101
Ist ihrem Producte gleich das. 9. 102
Summe der drey Producte aus den drey Paaren der Tangenten ist = 1, das. 12. : : 103
12. Dreyeck von dem Umfang, Innhalt, und ein Winkel gegeben sind : 103
Dreyeck aus einer Seite, Umfange und Innhalte das. 31. : : 110
Aus Summe der Seiten, einer Seite und dem Winkel ihr gegenüber 32;
Aus einer Seite, Winkel ihr gegenüber und Innhalt 33;
Innhalt eines rechtwinklichten Dreyecks 47. : : : : 115
Innhalt jedes Dreyecks aus Umfang und Winkeln 51. : : 116

Innhalt.

Seite

13. Vergleichung zwischen Kreisfläche Abschnitt und Höhe desselben : : 119

Beyers Conometria Mauritiana und Stereometria inanium; 7; 9 : 120

Smith Stereometrie; 12 : : 123

Eine verwandte Aufgabe 18 : 126

14. Abschnitt der zur Kreisfläche gegebne Verhältniß hat : : : 129

Sinus ändern sich langsamer als ihre Bogen; 5 : : : : 130

Abschnitt dessen Bogen der Quadrant ist 15; : : : : 133

Der $\frac{1}{3}$ des Halbkreises ist 17.

Der die Hälfte des Halbkreises ist 27. 136

Bogen seinem Cosinus gleich 28.

15. Bellery mechanische Vorschrift einen Abschnitt eines Kreises zu berechnen 143

Unwissenheit der verordneten Schiffvisirer 9 : : 146

16. Monden : : 147

Sind allemahl paarweise 7. : 148

Fläche eines Mondes ohne Quadratur des Kreises 20. : : : 151

Mond des Hippokrates 25. : 152

Angebliche Quadratur 29. : 153

Algebraische Erfindung von Monden deren Fläche ohne Quadratur des Kreises gegeben ist 31. : : 154

Mon-

Innhalt.

Seite

Monden andrer krummen Linien, auch Flächen die sich ohne Quadraturen geben 41. = = 157

Arbeli 44;

17. Fläche zwischen Bogen zweener Kreise die nicht einen Mittelpunct haben und geraden Linien nach des einen Mittelpuncte = = = 159

18. Ringe zwischen concentrischen Kreisen 161

Canathus 4;

Schleifstein 6. = = 164

Aachen 18. = = 168

Levitenstädte 24. = = 169

19. Eintheilung eines Kreises, durch Halbkreise über Theile seines Durchmessers. 172

20. Zur Geschichte der Zahl welche den Umkreis angiebt den Durchmesser zur Einheit genommen = = 174

Von des Apollonius Okytoboon 175

Die Zahl abgetheilt wie sie nach und nach von Mathematikern ist genauer bestimmt worden 3. = = 181

Vieta; 6. = = 182

Adrianus Romanus 12. = = 184

Ludolph von Cöln 14. = = 185

Snellius 25. = = 190

Die 35 Decimalstellen die Ludolfen zugeschrieben werden scheinen sich auf des Snellius Nachricht zu gründen 27.

Hugenius 28. = = = 191

Seite
Sharp 32. : : : 192
Machin 37. : : 194
de Lagny 38. : : : 194
Quadratwurzel aus 12 auf 102 Decimalstellen 49. : : 200
Wieweit die Schärfe von Vietas Zahl reicht? 50. : : 201
Vortheile mit π leicht zu rechnen 51. 202
Tarif 52.
Einmahleins für $\frac{1}{\pi}$; 56. 203
21. Kreis und Kugelrechnung in Graden 204
Quadratgrad 6. : : 205
Viereck zwischen Graden 9. 206
Wolfs Versehen 15. : 208
Logarithmen 19. : 210
22. Kreis- und Kugelrechnung in geographischen Meilen : : 214
Ludolphs von Cöln Berechnung 7; 215
23. Quadratrix des Dinostratus 218
Der Punct welcher die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise angiebt, läßt sich nicht finden, wenn man diese Verhältniß nicht schon weiß 29. 222
Wie Clavius ihn beynahe finden wollte 31.
Definition der Quadratrix bey den griechischen Geometern 33. : 223

Unrich-

Innhalt.

Seite

Unrichtige Angabe der Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise 35. 225

Fortsetzung der Quadratrix über den ersten Quadranten 36. = 226

Die beyden veränderlichen Grössen, von einer Stelle angefangen 39. 227

Bequeme Formeln, Puncte der Quadratrix aus den folgenden Quadranten zu bestimmen 40. = = 228

Vielfache des Quadranten und darüber ein Bogen kleiner als ein Quadrant 41. = = 229

Vielfache des Quadranten 42; 231

Erste Asymptote 45; V. 234

Unzählich viel Asymptoten 47; 235

Zwischen jeden zwo nächsten Asymptoten ein Durchschnitt mit der Axe 47; II.

Zweyte Hälfte der Quadratrix 49. 237

Ueber die Mannichfaltigkeit der Wurzeln in den Gleichungen welche man zu Theilung der Bogen braucht = 241

24. Alle Bogen die einerley Sinus haben 246

Bejahte und verneinte Sinus 10; 248

Wenn verschwindende als bejaht oder verneint anzusehen sind 13. 249

Formeln der Bogen die einerley Sinus haben 22. = = 251

Halbirung eines Bogens dessen Sinus gegeben ist 27. = = 253

Innhalt.

Seite

Theilung in drey Theile 38. ; 256
Theilung in n Theile 47; ; 260
Diese Zahl gerade 58. ; 264
Ungerade 67. ; ; 268
Unterschied zwischen beyden 84. 273
Ueber die Gleichung zwischen Sinus des einfachen und vielfachen Bogen 85. 276
Gestalt der Gleichung für Theilung in eine gerade Menge Theile 123. 287
Und in eine ungerade 124. 288
Wieviel Cosinus giebt eine solche Theilung? 125. ; ; 289
Wieviel Secanten 128. ; 290
Theilung, wenn der Sinus verneint ist 130. ; ; 291
Giebt keine andern Gleichungen als für den bejahten Sinus 141. 293
Theilung des Halbkreises 144. 295
Des Ganzen 150. ; 300
25. Alle Bogen die einerley Tangente haben ; ; 301
Theilung eines Bogens dessen Tangente gegeben ist 9. ; ; 302
26. Alle Bogen die einerley Sehnen haben ; ; 313
Bey jedem Zusatze eines ganzen Umkreises, geht die Sehne ins Entgegengesetzte 14; 35; ; ; 318

Wenn

Innhalt.

Seite

Wenn eine Sehne gegeben ist, wie viel Sehnen haben $\frac{1}{n}$ der Bogen denen diese Sehne gehört 38. ; 320

Gestalt der Gleichungen zwischen Sehne des ganzen Bogens und eines Theils 62. ; ; ; 326

Theilung des ganzen Kreises 71.

Ordentliches Vieleck im Kreise für gerade Zahl der Seiten 88. ; 331

Man findet allemahl zugleich Seiten und Diagonalen; das.

Bedeutung der verneinten Werthe 89. 331

Theilung des Kreises nach einer ungeraden Zahl 118. ; ; ; 337

Vieleck mit einer ungeraden Menge von Seiten 128. ; ; ; 341

Jobst Byrgs Gleichung für das Siebeneck 134. ; ; 342

Keplers Urtheil über diese cossische Angabe 141. ; ; 343

Anderson 148. ; 345

27. Theilung aller Bogen die einerley Gränzen haben ; ; 349

28. Wie trigonometrische Tafeln nur nach Lehren der Elementargeometrie sind berechnet worden ; ; 354

Prole-

Innhalt.

Seite

Ptolemäus 1.
Findet Gränzen für die Sehne eines Grades 6. : : 357
Königsberger 13. : 358
Menelaus 14.
Seine Bücher von Kugeldreyecken, Maurolycus; *Mersenni* Syn. Math. 17. 359
Nadir eines Bogens 20. : 360
Peurbach 23.
Kardagen 25. : : 361
Arzachel 38. : : 365
Regiomontan 40.
Wie er Sinus für kleinere Bogen als 15 M. angegeben 78. : 372
Winkel zu finden deren Unterschied und Verhältniß der Sinusse gegeben ist. Und unrichtige Anwendung dieses von Joh. Dee 83. : : 374
Bemerkung wenn die Seite des Zehnecks durch analytische Trigonometrie gesucht würde 90. : : 376
29. Wie trigonometrische Tafeln durch Auflösung höherer Gleichungen sind berechnet worden : : 380
Pitiscus 3.
Vorschriften aus einem Buche für das vormalige Göttingische Gymnasium 44. : : 394

Gelli-

Seite

Gellibrand 45. : : 395

Vieta 47. : : 396

Prosinus, Transsinuosae 47.

30. Summen der Sinusse von Vielfachen eines gegebenen Bogens : 397

Wenn der Bogen den halben Umfang misst 21. : : 400

Nach einer ungeraden Zahl 23;

Nach einer geraden 28. : 401

Wenn die Bogen nicht den halben Umfang ausmachen 29.

Kraft 38. : : 404

Vieta 39. : : 405

Summe der Sinusse aller Grade im Quadranten 52. : : 407

Aller Minuten 53.

Aller Secunden 58. : 409

Vergleichung dieser Summen mit der Zahl von Bogen die auf den Halbmesser gehn 59.

Summe der S. aller Grade im Halbkreise 63. : : 411

Kepler unrecht von Kraften getadelt 65.

Cardan 67. : : 412

Euler

Seite

Euler 68. : : 413

Summen der Sinusse aller Hundertheile eines Grades 69. : 414

Flächen von sphärischen Dreyecken und Vielecken.

31. Fläche eines Kugeldreyecks : 415

Zur Geschichte der Vergleichung der Fläche eines Kugeldreyecks mit der Kugelfläche.

Broscius : : 418

Mit jedem Kugeldreyecke entstehen noch sieben andre um die ganze Kugel 1. 425

Zwey Kugeldreyecke die gleiche Seiten haben decken einander 19. 429

Vergleichung des Dreyecks mit der Kugelfläche, nach Girards Art 24. 431

Die Summe der drey Winkel ist grösser als zweene rechte 34. : 434

Kein Kugeldreyeck grösser als die halbe Kugelfläche 35. : : 434

Summe der Winkel nicht grösser als sechs Rechte 37. : : 436

Quotient des Dreyecks mit der Kugelfläche, als ein Winkel 38. : 436

Kugeldreyeck in geographischen Meilen 41. : : : 438

Seite

32. Vergleichung des gleichseitigen Dreyecks mit der Kugelfläche : 440

Winkel desselben wenn die Seite klein ist. VI. : : : 441

Ob sich aus drey Winkeln auf dem Felde gemessen das Dreyeck berechnen lässt? XVII. XXI. : : 444

Grösstes gleichseitiges Dreyeck XXII. 446

Gleichseitiges Dreyeck des Halbmessers Quadrate gleich XXIV. 447

33. Fläche eines rechtwinklichten sphärischen Dreyecks durch seine Seiten 447

34. Fläche durch Seiten und Winkel zusammen bey einem kleinen Dreyecke ausgedruckt : : : 451

Herr le Gendre 10. : 453

Seine unendlich wenig krummen Dreyecke 15. : : 455

Wunderbarer Satz 16. : 456

35. Kugelvielecke : : 458

Wenn alle Winkel auswärts gehen ist das Vieleck nicht grösser als die Halbkugel 10; IV. : : 462

Vieleck, grösser als die halbe Kugelfläche 10; X. : : 463

Sphärisches Dreyeck grösser als die halbe Kugelfläche 10; XX. : 466

Ordent-

Innhalt.

Seite

Ordentliche Vielecke 12. = 468

Gleiche Seiten und gleiche Winkel sind nicht allemahl beysammen 34. 473

Ordentliche Vielecke deren Vielfaches die Kugelfläche ist 43. = 476

Netze von Dreyecken 50. = 478

Netz von Vierecken 64. = 482

von Fünfecken 68. = 484

Die folgenden Polygone geben kein Netz 74; = = 485

Auser wenn sie sich in grösste Kreise verwandeln 76; = = 486

Ordentliches Viereck wo die Seite 1 Grad; 78. = = 487

Formel für kleine Seiten, und Winkel wenig über 45 Gr. 79. = 488

Seite 1 Minute 81. = 489

. . . 1 Secunde 82.

Ausdruck durch Quadrate von Bogen 83. = = = 490

V. dem Quadrate von 30 Graden gleich 90. = = 492

36. Sphärische Vielecke als Maasse körperlicher Winkel = = 493

Winkel so groß als der des Würfels 4. 494

Kör-

Innhalt.

Seite

Körperliche Winkel können gleich seyn ohne einander zu decken 8. : 495

In mehr als drey ebene eingeschlossen 11. : : : 496

Wallenius 12.

Irrthum der Géometrie metaphysique 13. : : : 497

Runde Ecke eines Kegels 15. 499

Pyramiden deren Grundflächen Quadrate sind 17. : : 500

Untersuchung eines Satzes des Herrn le Sage 25. : : 502

Points quarrément rangés 33. 506

Ueber einen Beweis der Ausrechnung der Kugel 48. : : 511

37. Ueber die Summe der ebenen Winkel die einen körperlichen einschliessen : 513

An der Spitze einer gleichseitigen Pyramide, beträgt sie allemahl weniger als 360 Grad 3. : : 514

Gränze der sie sich nähert 7. 515

Ungleichseitige Pyramide 11. 516

Kugeldreyeck von dem zwo Seiten zusammen den Halbkreis um einen gegebenen Bogen übertreffen 19. 518

Einen körperlichen Winkel in vier ebene einzuschliessen deren Summe vier rechte übertrifft 19. IV : 519

Innhalt.

Seite

Oder eben soviel beträgt 19; VI 520

Körperlicher Winkel in fünf ebene eingeschlossen deren Summe vier rechte übertrifft 20. 523

An einen Punct sechs ebene gleiche Winkel zu setzen deren Summe vier rechte übertrifft 21. 526

Alle sechs Schenkel auf einer Seite einer Ebene 21; XXI. 530

Drey in einer Ebene 21; XXII. 531

Drey auf einer Seite der Ebene drey auf der andern 21; XXIII.

Linien aus einem Puncte, nicht alle auf einer Seite einer Ebene 23. 535

Summe der ebenen Winkel um einen körperlichen, nach Euklid 24. 536

Herr le Sage Erinnerung dagegen 25. 537

Hermanns Schrift 26. 538

Bertrand Devéloppement 27. 545

Euklids Satz gilt nicht bey Pyramiden deren Grundflächen einwärts gehende Winkel haben 28. 547

Nach dem Euklid heisst Winkel nicht etwas das mehr als 2 Rechte ist 31. 548

An Figuren die einwärts gehende Winkel haben betragen die äusern nicht 2 Rechte; 33; II. 552

Wie

Innhalt.

Seite

Wie einwärts gehende Winkel von Geometern betrachtet worden? 34. 553

Was man Winkel über 2 Rechte nennt sind eigentlich Kreisbogen 38. 555

Noch über Winkel grösser als 2 Rechte 41. 557

Von Euklids 20 S. des XI. B. 44. 558

Wenn ein körperlicher Winkel sich an der Spitze einer Pyramide befindet, deren Grundfläche nur auswärts gehende Winkel hat beträgt die Summe der ebenen um ihn, weniger als vier rechte 46. 559

Ob in jedem Kugeldreyecke die Summe der Seiten kleiner ist als der ganze Kreis? 49. 563

Was zu einem körperlichen Winkel gehört? 52. 566

Erklärungen beym Euklid 53. 567

Linien aus einem Puncte nach entgegengesetzten Seiten einer Ebene 59. 569

Wenn ein sphärisches Vieleck Maaß eines körperlichen Winkels ist 62. 571

38. Litterarische Nachrichten vom Vernier. 572

Verniers Buch 8. 573

Sein Vorschlag Sinus zu berechnen 37. 582

Winkel aus den Seiten 49. 586

Aequinoctialuhr 52. 587

Mechanische Uhr 53.

Innhalt.

	Seite
Bogen und Sinus einer Minute 58.	591
Hedräus 63.	593
Gutschoven 83.	600
Trigonometrisches Netz 90.	601
Ueber halbe Minuten bey Winkelmessern ohne Fernrohr 99.	605
Behr 105.	608
Stahl 107.	609
Tobias Mayer 110.	611
Regel des Clavius.	
Regnault 113.	613
Monconys 126.	618

Zu

Zu

Lagen der Ebenen.

I.

Aus den Neigungen von zwo geraden Linien in einer schiefen Ebene, und derselben Winkel, die Neigung der Ebene zu finden.

1) Die Linien sind OH; OG, ihr Winkel HOG = m;

2) Man nehme an, die schiefe Ebene in welcher diese beyden Linien sind, werde von einer horizontalen Ebene in GH geschnitten. Auf die horizontale Ebene falle OK vertical, und von K, auf GH, KI senkrecht.

3) Die Neigungen der Linie sind OGK = p; OHK = q;

Unmittelbar ist nichts gegeben als die genannten drey Winkel.

4) Man nenne OK = u;

5) Also OG = u. cosec p; OH = u. cosec q
KG = u. cot p; KH = u. cot q

6) Die gesuchte Neigung ist OIK = x

7) Man nehme u nach Gefallen an.

Dieses ist verstattet, weil man die horizontale Ebene (2) so nah an O oder so weit als man will davon legen darf, und u dieser Ebene Abstand von O ist; allemahl ist HG horizontal.

Selbst wenn man die horizontale Ebene durch O legte, wäre u = o und die Linien in (5) jede auch = o; weil G, H, K, zusammen in O fielen.

Diesen Fall beyseite gesetzt, hat man im Dreyecke HOG, den genannten Winkel (1) und seine Schenkel (5).

Also Winkel OGH, OHG; und Grundlinie GH (Trig. 15 Satz).

Und Höhe OI aus Winkeln an der Grundlinie, und den Schenkeln. Folglich $\frac{OK}{OI} =$ sin x.

8) Auch im Dreyecke HKG, den genannten Winkel, und die beyden KHG; KGH; aus den drey Seiten. (Trig. 17 S.)

9) Folglich den horizontalen Winkel HKG, welcher dem HOG in der schiefen Ebene gehört.

10) Das

10) Das alles lässt sich aus angenommenem u, durch die gemeine Trigonometrie finden.

11) Eigentlich geht u aus der Rechnung weg, es hat nur gedient trigonometrische Linien zu berechnen. So bestätigt auch die Rechnung daß man dafür annehmen kann was man will (7).

12) Formeln, stellen den Gang der Rechnung so dar:

13) $HG^2 =$
$u^2.(\text{cosec } p^2 + \text{cosec } q^2 - 2.\text{cosec } p.\text{cosec } q.\cos m)$ (Trig. 20 S. 1 Zus.) Ferner (1 astr. Abh. 52)

$$\text{tang OHG} = \frac{u.\text{cosec p. sin m}}{u.\text{cosec q} - u.\text{cosec p.cos m}}$$
$$= \frac{\text{cosec p. sin m}}{\text{cosec q} - \text{cosec p.cos m}}$$

Und, nur p und q verwechselt

$$\text{tang OGH} = \frac{\text{cosec q. sin m}}{\text{cosec p} - \text{cosec q.cos m}}$$

14) Nun $OI = u.\text{cosec p. sin OGH}$
$= u.\text{cosec q. sin OHG}$

15) Und $\sin x = \frac{u}{OI}$

16) Aus (14) folgt daß cosec p. sin OGH = cosec q. sin OHG seyn muß, wenn nicht zwischen den drey Winkeln (1; 3) eine Gleichung statt finden soll, die allsdann nicht erlaub-

laubte alle drey wie man wollte anzunehmen, sondern durch zweene den dritten bestimmte. Es ist aber

$OK : OH = 1 : \operatorname{cosec} q$

$OH : OG = \sin OGH : \sin OHG$

$OG : OK = \operatorname{cosec} p : 1$

$1 : 1 = \operatorname{cosec} p . \sin OGH = \operatorname{cosec} q . \sin OHG.$

also das wahr was im Anfange dieses Absatzes erfodert wird.

17) Aus (15) hat man

$$\sin IOG = \frac{OI}{OG} = \frac{\sin x}{\operatorname{cosec} p} \text{ und}$$

$$\sin IOH = \frac{\sin x}{\operatorname{cosec} q} = \sin x . \sin q$$

für die Linie welche mit der Ebene einerley Neigung hat.

Für $p = q$

18) Ist in (13)

$$\operatorname{tang} OHG = \frac{\sin m}{1 - \cos m} = \operatorname{tang} OGH$$

$$= \frac{\sin m}{2 . \sin \frac{1}{2} m^2} \text{ (Trig. 19 S. 7 Zus.)}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2} m}{\sin \frac{1}{2} m} \text{ (das. 5 Zus.)} = \cot \tfrac{1}{2} m$$

wie gehörig, weil dann $OG = OH$ (4)

Also (14) $OI = u . \operatorname{cosec} p . \cos \frac{1}{2} m$ und

$$(15) \quad \sin x = \frac{\sin p}{\cos \frac{1}{2} m}$$

Rück-

Rückkehr zum Allgemeinen.

19) Man braucht eigentlich nichts zu berechnen als eine der beyden Tangenten (13), aus ihnen giebt sich x (15)

20) Die Cosecanten durch die Sinus weggeschaft, hat man

$$\text{tang } G = \frac{\sin m}{\frac{\sin q}{\sin p} - \cos m}$$

$$\text{tang } H = \frac{\sin m}{\frac{\sin p}{\sin q} - \cos m}$$

und nun $\sin x = \frac{\sin p}{\sin G} = \frac{\sin q}{\sin H}$

21) **Exempel.** $p = 30°; q = 20°; m = 50°$

log sin q	=	9,5340517
log sin p	=	9,6989700
$\log\left(\frac{\sin q}{\sin p}\right)$	=	0,8350817 — 1
gehört zu		0,68404
— cos m	= —	0,6427876
		0,0412524
log sin m	=	9,8842540
log 0,041252	=	0,6154450 — 2
log tang G	=	11,2688090

G = 86° 55′ 10″ —

10 + log sin p = 19,6989700
log sin G = 9,9993720

log sin x = 9,6995980
x = 30° 2′ 50″ +

22) Ich gebe aus Gardiners Tafeln die Winkel innerhalb 10″ an, und nenne die Decade von Secunden welcher der Winkel am nächsten kömmt; Er mag mehr oder weniger betragen, welches ich durch + oder — anzeige.

23) Diese Rechnung ist doch so kurz und bequem, daß man sich lieber mit ihr bekannt machen sollte, als die Mühe anwenden, zwo Linien auf der Ebene zu suchen, die gleiche Neigung haben, und dann freylich eine kürzere Rechnung geben (18).

24) Noch hat man für das Exempel (21) nach (17)

log sin x = 9,6995980
log sin q = 9,5340517

log sin IOH = 9,2336497
IOH = 9° 51′ 40″ —
IOG = 40 8 20 +

25) Die Figur stellt die horizontale Ebene durch HG unter O, des gegebenen Winkels Spitze vor. Ginge sie durch O, so dürfte man sich nur GO, HO in OL, OM verlängert vorstellen, so hätte, gegen die horizontale Ebene

ne

ne durch O, noch OL die Neigung p; OM die Neigung q, (3) und es wäre LOM = m.

26) Nun ist aus Betrachtung der Figur, ohne Rechnung deutlich, daß die Ebene LOM gegen den Horizont durch O, vollkommen die Neigung haben muß, welche die Ebene HOG, einerley mit jener, gegen den parallelen Horizont durch HG hat.

27) Wenn im Horizonte durch O, die Puncte H, I, K, G, alle in O zusammenfallen, (7) so giebt es freylich keine solche Figur mehr, wie gezeichnet ist. Begreiflich aber kann man anfangs einen Horizont in einer willkührlichen Entfernung unter O legen, und nun sich selber parallel näher und näher an O rücken lassen; die Figur OKHIG bleibt sich immer ähnlich, wie daraus erhellt, daß u willkührlich ist (7; 11), also, wenn sie verschwindet, alles in O zusammenfällt, so verschwinden die Linien und Winkel noch in den unveränderlichen durch p, q, m, gegebenen Verhältnissen, welche die Formeln darstellen. Man kann also nach (20) tang G, tang H, berechnen, wenn gleich das Dreyeck OGH in den Punct O zusammen gegangen ist, und es also keine solche Winkel mehr giebt. Auch enthalten die Formeln für diese Tangenten, die Linien OG, OH, nicht, und bleiben also völlig dieselben, wenn diese Linien verschwinden.

Daß die Schlüsse aus der dargestellten Figur, noch bleiben, wenn auch die Figur nicht mehr statt findet, schiene mir bey dieser Veranlassung, bemerkungswerth. Es findet allemahl statt, wenn die Figur sich selbst immer ähnlich, bis zum Verschwinden kleiner wird.

Wer sich in diese Subtilität nicht einlassen will, der sieht aus (26) wie die Neigung der Ebene LOM gegen den Horizont durch O, gefunden wird.

28) Auf den Horizont durch die Spitze des Winkels bezog ich die Neigung der Schenkel und seiner Ebene, I. astr. Abh. 247; dem damaligen Gange meiner Untersuchung gemäß, ich fing mit den Neigungen der Schenkel an, und brachte den Winkel zwischen ihnen auf einen horizontalen, da war es natürlich, den Horizont durch die Spitze zu legen. Nachdem kam mir die Frage vor: Einer Ebene Neigung zu finden, und da waren ein Winkel in ihr, und Neigungen seiner Schenkel, Mittel, welche ich zu Erreichung der Absicht brauche. Daß die letzte Frage öfters vorkommen kann, ist deutlich, unter andern in der Markscheidekunst, das Fallen eines Ganges anzugeben; Man s. meine Anmerkungen über die Markscheidekunst, 25 Anm. Daselbst habe ich mich auf die nur angeführte Stelle der astr. Abh. bezogen. Von dem dortigen Verfahren ist Theorie und Rechnung etwas weitläuftiger als hie, welches

mich

mich veranlasst, das Gegenwärtige auch mitzutheilen.

29) Zur Vergleichung mit der Vorschrift der astr. Abh. will ich das dortige Exempel, nach gegenwärtigen Regeln berechnen. Es sey also aus I. astr. Abh. 263; 193; 190; $p = 4^\circ\ 58'$; $q = 2^\circ\ 25'$, m (dorten δ) $= 57^\circ\ 24'\ 36''$; Also (20)

log sin q =	8,6249653
log sin p =	8,9373983
	0,6875670 — 1
$\frac{\sin p}{\sin q}$ =	0,48704
— cos m =	— 0,5386237
Divisor =	— 0,05158
log sin m =	9,9255938
log 0,05158 =	0,7124813 — 2
tang G von 20 =	11,2131125
log cot G =	8,7868875

Wenn tang G bejaht wäre, so wäre $G = 90^\circ - 3^\circ\ 30'\ 11''$

Da nun die Tangente verneint ist, so kömmt

G =	$93^\circ\ 30'\ 11''$
sin G = sin	$86\ 29\ 49$
10 + log sin p =	18,9373983
log sin G =	9,9991877
log sin x =	8,9382106

 giebt

giebt $x = 4° 58' 33''$
vollkommen wie I. astr. Abh. 264.

Noch eine andere Einrichtung der Auflösung.

30) Aus (19) erhellt, daß man x hat, wenn G oder H berechnet ist.

Im Dreyecke OGH, ist aus (5)
OG. sin p = u = OH. sin q also
OG: OH = sin q: sin p

Man hat also in diesem Dreyecke die Verhältniß der beyden Seiten, die den gegebenen Winkel m, einschliessen.

Daraus kann man die Winkel, G, H, nach Trig. 14 S. finden.

Für die Winkel nähmlich kömmt es nur auf die Verhältniß der Schenkel um den gegebenen an, nicht auf der Schenkel wirkliche Grössen, weil alle Dreyecke, die um einen gegebenen Winkel Schenkel in gegebener Verhältniß haben, ähnlich sind. (Geom. 28 S.)

Man hätte also $\frac{1}{2}(G + H) = 90° - \frac{1}{2}m$
Und $\sin p + \sin q : \sin p - \sin q = \cot \frac{1}{2}m : \tan \frac{1}{2}(G - H)$.

Darus fänden sich G und H.
Aber da würde man wohl nicht Lust haben mit Summe und Unterschiede der Sinus selbst zu rechnen, und wollte man etwa die höchsten Ziffern dieser Summe und Unterschiedes nur behalten, und die Logarithmen für die Zahlen brauchen, welche sie darstellen, so wäre das

ohnge-

ohngefähr eben so verfahren wie vorhin, und man fände wohl bequemer, durch eine ähnliche Rechnung jeden Winkel selbst zu finden, als erst ihren halben Unterschied.

30) Liesse sich aber die Rechnung so einrichten, daß man nirgends eine trigonometrische Linie selbst brauchte, nirgends aus Logarithmen eine Zahl suchte, diese Zahl mit einer andern vergliche, und nun wiederum den Logarithmen der Zahl suchte, die aus beyder Verbindung entsteht . . . so verfuhr man vorhin (21) kurz, liesse sich Alles blos durch Logarithmen berechnen, so gäbe das doch vielleicht eine bequemere, auch schärfere Rechnung.

31) Dazu dient nun die 19 Abh. in der 1. Samml. dieser geometrischen Abhandlungen. Die dortigen Vorschriften zum hiesigen Gebrauche anzuwenden, nenne man unter den beyden gegebenen Winkeln der Linie mit dem Horizonte, den grössern p; den kleinern q; so ist

dorten	b	c	B	C	A
hie	sin p	sin q	G	H	m

Also $\text{tang } D = \frac{\sin q}{\sin p}$

$\text{tang } \frac{1}{2}(G-H) = \text{tang } (45° - D) . \cot \frac{1}{2} m$

So hat man $\frac{1}{2}(G-H)$; gleich anfangs aber $\frac{1}{2}(G+H) = 90° - \frac{1}{2} m$;

Folglich G und H.

32) Als

32) Als Exempel will ich das (21) brauchen. Der erste der dort berechneten Logarithmen giebt log tang D = 9,835017

Daher D = 34° 22′ 25″

45° − D = 10 37 35

log tang (45° − D) = 9,2732830

log cot $\frac{1}{2}$ m = 10,3313275

log tang $\frac{1}{2}$ (G − H) = 9,6046105

Daher $\frac{1}{2}$ (G − H) = 21° 55′ 3″

$\frac{1}{2}$ (G + H) = 65

G = 86 55 3

H = 43 4 57

Weil ich hie für die Secunden Proportionaltheile gebraucht habe, kömmt G etwa um 7 S. kleiner als in (21).

33) Da dieses Verfahren noch bequemer ist, als das in (20) gelehrte, so gilt für desselben Anwendung noch mehr die Erinnerung (23). Die Veranlassung zu dieser Erinnerung sehe man in meinen Anmerkungen über die Markscheidekunst 25 Anm. 13 u. f. §. Damahls hatte ich mir die Auflösung der Aufgabe nur so entwickelt, wie in der (28) angeführten Stelle der astron. Abh., und diese weitläuftige Rechnung zu vermeiden, wollte ich lieber ein paar Linien in der geneigten Ebene brauchen, die gleiche Neigung hatten.

2.

Lagen der Kante eines Prisma gegen Ebene, und Seiten der Grundfläche.

1) BAC sey ein Winkel der Grundfläche. Durch desselben Scheitel gehe die Kante AM aufwärts, und mache mit der Ebene der Grundfläche einen gegebenen Winkel. Dieser allein, bestimmt ihre Lage nicht, sondern die völlige Bestimmung erhält man so:

2) Der Winkel BAC sey $= \alpha$; der Kante Neigung $= MAQ = \delta$; Zu dieser Absicht falle von M auf der Grundfläche Ebene das Loth $MQ = h$.

3) Nun müssen die Winkel $QAB = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\varkappa$, $QAC = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\varkappa$ gegeben seyn, ihr halber Unterschied ist $= \frac{1}{2}\varkappa$.

4) Mit den beyden Seiten der Grundfläche macht die Kante die Winkel $MAB = \beta$ $MAC = \gamma$.

5) Das Verhalten zwischen diesen Winkeln giebt sich folgendergestalt. Man fälle QR, QS senkrecht auf der Grundfläche Seiten, so sind MR, MS auch auf diese Seiten senkrecht. (Geom. 46 S. 63.)

6) Nun

6) Nun ist AM = h. cosec δ (2) AQ = h. cot δ, QR = h. cot δ. sin $\frac{1}{2}(\alpha + \varkappa)$ AR = h. cot δ. cos $\frac{1}{2}(\alpha + \varkappa)$; folglich

$$\frac{AR}{AM} = \cos\beta = \cos\delta . \cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \varkappa)$$

7) Man hat also nicht einmahl eine neue Rechnung nöthig, einzusehen, daß
$\cos\gamma = \cos\delta . \cos\frac{1}{2}(\alpha - \varkappa)$

8) Der Seitenflächen MAB; MAC, Neigungen gegen die Grundfläche sind MRQ = η; MSQ = θ; da ist nun $\frac{MQ}{RQ} = \text{tang}\,\eta = \frac{\text{tang}\,\delta}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \varkappa)}$ (6) und eben so $\text{tang}\,\theta = \frac{\text{tang}\,\delta}{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \varkappa)}$

9) Fiele Q nicht innerhalb des Winkels BAC, sondern innerhalb seines Scheitelwinkels, so wäre der Werth von AQ verneint, nähmlich δ stumpf (6), woraus sich die Beschaffenheit der Winkel schliessen läßt, die durch δ gegeben werden.

Besondrer Fall $\varkappa = o$.

10) Da ist $\cos\beta = \cos\delta . \cos\frac{1}{2}\alpha = \cos\gamma$;
$\text{tang}\,\eta = \frac{\text{tang}\,\delta}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \text{tang}\,\theta$.

11) Allgemein kommen also hie folgende Winkel vor:

I) Win-

I) Winkel der Seiten der Grundfläche $= \alpha$.

II) Neigung der Kante $= \delta$.

III) Die Winkel des Durchschnittes der Ebene, die durch sie auf die Grundfläche senkrecht steht, mit der Grundfläche Seiten, $= \frac{1}{2}\alpha \pm \varkappa$.

IIII) Winkel der Kante mit der Grundfläche Seiten; β; γ;

V) Neigungen der Seitenflächen gegen die Grundfläche, η; θ.

12) Bisher nahm man I; II; III; an, und bestimmte daraus das Uebrige. So könnte man auch andre Dinge annehmen, und daraus vorhin angenommene bestimmen.

Man nehme I; IIII; an.

13) Das ist der Winkel den Grundfläche, und die Winkel der Kante mit der Grundfläche Seiten, oder α, β, γ;

Da sucht man $\varkappa$; δ, η; θ.

14) Aus 6; 7; hat man den gegebenen Quotienten $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{\cos(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\varkappa)}{\cos(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\varkappa)}$

Wenn man da die Cosinus rechter Hand nach Trig. 19 S. ausdruckt, und mit $\cos\frac{1}{2}\alpha . \cos\frac{1}{2}\varkappa$ dividirt, so bekömmt man rechter Hand

$$\frac{1 - \tan\frac{1}{2}\alpha . \tan\frac{1}{2}\varkappa}{1 + \tan\frac{1}{2}\alpha . \tan\frac{1}{2}\varkappa}$$

Folg=

Folglich $1 - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \left(1 + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)$. tang $\frac{1}{2}\alpha$. tang $\frac{1}{2}\varkappa$.

Und $\frac{\cos\gamma - \cos\beta}{\cos\gamma + \cos\beta}$. cot $\frac{1}{2}\alpha$ = tang $\frac{1}{2}\varkappa$.

Nun sey in Trig. 19 S. 11 Z.

dorten	$\alpha-\beta$	$\alpha+\beta$	α		β
hie	γ	β	$\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$		$\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$

So kömmt

tang $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$. tang $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$. cot $\frac{1}{2}\alpha$ = tang $\frac{1}{2}\varkappa$.

15) Hat man $\varkappa$; so hat man auch (6)

$$\cos\delta = \frac{\cos\beta}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varkappa)} = \frac{\cos\gamma}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\varkappa)}$$

auch (8) η; θ.

16) Noch könnte man suchen, was die beyden Seitenflächen MAB, und MAC für einen Winkel mit einander machen. Er heisse = ε.

17) Hie wird die Beantwortung sich am kürzesten und bequemsten aus der sphärischen Trigonometrie geben.

Man stelle sich auf AB, AC, AM, gleiche Stücke genommen vor, AB*; AC*; AM*; so giebt sich auf einer Kugel, deren Mittelpunct A wäre, ein Kugeldreyeck, dessen Seiten sind M* B* = β; M* C* = γ; B* C* = α.

18) Also sphär. Trig. 8 Satz für den Winkel M* = ε.

cos

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\alpha - \cos\beta.\cos\gamma}{\sin\beta.\sin\gamma} \text{ und}$$

$$(\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon)^2 = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma).\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)}{\sin\beta.\sin\gamma}.$$

19) So giebt sich die Neigung der Seitenflächen gegen einander, aus den drey Winkeln, der Grundfläche, und jeder Seitenfläche; welches auch in (13) die gegebenen Grössen waren.

20) Diese Winkel lassen sich bey einem vorgegebenen Prisma am leichtesten messen. Nimmt man von den (11) genannten Winkeln andre an, so muß man im Kugeldreyecke (17) den gesuchten Winkel aus andern gegebenen Grössen berechnen.

21) In diesem Kugeldreyecke sind

M*	B*	C*	B* C*	M* B*	M* C*
ε	η	θ	α	β	γ

Man findet also nach den in 18 gebrauchten Regeln jeden Winkel des Kugeldreyecks aus den drey Seiten.

22) Auch ist $\sin\gamma : \sin\alpha = \sin\eta : \sin\varepsilon$
$\sin\alpha : \sin\beta = \sin\varepsilon : \sin\theta$
$\sin\gamma : \sin\beta = \sin\eta : \sin\theta$

23) Weil MS : MQ = 1 : $\sin\theta$
MQ : AM = $\sin\delta$: 1
AM : MS = 1 : $\sin\gamma$
So ist $\sin\delta = \sin\gamma.\sin\theta = \sin\beta.\sin\eta$ (22).

24) Die körperliche Ecke A, wird von drey ebenen Winkeln α, β, γ, eingeschlossen. Die Linie welche den beyden letzten gemein ist AM, hat gegen die Ebene des ersten eine Neigung, deren Sinus ein Product ist aus dem Sinus des dritten Winkels in den Sinus der Neigung der Ebene dieses Winkels gegen die Ebene des ersten; Auch ein Product aus dem Sinus des zweyten Winkels, in die Neigung der Ebene dieses Winkels gegen die Ebene des dritten.

25) Ich nahm bisher an BAC sey in der Grundfläche eines Prisma, AM in seiner Kante.

26) Nun könnte man eben so gut annehmen BAM sey in der Grundfläche, und AC eine Kante welche mit den Linien in der Grundfläche die Winkel CAB, CAM macht.

27) Imgleichen CAM sey in der Grundfläche und die Kante AB mache die Winkel BAM, BAC;

28) Der Sinus der Neigung jeder Kante gegen ihre Grundfläche, ist ein Product aus dem Sinus eines der beyden Winkel in die Neigung der Ebene dieses Winkels gegen die Grundfläche (29).

29) Also, die Linie CA hat gegen die Ebene MAB eine Neigung, deren Sinus
$= \sin \alpha . \sin \eta = \sin \gamma . \sin \varepsilon$.

30) Die Linie BA, hat gegen die Ebene MAC, eine Neigung, deren Sinus
$= \sin \beta . \sin \varepsilon = \sin \alpha . \sin \vartheta$.

31)

31) Dieses leicht zu übersehen nehme man nur die Figur des Kugeldreyecks zu Hülfe. So für (29) ist $\alpha = B^* AC^*$ und die Ebene dieses Winkels hat gegen die Ebene der Grundfläche $M^* AB^*$ die Neigung $B^* = \eta$ daher ist in (29) der Sinus $=$ sin α. sin η; So in den andern Fällen; Zwey gleiche Producte aus Sinussen geben sich allemahl aus (22).

32) Allgemein also ist hie gewiesen worden: Wenn ein körperlicher Winkel in drey ebene eingeschlossen ist, was hat jeder Schenkel der einem Paare dieser ebenen Winkel gemein ist, für eine Neigung gegen die Ebene des dritten Winkels?

Und vorhin (21) Was hat die Ebene jedes der ebenen Winkel für Neigungen gegen die Ebenen der andern beyden?

Vergleichung zwischen $\varkappa$; α; η; θ;

33) Aus (8) ist

$$\text{tang } \eta. \left\{ \begin{matrix} \sin \frac{1}{2}\alpha. \cos. \frac{1}{2}\varkappa \\ + \cos \frac{1}{2}\alpha. \sin \frac{1}{2}\varkappa \end{matrix} \right\} =$$

$$\text{tang } \theta. \left\{ \begin{matrix} \sin \frac{1}{2}\alpha. \cos \frac{1}{2}\varkappa \\ - \cos \frac{1}{2}\alpha. \sin \frac{1}{2}\varkappa \end{matrix} \right\}$$

Folglich

$$\text{tang } \eta. (1 + \cot \tfrac{1}{2}\alpha. \text{ tang } \tfrac{1}{2}\varkappa) =$$
$$\text{tang } \theta. (1 - \cot \tfrac{1}{2}\alpha. \text{ tang } \tfrac{1}{2}\varkappa)$$
$$(\text{tang } \theta + \text{tang } \eta). \cot \tfrac{1}{2}\alpha. \text{ tang } \tfrac{1}{2}\varkappa =$$
$$\text{tang } \theta - \text{tang } \eta \quad \text{Daraus}$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}\varkappa = \frac{\sin(\theta-\eta)}{\sin(\theta+\eta)} \cdot \text{tang } \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Vergleichung zwischen α, β; γ; η; θ;

34) Aus (14) (33) ist

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) \cdot \text{tang } \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{\sin(\theta-\eta)}{\sin(\theta+\eta)} \cdot (\text{tang } \tfrac{1}{2}\alpha)^2.$$

35) Ist also der Winkel der Grundfläche gegeben, so lassen sich von den vier Winkeln, den beyden der Seitenflächen, und den beyden Neigungen der Seitenflächen gegen die Grundfläche, nicht mehr als drey annehmen, der vierte ist dadurch bestimmt.

36) Wenn $\beta=\gamma$ ist auch $\theta=\eta$ und umgekehrt.

Alsdann ist $\varkappa=o$ (6; 7; 8) und findet (10) statt.

3.

Analytische Formeln für Parallelepipeden.

1) Ein Parallelepiped habe die

Grundflächen { Untere FGKH
Obere DCTR

Linke

Linke Fläche FHRD
Rechte Fläche GKTC
Vorderfläche HKTR
Hinterfläche FGCD.

2) Für die Grundfläche
FH = DR = f;
HK = RT = g
FHK = α

3) Die Kanten HR = KT = GC = CD = h.
Ihre Neigung gegen die Grundfläche = δ.

4) Der Seitenflächen Winkel
FHR = α; RHK = β;

5) Der Seitenfläche FHRD Winkel mit der Grundfläche = η.

Der Seitenfläche RHKT Winkel mit der Grundfläche = θ;

Der linken und vordern Seitenfläche Neigung gegen einander = ε.

6) Die Benennungen der Winkel sind völlig wie in der I. Abh.

Es ist nähmlich

dorten	AB	AC	AM	h
hie	HF	HK	HR	h

7) So sind auch $\frac{1}{2}(\alpha \pm \varkappa)$ die Winkel welche der Durchschnitt einer Ebene die durch HR senkrecht auf der Grundfläche steht, und der Ebene der Grundfläche mit HF; HK macht.

8) Man braucht so die Formeln für die Winkel aus erwähnter Abh. und bringt nur die Linien mit in die Rechnung.

9) Heisst des Parallelepipeds Höhe = k; Innhalt = P; So ist $k = h. \sin \delta$ und $P = f. g. h. \sin \alpha. \sin \delta$.

10) Ueber einer gegebenen Grundfläche ein Parallelepiped zu machen das eine gegebene Höhe hat.

Da sind gegeben f; g; α; k; und f. g. k. $\sin \alpha$ ist der Innhalt der P heissen mag.

Also bleiben noch viel Grössen unbestimmt, für die man mehr Bedingungen annehmen kann.

11) Es sey die Neigung der Vorder- und Hinterfläche gegen die Grundfläche gegeben, also θ (4).

12) In (1. Abh. 8) ist $\tan \theta. \sin \frac{1}{2}(\alpha - \varkappa) = \tan \delta$ da sind $\varkappa$ und δ unbekannt.

13) Nun nehme man noch als gegeben an, $h = \frac{k}{\sin \delta}$, so hat man $\sin \delta = \frac{k}{h}$.

14) Also in (12) $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varkappa) = \tan \delta. \cot \theta$.

15) Daraus $\varkappa$; und nun (I. Abh. 7)
$\cos \gamma = \cos \delta. \cos \frac{1}{2}(\alpha - \varkappa)$.

16) Imgleichen (I. Abh. 6)
$\cos \beta = \cos \delta. \cos \frac{1}{2}(\alpha + \varkappa)$.

17) Und (das 8)
$$\tan \eta = \frac{\tan \delta}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \varkappa)}.$$

18)

18) Also, wenn ein erstes Parallelepiped, gegeben ist, und man will ein zweytes Parallelepiped machen, das eben die Grundfläche, gleiche Höhe, und zwo Seitenflächen in einerley Ebenen mit dem ersten hat (Geom. 53 S. 16 Zus.);

So nehme man (13) des zweyten Kante, h; nach Gefallen an.

Das ist soviel als nach Geom. a. O. in der Ebene DCGF, nach Gefallen durch F, G, Parallelen zu ziehen, bis sie der verlängerten DC begegnen.

Die Länge einer solchen Parallele, in der Figur der Geom. FB = GA ist des zweyten Parallelepipeds Kante = h.

Und dadurch ist Alles übrige diesem zweyten Parallelepiped gehörige bestimmt, wie in der Geometrie die Construction lehrt, und hie (13 ... 17) die Rechnung.

19) In 12; bis 17; sind die Winkel $\varkappa$; δ, β; γ; η; und die Linie h; nicht einerley mit den Grössen die man im ersten Pp. so nennen würde, denn die Formeln der I. Abh. sind auf dieses zweyte (18) angewandt worden, und nicht auf das erste.

20) Damit man also ohne Verwirrung diese Buchstaben bey beyden brauchen kann, lasse man sie, wenn sonst keine Bezeichnung bey ihnen steht, für das erste gelten, und bezeichne sie mit einem Sterne wenn sie für das

zweyte gelten sollen, die für beyde einerley Grössen bedeuten bleiben unbezeichnet.

21) So ist $\sin \delta^* = \frac{k}{h^*}$ (13)

$\sin (\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\varkappa^*) = \cot \theta . \tan \delta^*$ (14)

$\cos \gamma^* = \cos \delta^* . \cos (\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\varkappa^*)$ (15)

$\cos \beta^* = \cos \delta^* . \cos (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\varkappa^*)$ (16)

$\tan \eta^* . \sin (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\varkappa^*) = \tan \delta^*$ (17).

Berechnung eines vorgegebenen Parallelepipeds, aus dem was man an ihm ausen an einer körperlichen Ecke bequem messen kann.

22) Das sind um H; die Winkel FHK $= \alpha$; FHR $= \beta$; KHR $= \gamma$; die Linien FH $= f$; HK $= g$, HR $= h$;

So findet man $\varkappa$ (I. Abh. 14) daraus δ (das. 15) Ferner k (hie 9) und endlich P, (hie 9).

Körperliche Winkel wie sie von ebenen eingeschlossen werden.

23) Um H u. C von α; β; γ;

K u. D	$180^\circ - \alpha$; β; $180^\circ - \gamma$
G u. R	α; $180^\circ - \beta$; $180 - \gamma$
F u. T	$180 - \alpha$; $180^\circ - \beta$; γ;

24) Die Puncte um welche einerley ebene Winkel sind, stehn im Körper einander nach Diagonalen des Körpers gegen über.

25)

25) Wenn um H und C die drey erstgenannten Winkel selbst sind so finden sich um jede der übrigen Ecken, einer von ihnen, und der andern beyden Ergänzungen zu zween rechten.

Innhalt des Parallelepipeds durch Grundfläche, Kante, Winkel und Neigung jeder Seitenfläche.

26) Man setze in (10) statt k, seinen Werth durch h ausgedruckt, (13) und statt sin δ, seine Werthe aus (I. Abh. 23); So kömmt

$$P = f.g.h.\ \sin\alpha.\ \sin\beta.\ \sin\eta$$
$$= f.g.h.\ \sin\alpha.\ \sin\gamma.\ \sin\theta.$$

27) In diesen beyden Producten, kommen als Factoren vor, die beyden Seiten der Grundfläche, und die Kante, der Sinus des Winkels der Grundfläche, der Sinus des Winkels jeder Seitenfläche, und der Sinus der Neigung dieser Seitenfläche gegen die Grundfläche.

28) Die Ausdrückungen verdienen ihrer Regelmässigkeit wegen bemerkt zu werden. Man kann bekanntermassen im Pp. jedes Paar Seitenflächen als Grundflächen ansehen, welches auch in diesen Formeln liegt. Nach der Bemerkung I. Abh. 21. kann man die Neigung jedes Paares der Ebenen welche das Pp. begränzen, aus den Winkeln in diesen Ebenen finden.

Exempel.

29) Hauij sur la Structure des cryſtaux de Feldſpath Mem. de l'Ac. des Sc. 1784; p. 273 ſagt p. 274: Die forme primitive, ſimple et degagée de toutes faces accidentelles beym Feldſpath, ſey ein Parallelepiped, deſſen Seitenflächen Winkel von 120 und 60 Gr. machen, die Grundflächen zwo entgegengeſetzten Seitenfl. ſenkrecht ſind, und mit den beyden andern Winkel von 68 Gr. 30 Min. 30 S. und 111 Gr. 29 M. 30 S. machen.

Das verſpricht er zu erweiſen, Selbſt habe er dieſe Geſtalt noch nicht geſehen.

Eine forme ſecondaire ſey: Zwey Rechtecke als Grundflächen, zwey andre gegeneinander über als Seitenflächen, 2 Parallelogrammen, deren Winkel 115 Gr. 0 M. 8 S. und 64 Gr. 59 M. 52 S.

Wie der Hr. Abbe' Winkel bis auf Secunden bey Steinen miſſt, weiß ich nicht. Man hat genug zu thun ſo was bey Sternen zu leiſten. Es wird mir wohl erlaubt ſeyn, ſtatt der Secunden das Nächſte zu nehmen.

30) Ich ſetze alſo $\alpha = 90$ Gr. $= \beta$; $\gamma =$ 65 Gr.

Folglich, für (I Abh. 14); $\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 77$ Gr. 30 M.; $\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 12$ Gr. 30 M. daß halbe Summe und halber Unterſchied zuſammen 90 Gr. betragen.

Da

Da auch $\frac{1}{2}\alpha = 45$ Gr. so ist am ang. Orte tang $\frac{1}{2}\varkappa = 1$; $\frac{1}{2}(\alpha - \varkappa) = 0$; Oder: ein Loth von der Kante auf die Grundfläche gelassen, fällt in die Ebene des Winkels γ.

Das zeigt auch die Figur; Wenn FHK; FHR rechte Winkel sind, so ist FH; folglich die Grundfläche, senkrecht auf die Ebene RHKT; also liegt in dieser Ebene jedes Loth von einem Puncte in ihr auf der Grundfläche.

So ist $\frac{1}{2}(\alpha + \varkappa) = 90$ Gr. und in I. Abh. 15 kömmt für cos δ; der erste Ausdruck $= \frac{0}{0}$; der andre $=$ cos γ. Das wiederspricht sich nicht, weil bekanntermassen der erste Ausdruck keinen bestimmten Werth angiebt, also jeden Werth gestattet den andre Gründe angeben. (Man s. meine Fortsetzung der Rechenkunst, XI Cap. 2 Aufg. 183 §. 422 Seite). Hie also ist $\delta = 65$ Gr.

Daraus kömmt (I. Abh. 8) $\eta = 65$ Grad und $\theta = 90$ Grad.

Nähmlich der Seitenfläche FHRD Neigung gegen die Grundfläche, ist so groß als der Kante HR Neigung gegen die Grundfläche, weil Kante und HK, auf FH, der Ebene FHRD Durchschnitte mit der Grundfläche senkrecht stehen, und mit einander einen Winkel $= \gamma$ machen, da jedes Loth von der Kante auf die Grundfläche, auf HK fällt.

Nun

Nun suche man noch aus I. Abh. 18; der Seitenflächen DRHF; TRHK, gegenseitige Neigung $= \varepsilon$;

Der Cosinus findet sich $= o$; das Quadrat des Sinus der Hälfte $= \frac{\sin(90° - \frac{1}{2}\gamma) . \sin \frac{1}{2}\gamma}{\sin \gamma}$

$= \frac{1}{2}$; also der Sinus der Hälfte $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ $=$ sin 45 Grad. Diese gegenseitige Neigung ist also $=$ 90 Gr.

Exempel.

31) Der sogenannte isländische Krystall, eigentlich disdiaclastische Spat, (meine Anfangsgr. d. Opt. 14 §. VII) ist in sechs gleiche Rhomben eingeschlossen. Des Rhombus spitziger Winkel ist $=$ 78 Gr. 8 M. um eine körperliche Ecke, sind die drey stumpfen, jeder $= 101° 52'$ also (23) um jede der andern Ecken des Körpers zween spitzige, und ein stumpfer.

So beschreibt Hugen den Körper Traité de la Lumiére (Leid. 1690) ch. V. §. 5.

Erasmus Bartholinus Experimenta crystalli Islandici disdiaclastici Hafn. 1670. Exp. 6. p. 10; giebt die Winkel des Rhombus 101 Gr. und 79 Gr.

An einem Stücke das ich besitze, fand ich die beyden Seiten des Rhombus 1,24 par. Zoll, die

die kürzere Diagonale = 1,57; daraus folgen die Winkel 78 Gr. 36 M. und 101 Gr. 24 M.

Bey einem Stücke aus der Naturalien-sammlung der Universität, fand ich den spitzigen Winkel 78 Gr. 34 M.; bey einem andern 78 Gr. 44 M. Begreiflich lassen sich nur kurze Linien auf des Winkels Schenkeln messen, und so bestätigen diese Erfahrungen einander selbst durch ihre Unterschiede.

32) Ich will nach Hugens Angaben rechnen.

FHK = α = 101° 52′;
davon die Hälfte = 50 56
$\beta = \gamma$ = 78 8

10 + log cos β =	19,3124951	
log cos $\frac{1}{2}\alpha$ =	9,7994951	
log cos δ =	9,5113000	(I. Abh. 14. 10)
10 + log tang δ =	20,4626179	
log sin $\frac{1}{2}\alpha$ =	9,8900929	
log tang θ =	10,5725250	
10 + log sin $\frac{1}{2}\alpha$ =	19,8900929	
log sin β =	9,9906180	
log sin $\frac{1}{2}\varepsilon$ =	9,8994749	(I. Abh. 18)

Also der Kante welche zween spitzigen Winkeln gemein ist, Neigung gegen die Ebene des stumpfen Winkels, δ = 70° 59′; Neigung der Ebene jedes spitzigen Winkels gegen die Ebene

Ebene des stumpfen, $\theta = 75^\circ\ 11'$; Neigung der Ebenen beyder spitzigen Winkel gegen einander, $\varepsilon = 2.(52^\circ\ 30') = 105^\circ$.

Heisst die Seite der Grundfläche, wie die Kante $= f$; So ist des Rhombus Fläche $= f^2 . \sin\alpha$; und des Körpers Innhalt $= f^3 . \sin\alpha . \sin\delta$

$\log \sin\alpha = 0{,}9906180 - 1$
$\log \sin\delta = 0{,}9756265 - 1$

Summe $= 0{,}9662445 - 1$

giebt des Körpers Innhalt $= 0{,}92522$ des Würfels von der Seite des Rhombus.

Wollte man nach (26) rechnen so bemerke man, daß $\sin\alpha = \sin\gamma$; also

$2.\log \sin\alpha = 0{,}9812360 - 1$
$\log \sin\theta = 0{,}9853138 - 1$

Summe $= 0{,}9665498 - 1$

gehört zu 0,92586;

Der Unterschied kömmt begreiflich daher daß die Winkel δ und θ nur in Minuten sind gesucht und gebraucht worden.

Pyramidennetze.

4.

Ueber eine Entwerfung des Netzes einer senkrechten Pyramide; besonders zur Anwendung auf den senkrechten Kegel.

1) Diese Pyramide hat zur Grundfläche eine ordentliche Figur; ihre Spitze befindet sich lothrecht über der Grundfläche Mittelpuncte. (Geom. 60 S. X).

2) Ihre Grundfläche habe n Seiten, so ist derselben Centriwinkel $\frac{360^\circ}{n} = \varkappa$, der Polygonwinkel $= \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$. Der Grundfläche Seite sey $= a$, Halbmesser $= r$; also $\frac{a}{2.r} = \sin \frac{1}{2} \varkappa$.

3) Ihre Höhe sey $= h$; Seite oder Kante $= \sqrt{(r^2 + h^2)} = k$, jede ihrer Seitenflächen habe an der Spitze den Winkel θ; so ist $\sin \frac{1}{2} \theta = \frac{a}{2k}$.

4) Al-

4) Also ist θ kleiner als $\varkappa$; folglich jeder Winkel an der Grundlinie der Seitenfläche grösser als der halbe Polygonwinkel.

Der Pyramide körperlicher Winkel an der Grundfläche ist in drey ebene eingeschlossen, der Grundfläche Polygonwinkel und zweene ebene an den Grundlinien der Seitenflächen, von diesen dreyen sind zweene zusammen allemahl grösser als der dritte (Euklid XI. 20).

5) Es sey NABC ein Stück der Grundfläche, N der Mittelpunct, also enthält das Stück zwey an einander liegende Dreyecke, wie in dergleichen die Grundfläche aus dem Mittelpuncte getheilet wird.

6) Das zugehörige Stück des Netzes sey $MA^* B^* C^*$;

Nähmlich $A^* B^*$ auf AB und $B^* C^*$ auf BC gelegt, sollen $A^* B^* M$; $B^* C^* M$; die beyden Seitenflächen der Pyramide werden, M die Spitze.

7) Also $A^* MB^* = B^* MC^* = \theta$ (4) und von M gehen nach A^*; B^*; C^*; gleiche Linien $= k$.

8) Das Stück des Netzes ist also ein Stück einer ebenen Figur die lauter gleiche Seiten hätte, jede der Seite der Grundfläche gleich, und an einem Puncte M, gleiche Winkel den gleichen Seiten, gegen über.

9) Giebt θ mit einer ganzen Zahl multiplicirt, 360 Gr.; so ist das Stück des Netzes

ein

ein Theil einer ordentlichen Figur, sonst aber nicht.

10) Allemahl aber ist θ kleiner als $\varkappa$; also $2.\theta = A^*MC^*$ kleiner als $2.\varkappa = ANC$.

11) Wie also das dargestellte Stück des Netzes, dem dargestellten Stücke die Grundfläche gehört, so zeichnet man das Netz das der ganzen Grundfläche gehört, auf die Art, daß man n Dreyecke jedes dem ersten A^*MB^* gleich, immer das folgende an das Vorhergehende ansetzt.

12) So ist das Netz eine ebene Figur, durch zwo Linien aus M, und n andre Linien begränzt. Jene beyden machen den Winkel $= n.\theta$, diese sind jede $= a$; Grundlinien lauter gleichschenklichter Dreyecke.

13) Einem Theile der Grundfläche gehört eben so, ein Theil des Netzes.

14) Exempel. Die Grundfläche sey ein Zehneck, $\varkappa = 36°$, $a = 2.r.\sin 18°$; $h = r.\sqrt{3}$ also $k = 2.r$; $\sin\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}.\sin 18°$ giebt $\frac{1}{2}\theta = 8° 53' 17'',8$ also $\theta = 17$ Gr. 47 M. $35'', 6$.

Der Winkel den die beyden Gränzen des Netzes an M machen ist also $= 10.\theta = 177$ Gr. 45 M. 56 S.

15) Man könnte $\sin(\frac{1}{2}\varkappa - \frac{1}{2}\theta)$ suchen da würden die Tafeln diesen kleinen Unterschied beyder Winkel schärfer geben, als sich $\frac{1}{2}\theta$ selbst berechnen lässt. Es wäre aber wohl nicht der Mühe werth.

16) Wenn man die Dreyecke des Netzes, immer das folgende an das vorhergehende setzt, so können sich Fehler anhäufen. Dieses zu vermeiden, ziehe man aus M zwo Linien jede $= k$ im Winkel $= n.\theta$ und theile diesen Winkel in n Theile.

17) Wenn die Grundfläche, eine geradelinichte Figur ist, braucht man wohl lieber eine andre Verzeichnung des Netzes; Man zeichnet die Grundfläche, und in ihrer Ebene, an jede ihrer Seiten, aufen, das Seitendreyeck.

18) Dieses Verfahren findet aber nicht statt, wenn die Grundfläche unzählich viel unendlich kleine Seiten hat, das ist: ein Kreis wird.

19) Aber das vorhin gelehrte führt auf das Netz des senkrechten Kegels.

20) Allemahl ist $\sin \frac{1}{2}\varkappa : \sin \frac{1}{2}\theta = k : r$ (2; 3) Ist nun a klein gegen r, also noch kleiner gegen k; so sind beyde Winkel klein, und verhalten sich beynahe wie ihre Sinus, das ist beynahe wie $k : r$.

Das zeigt sich schon im Exempel (14) wo $k : r = 2 : 1$ und $\frac{1}{2}\theta$ beynah die Hälfte von $\frac{1}{2}\varkappa$ ist.

21) Ohne weiter zu untersuchen wie sich diese Winkel immer mehr und mehr der Verhältniß $k : r$ nähern, und was daraus folgt, kann man so schliessen.

22)

22) Wenn die Seiten der Grundfläche immer abnehmen, so nähert sich die Figur ABCN einem Ausschnitte eines Kreises, dessen Halbmesser = r; Winkel am Mittelpuncte = 2. $\varkappa$;

Und die Figur A* B* C* M, einem Ausschnitte eines Kreises dessen Halbmesser = k; Winkel am Mittelpuncte = 2. θ.

23) Verwandelt sich also die Grundfläche in einen Kreis, so verwandelt sich das Netz, in einen Ausschnitt eines Kreises, dessen Halbmesser = k, der Bogen der ihn begränzt so lang ist als der Umfang der Grundfläche, und folglich, der Winkel an M, zum Maasse diesen Bogen mit dem Halbmesser k beschrieben hat.

24) Ist also 1 : π die Verhältniß des Durchmessers zum Umfange, so ist der Grundfläche Umfang = 2. r. π, und eben so lang ist der Kreisbogen, mit dem Halbmesser k beschrieben, der das Netz begränzt.

25) So ist der Winkel des Netzes an M: $360^\circ = \frac{2.\,r.\,\pi}{k} : \frac{2.\,r.\,\pi}{r}$ (Geom. 44 S. 11. Zus.) = r : k.

Nennt man den Winkel = η und $360^\circ = 2.\pi$ wie aus Geom. 44 S. 7. Zus. folgt, so ist $\eta = \frac{2.\,\pi.\,r}{k}$.

26) Und so für das Netz von $\frac{1}{m}$ des Kegels, $\frac{1}{m}.\ \eta = \frac{2.\pi.r}{m.k}$.

27) Nimmt man in (26) die Verhältniß r:k an, oder, die jene bestimmt r:h, so hat man den Winkel des Netzes; Und umgekehrt jene Verhältniß, wenn man den Winkel annimmt.

28) Die Seite des Kegels mache mit der Ebene der Grundfläche den Winkel $= \varepsilon$; so ist $\sin \varepsilon = \frac{h}{k}$; $\text{tang}\, \varepsilon = \frac{h}{r}$; $\cos \varepsilon = \frac{r}{k}$.

29) Ist ANR ein Ausschnitt der Grundfläche des Kegels davon der Winkel ANR $= \gamma$ also die Sehne AR $= 2.\ r.\ \sin \frac{1}{2}\gamma$; so machen die beyden Seiten des Kegels den Winkel AMR dessen Hälfte $\frac{r.\ \sin \frac{1}{2}\gamma}{k}$ zum Sinus hat.

30) Wenn das Netz in den Kegel gebogen wird, so legen sich auf die genannten beyden Seiten, des Netzes Linien MA*; MR* so daß nach (25; 26) $2.\pi : \gamma = \eta :$ A* MR* Dieser Winkel ist also $= \frac{r}{k}.\ \gamma$ Seine beyden Schenkel legen sich auf dem Kegel in einen Winkel

kel noch einmahl so groß als der dessen Sinus $= \frac{r. \sin \frac{1}{2}\gamma}{k}$.

31) Exempel. $\eta = 300°$; also (27)

$\frac{r}{k} = \frac{300}{360} = \frac{5}{6}$

Daher $\varepsilon = 33° 34' —$ (30)

$h = r. \frac{\sqrt{11}}{5} = r. 0{,}6633249.$

32) Exempel. $r = h$; also $\varepsilon = 45$;

$k = r. \sec \varepsilon = r. \sqrt{2}$; $\frac{r}{k} = \cos 45°$

also $\eta = 360°. \cos 45°$

$= 254°, 558448$

$= 254° 33' 30'', 4128$

$360° - \eta = 105\ 26\ 29, 5872.$

33) Das erste Exempel sind die Zimmermannischen und einige andre Sternkegel (Astron. 119. VIII) Das Netz ist am leichtesten zu zeichnen, weil man von einem mit k beschriebenen Kreise nur 60 Grad abzuschneiden braucht, da passt es um einen Kegel dessen Grundfläche $\frac{5}{6}$ k zum Halbmesser hat. Daß die Höhe zu Seite und Umfange eine Irrationalverhältniß hat, macht keine Schwürigkeit, weil man sie so nimmt wie sie sich aus jenen beyden giebt.

34) Aber dieser Kegel ist nicht recht geschickt die Hälfte einer Kugel zu vertreten; Nähme man den Umfang der Grundfläche für den Aequator der Kugel, so ist die Spitze tief unter dem Pole.

35) Bey dem Kegel des zweyten Exempels (34) fällt Grundfläche in den Aequator, Spitze in den Pol. So sind Funks neuere Sternkegel gemacht (Astron. a. a. O. IX).
Man hat nach dem von ihm auch dergleichen Erdkegel erhalten.

36) Die Vorschriften zu Verzeichnung des Netzes des gleichseitigen Kegels finden sich in einer Abhandlung die ich der hiesigen Soc. der Wiss. vorgelegt habe: Fasciarum quibus globi obducuntur, ex conis sphaerae circumscriptis constructio, Commentationes Soc. R. Sc. T. I. ad 1778; Lemm. III. p. 12.

Netz des abgekürzten Kegels.

37) Um M beschreibe man mit dem Halbmesser AH = g einen Bogen dem A* R* O ähnlich, so legt sich, die Figur welche zwischen beyden Bogen enthalten ist, dem genannten, und dem ihm ähnlichen HIK; um den abgekürzten Kegel dem zum ganzen, an der Spitze ein Kegel fehlt der g zur Seite hat.

Hievon

Hievon lässt sich folgender geographischer Gebrauch machen.

38) PAG sey ein Quadrant durch dessen Umdrehung um den Halbmesser PF eine Halbkugel entstehe, deren Mittelpunct F ist, Pol P; Halbmesser des Aequators FG.

39) Die Linie welche den Quadranten in A berührt, begegne der Axe in M; AN sey senkrecht auf die Axe; Wenn sich dann die ganze Figur um die Axe dreht, so beschreibt MA die krumme Fläche eines gleichseitigen Kegels, dessen Seite mit der Grundfläche den Winkel NAM macht. Dieser Winkel hieß in (30) $= \varepsilon$; Er ist die Ergänzung des Winkels NAF oder AFG, der geographischen Breite oder Polhöhe des Punctes $= \theta$ (Geogr. 30; 32) die also $= 90° - \varepsilon$ ist.

40) Nennt man der Kugel Halbmesser FA $= 1$; und die geographische Breite AFG $= 90° - \varepsilon = \beta$; ihr $=$ AMN; daher AN $= r = \cos\beta$; MN $= h = \cos\beta . \cot\beta$; AM $= k = \cos\beta . \operatorname{cosec}\beta = \cot\beta$.

Dieses Kegels krumme Fläche berührt also die Kugelfläche in der Breite β.

41) Stellt man sich auf den Quadranten von A gegen den Pol zu einen sehr kleinen Bogen, den man ohne merklichen Fehler als gerade ansehen kann, daß er also in die Tangent AM fällt, so beschreibt dieser Bogen eine schmale

Kugelzone die mit der Fläche des abgekürzten Kegels (39) zusammenfällt (wie Geom. 64 Satz) Es wäre da g = h — dem kleinen Bogen.

42) Weil man einen Bogen von 1 auch wohl 2; 3; Graden, wenn man nicht die grösste Genauigkeit sucht, ohne grossen Fehler für eine gerade Linie annimmt, so hat dieses folgenden Gebrauch zu Landcharten.

43) Es sey ζ ein solcher kleiner Bogen. Zwischen den Parallelen deren geographische Breiten β, und β + ζ sind, ist auf der Erdfläche eine schmale Zone enthalten (Geogr. 42; III) Zeichnet man nun das Netz eines abgekürzten Kegels dessen unterster Halbmesser = cos β; der obere = cos (β + ζ) so lässt sich dieses Netz ohne merklichen Fehler um die Zone legen. Man kann also in das Netz die Oerter sehr beynahe in den Lagen gegen einander verzeichnen, wie sie wirklich in der Zone auf der Erdfläche liegen.

44) Diese Verzeichnung von Landcharten lehrt Hr. Hofr Mayer (Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie vom M. Joh. Tob. Mayer III Theil Gött. 1783) §. 351. und erinnert daß seines Vaters kritische Charte von Deutschland so verzeichnet ist. Sie erstreckt sich von 45 ... 55 Grad der Breite, Hr. M. zeigt wie fern die hieraus entstehende Unrichtigkeit noch erträglich ist. Wie

weit

weit sich eine solche Charte in die Länge erstreckt, darauf kömmt nichts an; sie könnte deßwegen die ganze Zone rings herum enthalten, die Unrichtigkeit besteht nur darinn daß auf der Breite ein Bogen für gerade angenommen wird.

45) Zu diesem Verfahren gehört des Hr. von Segner von Funk ins Werk gesetzter Vorschlag (Geogr. 66). Es ist aber freylich die Freyheit Bogen für gerade Linien anzunehmen, etwas sehr weit getrieben, und die Erdkugel in einen eckichten Körper verwandelt worden.

46) Zu der Verzeichnung (40..43) müsste man h als Halbmesser des Kreises wissen, welcher sich in den Umfang von des Kegels Grundfläche beugen soll. Wie man das berechnet, will ich der Kürze wegen sogleich an Mayers kritischer Charte zeigen.

47) Am Rande fand ich 2° des Meridians = 3,2 pariser Zoll. Die Charte gehört also an eine Kugel wo 1 Grad = 1,6 pariser Zoll beträgt, Ihr Halbmesser, vorhin (42) = 1 gesetzt heisse = a; Er findet sich wenn man 1,6 pariser Zoll mit der Grösse eines Grades in Decimaltheilen ausgedruckt dividirt (Geom. 44 S. 7. Zus. IIII).

Nun (42) $k = a. \cot \beta$; $r = a. \cos \beta$.

Und (27) $\eta = 2. \pi. \sin \beta$; So groß ist der Winkel am Mittelpuncte des mit k beschriebenen Kreises, dessen Maaß in diesem

Kreise sich um den ganzen Parallel legt, dessen Breite $= \beta$ ist.

Soll nur $\frac{1}{m}$ dieses Paralleles bedeckt werden, so braucht man nur $\frac{1}{m} \cdot \eta$ (28).

48) Ich will $\beta = 50°$ setzen. Der westlichste Meridian geht durch Paris der östlichste hat 37 Grad Länge. Da nun die pariser Länge $= 20$ Grad gesetzt wird (Geogr. 31) so ist

$$\frac{1}{m} = \frac{20}{360} = \frac{1}{18}.$$

49) (Geom. 44 § 7. Z.)

log 1,6	$= 0{,}2041200$
log $1°$	$= 0{,}2418774 - 2$
log a	$= 1{,}9622426$
log cot β	$= 0{,}9238135 - 1$
log k	$= 1{,}8862561$
Ferner log 360	$= 2{,}5563025$
log sin β	$= 0{,}8842540 - 1$
log η	$= 2{,}4405565$
log 18	$= 1{,}2552725$
	$1{,}1852840$

Also Halbmesser der Kugel a $= 91{,}673$ par. Zoll
des Netzes k $= 76{,}957$
Winkel des ganzen Netzes $\eta = 275{,}77$ Grad
$= 275$ Gr. 43,2 M.
.... des Theiles $= 153{,}321$ Grad
$= 153$ G. 19,26 M.

50) Die-

50) Dieser Parallel geht ein wenig über Paris, wie aus der pariser Breite 48 Gr. 50 M. 11 S. folgt. Der unterste Parallel hat 45 Grad Breite also ist für ihn h = a. Des obersten Breite ist 55 Grad.

51) Man sieht daß die k ziemlich groß werden, welches auch Hr. H. Mayer erinnert, und die gewöhnlichen Mittel erwähnt Bogen grosser Kreise zu ziehen. Ich lehre dergleichen Mittel in gegenwärtiger Abhandlungen I. Sammlung 43. Abh.

52) Ein Bogen von 10 Graden, ist = 0,1745329 des Halbmessers (Geom. 44 S. 7. Zus.) seine Tangente = 0,1763270; Wer sie beyde für gleichgültig annimt, (44; 45;) setzt also 0,0017941 des Halbmessers unbeträchtlich.

Wie viel das beym Halbmesser (48) beträgt, lässt sich so berechnen

$$\log a = 1{,}9622426$$
$$\log 0{,}0017941 = 0{,}2538466 - 3$$
$$0{,}2160892 - 1$$

also 0,16447 pariser Zoll.

Das ist etwas über den zehnten Theil eines Grades (46) oder über 1,5 geographische Meilen. Das giebt obenhin einen Begriff, was diese Charte ihrer Natur nach für Unrichtigkeit hat. Hr. H. Mayers Untersuchungen darüber, sehe man a. a. O.

Zur

Zur Geometrie der Mäntel.

53) Das Netz des abgekürzten Kegels (37) giebt einen Mantel, wo KIH um den Hals liegt. Also, einen Mantel von gegebener Länge HA* aus Tuche dessen Breite gegeben ist zu machen, berechne man die Fläche des abgekürzten Kegels, und daraus wieviel Ellen Tuch man dazu nöthig hat. Das auf analytische Formeln zu bringen überlasse ich dem Copisten von Eulers Algebra, der seines Herkommens ein Schneider war, und beym Abschreiben die Algebra lernte. Allerdings aber ist es gut dem Schneider nachrechnen zu können.

54) Ein Exempel dieser Art steht in Schwenters Erquikstunden, anderm Theil 17. Aufgabe: Cajus liesse ihm gern einen Mantel Glockenweit von einem Zeug $1\frac{1}{2}$ Elle breit bey Sempronio machen, sollte 2 Ellen lang seyn, und fodert Sempronius des Zeugs $8\frac{1}{2}$ Elle, ist die Frage ob es zuviel oder zu wenig?

Schw. nennt Glockenweit, der Mantel solle ausgebreitet einen Kreis machen. Dessen Durchmesser wäre also 4 Ellen, und die Fläche $= 4 \cdot \pi = 12{,}56636$ Quadratellen.

Der Verfertiger fodert 8,5 Ellen, 1,5 Elle breit $= 12{,}75$ Quadratellen, also 0,18362 Quadratellen zuviel welches bey Zeuge $\frac{3}{2}$ Ellen breit 0,12575 Ellen in der Länge, also etwa $\frac{1}{8}$ Elle beträgt. Auserdem behält er wie Schw. erin-

erinnert das Stück das am Halse ausgeschnitten wird, wenn er solches nicht zum Kragen anwendet.

5.

Wenn von einer ungleichseitigen Pyramide, Grundfläche und Höhe gegeben sind, nebst dem Puncte in der Ebene der Grundfläche, auf den die Höhe fällt, das Netz der Pyramide zu bestimmen.

1) Die Grundfläche ist eine gegebene Figur, In ihrer Ebene ist ein Punct N, auf den das Loth von der Spitze M fällt, der also gegeben ist.

2) Es seyen AB = a; BC = b, ABC = β.

3) Weil nun N gegeben ist, nehme man AN = p, BN = q, und ANB = $\varkappa$ gegeben an, bekanntlich ist von den vier Dingen a, p, q, $\varkappa$, jedes aus den übrigen dreyen bestimmt.

4) Also $\sin ABN = \frac{p \cdot \sin \varkappa}{a}$.

5) Daher hat man NBC = β — ABN.

6) Und im Dreyecke NBC, Alles aus q; b; NBC.

7) Die Figur der Grundfläche, wird in Dreyecke zerlegt, deren Spitzen in N, die Grundlinien Seiten der Figur sind.

8) Sei-

8) Seiten und Winkel der Figur sind gegeben.

9) Nimmt man also, nur für ein Dreyeck die aus N gehenden Schenkel an, so sind sie für alle Dreyecke gegeben (6).

Für die Seitendreyecke der Pyramide.

10) Der Pyramide Spitze sey M, die Höhe MN = h.

11) Ein Seitendreyeck sey AMB; so ist

$AM = \sqrt{(h^2 + p^2)}$

$= h$ mit der Secante des Winkels multiplicirt dessen Tangente $= \frac{p}{h}$

$BM = \sqrt{(h^2 + q^2)}$

$= h.\ \text{sec}\ \mathfrak{W}\ \text{tang}\ \frac{q}{h}$.

12) So berechnet man für jedes Seitendreyeck die Schenkel die an der Spitze zusammenstossen, kann also jedes an die Seite der Figur zeichnen die seine Grundlinie ist.

13) Will man lieber zeichnen, so trägt man auf eines rechten Winkels Schenkel NM, auf den andern, von der Spitze aus,
NA, NB, NC .... da geben sich
MA, MB, MC ....

14) Exempel. Die Grundfläche sey ein Rhombus, dessen Seite = a; spitziger Winkel $ABC = \beta$; so ist

CA =

$CA = 2.a.\sin\frac{1}{2}\beta$
$NAB = NAD = 90° + \frac{1}{2}\beta$
$NB = ND = \sqrt{(p^2 + a^2 + 2.p.a.\sin\frac{1}{2}\beta)} = q$
$MB = MD = \sqrt{(h^2 + q^2)}$
$MA = \sqrt{(h^2 + p^2)}$; $MC = \sqrt{(h^2 + (p + AC)^2)}$.

Wenn $a = 1$; $p = 3$; $h = 2$; $\beta = 60°$;
So ist $CA = 1$; $q = \sqrt{13} = MA$
$MB = MD = \sqrt{17}$; $MC = \sqrt{20}$.

15) So wird man an jede Seite der Grundfläche, aufen das Dreyeck zeichnen das die zugehörige Seitenfläche giebt, und dann diese Dreyecke mit ihren Spitzen zusammenlegen.

16) Wollte man hie das Verfahren voriger Abhandlung 5 u. f. §. nachahmen, so bedeute nun in den Figuren zu N. 4; NABC ein Stück der Grundfläche, MA* B* C* das zugehörige des Netzes, aber die Seiten der Grundfläche, imgleichen die Linien von N nach den Winkelspitzen der Grundfl., und die Winkel zwischen diesen Linien sind nicht alle von einer Grösse. Auch so sind im Netze die Linien von M nach A*; B*; C*; nicht von einer Grösse auch nicht die Winkel zwischen diesen Linien an M; Freylich könnte man jede dieser Linien und jeden dieser Winkel einzeln berechnen. Das würde aber diese Art das Netz zu verzeichnen bey der ungleichseitigen Pyramide noch viel weniger empfehlen als bey der senkrechten, und schon bey dieser halte ich sie nicht eben für die bequemste, sondern

dern trug sie nur vor, von ihr auf das Netz des gleichseitigen Kegels überzugehen.

17) Hie aber kann man von ihr gar nicht auf das Netz des ungleichseitigen Kegels übergehn, weil hie im Netze die Linien von M nach den Puncten A* B* u. s. w. ungleich sind, wenn auch der Pyramide Grundfläche eine reguläre Figur ist. Also, wenn sich diese Figur in einen Kreis verwandelt, so wird doch M nicht der Mittelpunct eines Kreisbogens.

18) Das Netz eines ungleichseitigen Kegels läßt sich also nach dem Verfahren wie Pyramidennetze gezeichnet werden, nicht zeichnen. Etwas das ihm nahe käme ließe sich darstellen, wenn man nach (16) das Netz einer ungleichseitigen Pyramide verfertigte deren Grundfläche ein ordentliches Vieleck von sehr viel Seiten wäre.

20) Natürlich wäre wohl zu denken; Statt des Kreisbogens im Netze des gleichseitigen Kegels komme hier etwa eine andre krumme Linie, so lang als der Umfang der Grundfläche.

Und so könnte man wenigstens von der höhern Geometrie, mit Analysis des Unendlichen verbunden, Kenntniß dieser krummen Linie erwarten. Aber, auch dadurch hat man bisher noch nichts gefunden, das zur Ausübung brauchbar wäre.

21) Meine Abhandlung de superficie et rete coni scaleni findet sich in Comment.

R. S.

R. S. Sc. Gotting. Vol. IX. ad ann. 1787. 1788; Ich habe da Prop. V. p. 55. gewiesen, wie man eine ebne Figur zeichnen könne, die dem Netze nahe kömmt; Ich theile zu dieser Absicht der Grundfläche Umfang in kleine Theile, und komme der Wahrheit desto näher je mehr ich solche Theile mache.

Die Mühe alle Theilchen des Netzes einzeln zu berechnen und an einander zu setzen, lässt sich auch zuweilen abkürzen. Aber doch ist das Alles keine geometrische Verzeichnung, und in der Ausübung sehr beschwerlich.

27) Das Netz einer Pyramide, und eines gleichseitigen Kegels, stellen eigentlich die Seitenflächen dieser Körper in eine Ebene ausgebreitet vor. Kann man dergleichen Netz zeichnen und ausrechnen, so giebt das die Grösse der Seitenfläche. Folglich ist die Berechnung der Seitenfläche des schiefen Kegels, eben so wenig in unsrer Gewalt, als die Verzeichnung des Netzes. In erwähnter Abhandlung habe ich Varignons, Leibnizens, Eulers Bemühungen dieserwegen erzählt. Man soll eine gewisse krumme Linie verzeichnen; aus ihrer Länge findet sich die Kegelfläche, begreiflich als ein Rechteck dessen Grundlinie so lang wäre als die krumme Linie, und die Höhe gegeben.

28) Die krumme Linie wird so verzeichnet daß man einzelne Puncte von ihr bestimmt, soviel man will. Da nun jeder dieser Puncte

von seinem nächsten absteht, so hat man doch nie die krumme Linie vollkommen, sondern man müsste sie zwischen den Puncten etwa durch Züge aus freyer Hand ergänzen. Und nun wie findet sich ihre Länge? Etwa sie auf ein Brett zu verzeichnen das nach ihr begränzt würde und nun einen Faden um die Gränze gelegt? Oder sie in kleine Stückchen getheilt die man für gerade annimmt, einzeln misst und zusammen addirt? Eine allgemeine Vorschrift diese Länge zu berechnen, auch nur eine Näherung für solche Berechnung, wird nicht gegeben. Es schien mir daher als sey in dieser Sache für die Ausübung so gut als gar nichts gethan; Und in der Theorie, nichts weiter gewiesen, als daß durch Grundfläche und Lage der Spitze, des Kegels Fläche bestimmt ist, welches man wissen kann ohne die Wörter: Differentiiren und Integriren gehört zu haben.

29) In meiner Abhandlung lehre ich, blos durch analytische Trigonometrie, Gränzen angeben zwischen welche die Fläche fällt, auch diese Gränzen, wenn man die Mühe des Rechnens nicht scheut, verengern.

Es verdient doch wohl einige Bemerkung, daß der schiefe Kegel, ein Körper den die Elementargeometrie betrachtet, eine krumme Fläche hat, deren Berechnung selbst der höhern Analysis zu schwer fällt.

Beweis der Ausrechnung der Pyramiden, durch Gränzen.

6.

Arithmetischer Lehnsatz: Summe nach einander folgender Quadrate ganzer Zahlen, von 1 an.

I) 1; 2; 3; ... m sind die ersten m ganzen Zahlen;
Ihrer Quadrate Summe
$1 + 4 + 9 \ldots + m^2 = Q$.

Man sucht einen Ausdruck für Q, so, daß dieser Ausdruck allemahl die Summe der Quadrate der ersten m ganze Zahlen angiebt, m mag seyn was für eine ganze Zahl es will.

II) Dergleichen Ausdruck zu suchen, kann schon das veranlassen, daß man für die Summe der ersten m ganzen Zahlen selbst $\frac{(m+1).m}{1.2}$ hat, welches diese Summe angiebt was auch m für eine ganze Zahl ist. (Fortf. der Rechenk. VIII. Cap. 1. Abschn.)

III) Und da in diesem Ausdrucke der Summe der Zahlen oder für alle Zahlen, das Quadrat der grösten Zahl, und dieser Zahl erste Potenz vorkömmt, jede mit einem Bruche mul-

tiplicirt, so kann man leicht auf die Gedanken gerathen, die Summe der Quadrate, werde einen Ausdruck erfodern, welcher den Würfel und niedrigere Potenzen der grösten Zahl enthält, jede etwa mit einer Zahl multiplicirt, die ungeändert bleibt, wie sich auch die grösste Zahl ändert.

IV) Das wird sich dadurch bestätigen, weil die Summe der ersten $(m+1)$ Quadrate, um das Quadrat von $m+1$ grösser ist als die Summe der ersten m Quadrate; also Q einen Ausdruck haben muß der um das Quadrat von m und um niedrigere Potenzen dieser Zahl wächst, wenn m sich in $m+1$ verändert.

V) Diese Betrachtungen veranlassen also folgendes wenigstens zum Versuche anzunehmen.

VI) Man setze $Q = \alpha . m^3 + \beta . m^2 + \gamma . m$ wo die griechischen Buchstaben, Zahlen bedeuten, die ungeändert bleiben wie sich auch m ändert.

VII) Daß man in den Ausdruck für Q keinen Theil setzt der m nicht enthielte, folgt daraus, weil ein solcher Theil seine Grösse behielte, auch wenn $m = 0$ wäre; Aber da wäre gewiß auch $Q = 0$; also muß dieser Theil für sich $= 0$ seyn.

IX) Aus I mit VI giebt der Ausdruck für Q die Summe der ersten $m+1$ Quadrate, wenn man m in $m+1$ verändert.

X) Al-

X) Also

$$Q + (m+1)^2 = \alpha.(m+1)^3 + \beta.(m+1)^2 + \gamma.(m+1)$$

XI) Das ist

$$Q + m^2 + 2.m + 1 = \alpha.m^3 + \left.\begin{matrix}3.\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}.m^2 + \left.\begin{matrix}3.\alpha\\ 2.\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\}.m + \begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}$$

XII) Linker Hand Q weggenommen, rechter Hand den Werth von Q (VI) kömmt

$$m^2 + 2.m + 1 = 3.\alpha.m^2 + \left.\begin{matrix}3.\alpha\\ 2.\beta\end{matrix}\right\}.m + \begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}$$

XIII) Diese Gleichung soll allemahl wahr bleiben was auch m ist. Also muß rechter Hand in jede Potenz von m, eben das multiplicirt seyn, was linker Hand, in eben die Potenz multiplicirt ist. Das heist

$$1 = 3\alpha$$
$$2 = 3\alpha + 2.\beta$$
$$1 = \alpha + \beta + \gamma.$$

XIV) Folglich $\alpha = \frac{1}{3}$
Und $2 = 1 + 2.\beta$ also $\beta = \frac{1}{2}$
Und $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \gamma$; also $\gamma = \frac{1}{6}$

XV) Daher (VI) $Q = \frac{1}{3}.m^3 + \frac{1}{2}.m^2 + \frac{1}{6}m$
$= m.(\frac{1}{3}.m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{6}) = \frac{1}{6}.m.(2.m^2 + 3.m + 1)$
welches die Summe der ersten m Quadrate giebt.

Exempel $m=5$; Also $Q=\frac{125}{3}+\frac{25}{2}+\frac{5}{6}=41+\frac{2}{3}+12+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=55=1+4+9+16+25$.

XVI) Folgerung: Ein Sechstheil einer ganzen Zahl, die Hälfte ihres Quadrats und das Drittheil ihres Würfels machen zusammen allemahl eine ganze Zahl, nähmlich die Summe der Quadrate aller ganzen Zahlen, von 1 bis mit auf das Quadrat dieser Zahl.

Mehr arithmetische Lehren von ganzen Zahlen die sich hieraus herleiten liessen gehören nicht hieher.

XVII) In Zeughäusern pflegt man Kugeln von gleichem Caliber unter andern auch so aufzuhäufen, daß man zu unterst eine Schicht Kugeln legt die ein Quadrat bilden, darauf eine Schicht, deren Menge eine Quadratzahl ist, von einer Zahl um 1 kleiner als die darunter liegende Quadratzahl, u. s. w. höher hinauf, nehmen die Zahlen deren Quadrat jede Schicht enthält immer um 1 ab. So entstehen Kugelpyramiden da sich die Menge der Kugeln nach gegenwärtigem Satze berechnen läßt. Enthielte die unterste Schicht 25 Kugeln, so wären 55 in der ganzen Pyramide.

Ich habe von diesen und anderen Aufhäufungen der Kugeln, im alten Hamburgischen Magazine gehandelt; 26 Band (1763) 4 St. 1. Art.

XVIII)

XVIII) Man kann auch Formeln für Summen höherer Potenzen finden. Dergleichen giebt Euler; Institutiones Calculi differentialis Pars I. cap. 2; §. 62.

XIX) Enthielte die untere Kugelschicht (XVII) statt einer Quadratzahl, irgend eine Polygonalzahl, und so die höheren Schichten, kleinere Polygonalzahlen von eben der Art, so wäre die Menge in einem Kugelhaufen, eine Pyramidalzahl, dergleichen Gerbert statt der geometrischen Pyramide berechnet hat. Man s. dieser geom. Abh. 1. Samml. 1. Abh. 8 Seite.

XX) In der Reihe der Quadrate (I) multiplicire man das letzte Glied, mit der Zahl der Glieder, so kömmt der Würfel dieser Zahl.

Dividirt man mit diesem Würfel die Summe der Reihe der Quadrate, so kömmt (XV)

$$\frac{Q}{m^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2.m} + \frac{1}{6.m^2}.$$

XXI) Dieser Quotient übertrifft den Bruch $\frac{1}{3}$ immer um was geringers, je grösser m ist. Darf man die Zahl der Quadrate so groß nehmen als man will, so läßt sich der Quotient so nah an $\frac{1}{3}$ bringen als man will.

XXII) Des Quotienten Ueberschuß über $\frac{1}{3}$, ist $\frac{1}{2.m} \cdot \left(1 + \frac{1}{3m}\right)$, gewiß kleiner als $\frac{1}{m}$ weil dieses Ueberschusses zweyter Factor kleiner ist als 2.

XXIII)

XXIII) Seßte jemand: der Quotient könne nicht kleiner werden als $\frac{1}{3} + f$, So müsste f ein Bruch seyn, kleiner als $\frac{2}{3}$; weil für die kleinste wirkliche Zahl die sich annehmen läßt, $m = 1$; der Ueberschuß (XXII) $= \frac{2}{3}$ ist.

Wie hätte man also m anzunehmen daß der Ueberschuß kleiner als f würde?

Man nehme für m, die ganze Zahl, die zunächst grösser ist als $\frac{1}{f}$; So ist $\frac{1}{m}$ kleiner als f; und (XXV) der Ueberschuß auch kleiner.

$\frac{1}{f}$ könnte ein uneigentlicher Bruch seyn, daher nenne ich die nächst grössere ganze Zahl.

XXIV) Exempel. Es seßte jemand der Quotient sollte nicht kleiner werden als $\frac{1}{3} + 0{,}000007$; der Decimalbruch ist $= f$;

Nun ist $\frac{1000000}{7} = 14285 + \frac{5}{7}$

Man nehme also $m = 14286$

So ist $\frac{1}{m}$ kleiner als 0,000007.

Und die Summe der ersten 14286 Quadrate, mit dem Würfel von ihrer Zahl dividirt, giebt etwas, das $\frac{1}{3}$ noch nicht um 0,000007 übertrifft.

XXV)

XXV) Weil in (XXII); $1 + \frac{3}{m}$ viel kleiner ist als 2 wenn m nur eine mässige Grösse hat, so thäte vielleicht der Absicht einen Ueberschuß kleiner als f zu geben, schon eine Zahl genug die nicht eben grösser wäre als $\frac{1}{f}$ sondern selbst etwas kleiner. Es wäre aber unnütz hierüber weiter zu rechnen, da das Verfahren (XXIII) allemahl sicher eine Zahl giebt, für welche der Ueberschuß kleiner ist als jedes gegebene f, und das reicht zum Beweise des Satzes zu:

XXVI) Man kann allemahl m so groß annehmen, daß $\frac{Q}{m^3}$ weniger von $\frac{1}{3}$ unterschieden ist als jede noch so geringe Grösse, die sich aber doch angeben lässt.

XXVII) Oder: $\frac{1}{3}$ ist eine Gränze welcher sich der Quotient, immer nähert, je grösser man die Zahl m nimmt, sie nie erreicht, so lange m eine Zahl ist die sich angeben lässt, aber ihr allemahl näher kann gebracht werden als jeder Unterschied den man zwischen $\frac{1}{3}$ und ihm angeben könnte.

XXVIII) Darf man also m so groß annehmen als man will, so lässt sich für $\frac{Q}{m^3}$ kein andrer Werth angeben als $\frac{1}{3}$.

Denn, dieser Quotient ist nicht kleiner als $\frac{1}{3}$; weil für jedes m bey ihm noch etwas zu $\frac{1}{3}$ kömmt. Das aber was dazu kömmt, kann weniger als jede gegebene Grösse betragen, wenn man nur m groß genug nehmen darf.

XXIX) Sagt man nun: Eine Grösse die über alle gegebene Grössen wachsen kann, so daß sich keine Gränze setzen lässt, die sie nicht überschreiten könnte, werde unendlich; so muß man auch sagen:

Wenn m unendlich wird, so wird $\frac{Q}{m^3} = \frac{1}{3}$.

XXX) Si proponatur series infinita quantitatum in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium (sive juxta seriem numerorum quadraticorum) continue crescentium, a puncto seu o inchoatarum, erit illa ad seriem totidem maxime aequalium vt 1 ad 3 ist Prop. XXI. in Wallisii Arithmetica infinitorum. (Io. Wallisii Op. Mathematica Oxon. 1699. fol. T. I. p. 374).

Wallis zeigt in seinem vorhergehenden XX Satze daß der Unterschied von $\frac{1}{3}$ immer kleiner werde je grösser die Zahl wird, vt tandem quolibet assignabili minor evadat, (vt patet) si in infinitum procedatur, prorsus evaniturus est.

Das quolibet assignabili minor, habe ich in XXIII; nach Art der Alten zu beweisen gesucht.

Die

Die Formel für die Summe der Quadrate beweist W. gar nicht, und den Ausdruck des Quotienten (XX) nur durch eine Induction die nichts weniger als überzeugend ist.

Summe der ersten m — 1 Quadrate.

XXXI) Sie ist begreiflich $= Q - m^2 = \frac{1}{3} m^3 - \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{6} . m$ (XV).

XXXII) Diese Summe mit m^3 dividirt giebt $\frac{1}{3} - \frac{1}{2.m} + \frac{1}{6.m^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2.m} . \left(1 - \frac{1}{3.m}\right)$.

XXXIII) Dieser Quotient ist kleiner als $\frac{1}{3}$; aber um etwas das noch nicht $\frac{1}{2.m}$ beträgt, weil $\left(1 - \frac{1}{3.m}\right)$ ein eigentlicher Bruch ist.

XXIV) Darf man also m so groß annehmen als man will, so lässt sich zwischen $\frac{1}{3}$ und diesem Quotienten kein Unterschied fest setzen, der nicht vermindert werden könnte.

Wer sagte der Quotient könne nicht grösser werden als $\frac{1}{3} - g$; der müsste für g einen Bruch annehmen kleiner als $\frac{1}{3}$.

Nun setze man statt 2m die ganze Zahl die zunächst grösser ist $\frac{1}{g}$; so ist $\frac{1}{2.m}$ kleiner

als

als g, und $\frac{1}{2.m} \cdot \left(1 - \frac{1}{3.m}\right)$ von $\frac{1}{3}$ abziehen, heisst: was kleiners als g von $\frac{1}{3}$ abziehen, also mehr übrig lassen, als wenn man g; abzieht. Da ist also der Quotient $= \frac{1}{3} - \frac{1}{2.m} \cdot \left(1 - \frac{1}{3.m}\right)$ grösser als $\frac{1}{3} - g$.

Setzte jemand, der Quotient sollte nicht grösser werden als $\frac{1}{3} - 0{,}0000007$; so dürfte man nur 2m grösser nehmen als $14285 + \frac{5}{7}$ (XXIV) also etwa $m = 7143$, so ist $\frac{1}{2.m} = \frac{1}{14286}$ offenbahr kleiner als 0,000007 also der Quotient grösser als $\frac{1}{3} - 0{,}000007$.

XXXV) Wiederum also lässt sich sagen: Wenn m unendlich wird, so wird auch dieser Quotient $= \frac{1}{3}$.

7.

Ausrechnung der Pyramiden, durch Gränzen.

1) In Geom. 62. Satz ist die Ausrechnung der Pyramiden daraus hergeleitet worden, daß jede dreyeckichte Pyramide ein Drittheil eines

nes Prisma ist das mit ihr eine Grundfläche und Höhe hat.

2) Zum Uebergange von der Pyramide die ein Dreyeck zur Grundfläche hat, auf die deren Grundflächen Vielecke sind, ist der dasige 61 Satz nöthig, daß Pyramiden gleichen Innhalt haben, wenn sie einerley Grundflächen, und gleiche Höhen haben.

3) In diesem Beweise wird schon angenommen, jede Pyramide lasse sich durch Querschnitte in Stücken theilen die man als Prismen ansehen darf.

4) Wenn man dieses nicht annehmen will, so sind viel mehr Lehren nöthig auf die Ausrechnung der Pyramiden zu kommen. Man findet diese Lehren in Euklids XII. B. 3 . . . 12 S. Als Probe nur der dritte: Jede Pyramide die zur Grundfläche ein Dreyeck hat, besteht aus zwo Pyramiden die unter sich und der ganzen ähnlich sind, und dreyeckichte Grundflächen haben, nebst zwey gleichen Prismen, die zusammen mehr als die Hälfte der ganzen Pyramide betragen. Man wird mir leicht glauben, daß dazu eine Figur gehört die blos aus der Zeichnung verstanden zu werden ziemlich viel Anstrengung erfodert. Die Anwendung dieser Lehren auf die Ausrechnung der Pyramiden zeigt Clavius Geom. Pract. Lib. VII. Prop. 14.

5) Es scheint mir also nicht unnütz, ohne die Weitläuftigkeit, und Geduld, die Euklids

Lehren

Lehren erfodern, und ohne die Voraussetzung (3) bey welcher dem Anfänger immer noch der Verdacht eines Fehlers bleibt den man nicht in Betrachtung zöge, folgendes darzuthun:

6) Der Innhalt einer Pyramide, ist weder grösser noch kleiner, als ein Drittheil des Products aus ihrer Höhe in ihre Grundfläche.

7) Ich nehme dabey an daß jeder Querschnitt einer Pyramide, ihrer Grundfläche ähnlich ist (Geom. 60. Satz) und sich zur Grundfläche verhält, wie das Quadrat des Lothes von der Spitze auf seine Ebne, zum Quadrate der Höhe (das. 2. Zus.) Ferner, jedes Pyramidenstück zwischen zween Querschnitten, ist kleiner als ein Prisma dessen Grundfläche der untere Querschnitt wäre, die Höhe der Lothrechte Abstand beyder Querschnitte, grösser als ein Prisma, das bey eben der Höhe den obern Querschnitt zur Grundfläche hätte.

Endlich, muß mir noch gestattet werden die Höhe der Pyramide in soviel gleiche Theile zu theilen als ich will.

8) Nun sey AC die Höhe der Pyramide $= h$; in m gleiche Theile getheilt, jeder $= e$; daß $h = m.e$. Ein solcher Theil sey PQ; und $AQ = n.e$; $AP = (n-1).e$.

9) So sind die Querschnitte

durch $Q = \frac{B.n^2.e^2}{h^2}$, durch $P = \frac{B.(n-1)^2.e^2}{h^2}$

und

und das Pyramidenstück zwischen beyden, ist grösser als $\frac{B.(n-1)^2.e^3}{h^2}$

kleiner als $\frac{B.n^2.e^3}{h^2}$.

10) Jedes solche Pyramidenstück ist eine abgekürzte Pyramide (Geom. 62 S. 4. Zus.) auser das oberste bey der Spitze, für welches $n=1$; das ist eine Pyramide, allerdings grösser als 0 und kleiner als $\frac{B.e^3}{h^2}$.

11) Weil nun $e=\frac{h}{m}$ (8) So ist (9) das Pyramidenstück

grösser als B. h. $\frac{(n-1)^2}{m^3}$

kleiner als B. h. $\frac{n^2}{m^3}$.

12) In jeder dieser Ausdrückungen, ist der Factor $\frac{B.h}{m^3}$ unveränderlich, im andern Factor kann n von 1 bis m wachsen.

13) So ist für das zweyte Pyramidenstück $n=2$; es ist grösser als 1 kleiner als 4, mit dem unveränderlichen Factor multiplicirt.

Für das dritte $n=3$; es ist grösser als 4; kleiner als 9 mit dem unveränderl. F. m. Und so weiter.

14)

14) Man schreibe also die beyden Reihen untereinander

0	1	4	9 . .	$(n-1)^2$	. . .	$(m-1)^2$
1	4	9	16 . .	n^2	. . . .	m^2

Ist nun ein Pyramidenstück zwischen dem n—1sten und nten Querschnitte enthalten, so giebt der unveränderliche Factor mit dem Gliede der obern Reihe multiplicirt, das Prisma dessen Grundfläche der obere Querschnitt ist, also zu wenig, und mit dem darunter stehenden Gliede der untern Reihe multiplicirt, das Prisma dessen Grundfläche der untere Querschnitt ist, also zuviel.

15) Die Summe der Producte in die Glieder der obern Reihe ist also kleiner als die Pyramide, und die Summe der Producte in die Glieder der untern Reihe grösser.

16) Das ist: Ein Product aus dem unveränderlichen Factor in die Summe der obern Reihe ist kleiner, und ein Product aus ihm in die Summe der untern ist grösser als die Pyramide.

17) Nach 5. Abh. XV; ist die Summe der obern Reihe, =

$\frac{1}{3}.(m-1)^3 + \frac{1}{2}.(m-1)^2 + \frac{1}{6}.(m-1)$

Das ist

$= \left.\begin{matrix} \frac{1}{3}m^3 - 1 \\ + \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}. m^2 \left\{\begin{matrix} + 1 \\ - 1 \\ + \frac{1}{6} \end{matrix}\right. . m \begin{matrix} - \frac{1}{3} \\ + \frac{1}{2} \\ - \frac{1}{6} \end{matrix}$

$= m^3.$

$= m^3 . \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2.m} + \frac{1}{6.m^2} \right)$.

18) Folglich die Pyramide

grösser als B. h. $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2.m} + \frac{1}{6.m^2} \right)$.

19) Die Summe der untern Reihe ist $= \frac{1}{3} m^3 + \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{6} m$

$= m^3 . \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2.m} + \frac{1}{6.m^2} \right)$;

20) Folglich die Pyramide kleiner als B. h. $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2.m} + \frac{1}{6.m^2} \right)$.

21) Diese Sätze sind wahr, die Zahl der Theile in welche man die Höhe getheilt hat, mag so groß oder so klein seyn als man will.

22) Man nenne die Pyramide $= P$; so ist (18; 20)

$\frac{P}{B.h}$ grösser als $\frac{1}{3} - \frac{1}{2.m} + \frac{1}{6.m^2}$

kleiner als $\frac{1}{3} + \frac{1}{2.m} + \frac{1}{6.m^2}$

Das ist aus 5 Abh. XX; XXI.

$\frac{P}{B.h}$ grösser als $\frac{Q - m^2}{m^3}$

kleiner als $\frac{Q}{m^3}$.

23) Wenn man m so groß als man will nehmen darf, lässt sich jeder dieser Quotienten, näher an $\frac{1}{3}$ bringen als daß sich der Unterschied zwischen ihm und $\frac{1}{3}$ angeben liesse; (5. Abh. XXVIII; XXXV.)

24) Nun lässt sich ohne Zweifel die Höhe der Pyramide in soviel Theile getheilt denken als man will. Also lässt sich jeder der beyden Quotienten zwischen welche $\frac{P}{B.h}$ fällt, so nahe an $\frac{1}{3}$ bringen als man will.

25) Das ist: Man kann für $\frac{P}{B.h}$ nichts anders setzen als $\frac{1}{3}$, wenn es zwischen die beyden Gränzen fallen soll, deren jede um keine Grösse die sich angeben liesse von $\frac{1}{3}$ unterschieden ist.

26) Folglich ist $P = \frac{1}{3}.B.h.$ Die Pyramide ein Drittheil des Prisma das mit ihr eine Grundfläche und Höhe hat.

27) In der Rechnung findet sich nur die Grösse der Grundfläche B; ihre Gestalt hat darein keinen Einfluß; Also, mehr Grundflächen, von unterschiedner Gestalt, jede von der Grösse B; geben bey gleichen Höhen, gleiche Pyramiden.

8.

Einer Pyramide Höhe und Innhalt aus Abmessungen an ihrer Grundfläche zu berechnen.

1) Man messe (Fig. N. 4) in der Grundfläche die Seiten AB = a; BC = b; und ihren Winkel ABC = β.

2) Man kann auch an ein Paar Ecken der Pyramide an der Grundfläche, die Winkel messen, welche da die Seiten der Grundfläche mit der Kante der Pyramide machen; als: ABM = ϱ; CBM = σ; BCM = τ.

3) Aus jedem Paare solcher Winkel (2) die an einer Seite der Grundfläche liegen, und der Seite, findet man, in einem Dreyecke das mit der Pyramide eine Spitze, und die genannte Seite zur Grundlinie hat, die beyden Seiten, das ist die Kanten der Pyramide.

4) So, im Dreyecke BMC;

$$BM = \frac{b.\ \sin\tau}{\sin(\sigma+\tau)}; \quad CM = \frac{b.\ \sin\sigma}{\sin(\sigma+\tau)}.$$

5) Wenn das Loth MN von der Spitze der Pyramide, die Ebene der Grundfläche in N trifft, so sey ABN = $\frac{1}{2}.(\beta+\lambda)$; CBN = $\frac{1}{2}.(\beta-\lambda)$ der Kante BM, Neigung = μ.

6) Man vergleiche gegenwärtige Figur mit der N. 1. so ist, Formele der I. Abh. in gegenwärtige Zeichen zu übersetzen

I. Abh.	α	$\varkappa$	β	γ	δ
hie	β	λ	ϱ	σ	μ

7) Und, der I. Abh. 14; giebt hie

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}.(\varrho+\sigma).\text{tang}\tfrac{1}{2}.(\varrho-\sigma).\cot\tfrac{1}{2}\beta=\text{tang}\tfrac{1}{2}\lambda$$

8) So findet man ABN; CBN (5).

9) Ferner aus I. Abh. (15)

$$\text{cof}\,\mu=\frac{\text{cof}\,\varrho}{\text{cof}\tfrac{1}{2}.(\beta+\lambda)}=\frac{\text{cof}\,\sigma}{\text{cof}\tfrac{1}{2}.(\beta-\lambda)}$$

10) Folglich hat man (4)

$$\text{MN}=\text{h}=\frac{\text{b. sin}\,\tau}{\text{sin}\,(\sigma+\tau)}.\,\text{sin}\,\mu$$

11) So ist die Höhe der Pyramide aus Messungen gefunden die man nur an der Grundfläche angestellt hat (1; 2; 3).

12) Misst man mehr Seiten der Grundfläche, und jeden Winkel den ein Paar solche Seiten machen, imgleichen die Winkel welche der Pyramide Kanten mit der Grundfläche Seiten machen, so berechnet man daraus mehr Kanten der Pyramide wie in (4) und mehr Winkel, wie $\lambda.\mu$; wie in (7; 9) und daraus mehrmahl die Höhe (10) welche allemahl einerley herauskommen muß. Das giebt Proben, ob man richtig gearbeitet hat.

13) Kann man um die Grundfläche rings herum messen, so ist durch Arbeiten wie (1) ihre Grösse bekannt; Folglich aus dieser Grösse, und der Höhe der Pyramide Innhalt.

14) Wer einer aufrecht stehenden Pyramide Höhe zu wissen verlangte, würde wohl zuerst darauf fallen sie etwa zu messen wie man die Höhe eines Thurmes misst. Hie erhellt, daß eine Seite der Grundfläche statt einer Standlinie dient, (4) und die Kanten einer Pyramide, sind wohl nie so lang, daß diese Standlinie gegen sie zu kurz wäre. Auch könnte wohl eine Pyramide auf der Erde liegen, da man freylich die Kanten messen könnte, aber doch aus ihnen die Höhe berechnen müsste.

Es ist sonderbar, daß die Schriftsteller, welche Pyramiden und Prismen auszurechnen lehren, nicht daran denken: woher man die Höhe weiß? die sie dabey als bekannt annehmen. Es ist wahr, daß diese Höhe durch den Körper gegeben ist, aber, ob gleich von einem Puncte auf eine Ebene ein Loth zu fällen, so gut eine geometrische Aufgabe ist, als von einem Puncte auf eine Linie ein Perpendikel zu fällen, so ist doch für die Ausübung, die letzte Aufgabe ganz was anders als die erste, wenn derselben Auflösung nach Geom. 46 S. 3. Zus. betrachtet wird. In Clauii Geometria practica, finde ich gar nicht angegeben wie die Höhe eines Prisma oder einer Pyramide bekannt wird.

Tacquet Geom. Pract. L. III. Lemma ante Probl. 2. lehrt eine mechanische Art: wenn der Körper steht lasse man von oben ein Loth herab, wenn er liegt strecke man ein Seil von einem Ende zum andern aus, senkrecht auf parallele Ebenen durch beyde Enden.

Das ist ohngefähr so als: Eines Kreises Fläche zu finden, lege man einen Faden um den Umfang, strecke ihn gerade aus, und multiplicire ihn mit dem halben Halbmesser.

Und, wenn nun der Körper stückweise da liegt, wie so viel ich mich erinnere, einer, oder mehr Obelisken, zu Rom?

15) Beym Prisma II. Abh. lässt sich aus eben solchen Messungen an der Grundfläche die Kante nicht bestimmen, folglich auch nicht der Innhalt.

Die senkrechte Pyramide.

16) Wenn die Grundfläche eine ordentliche Figur von n Seiten ist, so ist $\beta = \frac{n-2}{n}$. 180 Gr. Die Seiten $a = b$ . . sind gleich, und man berechnet bekannter massen der Grundfläche Innhalt.

Die Winkel $\varrho = \sigma = \tau$ . . sind unter sich gleich, ihre Grösse aber richtet sich nach der Höhe der Pyramide; Dieser Winkel einen also muß man messen.

Ferner

Ferner ist jede Kante (4) $= \frac{b}{2 \cdot \cos \tau}$;

Und $\lambda = o$ (7)

Also $\mu = \frac{\cos \sigma}{\cos \frac{1}{2} \beta}$ (9) und $h = \frac{b \cdot \sin \mu}{2 \cdot \cos \tau}$ (10).

9.

Pontons.

1) Ein Körper sey in folgende Ebenen eingeschlossen.

I) Ein Rechteck ABCD

II) Ein ihm in Absicht auf Ebene und Seiten paralleles EFGH;

Nähmlich es sind parallel

der	EF / AB	GH / CD	FG / BC	EH / AD

III) Eine Seitenfläche ABFE

IV) Eine Seitenfläche CBFG

V) Eine Seitenfläche DCGH an CD der (III) gleich und ähnlich.

VI) Eine Seitenfläche DAEH an AD der (IV) gleich und ähnlich.

Diesen Körper nenne ich einen **Ponton**.

Möglichkeit des Körpers.

2) Man beschreibe das Rechteck ABCD.

3) An BC, beschreibe man ein Trapezium CBFG, dessen Grundlinien CB, FG parallel sind, und die Winkel CBF = BCG;

4) Begreiflich darf man nur zu dieser Absicht durch die Mitte von CB ein Perpendikel setzen und von dem Puncte wo das in die Parallele mit BC eintrifft auf ihr nach beyden Seiten gleiche Stücke nehmen.

5) Die Ebene dieses Trapezium neige man in einem willkührlichen Winkel gegen die Ebene des Rechtecks.

6) An AD beschreibe man ein gleiches und ähnliches Trapezium und neige es in dem gleichen Winkel gegen die Ebene des Rechtecks.

Die Seite dieses Trapezium die von A aus geht, sey AE, und die Seite die mit AD parallel ist sey EH, daß das Trapezium völlig dargestellt AEHD heisst.

8) Weil die Trapezien gleich und ähnlich sind, und in einerley Winkel gegen die Ebene des Rechtecks geneigt werden, so bekommen die Seiten BF, AE, einerley Neigung gegen AB, oder es ist ABF = BAE;

9) Eben so machen CG, DH, gleiche Winkel mit DC;

10) Auch haben die vier aus A, B, C, D, ausgehenden gleiche Seiten der Trapezien, glei-

che

che Neigungen gegen die Ebene des Rechtecks (1).

11) Also ist in der Figur ABFE; wegen (8) und AE = BF; die Seite EF der AB parallel.

12) Auch so giebt es eine Figur CDHG in der GH der CD parallel ist (7).

13) In der Figur EFGH, sind FG, EH, den BC, AD, also unter sich parallel.

Und EF, GH, den AB, CD, also auch unter sich parallel.

Und der Winkel EFG = ABC also ein rechter.

Und so alle vier Winkel der Figur EFGH rechte.

14) Die Seitenfläche CGHD ist in Linien den BFEA gleich eingeschlossen, die eben die Winkel machen.

15) Also hat man zu dem Rechtecke 1; I;
das II (13)
die Seitenflächen III; V; (11; 14)
die Seitenflächen IV; VI; (3; 6).

16) Man nenne ABCD untere Grundfläche, EFGH obere.

Ferner: die Seitenwände so
die an BC und an AD, hintere und vordere
die an CD und an AB, rechte und linke.

Auch sey
AB = a untere Länge
BC = b untere Breite

EF = e obere Länge
FG = f obere Breite
BF = c Kante.

17) Ein Perpendikel von B auf FG, schneidet auf genannter Linie von F an ein Stück = $\frac{1}{2}$ (f — b) ab.

Also ist

$$\text{cos BFG} = \frac{f - b}{2.c}.$$

18) Ein Perpendikel von B auf FE, schneidet auf genannter Linie von F an ein Stück = $\frac{1}{2}$ (e — a) ab, und giebt

$$\text{cos BFE} = \frac{e - a}{2.c}.$$

19) Nimmt man an die obern Längen und Breiten sind grösser als die untern, so sind jeder Seitenfläche obere Winkel spitzig, die unteren stumpf. Auch ist deutlich, daß die hintere und vordere Seitenfläche einerley spitzige und stumpfe Winkel hat, auch so die rechte und linke.

20) Man nenne also den stumpfen Winkel der rechten und linken Seitenfläche α = ABF, den stumpfen der hintern und vordern = β = CBF, so ist (17; 18)

$$\text{cos } \alpha = \frac{a - e}{2.c}$$

$$\text{cos } \beta = \frac{b - f}{2.c}.$$

Gegen-

Gegenseitige Neigungen der Ebenen welche den Körper einschliessen, und der Kante, gegen die untere Grundfläche.

21) Wenn man in vorhergehender Untersuchung nur bis an (5) gekommen ist, so nehme man von B, auf den drey geraden Linien die da den körperlichen Winkel einschliessen drey gleiche Stücke, deren jedes ich mit dem Endbuchstaben der Linie bezeichne auf welcher es genommen wird, * zugesetzt.

Sieht man nun B als Mittelpunct einer Kugel an, so giebt sich das Kugeldreyeck C* A* F*; In ihm sind die Seiten

C* A* = 90°;
A* F* = α;
C* F* = β.

Die Winkel

A* = der Neigung der rechten oder linken Seitenfläche gegen die untere Grundfläche.
C* = der Neigung der hintern oder vordern Seitenfläche gegen die untere Grundfläche.
F* die Neigung zweyer Seitenflächen gegen einander.

Diese Neigungen verstehen sich im Innern des Körpers, können also stumpf seyn.

22) Nun ist in meiner sphärisch. Trigon. 8 Satz 15;

dorten

dorten	B	b	a	P
für A*	A*	β	α	90°
C*	C*	α	β	90°
F*	F*	90°	α	β

also $\cos A^* = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$

$\cos C^* = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$

$\cos F^* = -\cot \alpha . \cot \beta .$

23) Der Bogen F* I = $\varkappa$ sey senkrecht auf den Grund, so misst er den Winkel den die Kante BF mit der untersten Grundfläche, im Innern des Körpers macht. Im Kugeldreyecke F* A* I das bey I rechtwinklicht ist, hat man die Hypotenuse, und den Winkel dem Perpendikel $\varkappa$ gegen über; also

$\sin \varkappa = \sin \alpha . \sin A^* = \sqrt{(\sin \alpha^2 - \cos \beta^2)}$
$= \sqrt{(\sin \beta^2 - \cos \alpha^2)}; \cos \varkappa = \sqrt{(\cos \alpha^2 + \cos \beta^2)}$

24) Weil ich die beyden Winkel (20) stumpf setze, so sey $\alpha = 180° - A$; $\beta = 180° - B$; $\cos \beta = -\cos B$ wo A und B, spitzige Winkel sind.

Soll nun $\sin \varkappa$ möglich seyn, so ist $\sin A > \cos B$; also $A + B > 90°$ und $270° > \alpha + \beta$ welches zeigt wie diese beyden Winkel zusammen müssen genommen werden.

Im 20 S. von Euklids XI B. ist gezeigt daß von drey ebenen Winkeln die einen körper-

lichen

lichen einschliessen, jedes Paar zusammen mehr beträgt als der dritte.

Wenn man hie die geraden Linien A* B und C* B, rückwärts verlängert so machen sie auch einen rechten Winkel, den Scheitelwinkel dessen den die Figur darstellt.

Ueber desselben Schenkeln stehen A, B; und machen mit ihm einen körperlichen Winkel.

Also muß nach Euklids Satze A + B ▷ 90 Gr. seyn, und das giebt für ihre Nebenwinkel, was hie aus der Rechnung geschlossen wird.

Wenn man nach Art der Alten verfährt, so leitet man aus euklidischen Sätzen Bestimmungen her unter denen das möglich ist was man bewerkstelligen will, und nun geht man innerhalb der Gränzen die man bestimmt hat, mit sichern Schritten.

Bey der Rechnung denkt man anfangs nicht darauf, wie weit man gehen darf, aber sie erinnert es, wenn man die gehörigen Gränzen überschreitet.

25) Was sich mit den drey Winkeln 90°; α; β; bey B machen lässt, lässt sich mit den gleichen bey A, D, C, machen, und so erhellt wenn man es aus Vorhergehendem nicht wüsste, daß sich an BC, AD, zwo Figuren wie BCGF eine ist, an AB, CD, zwo wie ABFE eine ist dergestalt zusammenfügen lassen daß sie den Ponton (1) geben.

26) Ein Loth von F auf die untere Grundfläche heisse $h = c \cdot \sin \varkappa$.

Flächen des Körpers.

27) Die obere $= e \cdot f$;
Die untere $= a \cdot b$

$$\left.\begin{matrix}\text{Die hintere} \\ \text{oder vordere}\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2} \cdot (f + b) \cdot c \cdot \sin \beta$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Die linke} \\ \text{oder rechte}\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2} \cdot (a + e) \cdot c \cdot \sin \alpha$$

wo man vermittelst (20) die Sinus wegschaffen kann.

Innhalt des Körpers.

28) Kleiner als $h \cdot e \cdot f$
Grösser als $h \cdot a \cdot b$.

29) Ihn genau zu finden, könnte man sich ein senkrecht Parallelepipedum über der untern Grundfläche vorstellen, und die Stücke untersuchen welche der Körper über dasselbe, vorne, hinten und auf beyden Seiten hat.

Zu dieser Zerlegung nehme seine Zuflucht wer nicht integriren kann. Ich will mich der Integralrechnung bedienen.

30) Man nehme in der Kante BF willkührlich $BP = x$ und lege durch P eine Ebene den Grundflächen parallel. Sie schneidet die Seitenfläche in einem Rechtecke, dessen zwo Seiten mit CB, DA, zwo mit BA, DC, parallel sind.

Jede

Jede der beyden ersten ist $= b - 2.x.\cos\beta$; Jede der beyden andern $= a - 2.x.\cos\alpha$, wobey man sich erinnere daß die Cosinus verneint sind (20;) wo auch ihre Werthe stehen.

31) Man hat also einen Querschnitt des Körpers $=$

$$\left.\begin{matrix} a.b - a.\cos\beta \\ - b.\cos\alpha \end{matrix}\right\} \cdot 2x + 4.\cos\alpha.\cos\beta.x^2.$$

32) Des Puncts P Höhe über der untern Grundfläche ist $= x.\sin\varkappa$, und derselben Differential $= \sin\varkappa.dx$.

33) Ein Element des Körpers ist zwischen zween Querschnitten enthalten die um erwähntes Differential von einander abstehen. Es ist also $= \sin\varkappa$ mit folgenden multiplicirt

$$\left.\begin{matrix} a.b.dx - a.\cos\beta \\ - b.\cos\alpha \end{matrix}\right\} \cdot 2x.dx + 4.\cos\alpha.\cos\beta.x^2.dx$$

34) Dieses so integriert daß es für $x = o$ verschwindet, giebt das Stück des Körpers zwischen der untern Grundfläche und dem Querschnitte $=$

$$x.\sin\varkappa. \left(\left.\begin{matrix} a.b - a.\cos\beta \\ - b.\cos\alpha \end{matrix}\right\} \cdot x + \tfrac{4}{3}.\cos\alpha.\cos\beta.x^2 \right)$$

35) Für den ganzen Körper setzt man $x = c$; da kömmt sein Innhalt (20) $=$

$$h.\left(\tfrac{1}{2}(a.f + b.e) + \tfrac{1}{3}.(e-a).(f-b)\right)$$
$$= h.\left(\tfrac{1}{6}.a.f + \tfrac{1}{3}.e.f + \tfrac{1}{6}.b.e + \tfrac{1}{3}a.b\right)$$

36) Arten dieses Körpers kommen auf Verhältnisse der Linien an ihm an.

37)

37) In Böhms Magazin für Ingenieur und Artilleristen VIII. B. 9. Art. findet sich Hr. Ob. v. Clasen Theorie der Pontons. Ich will zuerst die drey Arten die Hr. v. Cl. da angiebt nach meinen Formeln betrachten.

38) Seine erste Art in §. 2. §. ist: Vorder- und Hinterwand Rechtecke.

Also $b = f$; $\beta = 90°$ (20) $= A^*$ (22) $C^* = \alpha$; $F^* = 90°$
$\varkappa = \alpha$ (23); $h = c. \sin \alpha$
Innhalt $= h. b. \frac{1}{2}. (a + e)$.

Die rechte und linke Seitenwand stehen wegen $A^* = 90°$ senkrecht auf den Grundflächen, und machen wegen $F^* = 90°$; mit den vordern und hintern rechte Winkel.

39) v. Cl. bemerkt daß dieser Körper entsteht, wenn man von einem dreyeckichten Prisma, mit einer Ebene senkrecht auf seine beyden Grundflächen, und einer Seitenfläche parallel ein Stück abschneidet.

Unsere Zeichen gehören so zusammen

Ihm	a	b	c	g
mir	h	a	b	e — a

So wird man finden daß er eben den Innhalt angiebt.

Der Körper ist selbst ein Prisma, als Prisma betrachtet, hat er zu Grundflächen Trapezien deren jedes beyde parallele Seiten a, c, sind, des Trapezium Höhe $= h$, der beyden Trapezien

zien senkrechter Abstand = b. So folgt die Berechnung sogleich aus der Berechnung von Prismen.

40) v. Cl. §. 9. Zweyte Art. Eine abgekürzte Pyramide, deren Grundflächen die beyden Rechtecke sind, die beym Ponton auch so heissen.

Also e: f = a: b (Geom. 60 Satz) So giebt $b = \frac{a.f}{e}$ gesetzt, den Innhalt (35)

$= \frac{1}{3}$. h. f. e. $\left(1 + \frac{a}{e} + \left(\frac{a}{e}\right)^2\right)$

wie nach Geomet. 62 S. 4. Zus. Auch dieser Körper liesse sich also ohne Integriren berechnen.

Wie man ihn bilden könne s. unten (53).

41) v. Cl. §. 19. Dritte Art. Soll keine der vorigen beyden seyn, doch die Grundflächen parallele Rechtecke. Ist also die allgemeine Vorstellung von der ich angefangen habe.

42) Die rechte und linke Seitenwand sollen Rechtecke seyn.

Also a = e; $\alpha = 90°$ (20) und in (22) (23) $A^* = \beta = \varkappa$; $C^* = 90° = F^*$; Der Innhalt (34) $= \frac{1}{2}$ h. e. (b + f).

43) Exempel a = e = 18 Fuß 6 Zoll = 216 Zoll; b = 5 Fuß 1 Zoll = 61 Zoll; f = 6 F. 2 Z. = 74 Z.; h = 2 F. = 24 Z.

Diese Maasse, unter dem Nahmen: Länge, obere und untere Breite, Tiefe, finden sich als Abmessungen eines französischen Pontons beym Leupold Th. Pontificiale XXII. Cap. 276 §. Daß der Ponton zu dieser Art gehört schliesse ich weil nur eine Länge angegeben ist. L. nimmt ihn aus Christian Friedr. v. Geißler curieuser und vollkommner Artillerie. G. hat ihn in Hannover machen lassen. Was für Fusse? finde ich beym L. nicht. Der Nahme, sollte doch wohl Königsfusse muthmassen lassen.

Der Ponton war aus Kupferplatten die eines Messerrückens dick waren, hat innwendig eine Röste von Holz an welche das Kupfer genagelt wird; war 500 bis 600 Pf. schwer.

Aus den angegebenen Abmessungen läßt sich so rechnen: Weil $b - f = -13$; So ist (20)

$$\cos\beta = -\frac{13}{2.c} \text{ aber } h = 24 = c.\sin\varkappa$$

(26) $= c.\sin\beta$ (42) also $\cot\beta = -\frac{13}{48}$.

$10 + \log 13 = 11,1139433$

$\log 48 = 1,6812412$

$\log(-\cot\beta) = 9,4327021$

$\beta = \varkappa = 180° - (74° 51) = 105° 9'$

Also wenn man die Kante wissen will

$10 + \log 24 = 11,3802112$

$\log \sin\varkappa = 9,9846375$

$\log c = 1,3955737$

$c = 24,86$ Zoll.

Hätte

Hätte man Kante und Höhe gemessen so liesse sich daraus $\varkappa = \beta$ berechnen und wenn man also den Winkel der untern Breite mit der Kante $= 105^\circ\ 9'$ fände, wäre das Probe des Verfahrens.

Die hintere und vordere Wand stehen senkrecht auf der untern Grundfläche, die rechte und linke machen mit ihr Winkel von 105 Gr. 9 M.

Des Pontons Innhalt ist 12. 216. 135 Cubikzoll.

$\log 12 = 1{,}0791812$
$\log 216 = 2{,}3344538$
$\log 135 = 2{,}1303338$

$5{,}5439688$
$\log 1728 = 3{,}2375437$

$2{,}3064251$

giebt den Innhalt 202,50 Cubikfuß.

Nimmt man das Maaß für pariser an, und setzt den Cubikfuß Wasser 70 Pf. schwer, so nimmt der Ponton den Raum von 14175 Pf. Wasser ein; Davon sein Gewicht abgezogen, kann er noch über 13000 Pfund tragen.

44) Die Kante soll mit unterer Länge und Breite gleiche Winkel machen.

Also $\alpha = \beta$; $a - e = b - f$ (20) $A^* = C^*$ (22); $\cos F^* = -(\cot \alpha)^2$; $\cos \varkappa = \cos \alpha . \sqrt{2}$ (23).

Die beyden letzten Cosinus zeigen an daß jeder der beyden gleichen Winkel welche die Kante macht, mehr als 45 Grad beträgt, sonst würden cos F* und cos $\varkappa$ grösser als 1.

Daß jeder Winkel grösser als 45 Gr. seyn muß versteht sich nun wohl weil die Winkel stumpf sind (20) aber in den Werthen der beyden letzten Cosinus liegt auch, daß jeder kleiner als 135 Gr. seyn muß.

Dieß ist nur ein besonderer Fall von (24).

Hie ist also cos A* = cos C* = cot α Der Innhalt weil $b = a + f - e$ kömmt $= h.(\frac{1}{2}a.f - \frac{1}{6}.a.e + \frac{1}{2}.e.f - \frac{1}{6}e^2 + \frac{1}{3}a^2)$.

45) **Exempel**; $\alpha = 120°$; cot α = — tang 30° = — cos 54° 44′; also A* = C* = 125° 16′; für die gleichen Winkel der Wände mit der untern Grundfläche.

log tang α = 0,7614394 — 1
log tab cos F* = 9,5228788
Winkel der Seitenwände = 109° 28′

$$\cos \varkappa = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\varkappa = 135°$

$$c = \frac{a - e}{2.\cos\alpha} \ (20) = e - a;$$

$h = (e - a).\sin 45°$.

Man kann e, f, a, nach Gefallen annehmen, daraus bestimmt sich b, und alles Uebrige.

brige. Oder überhaupt aus dreyen der vier Linien welche Längen und Breiten heissen, die vierte, und so das Uebrige.

46) Wenn man das Stück des Pontons (34) = H setzt, so könnte man x suchen welches dieses Stück gäbe, dazu müsste aber eine cubische Gleichung aufgelöst werden.

47) Das Gewicht des Pontons (wie im Exempel 43) sey = P; Er sey mit einer Last = L beschwert, und senke sich damit dergestalt daß das Stück H (46) von ihm im Wasser ist.

Das Wasser das er aus seiner Stelle vertreibt muß das Gewicht P + L haben.

Ist also H in Cubikfussen gegeben, und nennt man W das Gewicht eines Cubikfusses Wasser so ist $H = \frac{P+L}{W}$.

So diente (46) anzugeben wie tief sich der Ponton eintauchen würde.

48) Dergleichen Rechnung stellt v. El. a. a. O. §. 23. an. Sie erfodert freylich mehr Mühe als durch sie belohnt wird. Denn es kömmt doch wohl darauf in der Ausübung nichts an, voraus zu bestimmen ob der Ponton einen Zoll tiefer sinkt oder nicht. Wer sich also die Rechnung bequemer machen wollte, könnte mehrere x nach einander annehmen, und das jedem gehörige H berechnen, da man dann fän-

de was für ein H dem erfoderten $\frac{P+L}{W}$ am nächsten käme.

49) Im Vorbeygehen erinnere ich daß Hr. v. Cl. beym 4 §. berichtet, der verstorbene Artilleriemajor v. Beuvius, habe im dänischen auf der königl. Justirkammer accurat justirten Gewichte, einen dänischen Cubikfuß frisches Wasser 62 Pf. 4 Loth gefunden. Der dänische Fuß ist bekanntermassen der rheinländische, verhält sich wie da gesagt wird zum pariser genau = 29: 30;

Das gäbe den rheinl. Fuß = 139, 2 pariser Linien; insgemein setzt man ihn = 139, 13; Der Unterschied beträgt freylich eine Kleinigkeit.

50) Hr. v. Cl. stellt mehr lehrreiche Untersuchungen an, z. E. Pontons nach gegebenen Bedingungen zu machen. Wer sich damit einlassen will, wird meine allgemeine Formeln dazu bequem finden. Hr. v. Cl. führt für jede seiner drey Arten die Rechnung von vorne, bey mir wird sie durch Anwendung der allgemeinen Formeln kürzer. Er zieht seine ersten beyden Arten der dritten vor, weil sich bey ihnen die Berechnung genauer führen lasse. Sie haben freylich den Vorzug, daß sie sich schon aus der Elementargeometrie leicht berechnen lassen.

51) Der zum Gebrauche verfertigte Ponton, ist in keine geometrische Ebenen eingeschlossen, man muß daher bemerken wie die Messungen anzustellen sind nachdem man seinen innern oder äusern Raum wissen will. Er ist oben offen, also das obere Rechteck nur eine geometrische Gränze von ihm.

51) Ich gerieth auf die Untersuchung der Pontons, als ich einigen vornehmen hie studierenden Franzosen, die sich 1787 meines Unterrichts bedienten, Anwendung der Hydrostatik auf Kriegswissenschaften zeigen wollte. In einem Buche wo ich zuerst genauere Nachricht suchte, Fäsch, Kriegs-Ingenieur-Artillerie- und Seelexicon (1735) fand ich unter Ponton und Tab. XII; n. 12: nur Worterklärung und Bild, doch mehr, als in französischen Wörterbüchern, wie: Dictionnaire Militaire, und Arts de l'homme d'epée. Ich entwarf mir also selbst die Gestalt des Ponton wie in (1) und suchte zur Berechnung wahre Exempel in Leupolds Th. Pontif. (43). Erst nachdem fiel mir Hr. v. El. Aufsatz (37) in die Hände.

52) Man könnte statt der beyden Grundflächen, Trapezien nehmen, deren kürzere Seiten einander parallel wären, und so auch die längern. Doch einige Regelmässigkeit zu behalten, könnte man die Winkel, der geraden Linien, und der Ebenen, bey B und bey C gleich setzen; auch so bey A und bey D.

Da gehörten mehr gerade Linien zu Bestimmung des Körpers, auch mehr, und mehr verwickelte Formeln statt der (20; 22; 23) denn die in (22) werden nur wegen der rechten Winkel so einfach.

Eine so mühsame Untersuchung vorzunehmen, ohne daß man einigen Gebrauch davon sieht, wäre wohl die Zeit verschwendet.

Wenn ist der Ponton eine abgekürzte Pyramide? (40)

53) Da ist obere und untere Grundfläche (16) einander ähnlich; Weil nun beydes schon Rechtecke sind, so ist zur Aehnlichkeit noch a: b = e: f.

54) Nähme man also die untere Grundfläche als gegeben an, und an ihr Trapezium CBFG, so wären a, b, f auch c, gegeben und es käme darauf an, die Ebene des Trapezium gegen die gegebne Grundfl. so zu neigen daß $e = \frac{a.f}{b}$; also auf den Winkel C* (22).

55) Nach dieser Voraussetzung ist in (20); $\cos\alpha = \frac{a.(b-f)}{2.b.c}$; Ferner allemahl $\sin\beta = \frac{\sqrt{(4c^2-(b-f)^2)}}{2.c}$ daher für die gegenwärtige Absicht $\cos C^* = \frac{a.(b-f)}{b.\sqrt{(4.c^2-(b-f)^2)}}$

56)

56) Diesen Winkel müsste man also aus den gegebenen Linien berechnen, und das Trapezium in ihm gegen die Grundfläche ABCD neigen.

Die Formeln sind auch bey Maassen brauchbar.

57) Höhlungen die ein Rechteck zum Boden haben, und vier viereckichte Seitenflächen, paarweise wie sie einander gegenüber stehen, gleich und ähnlich, werden geflochten als Körbe, auch in Breter eingeschlossen als Maasse, gebraucht. Dergleichen erwähnt Schlüter Unterricht von Hütte-Werken (Braunschw. 1738 fol.) 4. Cap. und auf seiner 4 Tafel sind welche bey D, E, H abgebildet, aber nicht so daß sich Alles was man zu ihrer Berechnung braucht, nach dem beygefügten Maaßstabe abnehmen liesse. Wem solche Körper zum Gebrauche vorkommen, der kann sie nach der gegebenen Anleitung berechnen.

10.

Körper deren Flächen sich gegen die Kugelfläche verhalten, wie die Körper selbst gegen die Kugel.

1) Der Kugel Halbmesser sey $= r$, so ist ihre Fläche $4r^2\pi$ (Geom. 65 S.) Innhalt $\frac{4}{3}r^3\pi$ (Geom. 66 S.).

2) Des Umschriebenen senkrechten Cylinders, krumme Fläche ist $2r.\ 2r\pi = 4r^2\pi$, Grundfläche $= r^2\pi$.
Also seine ganze Fläche $= 4r^2\pi + 2r^2\pi = 6r^2\pi$
Innhalt $= 2r.\ r^2\pi = 2r^3\pi$; Also
Kugelfläche: Cylinderfläche $= 2:3$
Kugel: Cylinder $= 2:3$

Senkrechter Kegel um die Kugel.

3) FEG sey der halbe Kreis der die Kugel beschreibt, C sein Mittelpunct. Im Halbmesser GF, verlängert, nehme man nach Gefallen $CA = b$ und ziehe die Tangente AED bis sie der Linie GD welche durch G auf FG senkrecht steht in D begegnet. So beschreibt das Dreyeck AGD um die Kugel einen Kegel.

4) Da ist $AE = \sqrt{(b^2 - r^2)}$; des Kegels Höhe $= b + r$; Ferner $AE : EC = AG : GD$;
also $GD = \frac{(b+r).r}{\sqrt{(b^2-r^2)}} = r.\sqrt{\frac{b+r}{b-r}} = r.m$

5) Folg-

5) Folglich $AD = \frac{GD.\,AC}{ce} = b.\,m$

6) Der Umfang der Grundfläche $= 2\pi.\,rm$
Ihr Innhalt $= r^2 m^2.\,\pi.$

7) Des Kegels krumme Fläche $= \pi\,b\,r\,m^2$
Seine völlige Fläche mit der Grundfläche $= \pi\,r\,m^2.\,(b+r).$

8) Sein Innhalt $= \frac{(b+r).\,r^2 m^2 \pi}{3}$

9) Also $\frac{\text{Kegelfläche}}{\text{Kugelfläche}} = \frac{m^2.\,(b+r)}{4r}$

$\frac{\text{Kegel}}{\text{Kugel}} = \frac{m^2\,(b+r)}{4r}$

10) Folglich verhalten sich hie die Flächen wie die Körper, nur muß der Kegel senkrecht, das ist gleichseitig seyn.

Indem b von r bis ins Unendliche wächst, nimmt m (4) vom Unendlichen bis an 1 ab. Kleiner als r kann b nicht seyn, wie schon die Figur zeigt, und die Rechnung dadurch daß für b kleiner als r, m unmöglich würde.

Wenn also b nur wenig grösser ist als r; ist GD der Halbmesser von des Kegels Grundfläche sehr groß; nimmt aber ab, und nähert sich immer mehr und mehr dem Halbmesser der Kugel je grösser b wird, je näher der Bogen FE einem Quadranten kömmt. Allemahl bleibt (9); Selbst wenn m oder b unendlich werden, werden

den beyde Quotienten unendlich, auf einerley Art ausgedruckt.

11) Es sey 2. GD = AD; damit das ganze Dreyeck um den Kreis beschrieben gleichseitig wird; oder: des Kegels Seite so groß als der Durchmesser seiner Grundfläche. Dann ist (4; 5;) 2. r = b; $m = \sqrt{3}$; und die Quotienten (9) jeder = $\frac{9}{4}$; Oder: von Kugel und Kegel, verhalten sich Körper und Flächen wie 4: 9.

Es ist sonderbar, daß man diese Verhältniß aus zwo gleichen, jede = 2: 3 zusammen setzen kann. Nähmlich vom Cylinder (2) verhalten sich Körper und Fläche gegen Körper und Fläche des gegenwärtigen Kegels = 2: 3 wie die Rechnung giebt wenn man in (7; 8;) $m^2 = 3$ und b = 2. r setzt. Also ist Verhältnisse der Flächen, oder Verhältnisse der Körper verstanden;

Kugel: Cyl. = 2: 3
Cyl.: Kegel = 2: 3
Kugel: Kegel = 4: 9

12) Des Kreises um T, Halbmesser TR sey = r; der Winkel ATR = α; und RA eine Tangente. So ist RA = r. tang α; und

$$\Delta ART = \frac{r^2 . \text{tang}\, \alpha}{2};$$

$$\text{Ausschnitt } GRT = \frac{r^2 . \alpha}{2}$$

Also

Also $\frac{\Delta ART}{\text{Ausschn. GRT}} = \frac{\text{tang } \alpha}{\alpha} = \frac{RA}{RG}$

Also verhalten sich Dreyeck und Ausschnitt wie ihre Grundlinien.

13) Und folglich ein reguläres oder irreguläres Vieleck das um den Kreis beschrieben ist, zum Kreise, wie des Vielecks Umfang zu des Kreises Umfange.

14) Es sey ABC eine Ebene welche eine Kugel deren Mittelpunct T ist, in R berührt. Die Ebene mag jede Figur die man will haben. Ihre Fläche heisse f^2. Wenn man nach allen ihren Gränzen von T gerade Linien zieht, so fällt zwischen diese Linien ein Stück von der Kugelfläche $= g^2$;

Das Stück des körperlichen Raumes der Kugel welches dieses Stück Kugelfläche zur Grundfläche hat ist $\frac{1}{3}$r. g^2.

Die Pyramide deren Spitze in T, die Grundfläche die genannte Ebene ist, hat zum Innhalte $\frac{1}{3}$r. f^2

Also ist $\frac{\text{Stück der Kugel}}{\text{Pyramide}} = \frac{g^2}{f^2}$

Oder diese beyden Körper verhalten sich wie ihre Grundfläche.

15) Legt man also um eine Kugel, Ebenen die sie alle berühren und einen Körper einschliessen, so irregulär derselbe auch seyn mag; so lässt sich dieser Körper in lauter solche Pyramiden

den zertheilen, und also verhält sich der Innhalt des Körpers zum Innhalte der Kugel wie des Körpers Fläche, zur Kugelfläche.

16) Da (2) aus dem Archimed bekannt ist, so hat erst Tacquet (10) gefunden. Die Sätze 13; 15; lehrt Zanotti in einem von der königl. Soc. der Wiss. zu Montpellier an die Akad. der Wiss. zu Paris überschickten Aufsatze Mem. de l'Ac. des Sc. 1748; p. 613.

17) Z. zeigt eben daselbst wie man Stücke von Cylindern, ungleichseitige Kegel u. s. w. um die Kugel beschreiben könne die eben die Eigenschaft haben, daß sich ihre Flächen gegen die Fläche der Kugel verhalten wie die körperlichen Räume gegen den Körper der Kugel.

18) Wenn MRA; ABN 2 Fig. Tangenten sind, welche den Durchmesser FH in M, N, schneiden und sich diese Figur um die Axe MN dreht so entsteht um die Kugel ein Körper den Tacquet und Zanotti biconicum nennen, welcher diese Eigenschaft hat.

19) Sind aus M, N, Tangenten MR, NB gezogen, aber nicht bis sie zusammenstossen verlängert sondern an Puncte zwischen R und B, Tangenten gezogen, die sich endlich mit jenen beyden zusammenschliessen, so giebt das einen Körper der in unterschiedene Stücken von Kegelflächen und oben und unten zweene Kegel eingeschlossen ist, und auch diese Eigenschaft hat.

20) In

20) In (13) wird das Vieleck um den Kreis beschrieben, betrachtet, also ist da der Kreis in das Vieleck beschrieben. Das giebt nachstehende Folgerung:

21) In einem Kreise sey ein Vieleck beschrieben, ordentlich oder unordentlich; Wenn sich in dieses Vieleck ein Kreis beschreiben lässt, der nähmlich alle Seiten des Vielecks berührt, so kann sich die Fläche des Vielecks, zur Fläche des Kreises in den es beschrieben ist, nicht verhalten wie des Vielecks Umfang, zu dieses Kreises Umfange.

Bew. Man nenne das Vieleck V; den Kreis in den es beschrieben ist G, den welcher in das Vieleck beschrieben ist K;

Man nehme an

Fläche G: Fl. V = Umfang G: Umf. V

Es ist aber (13)

Fläche V: Fl. K = Umfang V: Umf. K

also wäre

Fläche G: Fl. K = Umfang G: Umf. K

Der beyden Kreise Flächen verhielten sich wie ihre Umfänge.

Da dieses nicht seyn kann, so lässt sich die erste vorstehender drey Proportionen nicht annehmen.

22) Ist ein ordentliches Vieleck in einen Kreis beschrieben, so kann sich dieses Vielecks Fläche zu des Kreises Fläche nicht verhalten

wie

wie sein Umfang zu des Kreises Umfange; Denn es lässt sich allemahl ein Kreis in das ordentliche Vieleck beschreiben, also findet (21) statt.

23) Vom ordentlichen Vielecke lässt sich (22) freylich leicht durch Rechnung darthun. Das Vieleck habe n Seiten und es sey $\frac{360^\circ}{n} = v$; Des Kreises Halbmesser $= a$ So ist (Trigon. 18 S. 4. Zus.) des Vielecks Fläche $= a^2 . \frac{1}{2} . n . \sin v$; Umfang $= n . a . 2 . \sin \frac{1}{2} v$. Also verhalten sich bey Kreise und Vieleck

die Flächen $= \pi : \frac{1}{2} . n . \sin v$

die Umfänge $= \pi : n . \sin \frac{1}{2} v$

Diese beyden Verhältnisse sind nicht gleich, weil $\frac{1}{2} . \sin v$ nicht eher $= \sin \frac{1}{2} v$ wird als wenn v verschwindet, da verwandelt sich das Vieleck in den Kreis.

Indessen zeigt doch eben diese Rechnung daß die Verhältnisse der Flächen und der Umfänge einander immer näher und näher kommen, je grösser n, oder je kleiner v ist.

24) In jedes Dreyeck lässt sich ein Kreis beschreiben, (Geom. Abh. I. Samml. 13 Abh. 39). Und von diesen beyden Figuren gilt (13).

Nun lässt sich auch um jedes Dreyeck ein Kreis beschreiben. Also (21) verhält sich nie die Fläche eines Dreyecks zur Fläche des umschriebenen Kreises wie sich die Umfänge beyder Figuren verhalten.

25)

25) Wenn ein Körper, regulär oder irregulär, so beschaffen ist, daß man eine Kugel in ihn, und auch eine um ihn beschreiben kann, so verhält sich nie der Körper zur umschriebenen Kugel, wie des Körpers Fläche, zur Fläche der umschriebenen Kugel.

Bew. Man nenne wiederum, Körper, umschriebene, eingeschriebene Kugel, V; G; K; Man nehme an

Körper G: Körper V = Fläche G: Fläche V

Es ist aber (15)

Körper V: Körper K = Fläche V: Fläche K

also käme

Körper G: Körper K = Fläche G: Fläche K

welches nicht statt findet, da sich die Körper der Kugeln wie die Würfel ihrer Durchmesser verhalten, die Flächen wie der Durchmesser Quadrate. Also lässt sich die erste dieser drey Proportionen nicht annehmen.

26) Man kann in jeden regulären Körper eine Kugel beschreiben (Eukl. El. 15 B. 21 Satz) auch eine Kugel um jeden regulären Körper; (El. 13 B. 13 u. f. S.) also (25) verhält sich kein regulärer Körper zur Kugel um ihn, wie seine Fläche zur Kugelfläche.

27) Die Sätze 21 . . 26 hat Zanotti ebenfalls.

28) Die Geschichte dieser Untersuchungen zeigt er nur so kurz und allgemein an wie in (16)

beygebracht ist; Sie verdient doch wohl etwas umständlicher erzählt zu werden.

29) Daß ein Cylinder der mit der Kugel einerley Durchmesser, auch der Kugel Durchmesser zu seiner Höhe hat, anderthalbmahl so groß ist, als die Kugel, auch seine Fläche anderthalbmahl so groß als die Kugelfläche, ist eine Folge beym 32 S. des 1. B. Archimeds, von Kugel und Rundsäule, in Joh. Christoph Sturms Verdeutschung: des unvergleichlichen Archimedis Kunstbücher Nürnb. 1670.

In: Admirandi *Archimedis* Syracusani monumenta omnia mathematica quae exstant ex traditione *Francisci Maurolyci* Panormi 1685; fol. ist es im Lib. de Sphaera et Cylindro bey Prop. XI ein Corollarium;

In Barrows Ausgabe: Archimedis Opera methodo noua illustrata et succincte demonstrata Lond. 1675; 4° ist es de Sphaera et Cylindro Lib. I. Prop. 39.

Die Herausgeber Archimeds haben sich in Anordnung und Zählung der Sätze viel Veränderungen gestattet.

Allemahl steht der Satz zunächst nach dem: daß die Kugelfläche viermahl so groß ist, als die Fläche ihres grössten Kreises.

30) Des Jesuiten *Andreae Tacquet* Elementa Geometriae sind sehr oft herausgekommen, ich besitze sie Amstelaedam. 1683; 8°. Ihnen sind Selecta ex Archimede Theoremata bey-

beygefügt, Kreis und Kugelrechnung betreffend. Da ist, 32. S. daß der Cylinder an körperlichem Innhalt und an Fläche anderthalbmahl so groß als die Kugel ist.

Der 40; 44; 45; Satz, was hie in (11) ist gezeigt worden. Tacquet freut sich durch diese Entdeckung die archimedische fortgesetzt zu haben, und druckt seinen 45. S. den letzten der Theorem. Selector. so aus: Conus aequilaterus sphaerae circumscriptus, et cylindrus rectus et ipsa sphaera, eamdem proportionem continuant, nimirum sesquialteram, tam quoad soliditatem quam quoad superficiem totam.

In (11) ist deutlich Kugel: Cyl. = Cyl.: Kegel worauf die continuatio proportionis ankömmt.

31) Aus (15) erhellt, daß sich gar viel Körper angeben lassen deren Fläche sich zur Kugelfläche verhält wie ihr körperlicher Innhalt zur Kugel. Der Kegel (11) hat den Vorzug daß bey ihm diese Verhältniß in so kleinen ganzen Zahlen anzugeben ist, und mit der Verhältniß des Cylinders in Verbindung steht. Mehr der übrigen lassen sich nach den gegebenen Formeln darstellen, und mehr solche Körper erfinden. So erwähnt Tacquet Theor. Sel. Schol. Prop. 32; daß er schon bey Ringen, gleiche Verhältnisse zwischen Körpern und Flächen wahrgenommen; Andreae Tacquet Cylindricorum et Annularium Libri IV. item, de Circulo-

rum volutione per planum; Antverp. 1651. 4°; Lib. 4; prop. 13; 14; 15; Die Cylindrica et Annularia befinden sich auch in dem Folianten: Opera Mathematica R. P. Andreae Tacquet e S. I. demonstrata et propugnata a Simone Laurentio Veterani ex comitibus Montis Calvi; in Collegio S. I. Lovanii 1668. Das Buch ist bey der öffentlichen Prüfung des Grafen, ohne Zweifel vertheilt worden, wie Hr. Nicolai dergleichen bey einer Disputation zu Wien wahrnahm: Reise durch Deutschland und die Schweiz . . . IV. Band II B. 12. Abschnitt 736. Seite. Es enthält: Tacqu. Astronomia 8. Bücher; Geometria Practica 3. Bücher; Optica 3. Bücher; Catoptrica 3. Bücher, Architectura militaris; und die vorerwähnten Cyl. et ann. und de circulor. volut. Die Elementa Geometriae, auch Elementa Arithmeticae die man vom Tacquet hat finden sich hie nicht. Wie auch der Herr Graf die Sätze in diesem Werke mag demonstrirt und vertheidiget haben, so verdient er doch allemahl der Nachwelt Dank, die eine so nützliche Sammlung wenigstens durch einen ansehnlichen Beytrag, wo nicht ganz auf seine Kosten erhalten hat, und auf diesen Fall erstreckt sich Hr. Nicolai Spott a. a. O. nicht.

II.

Summe der Cotangenten der drey halben Winkel eines Dreyecks.

1) $A + B + C = 180°$; also
$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 90°$.

2) Man berechne also
$\cot \frac{1}{2} A + \cot \frac{1}{2} B + \cot \frac{1}{2} C$.

3) Der ersten beyden Cotangenten Summe
ist $= \frac{\cos \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} A} + \frac{\cos \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} B} =$
$\frac{\sin \frac{1}{2} (A+B)}{\sin \frac{1}{2} A . \sin \frac{1}{2} B}$.

4) Die dritte ist $= \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} C} =$
$\frac{\sin \frac{1}{2} (A+B)}{\cos \frac{1}{2} (A+B)}$.

5) Aller dreyer Summe $=$
$\frac{\sin \frac{1}{2} (A+B) . (\cos \frac{1}{2} (A+B) + \sin \frac{1}{2} A . \sin \frac{1}{2} B)}{\cos \frac{1}{2} (A+B) . \sin \frac{1}{2} A . \sin \frac{1}{2} B}$

6) Der Zähler wird
$= \sin \frac{1}{2} (A+B) . \cos \frac{1}{2} A . \cos \frac{1}{2} B$;
Also die gesuchte Summe (1)

7) $\tang \frac{1}{2} (A+B) . \cot \frac{1}{2} A . \cot \frac{1}{2} B$
Weil $\frac{1}{2} B = 90° - \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} C$

so verwandelt sich dieses in
cot $\frac{1}{2}$C. cot $\frac{1}{2}$A. tang $\frac{1}{2}$ (A+C)
und dieses, wegen $\frac{1}{2}$A = 90° − $\frac{1}{2}$B − $\frac{1}{2}$C
in cot $\frac{1}{2}$C. tang $\frac{1}{2}$ (B+C). cot $\frac{1}{2}$A.

8) Nähmlich die Summe der Cotangenten der drey Winkel ist ein Product, aus der Tangente von der Hälfte eines der drey Paare der Winkel in die Cotangenten der Hälften der Winkel die in diesem Paare sind, und, da man drey Paare der Winkel machen kann, so giebt es drey Producte, jedes dieser Summe gleich.

9) Noch deutlicher ist $\frac{1}{2}$C = 90° − $\frac{1}{2}$(A+B)
Folglich (7) die Summe =
cot $\frac{1}{2}$A. cot $\frac{1}{2}$B. cot $\frac{1}{2}$C
Also der drey Cotangenten Summe ihrem Producte gleich.

10) Exempel. Es sey A = B = 45°; also C = 90°; da ist tang $\frac{1}{2}$A = tang $\frac{1}{2}$B = $\sqrt{2}-1$; die Cotangente = $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$
Also die Summe der drey Cotangenten = 2. $\sqrt{2}+2+1 = 2\sqrt{2}+3$ Ihr Product = $(\sqrt{2}+1)^2 . 1 = 2\sqrt{2}+3$.

Ueber die Tangenten.

11) Aus (9) ist

$$\frac{1}{\text{tang }\frac{1}{2}A} + \frac{1}{\text{tang }\frac{1}{2}B} + \frac{1}{\text{tang }\frac{1}{2}C} = \frac{1}{\text{tang }\frac{1}{2}A.\ \text{tang }\frac{1}{2}B.\ \text{tang }\frac{1}{2}C}.$$

12)

12) Also die Brüche linker Hand auf eine Benennung gebracht und addirt, kömmt eben der Nenner wie rechter Hand, aber der Zähler $=$ tang $\frac{1}{2}$A. tang $\frac{1}{2}$B $+$ tang $\frac{1}{2}$A. tang $\frac{1}{2}$C $+$ tang $\frac{1}{2}$B. tang $\frac{1}{2}$C. Dem muß also der Zähler rechter Hand gleich seyn, oder $=$ 1.

12) Aus den drey Tangenten der Hälften der Winkel lassen sich drey Paare machen, die drey Producte aus diesen drey Paaren machen zusammen $=$ 1.

13) Das erhellt auch wenn man den dritten Winkel wegschafft. Da wird der Zähler (11) tang $\frac{1}{2}$A. tang $\frac{1}{2}$B $+$ (tang $\frac{1}{2}$A $+$ tang $\frac{1}{2}$B). cot $\frac{1}{2}$ (A$+$B). Aber tang $\frac{1}{2}$A $+$ tang $\frac{1}{2}$B $=$ tang $\frac{1}{2}$ (A$+$B). (1 $-$ tang $\frac{1}{2}$ A. tang $\frac{1}{2}$ B) Dieses mit cot $\frac{1}{2}$ (A$+$B) multiplicirt giebt 1 $-$ tang $\frac{1}{2}$A. tang $\frac{1}{2}$B.

12.

Von einem Dreyecke, sind Umfang, Innhalt, und ein Winkel gegeben. Man sucht das Dreyeck.

1) Die drey Winkel sind A, B, C, die Seiten ihnen gegenüber a, b, c, der Innhalt $=$ T; Der erste der drey genannten Winkel ist gegeben.

2) Man hat also a $+$ b $+$ c $=$ f gegeben. Sin A durch die drey Seiten ausgedruckt (Trig. 20 S. 15) gegeben.

b. c. sin A = 2. T (Trigon. 21 S.) gegeben.

3) Da nun aus drey Seiten sich das Dreyeck zeichnen lässt, und hie drey Gleichungen gegeben sind, darinn nichts unbekannt ist als die drey Seiten, so hat man soviel Gleichungen als unbekannte Grössen, die Aufgabe ist also bestimmt.

4) Man behandele diese drey Gleichungen so, daß man aus ihnen b, c, wegschafft und eine bekömmt in welcher nur a ist.

5) Diese muß vom ersten Grade seyn, weil diese Seite die ist welche dem gegebenen Winkel gegenüber steht, also dieß eigenthümliche hat das keiner der übrigen zukömmt.

6) Schaffte man a und c; weg so erhielte man eine Gleichung in welcher nur noch b wäre.

Die müsste aber eine unreine vom zweyten Grade seyn, denn wie b einem der unbekannten Winkel gegenüber steht, so steht c den andern gegenüber, Man sagt also von b nichts was man nicht auch von c sagte, und so muß die Gleichung für b zwo Wurzeln haben, deren eine b giebt die andre c.

7) Auch so wenn man a und b wegschaffte fände man eine Gleichung für c deren eine Wurzel c wäre, die andre b.

8) Vermöge bekannter trigonometrischer Sätze, lässt sich die Rechnung folgendergestalt an-

anstellen ohne förmlich die drey Gleichungen zu brauchen.

9) $b.c = \frac{2.T}{\sin A}$ (Trig. 21. S.) dieser beyden unbekannten Seiten Product ist also gegeben.

10) $b + c = f - a$, wo nur f bekannt ist.

11) Also, auf beyden Seiten, quadrirt und (9) gebraucht

$$b^2 + \frac{4.T}{\sin A} + c^2 = f^2 - 2.a.f + a^2$$

oder

$$b^2 + c^2 - a^2 + \frac{4.T}{\sin A} = f^2 - 2.a.f$$

12) Das ist Trig. 20 S. 9; und hie 9;

$$\frac{4.T.\cos A}{\sin A} + \frac{4.T}{\sin A} = f^2 - 2.a.f$$

13) Linker Hand steht

$$4.T.\ \frac{(1 + \cos A)}{\sin A}$$

was in 4. T multiplicirt wird, ist (Trig. 19 S. 5. Zus.) $= \frac{2.(\cos \frac{1}{2}A)^2}{2.\sin \frac{1}{2}A.\cos \frac{1}{2}A} = \cot \frac{1}{2}A$;

15) Also wird (12)

$$4.T.\cot \tfrac{1}{2}A = f^2 - 2.a.f$$

16) Folglich $a = \frac{1}{2}.f - \frac{2.T}{f}.\cot \frac{1}{2}A.$

17) Man setze $b - c = z$; so ist (10)

2. $b = f - a + z$

2. $c = f - a - z$

4. $b.c = (f-a)^2 - z^2 = \frac{8.T}{\sin A}$ (9)

18) Daher

$$z^2 = (f-a)^2 - \frac{8.T}{\sin A}$$

$$= (f-a)^2 . \left(1 - \frac{8.T}{(f-a)^2 . \sin A}\right)$$

19) Man setze

$$\frac{2.\sqrt{\frac{2.T}{\sin A}}}{f-a} = \sin\theta$$

20) So ist $z = (f-a).\cos\theta$

21) Und $b = \frac{1}{2}.(f-a).(1+\cos\theta)$

$c = \frac{1}{2}.(f-a).(1-\cos\theta)$

22) Das ist (Trig. 19 S. 5. 7. Zus.)

$b = (f-a).(\cos\frac{1}{2}\theta)^2$

$c = (f-a).(\sin\frac{1}{2}\theta)^2$

Bestimmung.

23) Weil a bejaht seyn soll, so ist (16) f^2 grösser als $4.T.\cot\frac{1}{2}A$.

Exempel.

24) Es sey $f = 121$; $T = 686,28$; $A = 49° 42'$; Beynah das Trig. 20; 21; S. be-

berechnete Dreyeck, nur hie der Winkel ein wenig grösser.

25) $\log T = 2,8365035$
$\log 2 = 0,3010300$
$\log \cot \frac{1}{2} A = 0,3343025$

$3,4718360$
$\log f = 2,0827854$

$1,3890506$
gehört zu $24,494$
von $\frac{1}{2} f = 60,5$

läßt $a = 36,046$
daher $f - a = 84,954$

26) In der Trigonometrie war die hie berechnete Seite genau $= 36$ angenommen; Aus den dortigen Angaben fand sich der Winkel ihr gegenüber etwas kleiner als $49^\circ 42'$; Da er nun hie genau so groß angenommen ist, so ist hie die Cotangente seiner Hälfte kleiner als die Cotangente der dortigen Hälfte wäre, was man also von $\frac{1}{2} f$ hie abzieht ist kleiner, als das wäre, was man von eben dem $\frac{1}{2} f$ abzöge wenn man den dortigen Winkel genau braucht, deßwegen ist das hie gefundene a grösser als das dort angenommene.

27)

27) Nun für (19)

log 2. T = 3,1375335
log sin A = 0,8823357 — 1

3,2551978
halb = 1,6275989
10 + log 2 = 10,3010300

11,9286289
log (f-a) = 1,9291838

log sin θ = 9,9994451
giebt θ = 87° 6′ 16″
$\frac{1}{2}$ θ = 43 33 8
log sin $\frac{1}{2}$ θ = 0,8382280 — 1
verdoppelt = 0,6764560 — 1
log (f-a) = 1,9291838

log c = 1,6056398
c = 40,331
f-a = 84,954
b = 44,623

28) In Trig. 20 S. 24; war b = 40; c = 45 Die Buchstaben sind hie verwechselt, die Zahlen treffen beynah überein, die Unterschiede rühren von dem Winkel A; her wie in (26) gezeigt ist.

29) Probe. Der Innhalt ist = $\frac{b.\ c.\ \sin A}{2}$

log

log c = 1,6056398
log b = 1,6495588
log sin A = 0,8823357 — 1

3,1375343
log 2 = 0,3010300

log Innh. = 2,8365043

giebt den Innhalt 686,28

wie er in (22) angenommen war; Die letzten beyden Zifern des Logarithmen des Innhalts sind von den in log T unterschieden, geben aber keine beträchtliche unterschiedne Zahl; Begreiflich kommen solche Unterschiede daher daß der Logarithmen letzte Zifern alle nicht ganz richtig sind.

30) Die Aufgabe ist in Newton Arithmetica vniuersal. Prob. geom. VIII. p. 102 in s' Gravesands Ausgabe.

Newton sucht eine der beyden Seiten um den gegebenen Winkel. Er bemerkt selbst daß die unreine quadratische Gleichung die sich so findet, auch die andre dieser Seiten enthält. Also scheint sein Verfahren nicht ganz der Regel gemäß: Nicht eines von zwey Dingen zu suchen die zu den gegebenen Grössen einerley Verhalten haben.

Wie er aber verfahren wollte konnte er es nicht wohl ändern. Den Innhalt des Dreyecks in Rechnung zu bringen brauchte er ein Product aus Höhe in Grundlinie; Die Höhe konnte er

nicht

nicht aus dem Scheitel des gegebenen Winkels auf die gegenüberstehende Seite fällen, denn da hätte er diesen Winkel zertheilt, den er ganz lassen musste, ein rechtwinklichtes Dreyeck zu erhalten, in dem sich dieser Winkel befindet, und davon eine Seite die Höhe des Dreyecks ist. In diesem Dreyecke ist wegen des gegebenen Winkels, die Verhältniß der Seiten gegeben, und das braucht Newton zur ferneren Rechnung. Trigonometrische Formeln waren zu Newtons Zeiten in der Analysis nicht gewöhnlich, Ihnen hat man gegenwärtige bequemere Auflösung zu danken.

Aus der Gleichung (16) beantwortet man noch drey Fragen.

31) Von einem Dreyecke ist eine Seite, Umfang und Innhalt gegeben.

So findet man

$$\cot \tfrac{1}{2} A = \frac{(\frac{1}{2} f - a).\ f}{2\ T}$$

und ferner die beyden übrigen Seiten (22).

32) Summe der Seiten, eine Seite und Winkel ihr gegenüber

Also $T = (\frac{1}{2} f - a).\ \frac{1}{2} f.\ \text{tang}\ \frac{1}{2} A$

und nun die beyden übrigen Seiten.

33) Eine Seite, ein Winkel ihr gegenüber, und Innhalt.

$$f^2 = 2.a.f + 4.T.\cot \tfrac{1}{2} A$$

$$f = a \pm \sqrt{(a^2 + 4.T.\cot \tfrac{1}{2} A)}$$

34)

34) f bekömmt hie zweene Werthe da es doch nur eine Summe der Seiten giebt. Aber ein Werth ist verneint, und also nicht Summe der Seiten.

35) Die Frage (33) liesse sich durch Zeichnung so beantworten: Ueber der gegebenen Seite a, als Sehne, beschreibe man einen Kreis dessen Abschnitt, den Winkel A fasst. (Geom. Abh. I. Samml. 49 Abh. 28 §.).

Aus Innhalte und Seite, hat man $\frac{2.T}{a} = h$, Höhe des Dreyecks über der gegebenen Seite. In dieser Weite ziehe man eine Linie der gegebenen Seite parallel: wo sie den Kreis schneidet, ist die Spitze des Dreyecks, nach der gehen von beyden Enden der gegebenen Seite die übrigen Seiten. Es giebt freylich zwo solche Spitzen aber die Seiten die nach der einen gehen, sind nur verwechselt die Seiten die nach der andern gehen.

36) Die Wurzelgrösse (33) ist $= a. \sqrt{\left(1 + \frac{4.T.\cot\frac{1}{2}A}{a^2}\right)}$.

37) Man setze $\frac{2.\sqrt{(T.\cot\frac{1}{2}A)}}{a} = \text{tang } \eta$ so ist $f = a.(1 \pm \sec\eta)$, einer der beyden Werthe verneint.

38)

38) Es ist $1 + \sec\eta = \frac{1 + \cos\eta}{\cos\eta} = \frac{2.(\cos\frac{1}{2}\eta)^2}{\cos\eta}$ (Trig. 19 S. 5. Zus.)

39) Weil $1 - \sec\eta = -(\sec\eta - 1) = -\frac{(1-\cos\eta)}{\cos\eta} = -\frac{2.(\sin\frac{1}{2}\eta)^2}{\cos\eta}$ (Trig. 19 S. 7 Zus.)

So sind die beyden Werthe von f in (37)

der bejahte $= a.\frac{2.(\cos\frac{1}{2}\eta)^2}{\cos\eta}$

der verneinte $= -a.\frac{2.(\sin\frac{1}{2}\eta)^2}{\cos\eta}$

40) Soll das gesuchte Dreyeck rechtwinklicht seyn, so ist die Hypotenuse a der Halbmesser eines Kreises in dessen Umfange sich des rechten Winkels Spitze befindet. Also kann die Höhe über der Hypotenuse nicht grösser seyn als $\frac{1}{2}$ a; und der Innhalt nicht grösser als $\frac{1}{4}$. a. a. Ist er so groß, so ist das Dreyeck gleichschenklich.

41) Exempel. Ein rechtwinklichtes Dreyeck zu machen dessen Hypotenuse $a = 30$; Innhalt $T = 100$; $\frac{1}{2}A = 45°$

Also (37) $\text{tang}\,\eta = \frac{2.10}{30}$

weil $10 + \log\frac{2}{3} = 9{,}8239087$

So

So ist $\eta = 33^\circ\ 41'\ 24''$

$\frac{1}{2}\eta = 16\ \ 50\ \ 42$

daher $\log \cos \frac{1}{2}\eta = 9,9809538 - 10$

$2.\log \cos \frac{1}{2}\eta = 0,9619076 - 1$

$\log 2 = 0,3010300$

$\log a = 1,4771213$

$1,7400589$

$\log \cos \eta = 0,9201499 - 1$

$\log f = 1,8199090$

$f = 66,055$

$f - a = 36,055$

Nun (19) u. f. ist

$2.\sqrt{\frac{2.T}{\sin A}}$ hie $2.\sqrt{200} = \sqrt{800}$

$10 + \log\left(2.\sqrt{\frac{2.T}{\sin A}}\right) = 11,4515450$

$\log (f-a) = 1,5567245$

$\log \sin \theta = 9,8948205$

$\theta = 51^\circ\ 42'\ 44''$

$\frac{1}{2}\theta = 25\ \ 51\ \ 22$

$\log \sin \frac{1}{2}\theta = 0,6395986 - 1$

verdoppelt $= 0,2791972 - 1$

$\log (f-c) = 1,5567245$

$\log c = 0,8359217$

$c = 6,8537$

$f - a - c = b = 29,2013$

42) Probe;

$\log c = 0,8359217$

$\log 29,201 = 1,4653977$

$\log 0,5 = 0,6989700 - 1$

$\log (\frac{1}{2} b. c) = 2,0002894$

giebt $\frac{1}{2}. b. c = 100,06$ Ich hatte angenommen

$T = 100$

Aus Ludolfs Tetrogonometria ist

$a^2 = 900$

$c^2 = 46,97320369$

$a^2 - c^2 = 853,02679631$

$\sqrt{(a^2 - c^2)} = 29,206$

noch grösser als das vorige b; welches also mit dem vorigen c noch einen grössern Innhalt gäbe.

43) Ob ich Rechnungsfehler begangen habe, oder ob dieser kleine Unterschied des Innhalts welchen die Probe giebt, von dem angenommenen wegen der Zwischenrechnung mit soviel Winkeln entsteht, lasse ich unentschieden.

44) Die Aufgabe (40) ist schon in dieser Abhandlung I. Samml. 1. Abhandl. 5 §. aus Gerberts Geometrie angeführt worden. Die dortigen Zeichen in die hiesigen übersetzt ist $b + c = \sqrt{(a^2 + 4.T)}$; $b - c = \sqrt{(a^2 - 4.T)}$ Also $b + c = a. \sec \eta$; und $f = a. (1 + \sec \eta)$.

45) Weil man auf diese Art f nicht aus einer unreinen quadratischen Gleichung sucht wie in (33) so bekömmt man nur den bejahten Werth der beyden in (37).

Den

Den verneinten erhielte man, wenn man $b + c = -\sqrt{(a^2 + 4T)}$ setzte.

46) Setzt man $\tang \eta = \sin \zeta$, so ist $b - c = a. \cos \zeta$; Also
$b = a. (\sec \eta + \cos \zeta)$; $c = a. (\sec \eta - \cos \zeta)$
Ob man dadurch b und c, bequemer und schärfer finden würde als nach 19 und f. lasse ich ununtersucht.

47) In den gefundenen Formeln liegen allerley Sätze; z. E. in (32)
Eines rechtwinklichten Dreyecks Innhalt ist ein Product, aus der halben Summe aller Seiten weniger der Hypotenuse in die genannte halbe Summe.

Folglich ist dieses Product, noch einmahl so groß als das Product der beyden Seiten um den rechten Winkel.

48) Aus (16) ist

$$a = \tfrac{1}{2} f - \frac{2.T}{f}. \cot \tfrac{1}{2} A$$

$$b = \tfrac{1}{2} f - \frac{2.T}{f}. \cot \tfrac{1}{2} B$$

$$c = \tfrac{1}{2} f - \frac{2.T}{f}. \cot \tfrac{1}{2} C$$

$$o = \tfrac{1}{2} f - \frac{2.T}{f}. (\cot \tfrac{1}{2} A + \cot \tfrac{1}{2} B + \cot \tfrac{1}{2} C)$$

49) Nun ist (11. Abh.) die Summe der drey Cotangenten, ihrem Producte gleich

Also $T. \cot \frac{1}{2} A. \cot \frac{1}{2} B. \cot \frac{1}{2} C = \frac{1}{4} f^2$.

50) Und

$T = \frac{1}{4}. f^2. \tang \frac{1}{2} A. \tang \frac{1}{2} B. \tang \frac{1}{2} C$

51) Das ist

$T = \frac{1}{4} f^2. \tang \frac{1}{2} A. \tang \frac{1}{2} B. \cot \frac{1}{2} (A + B)$

So ist eines Dreyecks Innhalt, durch den Umfang und zweene Winkel gegeben.

52) Exempel. Bey dem Trigon. 20 S. 24; ist $f = 121$; Dorten ist A berechnet, nun berechne ich noch $\sin B = \frac{b. \sin A}{a}$ wo $\frac{b}{a} = \frac{40}{30}$. Ich finde $\log \sin B = 9,9282185$; Und nun

$A = 49^\circ\ 41'\ 17''$
$B = 57\ 57\ 17$
$C = 72\ 21\ 26$
$\frac{1}{2} A = 24\ 50\ 38$
$\frac{1}{2} B = 28\ 58\ 39$
$\frac{1}{2} C = 36\ 10\ 43$

$\log \tang \frac{1}{2} A = 0,6655760 - 1$
$\log \tang \frac{1}{2} B = 0,7433496 - 1$
$\log \tang \frac{1}{2} C = 0,8641035 - 1$

$0,2730291 - 1$
$2. \log 60,5 = 3,5635108$

$\log$ des Innh. $= 2,8365399$

giebt den Innhalt $= 686,34$; Um 0,06 gröſſer als in Trig. 21. Satze.

53)

53) Wenn von einem Dreyecke Umfang und die Winkel gegeben sind, findet man daraus den Innhalt (50) und ferner die Seiten (48).

54) Geometrisch erhellt das so: Aus den gegebenen Winkeln lässt sich ein Dreyeck zeichnen, das dem gesuchten ähnlich ist. Dieses gezeichneten Dreyecks Umfang ist also bekannt, sowohl als sein Innhalt. Und nun verhält sich das Quadrat vom Umfange des gezeichneten Dreyecks zum Quadrate des gegebenen Umfangs, wie der Innhalt des gezeichneten Dreyecks zum Innhalte des gesuchten. Ferner der Umfang des gezeichneten Dreyecks zu einer seiner Seiten wie der gegebne Umfang zu der Seite welche in dem gesuchten Dreyecke eben dem Winkel gegenüber steht; und so für alle Seiten.

55) Exempel der Rechnung. Man soll ein Dreyeck machen, dessen Umfang $f = 200$; die drey Winkel $A = 70$ Gr. $B = 60$ Gr. $C = 50$ Gr.

$\log \text{tang } \frac{1}{2} A = 0,8452268 - 1$
$\log \text{tang } \frac{1}{2} B = 0,7614394 - 1$
$\log \text{tang } \frac{1}{2} C = 0,6686727 - 1$

$\log \frac{1}{4} f^2 +$ Summe $= 3,2753389 = \log T^2$
$\log \frac{1}{2} f = 2$

$$\log \frac{2.T}{f} = 1,2753389$$

giebt $T = 1885,1$

Nun $\log \frac{2.T}{f}$ = 1,2753389

$\log \cot \frac{1}{2} A$ = − 0,8452268 + 1

1,4301121

$\log \frac{2.T}{f}$ = 1,2753389

$\log \cot \frac{1}{2} B$ = − 0,7614394 + 1

1,5138995

$\log \frac{2.T}{f}$ = 1,2753389

$\log \cot \frac{1}{2} C$ = − 0,6686727 + 1

1,6066662

von $\frac{1}{2} f$ = 100 abgezogen

$\frac{2.T}{f} . \cot \frac{1}{2} A$ = 26,922

läßt a = 73,078

von = 100

abgezogen = 32,651

b = 67,349

von = 100

abgezogen = 40,426

c = 59,574

Die Summe dieser drey berechneten Linien ist 200,001.

13. Ver-

13.

Vergleichung, zwischen Kreisfläche, Abschnitt, und Höhe desselben.

Nach Trig. 18. S.

1) Am angeführten Orte, ist, Halbmesser EA = a; Sehne AB = c; Winkel AEB = v; Höhe FI = h; Abschnitt ABIA = V = $\frac{1}{2}$ a². (v — sin v).

2) Auch $\frac{h}{a} = 1 - \cos\frac{1}{2}v = 2.(\sin\frac{1}{4}v)^2$

(Trig. 19 S. 7 Zus.)

3) Heisst die Kreisfläche = a². π = C

So ist $\frac{V}{C} = \frac{v - \sin v}{2.\pi}$

4) Wenn also gegeben ist, was für ein Theil, vom Halbmesser oder vom Durchmesser, die Höhe seyn soll, so ist v gegeben, und daraus, was für ein Theil der Abschnitt von der Kreisfläche ist.

5) Exempel. Es sey $\frac{h}{2.a} = 0{,}25$ oder die Höhe ein Viertheil des Durchmessers. Also (2) $\sin\frac{1}{4}.v = 0{,}5$ oder $\frac{1}{4}.v = 30°$ daher v = 120°; sin v = sin 60°; Und

$$v = 2,0943951$$
$$\sin v = 0,8660254$$
$$v - \sin v = 1,2283697$$
$$\text{Hälfte} = 0,6141848$$

$$\log 0,6141848 = 0,7882993 - 1$$
$$\log \pi = 0,4971499$$
$$\log (V : C) = 0,2911494$$
$$\text{giebt } \frac{V}{C} = 0,195501$$

6) Eine Circulschnitztafel, Canon areae segmentorum circuli, in Beyers Conometria Mauritiana, Setzt den Durchmesser = 100; und giebt die Höhe durch alle Hunderttheile an, nebst zugehöriger Fläche, und den Unterschieden zwischen jedem Paare nächsten Flächen, um Proportionaltheile zu suchen. Die ganze Kreisfläche ist 10 000 000 000 gesetzt das ist die Abschnitte sind in Zehntausendmilliontheilen der Fläche des ganzen Kreises angegeben. Der (s) heisst dorten 0,1955011095, Beyers Bezeichnung der Decimalbrüche in die jetzo gewöhnlichere übersetzt.

7) Der Titel von Beyers Buche ist: Conometria Mauritiana, das ist, Ein neuer Stereometrischer Tractat, von der lang gesuchten und gewünschten Visirung des vollen und leeren Stücks oder Theils eines Weinfasses, Samt denen dazu gehörigen Läng- und Circulruthen,

auch

auch der Circuln, und Circulstücken Flächtafeln. Dem Durchleuchtigen Hochgebohrnen Fürsten und Herrn, Herrn Morizen, Prinzen zu Uranien, Graven zu Nassau, Catzenelnbogen, Vianden und Dietz ꝛc. zu unterthänigen Ehren beschrieben und calculirt durch Johann Hartmann Beyern, Doct. Medicum Ordinarium, zu Frankfurt am Mayn. Frankf. 1619. In der Vorrede wird der Leser erinnert, da er was Nützliches in dem Buche findet, dasselbige Gott, und dem Durchleuchtigen Fürsten Mauritio Auriaco zuzuschreiben. Es könnte also wohl das Buch auf Veranlassung des Prinzen verfasst seyn. Er war ein grosser Freund und Kenner der Mathematik. Simon Stevins Werke, ein ziemlicher Foliant (Les Oeuvres de Simon Stevin, trad. par Albert Girard) sind das Compendium darüber Stevin ihm gelesen hat, und von viel theoretischen, und damahls schweren Untersuchungen meldet Stevin, der Prinz habe sie verlangt. Dieses denen zur Nachricht, die sich etwa auf eine andere Art erklären möchten, warum ein deutscher Fürst des vorigen Jahrhunderts die Nothwendigkeit des Weinvisirens erkannt hat. Beyde Erklärungen können wohl beysammen stehn.

8) In diesem Buche findet sich auch 17 u. f. S. eine Circularische Flächtafel, nähmlich für Durchmesser von 1 bis 1000, die ganzen Kreisfl., bis auf Hunderttausendtheile angegeben.

Bey 1000 ist die Kreisfläche 785398, 16339 welches mit dem Werthe von $\frac{1}{4}$ P Geom. 44 S. übereinstimmt, welcher die Fläche für den Durchmesser = 1, angiebt, und zeigt daß B. hie so weit den ludolphischen gleichgültige Zahlen gebraucht hat.

9) Dieses erinnere ich deßwegen, weil er in einer ähnlichen Tafel anderswo diese Genauigkeit nicht darstellt. Stereometriae inanium, noua et facilis ratio; Frf. 1603. Da steht am Ende Tabella cyclica, diametrorum, circumferentiarum, et planitierum. Die Durchmesser gehen durch Ganze und alle Zehntheile bis 108; bey 100; steht Umfang = 314, 172031 und Fläche = 7854, 3007854, beyde zu groß.

10) Die Tafeln (6; 8) braucht B. nun so:

Es sey z. E. in Längenmaasse eines Kreises Durchmesser = 2. a = 24, 27; Pfeil = h = 7, 02; So berechnet er $\frac{h}{2.\,a}$ = 0, 28924 als den Tafelpfeil. Nun stehen in seiner Tafel nur $\frac{V}{C}$ für $\frac{h}{2.\,a}$; 0, 28 und 0, 29; da sucht er nun durch Proportionaltheile, was dem Tafelpfeile 0, 28924 gehört. Das multiplicirt er mit der Fläche des ganzen Kreises welche dem gegebenen Durchmesser gehört, und diese Fläche findet er begreiflich aus der Tafel der Kreisflächen;

chen; So hat er den Abschnitt in Quadratmaasse desjenigen Maasses das zum Längenmaasse ist gebraucht worden.

Hiebey braucht er wegen der engen Gränzen seiner Tafeln, noch allerley Hülfsrechnungen; z. E. da in der Tafel (8) die Durchmesser nur bis 1000 gehen, so macht er $\frac{24,27}{3}$ = 8,09; die Kreisfläche die in der Tafel (8) diesem Durchmesser gehört, multiplicirt er mit 9, so hat er die Kreisfläche des gegebenen Durchmessers.

11) Durch Trigonometrie und Logarithmen, führt man die Rechnung ohne diese Tafeln, gewiß bequemer als mit diesen Tafeln. Mehr Schärfe möchten die Tafeln geben, in so fern nicht wegen der so oft nöthigen Proportionaltheile was von dieser Schärfe abgeht. Aber, wenn die Logarithmen Astronomen zulängliche Schärfe geben, so dächte ich Weinvisirer könnten sich auch damit befriedigen. Zu B. Zeiten wurden die Logarithmen noch wenig gebraucht.

12) In: Stereometrie or the art of Practical Gauging ... by John Smith Lond. 8°. die Vorrede ist 1672 datirt, befindet sich 210 u. f. S. Tafel der Segmente eines Kreises. Sie geht durch alle Zehnfache von Zehntausendtheilen des Durchmessers jede solche Menge von Zehnfachen heisst Arrow, und neben ihr

steht

steht unter Area of Segments wieviel Hunderttausendtheile der Kreisfläche, das Segment beträgt. Die Tafel hat vier Columnen; In der ersten wachsen die Arrows von 0,0010 des Durchmessers bis an 0,5000 In der vierten nehmen sie von 0,9990 bis 0,5000 ab. Neben jedem Arrow steht sein Segment. Wie nun dieser Einrichtung gemäß, in einer Zeile, in der 1 und 3 Columne Arrows stehn, die zusammen 1 oder den Durchmesser ausmachen, so stehn auch in der 2 und 4 Columne in einer Zeile, Segments die zusammen 1 oder die Fläche des ganzen Kreises ausmachen.

Nähmlich so

Arrow	Area of Segm.	Arrow	Area of Segm.
IF: ID	BIAB: C	DF: ID	BDAB: C

13) Proportionaltheile zu suchen, dient noch eine fünfte Columne, Common differences, die Unterschiede zwischen den Paaren nächster Glieder der 2 oder der 4 Columne. Die Glieder der 2 Columne wachsen um eben soviel als die nebenstehenden der 4 abnehmen, weil die Glieder in einer Zeile zusammen allemahl = 1 sind.

14) Für ein Exempel sey Arrow = 0,3620

$$= \frac{h}{2.a} = (\sin \tfrac{1}{4} v)^2 \quad (8; 2)$$

Es

Es ist aber

$10 + \log \sqrt{0,362} = 9,779353$

daher $\frac{1}{4} v = 36^\circ\ 59'\ 21'',1$

$v = 147\ 57\ 24,4$

$180^\circ - v = 32\ 2\ 35,6$

Daher, für den Halbmesser = 1

$147^\circ = 2,56563400$

$57' = 0,01658062$

$24'' = 0,00011635$

$0'',4 = 0,00000193$

$v = 2,58233288$

$\sin 32^\circ\ 2'\ 35'',6 = 0,53055885$

$v - \sin v = 2,05177403$

$\frac{1}{2}(v - \sin v) = 1,0258870$

$\log 1,0259 = 0,0111050$

$\log \pi = 0,4971499$

$\log (V:C) = 0,5139551 - 1$

giebt $V:C = 0,32655$

In Sm. Tafel stehn neben einander

A.	Segm.	A.	Segm.	Diff.
0,3620	0,32655	0,6380	0,67345	0,00122

Begreiflich braucht man für die Glieder der dritten und vierten Columne, weiter keine Rechnung, als die der zweyten und dritten von 1 abzuziehen. Das Glied der fünften, ist der Unterschied zwischen den Segmenten für 0,3610 und 0,3620 auch für 0,6380 und 0,6390.

15) Smiths Tafel ist also von eben der Art wie Beyers seine; giebt h: 2a in Tausendtheilen des Durchmessers an, da Beyers seine nur Hunderttheile enthält, und setzt neben einander die h: 2a die zusammen 1 ausmachen, da Beyer alle diese Brüche von 0,01 bis 0,99 nach einander folgen lässt, Auch in B. Tafel betragen die Flächen zusammen 1; deren Pfeile zusammen 1 ausmachen. B. Tafel giebt die Flächen schärfer an als Smiths seine.

17) Vollständiger und schärfer berechnet ist vermuthlich die Tafel in: A. Sharpe Geometry improv'd 1) by a large and accurate table of Segments of Circles .... Lond. 1718. Ich kenne das Buch aber nur aus der Recension in den leipziger Actis Eruditor. 1722. p. 229. Nach dieser Berichte, stellt die Tafel 5000 Abschnitte dar, jeden für einen eignen Quersinus, der Halbmesser ist 5000 gesetzt. Jeder Abschnitt ist in 17 Zifern angegeben, und die Unterschiede der nach einander folgenden stehn neben ihnen.

Was mir dieses Buch so weit bekannt gemacht hat, s. man in der 20 Abh. 33. §.

Eine verwandte Aufgabe.

18) Durch F ist die Linie FG gezogen, die den gegebenen Winkel AFG = w macht. Es sind IF = h; FA = $\frac{1}{2}$ c gegeben. Man sucht FG = x.

Erst-

Erstlich ist FD $= \frac{c^2}{4h}$ und EI $= a$

$= \frac{1}{2}h + \frac{c^2}{4.h}$

Nun ist im Dreyecke EFG der genannte Winkel $= 90° + w$ gegeben, nebst den Seiten EF $= a - h$; EG $= a$; des gegebenen Winkels Sinus ist $=$ cos w; man hat also sin EGF $= \frac{(a-h).\ \cos w}{a}$, folglich FEG $=$ 180 Gr. $-$ EFG $-$ EGF $=$ 90 Gr. $-$ (w $+$ EGF) folglich $x = \frac{a.\ \sin FEG}{\sin EFG}$.

Exempel $h = 1$; $\frac{1}{2}c = 50$; also $2.a = 1 + \frac{2500}{4}$ daher $a = 313$; $a - h = 312$;
Es sey $w = 20$ Grad.

log cos w =	9,9729858
log (a−h) =	2,4941546
	12,4671404
log a =	2,4955443
log sin EGF =	9,9715961

Daher

EGF =	69°	30′ +
EFG =	110	
	179	30 +
FEG =	0	30 −

Nun

Nun

log a = 2,4941546
log sin FEG = 7,9408419

10,4349965
log sin EFG = 9,9729858

log x = 0,4620107

giebt x = 2,897

Die Aufgabe steht in einem Briefe Mästlins an Keplern von 1616. Epistolae ad Io. Keplerum ... die Hansch herausgegeben 1718. fol. ep. 22. p. 47. Sie ist Mästlinen vorgelegt worden. Seine Auflösung auch durch Trigonometrie, ist viel weitläuftiger, Logarithmen braucht er nicht. Er findet die gesuchte Linie 232 solcher Theile, dergleichen die Höhe, mein h; 80 hält. Es ist 80. 2,897 = 231,76, daß also unsre Rechnungen wohl übereinstimmen, zumahl da ich mir nicht die Mühe gegeben habe die Winkel in Secunden zu suchen, wie M. gethan hat.

Die Absicht der Aufgabe war die tychonische Hypothese von der Refraction zu prüfen und mit der Höhe der Atmosphäre zu vergleichen. M. findet aber selbst in dieser Anwendung Dunkelheit.

14.

Einen Abschnitt zu machen der zur Kreisfläche eine gegebene Verhältniß hat.

1) Soll der Abschnitt grösser als die halbe Kreisfläche seyn, so ziehe man ihn von der ganzen ab, da hat man die Verhältniß des Restes zur ganzen Kreisfläche, folglich auch zur halben. Man suche also einen Abschnitt welcher zur halben Kreisfläche die gefundne Verhältniß hat; dieser macht mit dem Abschnitte welcher grösser als die halbe Kreisfläche ist, die ganze aus.

Z. E. Ein Abschnitt sollte $\frac{3}{4}$ der ganzen Kreisfläche seyn. So ist er die Ergänzung zur Kreisfläche, für einen andern, der $\frac{1}{4}$ der ganzen, oder $\frac{1}{2}$ der halben ist.

Kann man also den kleinen Abschnitt der Hälfte der halben Kreisfläche gleich machen, so ist der zugehörige grosse $= \frac{3}{4}$ der ganzen.

2) Heisst V ein Abschnitt, C die ganze Kreisfläche, so ist $\frac{V}{\frac{1}{2}C} = \frac{v - \sin v}{\pi} = m$ wo m nicht grösser als 1 wird. Das ist ein kleinerer Abschnitt, und W der zugehörige grosse $= C - V = C - \frac{1}{2} m . C$

Also $\frac{W}{C} = \frac{2 - m}{2}$.

Wäre daher W : C gegeben, so hätte man m; und suchte den zugehörigen V, der dann auch W gäbe.

3) Solchergestalt jede der Fragen welche die Ueberschrift anzeigt zu beantworten, dürfte man nur jede Frage von der Verhältniß eines kleineren Abschnittes zum Halbkreise beantworten. Da bedeutet v allemahl einen Winkel kleiner als 180 Grad. Der Sinus davon wächst mit dem Winkel zugleich, oder nimmt ab indem der Winkel wächst nachdem der Winkel unter oder über 90 Grad ist, allemahl ist der Sinus bejaht.

4) Man verstehe unter dz, eine Aenderung des Winkels z; und unter d sin z eine Aenderung seines Sinus; Auch endliche Aenderungen wenn man will, nicht blos unendlich kleine, wie in der Rechnung des Unendlichen gewöhnlich ist. Eben so, bedeute dx; die Aenderung einer Grösse = x.

5) Lehnsatz. Die Aenderung eines Sinus, beträgt allemahl weniger als die Aenderung des zugehörigen Bogens.

Aus dem Bogen welcher den Winkel z misst werde der welcher den Winkel z + dz misst; Zugleich sin (z + dz) aus sin z.

Wenn man sich die Figur entwirft wird man sehen daß die zusammengehörigen Aenderungen von sin z und cos z; zwo Seiten eines rechtwink-

winklichten Dreyecks geben, dessen Hypotenuse, die Sehne von dz ist.

Diese Hypotenuse ist folglich grösser als die Aenderung des Sinus, und der Bogen grösser als seine Sehne, folglich dz grösser als d sin z.

6) Es sey $z - \sin z = x$;

Man lasse z um dz wachsen, so ändert sich sin z um d sin z und man hat

$z + dz - \sin z - d \sin z = x + dx$.

Die erste Gleichung von der zweyten abgezogen, lässt

$dz - d \sin z = dx$

wo vermöge (5) dx eine bejahte Grösse ist.

7) Wenn z kleiner als 90 Grad ist, so wachsen Bogen und Sinus zugleich, der Bogen mehr als der Sinus.

Da ist dx bejaht, kleiner als dz.

8) Ist z grösser als 90 Gr. noch nicht 180; So nimmt der Sinus ab, indem der Bogen wächst, nicht soviel als der Bogen wächst (5).

Da ist d sin z verneint, also dx nicht nur bejaht, sondern auch grösser als dz; aber kleiner als 2. dz.

9) Für einen Abschnitt; V; der sich zur halben Kreisfläche verhält wie m: 1; ist (2)

$v - \sin v = m . \pi$.

10) Man nehme einen Bogen z an und berechne $z - \sin z = x$;

11) Ist x kleiner als m. π, oder $\frac{x}{m}$ kleiner als π; so nehme man einen grössern Bogen; der giebt was Grössers (6) und wenn das noch zu klein ist, werden immer grössere und grössere Bogen, wenn sie immer noch was Kleiners als m. π geben, doch dem gesuchten v immer näher und näher kommen.

12) Findet sich aber x grösser als m. π so nimmt man einen kleinern Bogen, der giebt was Kleiners; und so kann man sich dem v durch Verminderung der Bogen nähern.

13) Also den gesuchten Bogen zwischen ein Paar einschliessen, deren einer zu groß der andre zu klein ist, auch wenn man die Mühe des Rechnens nicht scheut, diese Gränzen enger und enger zusammen zu bringen.

14) Versuche welche x viel kleiner oder grösser als m. π gäben, also viel Rechnungen zur Näherung erfodern, vermeidet man wenn man für einige, v, die zugehörigen m im voraus berechnet hat, da man dann für gegebne m schon z nahe an den v wählen kann, deren m dem gegebenen nahe sind.

Abschnitt

Abschnitt dessen Bogen der Quadrant.

15) Also $v = 45°$; und

$v - \sin v = 0,5707963 \ldots$

$\log 0,57079 = 0,7564764 - 1$

$\log \pi = 0,4971499$

$\log m = 0,2593265 - 1$

giebt $m = 0,18169$

Eigentlich wird m ein wenig grösser seyn, weil die Zahl etwas zu klein ist deren Logarithme statt $\log(v - \sin v)$ gebraucht ward.

16) Sollte man also z. E. einen Abschnitt machen der 0,2 des Halbkreises wäre, so könnte man zur ersten Probe für z einen Bogen etwas grösser als 45 Grad nehmen.

Es sey $m = \frac{1}{3}$

17) Also $3.(v - \sin v) = \pi$.

Weil nun π etwas über 3 ist, so muß $v - \sin v$ etwas über 1 seyn.

18) Man suche also Bogen bey denen das zutrifft,

19) $120° = 2,094 \ldots$

$\sin 60° = 0,866$

$1,228$

dieß dreymahl gäbe 3,684, zuviel also ist der Bogen 120 Gr. viel zu groß.

So ist $3.(115° - \sin 65°) = 3,3024$

$3.(112° - \sin 68°) = 3,0825$

Also fällt der gesuchte Bogen zwischen 112 und 115; näher bey dem kleinern.

3. (113° — sin 67°) = 3,1551 ...

Der gesuchte Bogen fällt also zwischen 112 und 113, näher bey dem grössern.

20) So kömmt

112°	= 1,9547687
48′	= 0,0139626
	1,9687313
sin 67° 12′	= 0,9218631
	1,0468682
dreymahl	= 3,1406046
112°	= 1,9547687
49′	= 0,0142535
	1,9690222
sin 67° 11′	= 0,9217503
	1,0472719
dreymahl	= 3,1418127

Also fällt v zwischen 112° 48 und 49 Minuten Jener Bogen ist zu klein, dieser zu groß.

21) Secunden könnte man, wenigstens beynahe durch Proportionaltheile so finden:

3,1418127	
3,1406046	
12081	
3,1415926	$= \pi$
3,1406046	
9880	

Also

Also 12081 : 9880 = 60 : q
wo q die gesuchte Zahl der Secunden wäre

log 60 = 1,7781512
log 9880 = 3,9947569
5,7729081
log 12081 = 4,0821029
log q = 1,6908052

giebt 49,06 Secunden.

22) Man setze z = 112° 48′ 49″.
also = 1,9689688
sin 67° 11′ 11″ = 0,9217711
z — sin z = 1,0471977
dreymahl = 3,1415931

Dieses z ist also ein wenig zu groß.

Für z = 112° 48′ 48″,
oder = 1,9689640
sin 67° 11′ 12″ = 0,9217729
kömmt = 1,0471911
dreymahl = 3,1415733

Dieses z ist also ein wenig zu klein.

23) Solchergestalt fällt v zwischen 112° 48′ 48″ und 49″ näher bey 49.

24) Daß die Proportionalrechnung (21) eine einzelne Secunde nicht zuverlässig giebt wird man ihr leicht verzeihen. Die Sinus habe ich aus Pitisci Thesauro berechnet, wo sie von 10 zu 10 Secunden, in 15 Decimalstellen stehen. Vermittelst dieses Hülfsmittels könnte

man die Gränzen für v noch in Theilen von Secunden angeben, weil man z — sin z bis auf die 15 Decimalstelle angeben kann.

25) Nimmt man

$$v = 112^\circ\ 48'\ 49''$$
$$\tfrac{1}{2}v = 56\ 24\ 24{,}5$$
$$\tfrac{1}{4}v = 28\ 12\ 12{,}25$$

So findet sich

$$\log \sin \tfrac{1}{4}v = 0{,}6744965 - 1$$
$$2.\log \sin \tfrac{1}{4}v = 0{,}3489930 - 1$$

Der letzte Logarithme ist

$$= \log \frac{h}{2.a} \text{ und giebt}$$

$$h = 2.a.\ 0{,}22335$$
$$= a.\ 0{,}4467$$

So läßt sich in einem gegebenen Kreise die Höhe IF bestimmen, daß der Abschnitt, $\frac{1}{3}$ der halben Kreisfläche oder $\frac{1}{6}$ der ganzen ist.

Der grössere Abschnitt ist alsdann $= \frac{5}{6}$ der ganzen Kreisfläche.

26) In Smiths Tafel, stehen bey den Arrows 0,223 und 0,224; Segmente 0,16629 und 0,16735 das erste kleiner als $\frac{1}{6}$ der Kreisfläche, das andre grösser wie sich nach (25) gehört.

Es sey $m = \frac{v}{2}$

27) Der Abschnitt die Hälfte des Halbkreises; $v - \sin v = \frac{1}{2}\pi$. Folglich v grösser als der Quadrant.

28)

28) Man setze $v = \frac{1}{2}\pi + y$, also $\sin v = \cos y$ so kömmt $\frac{1}{2}\pi + y - \cos y = \frac{1}{2}\pi$ oder $y = \cos y$. Man sucht also einen Bogen der seinem Cosinus gleich ist.

29) Weil y kleiner als 90 Grad ist, so nehme man wiederum zu Proben, Bogen $= z$ kleiner als 90 Grad so daß $z - \cos z = x$.

30) Ist also ein solcher angenommener Bogen grösser als sein Cosinus, so nehme man einen kleinern, der hat einen grössern Cosinus, folglich ist nun $z - \cos z$ kleiner.

31) Geht man so fort, bis man $z - \cos z$ verneint findet, so hat man Gränzen zwischen welche y fällt.

32) 50 Gr. $= 0{,}872$; $\cos 50$ Gr. $= 0{,}642$
40 Gr. $= 0{,}698$ $\cos 40$ Gr. $= 0{,}766$

Also fällt y zwischen 40 und 50 Grade.

33) Solche Rechnungen geben

$42^\circ\ 21'$	$=$	$0{,}73914693$
cosin	$=$	$0{,}7390435$
Bog $-$ cos	$=+$	$0{,}0001034$
$42^\circ\ 20'$	$=$	$0{,}7388\,5604$
cos	$=$	$0{,}7392394$
Bog $-$ cos	$=-$	$0{,}0003834$

Also fällt y zwischen 42° 20 und 21 Minuten, näher bey 21.

Wenn man z beynahe so groß als y hat, nähert man sich dem y folgender Gestalt.

34) Es sey $y = z + p$ wo p einen Bogen kleiner als eine Minute bedeutet. Diese Foderung läßt sich erfüllen (33)

So ist beynahe $\sin p = p$ und $\cos p = 1$.

35) Nun ist allgemein

$\cos y = \cos z . \cos p - \sin z . \sin p$

also hie y oder

$z + p = \cos z - \sin z . p$

daher $p = \frac{\cos z - z}{1 + \sin z}$.

Wenn z kleiner als y ist, so ist p bejaht, im entgegengesetzten Falle verneint.

34) In (33) sey $z = 42° 21'$;

$1 + \sin z = 1,6736577$;

$\cos z - z = - 0,0001034$

$\log \cos z - z = 0,0145205 - 4$

$\log 1,6736 = 0,2236517$

$\log p = 0,7908688 - 5$

$\log 1'' = 0,6855749 - 6$

$\log p$ in Secund. $= 1,1052939$

daher $p = - 12'',743$

Folglich $z + p = 42° 20' 47'',257$ als ein der Wahrheit naher Werth von y

Und $\cos (z + p) = \sin 47° 39' 12'',743$.

34) Ich

34) Ich finde

$z + p = 0,739085158409$

$\cos(z + p) = 0,739085111159$

35) Den Bogen berechnete ich aus der Tafel für Bogen in Decimaltheilen des Halbmessers, die sich in der berlinischen astronomischen Tafeln drittem Bande befindet.

Man erstreckt die Angaben dieser Tafel leicht auf Decimaltheile der Secunden, z. E. für 0,2 einer Secunde rückt man nur jede der Zifern die 2 Secunden angeben, eine Stelle niedriger u. s. w. So finde ich den Werth von $z + p$ durch Addition von 6 Zeilen.

Für den Cosinus, habe ich Pitiscus Thesaurus gebraucht; da steht

$\sin 47^\circ 39' 10'' = 0,739076158187857$

Wachsthum für $10'' = .,\ldots.3265724156 9$

Durch die Logarithmen fand ich

$2,743 . 0,000032657 . 0,1 = 0,000008957 8$

welches zu $\sin 47^\circ 39' 10''$ addirt mir $\cos(z+p)$ gab.

36) Da der Bogen und sein Cosinus bis auf Zehnmilliontheile übereinstimmen, so habe ich meine Rechnung noch einmahl zu prüfen nicht nöthig erachtet.

Ihr gemäß wäre $z + p$ ein wenig grösser als y.

37) Die Näherung noch weiter zu treiben, setze man $y = z + p - q$ wo sich q und 1 statt

statt sin q und cos q setzen lassen. Also cos y oder $y = z+p-q = \cos(z+p)+q.\sin(z+p)$ und $q = \frac{z+p-\cos(z+p)}{1+\sin(z+p)}$ wo man im Divisor ohne merklichen Fehler $1+\sin z$ brauchen darf.

Also (34)

$\log(z+p-\cos(z+p)) = 0,6703386-8$
$\log(1+\sin z) = 0,2236517$
$\log q = 0,4466869-8$
$0,6855749-6$
$\log q$ in Secunden $= 0,7611120-3$
giebt $q = 0,0057691$ Secunden
$z+p-q = 42^\circ\ 20'\ 47'',251$

38) Damit man die vorige Rechnung so viel als möglich brauchen kann, bemerke man daß $\cos(z+p-q) = \cos(z+p)+q.\sin(z+p)$ wo verstattet ist $\sin z$ statt $\sin(z+p)$ zu brauchen.

Nun ist $\log q = 0,4466869-8$
$\log \sin z = 0,8284393-1$
$0,2751262-8$
Nun war $\cos(z+p) = 0,7390851115 9$
$+q.\sin z = 0,0000000188 41$
$\cos(z+p-q) = 0,7390851304 3$
Ferner $z+p = 0,7390851584 09$
$-q = -0,0000000279 69$
$z+p-q = 0,7390851304 40$

39) Al-

39) Also sind Bogen und Cosinus nur um eine Einheit der Ordnung = 11 unterschieden, und auch diesen Unterschied hätte eine etwas schärfer geführte Rechnung vernichtet. Also hat y, so nahe als man der Wahrheit zu kommen verlangen kann die Grösse $z + p - q$ (37) oder es ist $y = 42^\circ\ 20'\ 47''\ 15''',060$.

40) Euler, Introductio in Analysin infinitor. (Lausanne 1748) Lib. II. cap. 22; trägt unter den dasigen zum Kreise gehörigen Aufgaben als die erste vor: Den Bogen zu finden, der seinem Cosinus gleich ist. Er findet zuerst die Gränzen 42° und 20'; 21'; und dann, vermittelst einer blossen Proportionalrechnung, wobey er sich nur der Logarithmen bedient, über die 20 Minuten, noch 47 Secund. 14 Tertien. Dieses Bogens Cosinus und so des Bogens Länge selbst, sagt er sey = 0,7390847.

41) Ich suche zuerst den Cosinus von Eulers Bogen, oder den Sinus von 47° 39' 12'' 46''' aus Pitisci Thesauro so: In demselben gehen die Bogen von 10 zu 10 Sec. oder von 600 zu 600 Tertien. Ferner 2 S. 46 T. = 166 Tertien also (35) 600 : 166 = 0,000032657: Vierter Zahl. Die vierte Zahl giebt was zum in (35) angeführten Sinus muß addirt werden den Cosinus von Eulers Bogen zu bekommen. Ich suche diese vierte Zahl durch Logarithmen und finde so den Cosinus

von

von Eulers Bogen = 0,73908 51932
Und Eulers Bogen selbst = 0,73908 50336

Also ist Eulers Bogen kleiner als dieses Bogens Cosinus, oder: Eulers Bogen ist ein wenig zu klein, welches mit (39) übereinstimmt.

43) In der vierten Aufgabe dieses Capitels wendet Euler die erste an, den Abschnitt anzugeben, der des Halbkreises Hälfte ist.

44) Ich verfahre nun so: Nach (27) und (37) ist $v = 132^\circ\ 20'\ 47'',251$

$\frac{1}{4}v = 33\ \ 5\ 11,813$

$\log \sin \frac{1}{4}v = 0,7371179 - 1$

$2.\log \sin \frac{1}{4}v = 0,4742358 - 1$

giebt $\frac{h}{2a} = 0,298013$

$\frac{h}{a} = 0,596026$

Die Sehne welche das Segment abschneidet ist = a. 2. $\sin \frac{1}{2}v$;

$\log \sin 66^\circ\ 10'\ 23'',625 = 0,9613123 - 1$

$\log 2 = 0,3010300$

$\log$ (Sehne: a) $= 0,2623423$

giebt die Sehne = a. 18295;

Euler hat 1,8295422. Aus des Pitiscus Canon lässt sie sich noch genauer finden wenn es einigen Nutzen hat.

Aus-

Ausdruck des Abschnittes durch Sehne und Winkel.

45) Aus (1) ist $a = \frac{c}{2 \cdot \sin \frac{1}{2} v}$;

Also der Abschnitt

$$= \frac{c^2}{8} \cdot \left(\frac{v}{(\sin \frac{1}{2} v)^2} - 2 \cdot \cot \frac{1}{2} v \right).$$

15.

Eine mechanische Vorschrift einen Abschnitt eines Kreises zu berechnen.

1) Sie steht im: Memoire sur le jaugeage des navires par M. Bellery, de l'Ac. des Sc. d'Amiens et Ingenieur Hydraulique de S. A. R. Monseigneur le Comte d'Artois. Par. 1788. Da findet sie sich 57 S.

2) Des Raumes (calle) im Schiffe, verticaler, auf die Länge des Schiffs senkrechter Querschnitt, ist oben und unten von zwo parallelen geraden Linien begränzt, an den Seiten von Krümmungen, die man für Kreisbogen annehmen kann. Wenn man der Parallelen Endpuncte mit geraden Linien verbindet, so entsteht ein Trapezium mit parallelen Grundlinien, und jede seiner beyden Seiten, ist Sehne eines der vorerwähnten Kreisbogen.

2) Den

3) Den Abschnitt zwischen ihr und dem Bogen auszurechnen giebt Hr. B. folgende Regel: Man messe des Bogens grösten Abstand von ihr, oder seine Höhe, den Pfeil; ingleichen messe man mit einem biegsamen Lineale die Länge des Bogens; Diese Länge multiplicire man mit dem Pfeile, und das Product mit $\frac{31}{49}$; dieß sey der Abschnitt.

4) In den Zeichen Trig. 8 Satz heisst diese Regel:
$a.v.a.(1-\cos\frac{1}{2}v).\frac{31}{49} = a^2.v.2.(\sin\frac{1}{4}v)^2.\frac{31}{49}$.

5) Exempel. Es sey der Bogen $v = 50°$ sein Halbmesser $= 4$ Fuß, wie in Geom. 44 S. 8 Zus. XI.

Hätte man ihn unmittelbar gemessen, so hätte man ihn 3,490658 ... Fuß gefunden (Geom. 44 S. 6. Zus. VI.) Und seinen Pfeil $= 4 - 3{,}6252302$ (Geom. 44 S. 8 Zus. XI.) $= 0{,}3747698$

Also $\log 3{,}490658 = 0{,}5429073$
$\log 0{,}3747698 = 0{,}5737645 - 1$
$0{,}1166718$
$\log \frac{31}{49} = 0{,}8011656 - 1$
$0{,}9178374 - 1$
giebt 0,82763 Quadratfuß.

Er ist aber 0,852961 (Geom. 44 S. 8 Zus. XII.) Also die Vorschrift (2) nur sehr obenhin wahr.

Ich

Ich habe nach der letzten Formel in (3) gerechnet, auch alles mit Logarithmen, und bekomme den Logarithmen 0,9178366 — 1 welcher eben die Hunderttausendtheile des Quadratfusses giebt wie voriger.

6) Bey diesem Exempel wiche also Hr. B. Vorschrift weit von der Wahrheit ab. Sie ist aber auch nicht für selbiges eingerichtet. Ihr Ursprung ist folgender, im 30 §. von Hr. B. Schrift erzählt: Aus Erfahrungen nimmt er an daß die Krümmungen der Seiten des Schiffs, nicht leicht unter 56 Graden, und nicht über 90 betragen. Weil sich diese Aeussersten selten ereignen, so nimmt er den mittleren Bogen 73° und für den ist seine Vorschrift.

7) Um solche nicht ganz von vorne zu suchen kann man so verfahren:

Man setze (3) und Trig. 18 S.

$\frac{1}{2} a^2 . (v - \sin v) = a^2 . v . (1 - \cos \frac{1}{2} v) . n$

so kömmt $\frac{v - \sin v}{2 . v . (1 - \cos \frac{1}{2} v)} = n.$

8) Für $v = 73°$;

$v = 1,2740903$

$\sin v = 0,9563048$

$0,3177855$

Da nun $2.v = 143°$; $1 - \cos \frac{1}{2} v = 0,1961431$; so hat man

$$\log 143 + \log 1^\circ = 0{,}3972134$$
$$\log 0{,}19614 = 0{,}2925662 - 1$$
$$0{,}6897796 - 1$$
$$\log 0{,}31778 = 0{,}5021402 - 1$$
$$\log n = 0{,}8123606 - 1$$

giebt $n = 0{,}64918$;

Aus dem Logarithmen (4) folgt $\frac{31}{49} = 0{,}63265$ Hr. B. hat also einen Bruch gewählt der sich bequem ausdrucken lässt.

9) Mässe man des Bogens Sehne und Höhe, so gäbe sich aus ihr der Halbmesser, und der Bogen in Graden, dann der Abschnitt nach Trig. 18 S. ohne die Voraussetzung des mittlern Bogens, die doch von der Wahrheit ziemlich abweichen kann. Die nöthige Zeit zu dieser Rechnung müsste doch wohl gegeben werden wenn es um Ausmessung eines Schiffes zu thun ist. Wahrscheinlich aber muthet Hr. B. den Schiffvisirern Trigonometrie und Kreisrechnung nicht zu, denn er sagt ihnen, daß mit $\frac{31}{49}$ multipliciren, soviel ist, als mit 31 multipliciren und darnach mit 49 dividiren.

16.

Monden.

Zweene Kreise schneiden einander; Man verlangt die Fläche zwischen ihren Bogen.

1) Der erste Kreis sey der in (13 Abh.) betrachtete. Der zweyte habe G zum Mittelpuncte, sein Halbmesser GA = GB = b; Man sucht die Fläche zwischen den Bogen BIA; BKA; die man einen Mond nennen kann.

2) Der Winkel BGA = w; und $\sin \frac{1}{2} w = \frac{c}{2.b}$.

3) Abschnitt ABKA $= \frac{1}{2} b^2 . (w - \sin w)$

ABIA $= \frac{1}{2} . a^2 . (v - \sin v)$

4) Also der Mond, beyder Abschnitte Unterschied.

5) Weil $2a . \sin \frac{1}{2} v = c = 2.b . \sin \frac{1}{2} w$ so ist $a : b = \sin \frac{1}{2} w : \sin \frac{1}{2} v$. Weiß man also drey von diesen vier Dingen, so findet sich das vierte, wie man auch aus einem Halbmesser und dem ihm zugehörigen Winkel, die Sehne findet, die beyden Kreisen gemeinschaftlich ist.

6) Penther Praxis Geometriae 606. §. trägt diese Aufgabe vor, mit einer sehr weitläuftigen Auflösung.

Er berechnet des kleinern Kreises Ausschnitt BGAK; ferner die beyden Dreyecke BGE, AGE; So bekömmt er die Figur EBKAE; Von ihr den Ausschnitt BEAIB abgezogen, lässt den Mond. Für jeden Ausschnitt, berechnet er erst, den halben Umfang des Kreises, daraus des Kreises Fläche, und nun den Ausschnitt, desselben Winkel gemäß.

Da Trigonometrie P. Sache nicht war, so ist an einer Zeichnung gemessen was er zur Rechnung brauchte.

Er giebt ein Exempel, meine Buchstaben in seinen Zahlen ausgedruckt, $a = 114$ Fuß; $b = 57$; $v = 56°$; $w = 114°$.

Nach (5) ist für Penthers Halbmesser $\sin \frac{1}{2} v = \frac{1}{2} . \sin \frac{1}{2} w$
Aber $\frac{1}{2} \sin 72° = \sin 28° 23'$, da es $= \sin 28°$ seyn sollte.

Penthers Zahlen stimmen also nicht überein. Ich vermuthe er hat kleine Fehler in Messung der Winkel mit dem Transporteur begangen. Wer Lust hat, kann auf dem Kupferstiche bey P. Buche nachmessen.

Die Sehne giebt Penther nicht an; Aus b und w; folgt

$\log c = 2,0351111$; $c = 10,84$ Fuß

daraus man $\frac{c}{2a} = \sin \frac{1}{2} v$ findet und wie vorhin $\frac{1}{2} v = 28° 23'$ bekömmt.

Pen-

Penther giebt für den Mond 2290 $\frac{320}{500}$ Quadratfuß.

Weil er aber Zahlen annimmt die nicht mit einander bestehen können, so hat er keinen Mond berechnet.

Es sind allemahl zweene Monden beysammen.

7) Die Figur zeigt der beyden Kreise Mittelpuncte, auf einer Seite der gemeinschaftlichen Sehne; G muß näher bey ihr seyn als E weil b kleiner ist als a.

8) Die Linie durch beyde Mittelpuncte begegnet jedes Kreises Umfange zweymahl.

9) Ich setze sie begegnet dem grössern Kreise, in I und in I* der erste Punct liegt in dem kleinern Abschnitte des grössern Kreises, der zweyte in dem grössern.

10) Eben so in dem kleinen Kreise auf einer Seite der Sehne, K mit I und K* mit I*.

11) So giebt es deutlich, den ersten Monden zwischen den Bogen BIA; BKA, den ich bisher allein betrachtet habe, und den zweyten, zwischen den Bogen BI* A; BK* A.

12) Der Winkel BEI $= \frac{1}{2}$ v, ist spitzig, der BGK $= \frac{1}{2}$ w ist grösser und wächst bis an 90 Grad, indem G bis in BA rückt.

13) Man könnte aber auch $\frac{1}{2}$ v stumpf annehmen; da bedeutete es BEI*, und $\frac{1}{2}$ w den

kleinern stumpfen Winkel BGK*, der bis zu einem rechten abnimmt, indem G bis in F rückt.

14) In (12) (13) ist für die Gränze 180° für w; Quadrant für $\frac{1}{2}$ v.

15) Nun kann auch die gemeinschaftliche Sehne zwischen beyden Mittelpuncten liegen. Weil es indessen allemahl der kleinere Kreis ist der um G geht, so fällt K* zwischen F und I* und die Monde sind wie vorhin, zwischen den Bogen BIA, BKA und den BI*A, BK*A.

16) Nennt man in (15) die Winkel BEI $= \frac{1}{2}$ v; BGK $= \frac{1}{2}$ w; so ist der letztere stumpf, also sein Cosinus verneint.

Nähmlich in der Figur zu (1) ist EF $=$ a. cos $\frac{1}{2}$ v; GF $=$ b. cos $\frac{1}{2}$ w; Da man nun beyde a und b als bejaht annimmt, so wird FG für (16) verneint, oder G fällt auf die Seite der gemeinschaftlichen Sehne, welche der auf welcher E liegt entgegengesetzt ist.

Fernere Betrachtungen über die Fläche des Mondes.

17) Allgemein ist sie

$\frac{1}{2}$. b^2. w $-$ $\frac{1}{2}$ a^2. v

$-$ $\frac{1}{2}$ b^2. sin w $+$ $\frac{1}{2}$ a^2. sin v

In der Figur ist das

Ausschnitt GBKAG $-$ Ausschnitt EBIAE $-$ Δ BAG $+$ Δ BAE.

18)

18) Sind w, v, selbst in der Gleichung so muß man die Verhältniß der Maasse dieser Winkel gegen den Halbmesser wissen, also Rectification und Quadratur des Kreises.

19) Wüsste man die Fläche eines Mondes anders woher, so hätte man aus ihr die Verhältniß (18). Also hängt Fläche des Mondes mit der Rectification des Kreises zusammen, wenn im Ausdrucke der Fläche, die Winkel selbst sind. Hieraus erhellt was erfodert wird.

Die Fläche eines Mondes ohne Quadratur des Kreises anzugeben.

20) Da muß die erste Zeile in (17) wegfallen, damit die Fläche nur durch die Halbmesser und Sinus gegeben ist.

21) Aber auch die Sinus müsstten keine andre Theilung eines schiefen Winkels erfodern, als die sich durch Halbiren bewerkstelligen lässt, wenn man Alles durch Elementargeometrie verrichten wollte.

22) Die Bedingung (20) erfodert die beyden Ausschnitte EBIAE = GBKAG oder $a^2 : b^2 = w : v$.

23) Dieß mit dem allgemeinen Satze (5) verbunden, giebt

$$a : b = \frac{w}{\sin \frac{1}{2} w} : \frac{v}{\sin \frac{1}{2} v}.$$

24) Eine Art wie diese Bedingung erfüllt wird, bietet sich leicht dar:

Der Mond des Hippokrates.

25) Es sey $b = \frac{1}{2} c$; und $c = a\sqrt{2}$ oder $BEA = 90°$, und G falle in F.

So ist $w = \pi$; $v = \frac{1}{2}\pi$, und

$a.\ a : b.\ b = 1 : \frac{1}{2} = w : v$;

Ferner $\sin w = 0$; $\sin v = 1$; also der Mond $= \frac{1}{2} a^2$.

26) Man ziehe also in einem Kreise die beyden Halbmesser BE, EA, senkrecht auf einander. Ueber des Quadranten Sehne BA, als Durchmesser beschreibe man einen Halbkreis. Zwischen diesem Halbkreise BKA und dem Quadranten BIA; ist ein Mond enthalten, dessen Fläche so groß ist als das geradelinichte rechtwinklichte Dreyeck BEA.

27) Diese Erfindung wird einem Hippokrates aus Chios zugeschrieben, der die Kaufmannschaft getrieben habe, und in der Geometrie gute Einsichten besessen. Umständlich handelt von ihm Cramer, Sur Hippocrate de Chio Mem. de l'Ac. des Sc. de Prusse 1748; p. 482.

Wie man aus des Hippokrates Verfahren eines herleiten könne, die Fläche des Halbkreises zu erschöpfen, zeigt *Jo. Polenus*, de vorticibus coelestibus dialogus, cui accedit quadratura circuli Archimedis et Hippocratis Chii analytice

lytice expressa Patav. 1712; Ich kenne das Buch nur aus Act. Erud. Lipf. 1712; wo sich das hieher gehörige, mit einer Figur p. 428. findet.

28) Man setze $v = 60°$; $b = \frac{1}{2}a$; daß also wiederum G auf F fällt und $w = \pi$; So entsteht ein Mond zwischen dem Bogen BIA von 60 Graden, und dem Halbkreise BKA über der Seite des Sechsecks im Kreise um E. Dieser Mond ist also $= \frac{1}{2}a^2 . \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ folglich nicht ohne Quadratur des Kreises zu berechnen.

29) Hippokrates stellte sich einen ersten Kreis vor dessen Halbmesser $= \frac{1}{2}a$; und einen zweyten dessen Halbmesser $= a$; In den letzten beschrieb er ein Sechseck, und über jeder Seite des Sechsecks einen Halbkreis, dessen Fläche also so groß ist als die ganze Fläche des ersten Kreises.

Jeder solcher Halbkreis, besteht aus dem Abschnitte, zwischen Seite des Sechseckes und Bogen von 60 Graden des zweyten Kreises, und einem Monde zwischen dem genannten Bogen, und dem Halbkreise über der Seite des Sechsecks.

Nun ist

Sechseck + 6 Abschnitten = zweytem Kreise
= 4. dem ersten.

Ferner

6 Abschnitte = 3. der erste — 6 Monden

Also

Sechseck — 6 Monden = dem ersten Kreise.

Das ist richtig, giebt aber nicht die Quadratur des Kreises, weil man die Monden nicht ohne Quadratur des Kreises hat (28).

Blancanus, Aristotelis loca Mathematica (Bonon. 1615.) art. 17; glaubt, Hippokrates habe wohl eingesehen, daß sich der Kreis durch diese sechs Monden nicht quadriren lässt, aber diese Schlüsse weil der Irrthum so sinnreich ist, vorgetragen.

30) Cramer a. a. O. giebt an wie man Monde finden kann deren Fläche ohne die Quadratur des Kreises gegeben ist. Er gründet sich auf die Gleichheit der Ausschnitte (22) braucht aber zur Construction krumme Linien die auf höhere Ordnungen steigen.

31) Lässt man die Bedingung (21) weg, so kann man versuchen, ob Monden deren Fläche sich ohne die Quadratur des Kreises berechnen lässt, algebraisch durch Gleichungen zu finden sind, wenn man sie auch nicht nach der Elementargeometrie blos durch Kreis und gerade Linien verzeichnen kann.

32) Es sey (22) $a^2 = n. b^2$; weil sich die halben Winkel wie die ganzen verhalten, so ist $\frac{1}{2} w = n. \frac{1}{2} v$.

33)

33) Und nach (5) $\sin \frac{1}{2} w = \sin \frac{1}{2} v . \sqrt{n}$.

34) Man nenne $\sin \frac{1}{2} v = x$; $\sin \frac{1}{2} w = y$.

35) Wenn n eine ganze Zahl ist, so giebt sich allemahl eine Gleichung zwischen x und y (Anal. endl. Gr. 175;) nur immer von höhern Graden, je grösser n ist.

36) Diese Gleichung mit der (33) verbunden, kann man y wegschaffen und findet eine Gleichung für x (Anal. endl. Gr. 199).

37) Exempel $n = 3$; so kömmt in (35) $y = 3x - 4 . x^3$.

38) Also in (33)

$$3 . x - 4 x^3 = x . \sqrt{3}; \quad \frac{3 - \sqrt{3}}{4} = x^2.$$

Nun ist $3 - \sqrt{3} = 1,2679492$

Dieses mit 4 dividirt $= 0,3169873$

Durch Proportionaltheile

$\log 0,3169873 = 1,5010418 - 2$

$10 +$ halb $= 9,7505209$

Dieß ist log tab x; also

$\frac{1}{2} v = 34^\circ\ 14$

$v = 68\ 28$

$\frac{1}{2} w = 102\ 42$

$w = 205\ 24$

$180^\circ - \frac{1}{2} w = 77\ 18$

39) Zur Verzeichnung nehme man a nach Gefallen an; Setzt man es $= 1$, So ist

b =

$b = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,5773503$

$BF = \sin \frac{1}{2} v = 0,5625644$

$EF = \cos \frac{1}{2} v = 0,8269170$

$GF = -b. \cos 77^\circ 18' = -b. 0,2198462$

Nähmlich die gemeinschaftliche Sehne geht zwischen den Mittelpuncten (16).

Des Mondes Innhalt ist die zweyte Zeile in (17) die man für dieses Exempel berechnen kann. Der dortige Unterschied von zwey geradelinichten Dreyecken, wird hie Summe, weil sie auf beyden Seiten der gemeinschaftlichen Grundlinie liegen.

40) Ge. Wolfg. Kraft, Institutiones Geometriae sublimioris Tub. 1753; enthalten nur Einleitung und Geschichte der höhern Geometrie, etwas von Kegelschnitten, und ausführlich allerley Lehrsätze vom Kreise; Die Fortsetzung ist nicht erschienen; Kraft starb zu Tübingen 1754; 16 Jul. im 53 Jahre seines Alters.

In 165 u. f. §. handelt Kraft von den Monden. Er erwähnt eine theoriam generalem meniscorum vel lunularum, in *Daniel* Bernoullis Exercitationibus Mathematicis Venedig 1724; und daraus die Methode Monden anzugeben deren Flächen sich ohne Quadratur des Kreises berechnen lassen. Sie beruht auf der Gleichheit der Ausschnitte (22) Kraft 167 §. giebt

giebt das Exempel (37) Ich glaube meine Rechnung wird bequemer seyn. Den Winkel den ich $\frac{1}{2}$ v nenne sagt Kraft finde man durch Trigonometrie etwa 34° 16′.

41) Krafts Abh. de Lunulis quadrabilibus e variarum curuarum combinatione ortis Comm. Petrop. T. VI. ad ann. 1732; 33; p. 156, betrifft wie die Ueberschrift zeigt auch andre krumme Linien.

42) Krumme Linien zu finden, deren Fläche allgemein auf die Quadratur des Kreises oder der Hyperbel ankömmt, in einzelnen Fällen aber blos durch Ausrechnung geradelinichter Figuren gegeben ist, lehret Joh. Bernoulli Lect. Hospitalian. V. Op. T. III. p. 408. Ich erwähne dieses hie deßwegen, weil dabey, eben wie bey den Monden, sich aufheben muß, was durch Quadraturen berechnet wird.

43) Mehrere Monden zu verzeichnen denen ebene geradelinichte Figuren gleich sind, lehret Vieta Variorum de reb. Math. responsorum Liber 8; cap. 9. *Franc. Vietae* Opera Math. congesta studio *Franc. a Schooten* Leid. 1646 fol. p. 377.

44) Eine Figur zwischen drey Kreisbogen, wird Arbelus genannt, (ἀρβηλος, ein Schusterkneif) dergleichen entsteht zwischen dem Umfange eines Halbkreises, und den Umfängen zweener Halbkreise deren jeder des ersten Halbmesser

messer zum Durchmesser hat, beyde aber mit dem ersten Halbkreise auf einer Seite seines Durchmessers liegen. Bekanntlich ist diese Figur die Hälfte des grössern Halbkreises.

45) In einem Kreise nehme man einen Bogen von 120 Graden; durch seinen Mittelpunct und jeden seiner Endpuncte, beschreibe man Bogen die mit ihm einerley Halbmesser haben, und ihre erhabenen Seiten seiner Höhlung zu kehren. Dieser Arbelus ist so groß als das Parallelogramm zwischen den Sehnen letztgenannter beyder Bogen, und der beyden Hälften des Bogens von 120 Graden.

Dieses lehrt Vieta a. a. O. und giebt mehr Arbelos an, die geradelinichten Figuren gleich sind.

17.

Fläche zwischen Bogen zweener Kreise die nicht einerley Mittelpunct haben, und geraden Linien nach des einen Mittelpuncte.

1) Um A gehe ein Kreis mit dem Halbmesser AD = a; Um B einer mit Halbmesser BE = b; Es sey der Abstand der Mittelpuncte AB = c.

2) Soll der zweyte Kreis ganz in den ersten fallen, so ist AE < AD oder $c + b < a$.

3) Mit DF, dem Durchmesser des grössern Kreises durch beyder Mittelpuncte, mache BG aus des kleinern Mittelpuncte einen Winkel FBG = φ.

4) Man sucht den Raum FHIG.

5) Im $\triangle$ BAG ist $\sin G = \frac{c}{a} \cdot \sin \varphi$.

6) Man hat also FAG = $\varphi + G = \psi$

7) Also $\triangle$ BAG = $\frac{1}{2}$ c. a. $\sin \psi$

8) Und Ausschnitt FAG = $\frac{a^2 \cdot \psi}{2}$

9) Ausschnitt HBI = $\frac{b^2 \psi}{2}$;

10)

FGIH = $\triangle$BAG + Ausschn. FAG − Ausschn. BI

= $\frac{1}{2}$. (a. c. $\sin \psi + a^2 . \psi - b^2 . \varphi$)

11)

11) Sind die Kreise concentrisch, so ist $c = 0$; und (10) giebt die Formel für ein Stück des gewöhnlichen Kreisringes.

12) Ginge aus B noch eine andere Linie BK, die einen andern Winkel mit BF machte, so fände man für diesen Winkel eben so das Stück zwischen beyden Kreisen FKLH.

13) Und dann gäbe 12; 10; das Stück zwischen beyden Kreisen das beyde Linien bestimme, GILK.

14) Penther Geom. Pract. 611; lehret ein Stück eines Circulkranzes, wie (13) so berechnen: Man soll die Sehnen LI, KG ziehen, und das geradelinichte Viereck KLIG ausrechnen, dazu den Abschnitt zwischen Sehne KG und ihrem Bogen addiren, und den zwischen Sehne LI und ihrem Bogen abziehen. Ein Exempel giebt er nicht.

Die Mittelpuncte der Kreise zeigt Penthers Figur nicht, Sie wären doch nöthig, denn zur Berechnung des Abschnittes den man addiren soll gehört der Winkel KAG, und zur Berechnung des abzuziehenden der Winkel LBI. LI und KG müssen eben nicht parallel seyn, und so würde die Berechnung des geradelinichten Vierecks schon ziemlich weitläuftig werden, auch wenn man allenfalls an einer Zeichnung soviel messen wollte als sich daran messen liesse.

18. Rin-

18.

Ringe zwischen concentrischen Kreisen.

Geom. 44 S. 10 Zus.

1) R sey der grössere Halbmesser, r der kleinere, $R - r = u$ des Ringes Breite, E seine Fläche, $1 : \pi$ Verhältniß des Durchmessers zum Umfange; so ist $E = (R + r).(R - r).\pi$.

2) $R = \sqrt{\left(r^2 + \frac{E}{\pi}\right)}$;

$r = \sqrt{\left(R^2 - \frac{E}{\pi}\right)} = R.\sqrt{\left(1 - \frac{E}{\pi.R}\right)}$

3) Hat man also des Ringes Grösse, und einen der beyden Halbmesser, so hat man auch den andern, folglich die Breite $u = R - r$.

4) Von einem Kreisringe sind Fläche $= E$ und Breite $u = R - r$ gegeben; Man sucht seine Halbmesser.

Also der Halbmesser Summe bekannt (1) $R + r = \frac{E}{u.\pi}$, daher $2.R = \frac{E}{u.\pi} + u$;

$2.r = \frac{E}{u.\pi} - u$.

Exempel. $E = 500,5$ Quadratfuß, $u = 3,5$ Fuß; $\frac{E}{u} = \frac{1001}{7} = 143$

$$\log \frac{E}{u} = 2,1553360$$

$$\log \frac{1}{\pi} = 0,5028501 - 1$$

$$\log \frac{E}{u.\pi} = 1,6581861$$

der Logarithme gehört zu 45,5 18

u = 3,5

2. R = 49,0 18

2. r = 42,0 18

Das Exempel steht im 53. Epigramme, 89 S. bey Laurenbergs Gromatica, der kleinere Durchmesser ist durch einen Druckfehler 24 statt 42 angegeben.

Gromaticae libri tres, de Iugeratione, Podismo, Centuriatione . . a *Io. Laurenbergio* Math. in Ac. Sorana Prof. Hafn. 1640; 4°, sind allerley Aufgaben von Ausrechnung der Figuren auf Exempel griechischer Oerter angewandt, wo die Angaben von diesen Oertern stehen ist nicht angezeigt. *Io. Laurenbergii* Gromatica qua jus terminale et Finium regundorum leges explicantur accessere epigrammata . . . hat soviel ich sehe nur diesen neuen Titel bekommen, aber die Epigrammen sind von neuem dazu gekommen, bey vorhin angeführtem Exemplare finden sie sich nicht. Sie sind griechisch, in lateinische Verse übersetzt, enthalten arithmetische und geometrische Aufgaben.

Eine

Eine Probe des Witzes und der Gelehrsamkeit sey die lateinische Uebersetzung des Epigramms zu dem gegenwärtige Rechnung gehört:

In Phyllida.

Ludit, amat, juvenum consortia mollia captat
Et noctu Veneris praelia Phyllis init,
Virgo tamen semper manet inviolata; quid istuc?
An sese Canathi fonte lavare solet?

In der Erklärung heisst es: jam pridem exaruit ille fons, pudoris amissi integritatem restaurare creditus. Hic apud Nauplienses olim fuisse memoratur, Canathus nomine, et religioso cultu ab accolis observatus, in quem aiunt Junonem quotannis descendere solitam et ejus adspersu atque irroratione deperditam recuperare virginitatem. Quamobrem Argivorum urbes spira marmorea perfectae rotunditatis illum clauserunt, ne abs qua femina adiretur. Sepimenti hujus, formae excellentia et materiae nobilitate stupendi, latitudinem tribus et semisse pedibus aream autem, seu superficiem pedibus quingentis et semisse a mensoribus definitam, perhibent Junonis sacerdotes.

Quae fuit Canathi mensura?

Die Antwort findet sich aus voriger Rechnung; Auf des Buches Titelblatte, ist der Brunnen abgebildet, neben andern Gegenständen der Epigrammen.

5) Ein Kreis so groß als der Ring, habe f zum Halbmesser, so ist $f^2 = \frac{E}{\pi}$, da man nach (1); f mit R, r, vergleichen kann.

Ringe von gegebener Grösse anzugeben.

6) In Schwenters Erquickstunden III Th. 44 Aufg. 211 S. steht folgende Aufgabe; unter der Aufschrift: Eine Rechnung von einem Schleifsteine Andreae Helmreichs vom Eißfeld:

Drey kaufen einen Schleifstein, dessen halber Diameter 8 Spannen, um 3 fl. (= 63 groschen) giebt B soviel als C; und A, $\frac{5}{8}$ soviel als einer, Frag: wieviel jeder bezahlt, und wieviel Spannen er von dem Stein für sein Geld abschleifen darf, dergestalt daß die letzte Spann beym Centro keinem zugerechnet werde.

7) Nähmlich, durch den Mittelpunct geht des Schleifsteins Axe, die eine Spanne im Durchmesser hat. Was man also brauchen kann, ist ein Ring dessen äuserer Halbmesser = 8 Spann, innerer = $\frac{1}{2}$; also Fläche = $8,5 \cdot 7,5 \cdot \pi = F$

$$\begin{array}{rl} \log 63,75 & = 1,8044802 \\ \log \pi & = 0,4971499 \\ \hline & 2,3016301 \end{array}$$

Die Fläche ist also = 200,27 Quadratspannen.

8) Wenn

8) Wenn A und B, jeder x gr. gegeben haben so ist was A, B, C, zusammen gegeben haben $= (2 + \frac{5}{8}) \cdot x = 63$ giebt $x = \frac{63 \cdot 8}{21}$ $= 24$, soviel haben B, C, jeder gegeben, aber A hat 15 gegeben; also verhalten sich die Theile die A, B, C; von der Fläche (7) bekommen wie 15: 24: 24 oder wie 5: 8: 8, das ist A bekömmt $\frac{5}{21}$ der Fläche, aber B, C, jeder $\frac{8}{21}$.

9) Soll nun C seinen Theil zuerst abschneiden, so ist dieser Theil ein Kreisring, dessen Fläche $= \frac{8}{21} \cdot F =$ dem E in (1), der äusere Halbmesser $= R = 8$; also des inneren r, Quadrat $= 64 - \frac{8}{21} \cdot 63,75 = \frac{1344 - 510}{21}$ $= \frac{834}{21}$; aber $\frac{1}{2} \log \frac{834}{21} = 0,7999733$ daher $r = 6,3092$; Folglich $u = 1,6908$ für die Breite des Ringes welcher dem C gehört.

10) B bekömmt ebenfalls $\frac{8}{21} \cdot F$; soll er nun seinen Theil zunächst nach C abschneiden so ist

in (1)	R	E
für B	6,3092	$\frac{8}{21} \cdot F$

also $r = R \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{8}{21} \cdot \frac{6,375}{R\,R}\right)}$.

11) Was unter dem Wurzelzeichen, von 1 abgezogen wird, ist $= \frac{510}{21.R.R}$ wo R das bedeutet was r in (9) war. Also

2. log R	= 1,5999466
log 21	= 1,3222193
	2,9221659
log 510	= 2,7075702
	0,7854043 — 1

giebt das abzuziehende = 0,61010 also die Grösse unter dem Wurzelzeichen = 0,38990.

12) log 0,3899 = 1,5909532 — 1
halb = 0,7954766 — 1
log R = 0,7999733
log r für B = 0,5954499
r für B = 3,9395
R . . . = 6,3092
u . . . = 2,3697

Das letzte ist die Breite des Ringes welcher für B gehört, von einem äusern Umfange dessen Halbmesser = 6,3092 ist, einwärts genommen.

13) Der Ring welcher für A übrig bleibt, hat zum äusern Halbmesser

R für A	= 3,9395
r für A	= 0,5 (7)
Summe	= 4,4395
Unterschied	= 3,4395

log

log Summe = 0,6473341
log Unterſch. = 0,5364953
1,1838294
log π = 0,4971499
1,6810723

giebt dieſen Ring = 47,982 — Quadratſpanne.

14) Nach (8) ſoll dieſer Ring $\frac{5}{21}$. F = $\frac{10}{42}$. F ſeyn. Nun iſt (7)

1 + log F = 3,3016301
log 42 = 1,6232493
1,6783808

giebt $\frac{5}{21}$. F = 47,685 — Quadratſpanne.

15) Alſo bekömmt A, 0,297 Quadratſpannen zuviel, welches zu vermeiden ſchärfere Rechnungen für C und B erfoderte als ich angeſtellt habe.

16) Meine Abſicht war zu zeigen, wie Ringe von gegebner Gröſſe, mit zulänglicher Richtigkeit, doch ohne allzugroſſe Mühe können berechnet werden. Schwenters Auflöſung iſt ganz unrichtig. Er beſchreibt ein Quadrat im Kreiſe, deſſen Diagonale alſo des Kreiſes Durchmeſſer iſt. Dieſes Quadrats Seite theilt er in 16 Spannen, eine Quadratſpanne bleibt in der Mitte für die Axe, und nun giebt er an wieviel Quadratſpannen, jedem zugehören, wobey er ſich auf den Satz beruft daß ſich Flächen

der Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten.

Das Quadrat im Kreise füllt den Kreis nicht aus, Man kann also von seiner Fläche und deren Theilen nicht auf die Grössen der Ringe schliessen die Schw. gleichwohl jedem zuzutheilen scheint.

17) Es sey in (1) $E = n. r^2. \pi$ so ist $R = r. \sqrt{(n+1)}$.

18) Aachen soll einen beynah vollkommnen Zirkel bilden, dessen Umfang nicht völlig 2 Stunden beträgt ... Kaiser Friedrich I. erweiterte Aachen um die Hälfte indem er noch einen Zirkel darum zog und ihr also die vorige Gestalt lies. —

Joh. Bernoullis Sammlung kurzer Reisebeschreibungen Jahrg. 1784; XV. B. 336. S.

20) Was um die Hälfte erweitern heisst ist undeutlich. Die erste Bedeutung die sich darstellt ist wohl: zum vorigen Raume noch die Hälfte setzen. Dann wäre $n = \frac{1}{2}$ und $R = r\sqrt{1,5} = r. 1,2247$.

21) Friedrich der Rothbarth hat schwerlich einen Kreisring von gegebener Grösse machen lassen; Wenn es noch sein Enkel, Friedrich II. wäre, der griechische Philosophen und Astronomen aus dem arabischen übersetzen ließ. Also hat der erste, höchstens einen Kreis um einen andern ziehen lassen; wieviel Raum zwischen bey-

beyden dadurch dem ersten zugewachsen ist, genommen wie es kam.

22) Selbst die Aufgabe: Auf dem Felde um einen gegebenen Kreis einen andern zu ziehen, concentrisch oder nicht, erfodert einiges geometrisches Nachdenken. Wahrscheinlich würde zu ihrer Beantwortung, ein Ingenieur den innern Kreis auf Papier verzeichnen, in diesem des äusern Mittelpunct, wenn der nicht auf des innern seinen fällt, und nun auf der Zeichnung messen durch was für Stellen des äusern Umfang geht.

23) In der Abbildung von Aachen in Abrah. Saurs Städtebuch . . . durch Authes, Frf. 1658; würde man schwerlich einen Kreis erkennen, geschweige dann zweene.

24) Diese Anwendung des Kreises auf freyem Felde zu beschreiben, erinnerte mich an eine andre.

An Enquiry into the present State of the septuagint Version of the old Testament, by the Rev. Dr. *Henry Owen* Rector of St. Olave, Hart-street and Fellow of the Royal Society; Lond. 1769; 8°. ward mir einmahl von unserm Hrn. Prof. Tychsen mitgetheilt, wegen eines Entwurfs der Levitenstädte 4 B. Mos. 35. Cap.

25) Hr. O. stellt sich ihre Gestalt folgendermassen vor:

I) Die Stadt selbst ein Quadrat.

II) Jede Seite desselben, an jedem Ende soweit verlängert als ihre Grösse beträgt.

III) Durch die Endpuncte der Verlängerungen Parallellinien mit den Seiten gezogen.

IV) Aus jeder Winkelspitze des Quadrats, mit der Verlängerung der Seite, innerhalb des Winkels, welcher Scheitelwinkel vom Winkel des Quadrats ist, einen Quadranten beschrieben.

V) So besteht der Raum, um die Stadt (I) aus vier Quadraten, jedes der Stadt selbst gleich, jedes an einer Seite der Stadt liegend (II; III) und vier Quadranten eines Kreises, jeden an einem Scheitelwinkel des Quadrates (IV).

VI) Die Verlängerungen, (II) nimmt er jede = 1000 Ellen (cubits), so groß ist auch die Seite der inneren Stadt. Er bemerkt, man bekomme so rings um die Stadt, einen Raum von tausend Ellen, nach allen Seiten.

VII) So glaubt er, werde die Lesart des hebräischen Textes gerechtfertigt, und die Dollmetschung der Siebenzig wiederlegt die zweytausend Ellen nennet.

26) Das Kritische geht mich nichts an. Hr. O. giebt seine Darstellung zugleich als eine Probe der practischen Geometrie selbiger Zeit an.

Im-

Immer denke ich es würde noch jetzo bey einem Feldmesser ziemlich viel Anstalten erfodern, aus vier Winkelspitzen eines Quadrats Quadranten mit Halbmessern von 1000 Ellen zu beschreiben, was man auch für Ellen verstünde.

Das euklidische Postulat: Um einen gegebenen Mittelpunct mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, wird für die Ausübung eine ziemlich schwere Aufgabe, wenn der Halbmesser sehr groß, oder sehr klein seyn soll.

27) Uebrigens betragen die vier Quadranten zusammen soviel als ein ganzer Kreis, dessen Halbmesser = 1000 Ellen. Setzt man dazu die vier Quadrate an den vier Seiten, so beträgt der Raum um die Stadt 7141592 Quadratellen, wozu noch die Stadt selbst in der Mitte, eine Million Quadratellen einnimmt.

19.

Eintheilung eines Kreises, durch Halbkreise über Theile seines Durchmessers.

1) Des Kreises Durchmesser sey AB = a;

2) Man nehme AM = b; also BM = a — b, und beschreibe über AM, BM Halbkreise.

3) So ist vom

Halbkr über	AM	BM
Umfang	$\frac{1}{2}$ b. π	$\frac{1}{2}$. (a — b). π
Fläche	$\frac{1}{8}$. b^2. π	$\frac{1}{8}$. $(a-b)^2$. π

4) Also die Summe der Umfänge = $\frac{1}{2}$ a. π = des gegebenen Kreises halben Umfange.

5) Die Summe der Flächen ADM + MEB = $(a^2 - 2ab + 2b^2)$. $\frac{1}{8}$. π.

6) Man beschreibe eben solche Halbkreise über AN = c und NB = a — c; so ist die Summe ihrer

Umkreise = $\frac{1}{2}$ a. π.

Flächen = $(a^2 - 2ac + c^2)$. $\frac{1}{8}$ π.

7) Der Raum zwischen den Halbkreisen (1; 6;) findet sich so:

Halbkr über AN — Halbkr über AM
+ Halbkr über BM — Halbkr über BN

also

$$\frac{1}{8}\pi \begin{cases} c^2 - b^2 \\ +(a-b)^2 - (a-c)^2 \end{cases}$$

8) Was

8) Was in $\frac{1}{8}\pi$ multiplicirt ist, beträgt

$c^2 + a^2 - 2ab + b^2$

$- c^2 - a^2 + 2ac - b^2$

oder $2a.(c-b)$.

9) Also ist die Fläche zwischen den vier Halbkreisen

$\frac{1}{4}\pi.\ a.\ (c-b)$

10) Es sey $b = \frac{m}{n}\ a$; $c = \frac{m+1}{n}.a$

So ist die Fläche (9) $= \frac{1}{4}\pi.\ a^2.\ \frac{1}{n}$.

11) Theilt man also des gegebenen Kreises Durchmesser in n gleiche Theile, und beschreibt über einem Stücke desselben das eine gewisse Menge solcher Theile enthält, und des Stücks Ergänzung zum Durchmesser die beyden Halbkreise, und eben so über dem nächstfolgenden Stücke und dessen Ergänzung, so ist zwischen den vier Halbkreisen, $\frac{1}{n}$ der Kreisfläche enthalten (10), und die Gränzen zwischen denen dieses Stück der Kreisfläche enthalten ist, betragen zusammen den Umfang des Kreises (5; 6;).

12) Fläche zwischen ADMEB und dem Halbkreise AFß ist $\frac{1}{8}\pi.\ (a^2 - (a-b)^2 + b^2)$ (2) $= \frac{1}{8}\pi.\ 2ab = \frac{1}{4}\pi.\ ab$.

13) Es

13) Es sey MF senkrecht auf AB so ist der Sehne AF Quadrat = ab; Also die Fläche (12) = einem Kreise dessen Durchmesser = AF.

14) Tracts, Mathematical and Philosophical by Charles Hutton, Vol. I. Lond. 1786; 4°; da werden Tract 8. solche Sätze, geometrisch, etwas weitläuftiger gewiesen. Als die paradoxe Aufgabe: Einen Kreis geometrisch in eine gegebene Menge von Theilen zu theilen (11).

15) Es kann auch statt des Kreises eine Ellipse seyn, deren Axe AB ist, und über AM, MB, ähnliche Ellipsen.

20.

Zur Geschichte der Zahl welche den Umkreis angiebt, den Durchmesser zur Einheit angenommen.

Vorerinnerung.

Schon unter den griechischen Geometern haben welche die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise schärfer als Archimed anzugeben gesucht. Eutokius erwähnt dergleichen, am Ende seiner Erläuterungen über Archimeds Buch von der Kreisrechnung. (*Archimedis* dimensio Circuli cum *Eutocii* Comm. ist nebst Archi-

Archimeds Arenarius, von Wallisius zuerst 1676 griechisch und lateinisch herausgegeben worden, findet sich auch in *Ioh. Wallis* Operum mathematicor. Vol. III. Oxon. 1699; wo die hieher gehörige Stelle 559 S. steht.

Apollonius Pergäus (sagt Eutok.) hat die Kreisrechnung, im Okytoboo (Ωκυτοβόω) in andern Zahlen gezeigt, und zu grösserer Näherung gebracht. Das scheint nun wohl schärfer, aber zu Archimeds Absicht war es nicht nöthig. Denn, wie ich erinnert, wollte er nur etwas der Wahrheit nahe finden wie es im Leben brauchbar wäre. Deßwegen hat ihn auch Porus Nikänus mit Unrecht getadelt daß er die gerade Linie welche dem Umkreise gleich ist, nicht genau gefunden habe. Eben derselbe meldet in seinen Κηρίοις, sein Lehrer, (Philo der Gadarenser) habe schärfere Zahlen angegeben, als Archimeds seine 7: 22. Alle aber scheinen Archimeds Absicht nicht verstanden zu haben. Sie brauchen Multiplicationen und Divisionen von Myriaden, die niemand leicht versteht, der nicht in Magni Logistik (Μάγνε Λογιστικῶν) geübt ist. Wer Alles aufs genaueste suchen wollte müsste verstehen was in des Claudius Ptolemäus mathematischem Lehrbegriffe (Μαθηματικῇ Συντάξει) gewiesen ist, und wird die Verrichtung durch Theile des Kreises und derselben fernere Eintheilungen, auch die geraden Linien im Kreise, bewerkstelligen. Das hätte ich selbst

selbst gerathen, wenn ich nicht, wie ich oft erwähnt habe, bemerkt hätte, daß sich durch das bisher Bekannte, keine gerade Linie angeben lässt, die dem Umkreise genau gleich ist. Begnügt man sich mit etwas das nur wenig fehlt, so ist Archimeds Angabe zulänglich.

Soweit Eutokius. Er erhält das Andenken mancher verlohren gegangner Bemühungen, selbst die Titel der Bücher sind nicht verständlich. Man sieht daß die unbequeme Rechenkunst der Griechen sie abgehalten hat schärfere Näherungen zu brauchen. Halley vermuthet das Okyroboon sey eine Anleitung zum Rechnen gewesen; praef. ad Apollonii Pergaei Conica Oxon. 1710.

In Hr. Pr. Michelsen Beyträgen zu Beförderung des Studiums der Mathematik 1. Stück (Berlin 1790) 14 Seite, fand ich, wegen dieses Worts *Montucla* Histoire des mathematiques Par. 1758; 265 S. angeführt, das Buch sollte Zwölfeck und Zwanzigeck in einer Kugel verglichen haben. Ich habe Hr. M. so verstanden: als sagte er dieses stehe beym Montucla, jetzo kann ich seine Beyträge nicht wiederum nachsehn.

Die Stelle befindet sich beym Montucla im ersten Tome Part. I. L. IV. art. 7. auf der angezeigten Seite. M. hat zuvor vom Apollonius geredet, und sagt: Ich begnüge mich zum

Be-

Beschlusse einige weniger wichtige Schriften des *Apollonius* anzugeben; "comme son livre „*de Cochlea*, un autre *de perturbatis rationibus*, „un troisième sur *la comparaison de l'icosaédre* „*et du dodecaédre*, *inscrits dans la même sphère.* „Le dernier, portoit le titre: d' ὠκυτοβοος, môt „qui n'est plus entendu, de sorte qu'on ne sait „point quel etoit l'objêt de cet ouvrage.

Es wäre natürlich le dernier auf das letzte Buch zu ziehen das Montucla genannt hat. Versteht man ihn so unrecht, so veranlasst er solches durch seinen undeutlichen Ausdruck; denn erst in der Folge sagt er, daß er nicht dieses meyne, dessen Titel er angiebt, sondern ein anderes letztes, dessen Gegenstand man nicht wisse.

Ich habe darüber einen meiner Zuhörer, Herrn Möhde aus Göttingen zu rathe gezogen, und füge bey, was er für Gedanken geäusert hat.

Das Wort ὠκυτοβόον ist 1) deßwegen unerklärbar, weil es keine analogische Derivation hat. Wollte man es von ὠκύς und βοῦς ableiten, so steht einem das το in der Mitte im Wege, das sich nicht erklären lässt, und es müsste alsdenn ὠκυβόον heissen. Ein Wort ὠκυτος oder sonst eine Ableitung, auf die es sich bringen liesse, existirt nicht.

2) Angenommen, die Etymologie mache keine Schwürigkeit und es lasse sich bequem von

ὠκύς und βοῦς ableiten, so kann man ihm keine Bedeutung geben, die passend, und nicht weit hergeholt und gekünstelt wäre. Ich halte daher die Bemühungen, dies Wort zu erklären, für vergeblich. Vielleicht hat es einen Umstand aus den Zeiten des Apollonius zum Grunde, der uns unbekannt ist. Die Alten betitelten ihre Schriften von allerley Gegenständen oft. Hätten wir das Buch des Apollon. Pergaeus, welches ὠκυτοβόον betitelt war, selbst noch, so könnten wir mit mehr Zuverlässigkeit hierüber urtheilen.

Indessen bin ich auf den Gedanken gerathen, das Wort ὠκυτοβόον sey vielleicht durch einen Fehler im Lesen und Schreiben entstanden, und es habe statt seiner ein ander Wort in den alten Handschriften gestanden, welches unrichtig gelesen und geschrieben in ὠκυτοβόον verwandelt sey. Wallisius könne zwar in den Mss. die er bey seiner Ausgabe des Archimedes gebraucht, wirklich kein ander Wort gefunden haben (ob sich dies gleich nicht behaupten läßt). Allein die librarii, die jene Codd. aus ältern abgeschrieben, haben es vielleicht daselbst falsch gelesen und falsch in ihre Abschriften aufgeschrieben, zumal da es bekannt ist, daß dieselben oft nicht sehr sorgfältig beym Abschreiben waren, und daß derjenige, der dem andern dictirte (dieses pflegte zu geschehen) oft ein Wort unrichtig laß und der andere es unrichtig aufschrieb.

Wenn

Wenn es verstattet ist hierüber, was an der Stelle des Wort's ὠκυτοβόον (eigentlich beym Archim. – ὠκυτοβόω) wohl für ein anderes gestanden habe, oder vielmehr habe stehen können, woraus jenes entstanden sey, eine Conjectur zu machen, so ist mein Gedanke: in den ältern Handschriften habe ὠκυτιμίῳ gestanden, in welchem Wort der librar. die beyden ι wie ο und das μ wie β gelesen. Denn das β wird in den Codd. Mss. meistens so = μ — geschrieben und die ι und ο kann man oft nicht gut unterscheiden, wenn nicht in dem Ms. die ι Puncte haben, und dennoch kann man sich verleiten lassen. So nämlich = ·ι· — werden die ο oft geschrieben. Wenn also in dem Ms. stand: ὠκυτ·μίῳ, konnte der Leser es ὠκυτιμίῳ und ὠκυτοβόῳ lesen: just ist er auf das letztere gefallen, welches nicht richtig ist. Dieser Irrthum hat sich in den spätern Mss. erhalten, und die editorr. und interpretatt. haben ihn geduldet. Das Wort ὠκυτιμίον aber lässt sich eher erklären. Es wird von ωκὺς und τίμη – τιμάω abgeleitet. τίμη bedeutet pretium rei, τιμάω pretium rei definio, aestimo. ὠκυτιμίον (sc. βιβλίον) liber, in quo rerum pretia celeriter aestimantur, ubi calculum commode faciendi ratio demonstratur. Für das Berechnen hatte man zu Apollonii Zeiten vielleicht kein bequemes Wort, und wenn wir supponiren, Apollon. habe eine Schrift verfertigt, worin er zu Berechnungen bessere

Anleitung gegeben habe, so scheint das Wort ὠκυτιμίον als Titel dieses Buch's nicht unpassend zu seyn.

Dies ist meine Conjektur. Daß sie mehr als den Rang eines lusus ingenii habe, will ich nicht behaupten.

Plutarch. Solon. p. 79 E. (ed. Xyl.) ist nach Wassenberg's Bemerkung πρωτος aus πρωτις (welches ursprünglich in den Codd. Mss. stand) entstanden, also das ο statt des ι gelesen, welches damit übereinkömmt, was ich von dem Worte ὠκυτοβόον in Ansehung der beyden ersten ο gesagt habe. Wassenberg sagt dieses in: Diss. philol. crit. de nominibus hominum et locorum propriis librariorum culpa aliisve de causis in vett. scriptis libris frequenter obliteratis aut vitiatis. Franequerae 1790.

Ich habe die Dissertation noch nicht selbst gelesen, sondern in den Neuen Leipz. Gel. Anz. N. 64. S. 511 (J. 1790) wo sie recensirt ist, jenes als Exempel angeführt gelesen.

Röhde.

1) Jetzo druckt man die Verhältniß des Durchmessers zum Umfange (nach Geom. 43. S.) bequem so aus, daß man den Durchmesser = 1 setzt, da dann der Umfang, P oder π genannt, eine Zahl über 3 wird, die man in Decimaltheilen immer schärfer und schärfer angeben kann.

Es

Es ist also wohl der Mühe werth, diese Zahl so weit als sie bekannt ist darzustellen, und zu bemerken, wie weit jeder der neuern Mathematiker die sich mit ihrer Untersuchung beschäfftiget haben sie getrieben hat.

2) *Montucla* Histoire des Recherches sur la quadrature du cercle Par. 1754, hat diese Absicht, und eine noch weiter erstreckte, da M. überhaupt die glücklichen Bemühungen wegen der Quadratur des Kreises erzählt. Ich vermisse aber oft bey ihm die litterarische Genauigkeit die ein Vorzug des arbeitsamern Deutschen ist, von der französischen Lebhaftigkeit gewöhnlicher als pedantisch vernachlässiget wird, obgleich, dieses Urtheil allgemein zu fällen ungerecht wäre, da z. E. Hr. de la Lande in der Geschichte der Astronomie soviel Sorgfalt und Richtigkeit zeigt, als man verlangen kann.

3) Zahl π nach und nach von Mathematikern weiter bestimmt.

I II III

6 * 12 * 18 24 30 *

3,14159265358979323846264338327950288

36 42 48 54 60 66

41971693993751058209749445923078

IV V

72 * 78 84 90 96 *

16406286208998628034825342117067 9

VI

102 108 114 120 126 *

8 2 1 4 8 0 8 6 5 1 3 2 7 2 3 0 6 6 4 7 0 9 3 8 4 4 6 +

7 −

Bis an
I * Franciscus Vieta
II * Adrianus Romanus
III * Ludolph v. Coeln
IV * Sharp
V * Machin
VI * Lagny.

4) Diese Abtheilungen stehen (nur keine Zahlzeichen über den Sternen) in:

Magnitudinum exponentialium, Logarithmorum, et Trigonometriae sublimis Theoria, noua methodo pertractata Auct. Petro Ferronio R. C. Petri Leopoldi Austriaci Magni Etruriae Ducis Mathem. et in Regiis Pisano ac Florentino Lyceis Publico Mathes. Prof. Florent. 1782. gr. 4°. in Prolegomenis p. LII. F. beruft sich dieserwegen auf Vietae Opera v. Fr. Schooten herausgegeben 1646. Sharps Tables Die Berliner (Schulzens trig.) Tafeln. Jones Synopf. Palmarior. Montucla hist. de la quadr. du Cercle.

5) Ich will nun von den Fortsetzern dieser Zahl Nachricht geben.

6) Die Methode der Näherung zum Kreise durch eingeschriebene Vielecke welche Vieta angiebt, findet sich in seinen: Variorum de Reb. Mathem. responsorum lib. VIII. cap. 18; Vietae

tae Opera math. studio Fr. a Schooten, Leid. 1646; fol. p. 399.

7) Sie beruht auf dem Satze: Die Fläche eines Vielecks von n Seiten, verhält sich zur Fläche des Vielecks von 2. n Seiten, wie die Sehne von $\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right)$ zum Durchmesser.

8) Der Satz steht in meinen Anfangsgründen der Trigon. 18 S. 5. Zus. Daselbst ist q die Fläche des ersten Vielecks, Q des zweyten seine, und $q : Q = \cos \frac{360^\circ}{2.n} : 1$ Aber der Cosinus ist $= \sin\left(90^\circ - \frac{360^\circ}{2.n}\right) = \frac{1}{2}$ Sehne $\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right)$ Folglich verhält sich der Cosinus zum Halbmesser $= 1$; wie Sehne $\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) : 2$ oder wie diese Sehne zum Durchmesser. Diese Sehne aber gehört dem Bogen welcher mit dem Maasse des Centriwinkels des ersten Vielecks 180 Grad macht. Beym Vieta, heisst sie Apotome lateris polygoni primi: Sie macht mit des ersten Vielecks Seite, einen rechten Winkel, dem gegenüber der Durchmesser steht.

9) Nun fängt Vieta, vom Quadrate im Kreise an; sucht daraus das Achteck, und findet der Seite des Achtecks Apotome $= \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$ ferner die der Seite des Sechszehnecks, u. s. w. immer durch Quadratwurzeln aus Quadratwurzeln. Den Gang der Rechnung kann man sich aus Geom. 43. S. vorstellen.

10) Die Zahlen selbst, welche Vieta gefunden hat, stehen nicht in diesem Capitel, sondern im 15 des angeführten Buches 392. Seite. Da giebt er, für den Durchmesser = 1; den Umfang grösser als 3,1415926535 aber kleiner als diese Zahl, mit der letzten Zifer 7 statt 5.

11) Franz Vieta, aus Fontenai in Nieder-Poitou gebürtig starb zu Paris 1603 in seinem Stufenjahre. Nachrichten von seinem Leben aus *Iac. Aug. Thuani* Historiar. L. CXXIX finden sich vor der von Schooten besorgten Ausg. von Vietae Op. Math. Es ist nicht bekannt daß jemand vor ihm, den Umkreis so genau angegeben hätte.

12) *Adrianus Romanus* aus Löwen gebürtig, Eques auratus und Medicus Caesareus, ist schon um 1593 bekannt gewesen, starb 1616 auf einer Reise nach den Wassern zu Spaa. Das meldet *Gerard Io. Vossius* de Scient. Math. cap. 16; §. 30. p. 69. *Montucla* ch. 3. art. 4. p. 45; berichtet Adrian habe die Zifern, soweit

weit sie für ihn bezeichnet sind aus der Seite eines Vielecks von 1073741824 Seiten gefunden. Wo aber Adrian dieses gelehrt hat, zeigt M. nicht an.

13) Eine Frage die Adrianus Romanus allen Mathematikern vorgelegt, also für sehr schwer gehalten hatte, fand Vieta unbequem ausgedruckt, übrigens aber nicht so schwer. Fr. V. ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adr. Rom. responsum; Op. Vietae p. 305.

14) Vom Ludolph von Cöln schreibt *Montucla* Hist. de la quadr. du Cercle p. 46.: "Er war aus Cöln, daher sein Nahme van Ceulen, denn Cöln heißt im holländischen Ceulen, er war lange Zeit Professor der Mathematik in Holland zu Amsterdam oder Breda. Man weiß fast nichts von ihm weil Valerius Andreä ihn nicht in seine belgische Bibliothek gebracht hat."

15) Das, was M. vom Ludolph erzählt hätte er doch besser wissen können, wenn er nur die Titel von Ludolphs Büchern recht angesehen hätte; Wenn ich von einem Gelehrten was wissen will, suche ich es aus seinen Büchern auf, die Litteratoren, Bibliothekschreiber u. d. gl. brauche ich nur als Gehülfen zum Nachweisen.

16) Van den Circkel, daer in gheleert wird te vinden de naeste Proportie des Cirkels-Diameter tegen synen Omloop, ... Item aller Figueren-syden in den Cirkel beschreuen, beginnende van den 3, 4, 5, 15 hoeck, in Irrationale ghetallen te brengen, al hadde de Figuer, veel hondert-duysent hoecken .... Alles door *Ludolph* van *Ceulen* gheboren in *Hildesheim* Tot *Delf* 1596; fol. Auf dem Titel sein Bild, mit der Umschrift: Ludolf van Ceulen Out 56. Um das Bild, Schwerter, Dolche, Hellepar-ten, Rondartschen, Schlaghandschuh u. d. gl.... als wenn Ludolph Fechtmeister gewesen wäre. Unter dem Bilde, ein Kreis, in welchem ein Diameter gezogen ist, an dem eine 1 mit 20 Nullen steht, Innerhalb des obersten halben Umfangs, steht die 3 mit 20 folgenden Zifern die letzte 6, dabey: te cort, innerhalb des un-tersten, eben die Zifern die letzte 7, dabey: te lanck. Das Buch von Ludolphen dem Prin-zen Moriz von Oranien zugeeignet, die Dedi-cation oder Voor-reden wie L. sie nennt, zu Leiden d. 20. Sept. 1596 unterzeichnet. L. mel-det darinn er habe die Zahlen wie ich sie vor-hin angeführt habe durch Gottes Gnade 1586 gefunden, und nennt viel Mathematiker denen er sie zur Prüfung vorgelegt.

17) In einem Vorberichte an den Kunst-liebenden Leser zeigt L. die Wichtigkeit der Kreis-rechnung, in Ausrechnung von Figuren und

meldet

meldet er habe 1569 in der hochlöblichen Stadt Ceulen ein Buch von Jacob Kobel beschrieben bekommen darinn er viel falsche Regeln gefunden.

18) Im Buche wird gewiesen wie man Sehnen, von mehrern Bogen findet, dabey L. sich der Regel Coß bedient, auch Gleichungen von höhern Graden selbst nach unsern Ausdrückungen vom achten hinsetzt aus denen er Wurzeln angiebt. Im 14 Cap. finden sich die Seiten der Vielecke vom Dreyecke bis auf das 80 Eck, für den Halbmesser 1 mit 14 Nullen, L. berichtet zu diesen Untersuchungen habe ihn Adriaen van Romen Doctor und Professor (der Arzneykunst) der Zeit zu Würzburg in Franken veranlasst. Tafeln der Sinus, Tangenten, Secanten, durch alle Minuten, für den Halbmesser zehn Millionen. Geometrische und arithmetische Fragen. Ein eignes Buch von der Interesserechnung.

19) *Ludolphi a Ceulen* de Circulo et adscriptis liber ... e vernaculo latina fecit et annotationibus illustravit *Willebrordus Snellius* R. F. Leid. 1619. 4°. mit eben dem Bilde das ich beym vorigen beschrieben habe, ist nicht das vorige Werk, sondern enthält viel geometrische Lehren von Verwandlung, Theilung, Ausrechnung der Figuren, auch vermischte Aufgaben, allerdings auch Beschreibungen von Vielecken

in

in und um den Kreis, darunter das von 10485760 Seiten, die Gränzen des Umkreises, eben wie vorhin.

20) De Arithmetische en Geometrische fondamenten van Mr. Ludolf van Ceulen . . . Leyden 1616 fol. Auf dem Titel ein ander Brustbild von Ludolf mit einem langen Barte, die Umschrift: Ludolf van Collen, Mathematicae Professor Lugd. Batt. obyt anno 1610, aetatis suae 71; Waffen, und Kreis sind nicht dabey. Eine praktische Anleitung zur Rechenkunst, wo die Rechnung mit den Wurzelgrössen damahls neu gewesen ist, Anwendung auf eine Menge geometrischer Aufgaben, Berechnungen von Seiten von Vielecken und Sehnen, aus den trigonometrischen Tafeln. Auf der 163 S. dieses Buchs, unter der Aufschrift Om te proeven door ghetallen .... führt er an, daß er in seinem Buche vom Cirkel, den Umkreis zwischen die vorhin angezeigten Gränzen, die an dem Kreise bey seinem Bilde stehen eingeschränkt habe. Nachdem sey ihm die Lust angekommen, die Verhältniß noch viel näher zu suchen, mit Hülfe seines Discipels Pieter Cornelisz. Und da giebt er den Umkreis bis auf 32 Zifern nach der 3 an, die niedrigste dieser Zifern 0, ist zu wenig und statt ihrer 1 ist zuviel. Wie er das gefunden hat lehrt er nicht.

21) Man hat von diesem Buche eine lateinische Ueberfetzung mit einigen Veränderungen;

Fun-

Fundamenta Arithmetica et Geometrica, cum eor. usu, Auth. Lud. a Ceulen Hildesheim, e vernaculo in Latinum translata a Will. Snellio R. F. Lugd. Bat. 1615. Also ein Jahr früher als das Original; Vielleicht sind beyde zugleich herausgekommen.

22) Soweit kann ich aus Ludolphs Büchern die ich selbst besitze, seine Zahlen angeben.

23) Wolf El. Geom. §. 426. giebt sie auch soweit an, als ich sie nur vorhin aus den Arithm. und Geom. Fundamenten angezeigt habe, so stehe sie sagt Wolf in Ludolfs Zetematum Geometricor. Epilogismo Zetem. 2. p. 92; welches Buch ich nicht kenne. Die Fundamenta Arithm. et Geom. führt Wolf besonders an.

24) Montucla giebt die 35 Ziffern nach der 3 an, die in anfangs mitgetheiltem Ausdrucke der Zahl π, Ludolphen zugeschrieben werden, und allegirt: Fund. Geom. lib. 6. De circ. et adscr. Zetem. Geom. epilogismus p. 92. In den ersten beyden Büchern finde ich nicht soviel Ziffern, und daß ihrer nicht soviel in dem letzten sind, beweist wohl Wolfs Anführung. Ich will aber bald zeigen, daß auch die niedrigsten, Ludolfen mit Rechte zugeschrieben werden.

24) Das jöcherische Gelehrten-Lexicon, meldet aus Meursii Athenis batavis, Ludolf sey eines hildesheimischen Kaufmanns Sohn gewesen,

sen, und der erste Professor der Kriegsbaukunst zu Leiden. Vielleicht ist seine Familie aus Cöln gewesen, womit sich auch vergleichen lässt daß er vorerwähntermassen Köbels Buch zu Cöln bekommen. Auf sein Lehramt, beziehen sich vermuthlich die Waffen und sein Bild.

25) *Willebrordi Snellii* R. F. Cyclometricus Leid. 1621; 4°. enthält Lehrsätze durch welche aus Vielecken von weniger Seiten, die Genauigkeit zu erhalten ist, zu welcher sonst Vielecke von mehr Seiten erfodert wurden. Sn. sagt: ihm gebe schon das Sechseck so enge Gränzen als dem Archimed das 96 Eck gegeben habe, und aus dem 96 Eck welches dem Archimed nur die Verhältniß zwischen 7: 21 und 22 einschränkt, findet er, nach der 3, sieben Zifern, da 6 als letzte zu wenig, 7 zu viel giebt.

26) Wer Archimeds Verfahren untersucht hat, weiß, daß A. um sicher zu schliessen, immer Zahlen annehmen muß, die gewiß zu groß oder zu klein sind, und nicht eben nahe beysammen fallen. Daran war die Unvollkommenheit seiner Art die Zahlen zu bezeichnen schuld. Wenn man wie wir, Quadratwurzeln auszieht, so lassen sich leicht engere Gränzen angeben.

27) In Prop. XXXI. sagt Snellius, Ludolf habe den Umkreis auf 34 Zifern nach der 3 gefunden, zu klein wenn die letzte Zifer 8 ist,

zu

zu groß wenn sie 9 ist. Diese Gränzen habe er auf sein Grabmahl setzen lassen.

Mit dieser unsäglichen Arbeit, habe Ludolf nur eine Zifer mehr gefunden als er viel leichter finde, und nach Sn. Lehren würden sich ohne Schwürigkeit noch mehr Zifern als Ludolfs seine finden lassen. So hat Ludolph die grössere Menge von Zifern nachdem berechnet, aber in keinem Buche bekannt gemacht.

28) *Christiani Hugenii* Const. F. de circuli magnitudine inventa Leid. 1654; 4°. enthalten Lehrsätze durch welche die Rechnung noch mehr abgekürzt wird; die archimedischen Gränzen lassen sich schon aus dem Dreyecke finden, aus dem Sechszigecke, auf zehn Zifern nach der 3; In Snellius Cyclometrico sagt H. seyen die beyden vornehmsten Sätze auf denen Alles beruhe nicht bewiesen, H. thut ihre Wahrheit dar. Daß, eben in dieser Schrift, die Beweise nicht allemahl die strengsten sind, zeige ich an einer Probe in der 1. Samml. dieser geom. Abh. 160 Seite.

29) Die bisher angegebenen Zahlen, sind alle, nach Archimeds Art, aus Vielecken gefunden worden, da immer das folgende aus dem vorhergehenden muß berechnet werden. Die Arbeit läßt sich durch Lehrsätze wie Snellius und Hugen geben, erleichtern, bleibt aber immer sehr mühsam und weitläuftig.

30) Die

30) Die Rechnung des Unendlichen hat die Geometern erst in Stand gesetzt mit erträglicher Arbeit, viel Zifern zu finden. Man s. hierüber meine Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen 306 u. f. §.

31) Das diente die Zahl soweit sie Ludolph angegeben hatte, zu prüfen, ohne die Vielecke durchzurechnen, dann auch weiter zu gehn.

32) Als der erste der die Rechnung weiter getrieben wird Sharp genannt.

Montucla sagt 159 S. von ihm: dieser englische Geometer habe bis 74 Zifern gefunden und den Gang seiner Arbeit in seinen mathematischen Tafeln mitgetheilt. Was das für Tafeln sind zeigt er nicht genauer an.

33) In den leipziger Actis Eruditor. April 1722. 229 S. ist folgendes Buch recensirt: Geometry improv'd 1) by a large and accurate table of Segments of Circles 2) a concise Treatise of polyedra . . by *A. Sharp* Philomath. Lond. 1718; 4°. 17 B. 4 Kupfert. Die Tafel der Abschnitte nebst andern Hülfstafeln ist vermöge zwoer unendlicher Reihen berechnet, die in der Recension angegeben werden, eine für kleinere Abschnitte, die andre für grössere; Auch eine Tafel der Logarithmen auf 60 Stellen, für alle Zahlen von 1 . . 100; und alle Primzahlen bis 1100, noch 20 Logarithmen von 999990 bis 1000010 und deren Differenzen von der ersten bis auf die zehnte.

In

In dem Theile von den Polyhedren betrachtet der Verf. auser den fünf regulären Körpern noch zwölf neue, z. E. einen in sechs Rhomben und zwölf Vierecke eingeschlossen, jedes der Vierecke besteht aus ungleichen gleichschenklichten Dreyecken.

34) Die Recension ist ohne Zweifel von **Wolfen**, der um diese Zeit Mitarbeiter an den Actis Erud. war. Auch erwähnt **W.** dieses Buch in s. Commentatio de praecipuis scriptis mathematicis Cap. III. §. 35; El. Math. T. V. p. 48. Diese Erwähnung veranlasste mich, die Acta Eruditorum für die Jahre zunächst nach 1718 nachzuschlagen.

35) Sonderbar ist, daß weder in der Recension, noch anderswo von **Wolfen** die Berechnung des Umkreises angemerkt wird, die doch sicherlich in diesem Buche stehen muß, wie sich aus dem Gebrauche der Reihen zu den Kreisabschnitten schliessen läßt. Das wären also die Tafeln vom *A. Sharp* die **Montucla** nennt.

36) **Sharps** erste logarithmische Tafel findet sich in **Sherwin's** Mathematical Tables . . by *Sam. Clarke* Lond. 1771 in der Einl. 90 u. f. S. Daselbst und in der avignoner Ausgabe von Gardiners Tafeln, finden sich mehr solche logarithmische Tafeln über die man nachlesen kann was ich in meiner astron. Abhandl. II. Samml. 4. Abh. gesagt habe.

In der Einleitung zu Sherwins Tables, 110 S. wird gesagt Sharp habe den Umkreis bis auf 74 Stellen durch eine doppelte Rechnung gesucht, aus unterschiedenen Reihen, nähmlich aus Sinus und Cosinus von 6 und von 12 Graden.

37) In welchem Werke Machin 100 Stellen angegeben habe, weiß Montucla nicht p. 159. und beruft sich nur auf Eulern Mem. de Petersb. tom. 9.

Ist Eulers Abh. de variis modis circuli quadraturam proxime exprimendi Comm. Ac. Petrop. T. 9. ad ann. 1737.

Die Einleitung zu Sherwins Tables berichtet 111 S. Machins Zahl sey in *Jones* Synopsis Palmariorum Matheseos bekannt gemacht worden, giebt auch die Reihe an, nach welcher sie berechnet ist.

38) Memoire sur la Quadrature du Cercle et sur la mesure de tout arc, tout secteur et tout segment donné par *M. de Lagny* findet sich in Mem. de l'Ac. des Sc. 1719; 176 S. der holl. Ausgabe. Enthält geometrische Sätze, welche auf unendliche Reihen zur angezeigten Absicht führen. Gregorys Reihe, die nachdem Leibnizen zugeschrieben worden, sagt L. habe er 1682 auch zu Toulouse gefunden und bekannt gemacht, ohne was von jenen Erfindungen zu wissen.

39)

39) Die Reihe giebt für den Halbmesser $= 1$, die Länge des Bogens von 45 Graden $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ldots$. Leibniz hat sie Act. Erud. 1682 mitgetheilt, aber selbst erinnert, ihr Werth bestehe darinn daß ihr Gesetz so leicht zu übersehen ist, und der Verstand begreift, wie ihre Glieder ohne Ende fortgehn, wenn er gleich diese unzählichen Glieder nicht fasst. Zur Berechnung des Bogens dient sie nicht, weil jedes folgende Glied nur um was weniges kleiner ist als das vorhergehende, so müsste man eine ungeheure Menge Glieder berechnen den Bogen nur mit mässiger Schärfe zu finden. Den Ursprung der Reihe zeige ich An. des Unendl. 301. §. Es ist sehr möglich daß auf diese Entdeckung wie auf andre, mehr Forscher gekommen sind, ohne daß einer sie von dem andern lernte.

40) Lagny giebt in erwähnter Abhandlung die Reihe Bogen durch Tangenten auszudrucken, die ich aus der Rechnung des Unendlichen hergeleitet habe An. Unendl. 299; und bildet sie noch in eine andere um, deren jedes Glied, aus zwey nächst nacheinander folgenden jener Reihe besteht. Am Ende der Abhandlung sagt er:

"Ich bediene mich der Tangente des zwölften Theils vom Umfange, die $= \sqrt{\frac{1}{3}}$ ist, wenn man den Halbmesser $= 1$ setzt (beym Lagny steht durch einen Schreibefehler 2 statt 1) da-

bey brauche ich die beyden letzten Reihen, und so fand ich durch zwo wesentlich unterschiedne Arbeiten, eine beständiges Addiren, die andre abwechselndes Addiren und Abziehen, den Durchmesser durch eine Eins mit hundert, siebenundzwanzig Nullen ausgedruckt, die Grösse des Umfangs ..."

Nun folgt die Zahl π in 127 Stellen, die letzte giebt L. so an: 8446 + und 8447 —

Ich will hie, fährt L. fort, von dieser Rechnung nur das Datum versichern, den Beweis nach der Länge in einer andern Abhandlung geben. Die Rechnung ist mit äuserster Leichtigkeit geführt worden. Bey grossen Rechnungen ist nicht genug daß die Methode so zu reden von Rechtswegen untrüglich ist, man muß durch Zusammenstimmung zweyer oder mehrerer ganz unterschiedner Methoden sich versichern daß sie auch in der That wo sie angewandt wird, richtig ist.

Noch verspricht de L. ein paar andre, eben so richtige und ordentliche Methoden für die Quadratur des Kreises.

41) Diese Versprechen sind aber nicht erfüllt worden, Lagnys Zahlen seyn peculiari modo etiam nunc celato gefunden worden, schreibt Euler in vorerwähnter Abhandlung Comm. Petrop. T. IX.

42)

42) Lagnys eigner Nachricht gemäß, muß die Kunst darinn bestehen die Rechnung mit der Tangente von 30 Gr. schneller zu führen, da diese Tangente zu brauchen sonst schon gewöhnlich ist. Man s. meine Anal. des Unendl. 306. §. Vielleicht, statt jedes Glied der Reihe einzeln zu berechnen, brauchte er was mehr Glieder zusammen gaben, worauf auch seine Umbildung dieser Reihe in eine andre ankömmt.

43) Ich will einige Aufsätze vom Lagny anführen die sich in den folgenden Theilen der Memoires befinden, und da sie sich mit Winkeln beschäfftigen, auch zur Kreisrechnung können gezogen werden.

La Goniometrie, ou science nouvelle, de mesurer les angles rectilignes et sphériques, et en général les angles lineaires formés par deux lignes quelconques sur une surface quelconque, de même que les angles solides quelconques Premiere partie 1724; p. 354 der holl. Ausg.

Second Memoire 1725; p. 402.

Troisième Mem. 1727; p. 171.

Sur le calcul analytique et indefini des angles des triangles rectilignes et sphériques, indépendamment des tables des sinus, et sur le *minimum* et maximum de ce calcul; 1729; p. 18.

Sur l'usage qu'on peut faire en géometrie des polygones rectilignes *arithmetiquement* re-

guliers, par raport à la Mesure des Lignes courbes; Avec plusieurs nouveaux Projets pour perfectionner la *Trigonometrie* et la *Cyclometrie* 1729; p. 427.

44) Obgleich Lagny die Rechnung des Unendlichen kennen musste, so scheint er doch mit einer Art von Affectation sie zu vermeiden, indessen führen ihn seine Lehren und die Reihen die er braucht, auf eben solche Schlüsse wie die Rechnung des Unendlichen, geschwinder gäbe da sie bekanntermaassen Abkürzung älterer geometrischen Ausdrückungen ist.

45) In dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli (Leibnitii et Bernoullii Commercium Philosophicum et Mathematicum Lausi. et Gen. 1745; 4°.) schreibt Leibniz an Bernoulli Ep. 205; 1713; im April: Vereor ut *Nicolius* Cycloidis, *Lagnius* Tetragonismi circularis bonam dent historiam nisi nobiscum communicent.

Montucla préf. p. XXIII; sucht dieses Mistrauen Leibnizens gegen Lagny zu erklären, weil Lagny die Rechnung des Unendlichen nicht zu brauchen affectirt, und Leibnizen vielleicht für die Engländer zu partheyisch geschienen habe.

Allemahl war sich doch Leibniz bewusst wie viel Antheil er und Bernoulli an den damaligen Erweiterungen der Geometrie hatte, und wie

wie dienlich es also einem Geschichtschreiber dieser Erweiterungen wäre sie zu Rathe zu ziehen, da sie zumahl auch kannten was Andre geleistet hatten. Von Lagnys theoretischen Einsichten urtheilt Leibniz nicht.

46) Lagnys in vieler Absicht merkwürdiges Leben findet sich im Eloge de M. de Lagny; Hist. de l'Ac. des Sc. 1734; p. 146. Thomas Fantet *de Lagny* war zu Lyon geboren, starb 12 April 1734; als Veteran der Akademie. Der Herzog von Orleans machte im Anfange seiner Regentschaft, de Lagny zum Sousdirecteur de la Banque Générale, die Bank hörte auf, aber mit Ehren für de Lagny, der Alles was seiner Verwaltung anvertraut war, in grösster Ordnung zurückgab.

47) Im jöcherischen Gelehrtenlexicon, steht, aus dem historischen Lexicon, de Lagny sey 1724 Sousdirecteur der Akademie geworden, 1725 Director und in solcher Würde 1734; 11 April mit Tode abgegangen.

Hie ist also die Akademie mit der Bank verwechselt worden, und am Directorate ist wohl gar nichts.

48) Im Eloge sind auch ältere Arbeiten vom L. angezeigt als ich hie zu erwähnen Anlaß hatte.

Als er in letzten Zügen lag, und niemanden der Umstehenden mehr kannte, fragte ihn

einer: Was ist das Quadrat von zwölf? Er antwortete: Hundert vier und vierzig.

Die Geschichte, welche als eine psychologische Erfahrung merkwürdig ist, findet sich im Eloge. Der Fragende wird nicht genannt. Anderswo habe ich gefunden daß es Maupertuis gewesen.

Ich glaube dem Manne der den Umkreis in mehr Stellen angegeben als man zu irgend einigem Gebrauche verlangen kann, habe ich mit Rechte hie soviel Platz eingeräumt.

49) Noch will ich eine Zahl die bey Berechnung des Umkreises brauchbar ist anführen, da sie an einem Orte steht, wo man sie nicht suchen möchte. Es ist die Quadratwurzel aus 12. Ihren Gebrauch zeigt meine An. d. Unendl. 306. §. Man muß sie auf viel Stellen haben, wenn man den Umkreis auf viel Stellen verlangt. Dorten ist sie auf 12 Stellen nach der 3 die Ganze bedeutet angegeben, und giebt so den Umkreis auch auf 12 Decimalstellen, von denen die letzten 3 unrichtig sind.

Diese Wurzel findet man bis auf 102 Decimalstellen, in einer Abhandlung von Lambert Essai de Taxéométrie, ou sur la mesure de l'Ordre, Nouveaux Memoires de l'Ac. de Prusse, Année 1770; p. 327. da steht die Wurzel p. 331. Lambert findet in ihren Ziffern ordre de liaison, jede steht da wo sie stehen muß, aber kei-

keinen ordre de ressemblance, sie stehen so als wenn sie von Ungefähr durch einander geworfen wären.

Diese metaphysische Betrachtungen zu erläutern sind wohl die Zifern nicht berechnet worden, und wahrscheinlich hat man sie zur Kreisrechnung anwenden wollen.

Beyspiel von der Schärfe welche man durch die berechnete Zahl π erhalten kann.

50) Man setze ein Kreis habe 7 Millionen Toisen im Durchmesser, und brauche seinen Umfang zu berechnen, die Zahl nur soweit als Vieta sie gefunden hat. Der Durchmesser ist 42 Millionen Fuß dieses mit Vietas niedrigster Zifer multiplicirt giebt $\frac{+6-10}{42.\quad 5} = 0{,}0210$; brauchte man statt der 5 eine 6 welches etwas zuviel gäbe, so käme 0,0252.

Der Umfang findet sich also schon nach Vietas Berechnung zwischen 21 und 25 Tausendtheilen eines Fusses eingeschränkt, selbst beträgt er mehr als 126 Millionen Fuß. Bey soviel Millionen Fuß sind begreiflich Tausendtheile unbeträchtlich.

Der angenommene Durchmesser ist viel grösser als der Durchmesser der Erde (Geom. 64 S. 5. Zus.)

Schon Vietas Zahlen gäben also den Umfang der Erde viel genauer als man verlangen wird.

Man begreift was hieraus für Ludolphs von Cöln, Sharps oder Machins Zahlen folgt, und daß schon die ersten zureichen alle Kreise die nur vorkommen können, viel schärfer zu berechnen als verlangt werden kann.

Vortheile mit der Zahl π leicht zu rechnen.

51) Da man mit ihr häufig multipliciren oder dividiren muß, zuweilen auch Wurzeln aus ihr, oder Vielfachen von ihr braucht, so ist gut für solche Grössen die Vielfachen durch 2; 3; . . 9 zu haben oder für jede ihr Einmahleins (Arithm. I. C. 40. §. X) Dergleichen finden sich unterschiedne, in Schulzens Taschenbuche I. Heft (Berlin 1782) am Ende.

52) Diese Verfertigung von Einmahleinsen für Zahlen von viel Zifern, ist schon vorlängst, bey Berechnung der Sinus, Logarithmen u. s. w. gebraucht worden. Der Gedanke ist so natürlich daß Mehrere haben darauf fallen können, ohne daß Einer es von dem Andern gelernt. So geben einige Ludolph von Cöln für den Erfinder aus, andre den Baumeister Goldmann, noch andre den erfurtischen Professor Ludolph. Nach Poetius Berichte Arithm. Wiss. 147. §. heisst dieses Verfahren bey den Indern Tarif.

53)

53) Meistens wird die Rechnung mit der Zahl selbst nicht nöthig seyn, und die Logarithmen die ich in der Geometrie mitgetheilt habe, werden mehr Schärfe geben als erfodert wird.

54) Weil durch die oft genannte Zahl nicht nur der Kreis berechnet wird sondern auch die Kugel, so wird verstattet seyn, zunächst von beyderley Rechnungen Exempel zu geben.

55) Ich brauche dabey ein solches Einmahleins, dergleichen ich (51) erwähnt habe. Ich habe die Zahl deren Vielfache es darstellt, nur bis auf die Ordnung — 14 genommen, Hr. Schulze (51) ist bis auf die Ordnung — 24 gegangen.

56) Einmahleins für $\frac{1}{\pi}$ Geom. 44. S. 5. Zus.

1	0,31830988618379
2	0,63661977236758
3	0,95492965855137
4	1,27323954473516
5	1,59154943091895
6	1,90985931710274
7	2,22816920328653
8	2,54647908947032
9	2,86478897565411

21.

Kreis- und Kugelrechnung in Graden.

1) Wenn eines Kreises Umfang = 360 Grade so ist sein Durchmesser = $\frac{360}{\pi}$ Grade.

2) Der wird vermittelst des Einmahleins (20 Abh. 56) so berechnet

$$\left.\begin{matrix}+1\\6\\+2\\3\end{matrix}\right\} \frac{1}{\pi} = \begin{matrix}19,098593171027 4\\95,492965855137\end{matrix}$$

Durchmesser = 114,591559026164
Halbmesser = 57,295779513082 Grad

3) Des Kreises Fläche = $\frac{360^2}{4.\pi}$ Quadratgrade; Fläche der Kugel die mit ihm einerley Durchmesser hat, viermahl so groß also $\frac{129600}{\pi}$ Quadratgrade. Nun sind die Producte aus $\frac{1}{\pi}$ in

1 =

$$
\begin{aligned}
&5\\
1 &= 31830,988618379\\
&4\\
2 &= 6366,1977236758\\
&3\\
9 &= 2864,7889756541\,1\\
&2\\
6 &= 190,9859317102\,74\\
\hline
&32212,3231122111\,84\\
&9040,6381372\,08\\
\hline
&41252,9612494191\,84
\end{aligned}
$$

4) Soviel Quadrate eines Grades hält die Fläche der Kugel.

5) Also ein Kreis, ihrem Grössten gleich, den vierten Theil davon, das ist
10313,2403123547\,96.

Was ist ein Quadratgrad?

6) Freylich muß der Geometer das gewusst haben, ehe er es berechnet. Andre Gelehrten, Philosophen, Chemiker, Naturhistoriker ... die höhern Facultäten alle drey nicht ausgeschlossen, streiten manchmahl lange Zeit über ein Wort, ehe ihnen einfällt zu fragen: was das Wort bedeutet. Auch thue ich hie diese Frage nur, um einer falschen Vorstellung vorzubauen, die jemand aus Uebereilung der wahren für gleichgültig halten könnte, freylich nur so lange bis er die Sache ein wenig überdächte.

7) Wenn

7) Wenn (2) Durchmesser und Halbmesser in Graden angegeben werden, so denkt man dabey doch gewiß eine gerade Linie so lang als ein Grad, und fragt wie oft diese Linie und wieviel Theile von ihr, in Durchmesser und Halbmesser enthalten sind; vom Grade als Bogen betrachtet, ist nicht mehr die Rede, man denkt nur an seine Länge, nicht an seine Gestalt.

8) Bey einem Quadratgrade oder Quadrate eines Grades, denkt man also ein geradelinichtes Quadrat, von dem jede Seite so lang ist als ein Grad.

9) Es könnte einem wohl einfallen, in einer Ebene vier Bogen, jeden von einem Grade, so zusammenzustellen, daß jeder die beyden andern die er schneidet, in seinen beyden Endpuncten schnitte und unter gleichen Winkeln. Aber nie gäbe dergleichen Viereck, einen Quadratgrad. Der Bogen vier Sehnen, wären jede die Sehne eines Grades, gäben also einen Rhombus, oder ein Quadrat, nach dem sie schiefe oder rechte Winkel mit einander machten. Im letzten Falle, schliessen sie das Quadrat der Sehne eines Grades ein. Nun kann man über den vier Sehnen, die dieses Quadrat einschliessen, die Bogen auf dreyerley Art beschreiben, wenn die Figur zwischen den Bogen einigermassen ein ordentliches Ansehen bekommen soll.

10)

10) I) Alle vier, die erhabenen Seiten gegen einander einwärts gekehrt.

Da schliessen sie einen Raum ein, kleiner als der Raum den die Sehnen einschliessen.

II) Ueber ein paar Sehnen einander gegenüber, kehren die Bogen ihre erhabenen Seiten auswärts, über den beyden andern einwärts gegen einander.

Da schliessen die vier Bogen einen Raum ein so groß als der Raum den die Sehnen einschliessen, weil über diesen Raum, von jenen an zwo Seiten eben soviel hinaustritt als an den beyden andern hineintritt.

III) Ueber allen vier Sehnen die erhabenen Seiten der Bogen auswärts gehört.

Da besteht die Figur zwischen den vier Bogen aus dem geradelinichten Vierecke zwischen den vier Sehnen und vier Abschnitten, jeden zwischen einem Bogen und seiner Sehne.

11) Eine Figur die aus dem Quadrate der Sehne eines Bogens, und den vier Abschnitten zwischen Bogen und Sehne besteht, lässt sich so berechnen:

Der Bogen heisse $= v$; also die Sehne $= 2. \sin \frac{1}{2} v$; so ist das Quadrat der Sehne $= 4. (\sin \frac{1}{2} v)^2 = 4. \frac{(1 - \cos v)}{2}$ (Trig. 19 S. 7. Z.)

Die

Die vier Abschnitte betragen zusammen $4. \frac{(v - \sin v)}{2}$ (Trig. 18 S.) Also ist die Figur $= 2. (1 + v - \sin v - \cos v)$.

12) Ist $v = 1°$ so hat man

$1 + v = 1{,}0174\,5329$ (Geom. 44 S. 7. Zus. V)

$\sin v + \cos v = 1{,}0002908$

$0{,}0171624$

Die Figur $= 0{,}0343248$

Daß diese Figur viel mehr beträgt als das Quadrat eines Grades, erhellt daraus, weil ein Grad viel kleiner als 0,02, also sein Quadrat viel kleiner 0,0004 ist.

13) Folglich giebt in (10) die Voraussetzung III; viel mehr als das Quadrat eines Grades, und I; II; geben zu wenig.

14) Wie also ein Quadratgrad in der Ebene des Kreises, nicht in vier Bogen jeder von einem Grade eingeschlossen ist, so wird auch ein Quadratgrad auf der Kugelfläche nicht etwa in vier Bogen grösster Kreise eingeschlossen seyn. Weiter unten wo ich von sphärischen Vielecken u. d. gl. rede wird hievon eigentlich gehandelt.

15) Jetzo bin ich hierüber nur deßwegen etwas umständlicher gewesen, weil mir scheint, als

als habe Wolf bey dieser Gelegenheit eine kleine Uebereilung begangen. Sein Specimen physicae ad Theologiam naturalem applicatae, erschien zuerst als eine Disputation zu Halle 1717; und findet sich in *Thummigii* Meletemata varii et rarioris argumenti Lipf. 1727; 34. S. Es giebt Vorstellungen von dem göttlichen Verstande aus Grösse der Welt, und Menge der Geschöpfe. Da berichtet er: Galiläus habe mit seinem Fernrohre innerhalb eines Raumes von vier Quadratgraden im Orion mehr als 500 Sterne wahrgenommen, und schliesst daraus §. 16 ferner so:

Des grössten Kreises Umfang ist 360 Grad, also der Durchmesser 115; folglich nach Archimeds bekannten Lehren die Kugelfläche 41400 Quadratgrade. Wären also die Fixsterne überall gleich dicht gesetzt, so käme ihre Zahl 5175000.

16) Zu gegenwärtiger Absicht habe ich die Zeit nicht aufwenden wollen, des Galiläus Angabe aufzusuchen. Im Nuncius Sidereus, wo er vom Orion redet, (31 S. der Ausg. Frankf. 1610) steht sie nicht. Vermuthlich hat er den Raum von vier Quadratgraden sich so begränzt:

Ein Paar Bogen jeder von 2 Graden, von Meridianen, oder Breitenkreisen, die einen Winkel von 2 Graden machen, und also ein Kugelviereck geben dessen beyde andern Seiten Parallelkreise, jeder von 2 Graden sind. We-

nigstens sehe ich nicht, wie dem Galiläus könnte eingefallen seyn, vier Bogen grösster Kreise, an einander zu setzen. Er mag aber die vier Quadratgrade verstanden haben wie er will, so hat er doch gewiß nicht das Stück Kugelfläche verstanden, das so groß ist als ein ebenes Quadrat dessen Seite so lang wäre als zween Grade.

17) Und nur wenn man seine Bemerkung von einem solchen Stücke Kugelfläche annimmt, ist Wolfs Schluß daraus, der Wahrheit gemäß.

18) Wolfs Zahlen sind von den meinigen (1; 3) in Kleinigkeiten unterschieden, weil er nicht so scharf gerechnet hat. Die Kugelfläche findet er zu groß, weil er den Durchmesser zu groß annimmt.

Gebrauch der Logarithmen, für 1; 3;

19) $\log 360 = 2,5563025$

$\log \frac{1}{\pi} = 0,5028501 - 1$

$\log$ Durchm $= 2,0591526$

verdoppelt $= 4,1183052$

$\log \pi = 0,4971499$

$\log$ Kugelfl $= 4,6154561$

$\log 4 = 0,6020510$

$\log$ Kreisfl $= 4,0134051$

Diese

Diese Logarithmen geben

Durchmesser = 114,59 Grade

also Halbmesser = 57,29

Kugelfläche = 41253 Quadr. Gr.

Kreisfläche = 10313

Befriediget man sich also mit ganzen Quadratgraden, so kann man auch die Logarithmen brauchen.

Rechnung in Minuten.

20) Ich will erst den Halbmesser in Minuten berechnen: Er ist $\frac{180.60}{\pi}$ Minuten, die Zahl findet aus (2) sich 3437,74677078492 der Logarithme; so

log 10800	=	4,0334237
— log π	=	0,5028501 — 1
log Halbm in Min	=	3,5362738
verdoppelt	=	7,0725476
log π	=	0,4971499
log Kreisfl	=	7,5696975 in Q. M.
log 4	=	0,6020510
log Kugelfl	=	8,1717485

giebt die Kugelfläche zwischen 148500000 und 148510000 Quadratminuten. Genauer wenn man die Zahl in (3) mit 3600 multiplicirt.

Rechnung in Secunden.

21) Zu		3,5362738 (in 20)
log 60	=	1,7781512
log Halbm in Sec	=	5,3144250
verdoppelt	=	10,6288500
log π	=	0,4971499
log Kreisfl	=	11,1259999
log 4	=	0,6020510
log Kugelfl	=	11,7280409

giebt den Halbmesser grösser als 206260 Secunden, aber nicht noch 10 mehr, die Kugelfläche zwischen 534620 und 534630 Millionen Quadratsecunden.

22) Wenn e die Länge des Bogens einer Secunde für den Halbmesser = 1 bedeutet, so hat man in meiner I. astron. Abhandl. 96; 98; log e, und der Logarithme der Zahl von Secunden die auf den Halbmesser gehn, ist = — log e = + 5,3144251 33 a. a. O. in sehr niedrigen Zifern, also unbeträchtlich, von dem vorhin gefundenen unterschieden.

23) In meiner I. astron. Abhandl. 102. §. findet man den Halbmesser in Graden und deren Decimaltheilen in Minuten und deren Decimaltheilen, in Secunden und deren Decimaltheilen; Auch in Graden und Sexagesimaltheilen des Grades. Alles lässt sich aus dem (1) angegebenen Halbmesser herleiten wenn man die Mühe

he der Rechnung anwenden will. So findet man auch die Flächen in Quadratsecunden, wenn man in (3; 4;) mit dem Quadrate von 3600 multiplicirt.

24) Am angeführten Orte der astron. Abh. ist berichtet daß die Länge des Halbmessers = 206264, 806247 . . . Secunden beträgt. Diese Zahl heisse = p; also sey der Halbmesser 1 = p. e Nun ist 1. π die Länge des halben Umkreises, oder eines Bogens von 180. 3600 Secunden, Folglich p. e. π = 180. 3600. e, also p. π = 180. 3600. Nähmlich p, π, sind beydes ungenannte Zahlen; jene die Menge von Secunden, die auf den Halbmesser gehn, diese die Menge von Halbmessern die auf den halben Umfang gehn.

25) Nun ist des Kreises Fläche = p. e. p. e. π = p. 180. 3600. e^2 = 180. 3600. 1. e Nähmlich das Rechteck unter dem Halbmesser und der Länge einer Secunde für diesen Halbmesser, mit 180. 3600 multiplicirt.

26) Die Kugelfläche ist viermahl so groß.

22.

Kreis- und Kugelrechnung in Meilen 15 auf einen Grad.

1) Also der Umfang des Kreises = 5400 Meilen.

2) Producte aus $\frac{1}{\pi}$ in

400 = 127,323954473516
5000 = 1591,549430918953

Durchm = 1718,873385392460

3) Für die Kugelfläche, ist das Quadrat des Umfanges = 29160000 Quadratmeilen

Producte aus $\frac{1}{\pi}$ in

60000 = 19098,593171027400
100000 = 31830,988618379067
9 Million = 2864788,975654111
20 Million = 6366197,723675813

Kugelfläche = 9281916,281119316400 Q. M.
Kreisfläche = 2320479,070279850000

In Geom. 44 S. 5 Zus. ist der Durchmesser nicht so genau angegeben, und die Kreisfläche nur durch ihre Factoren.

4) Der

4) Der körperliche Innhalt der Kugel wäre $\frac{5400^3}{6.\pi.\pi}$ dessen Berechnung mit den Zahlen selbst die Mühe nicht belohnen würde.

Rechnung mit den Logarithmen.

5) 2. log 5400 = 7,4647875
log π = 0,4971499
log Kugelfl = 6,9676376

giebt die Kugelfläche zwischen 9281900 und 9282000.

6) 2. log π = 0,9942997
log 6 = 0,7781512
1,7724509
von 3. log 5400 = 11,1971814
9,4247305

giebt der Kugel körperlichen Innhalt zwischen 265 9000000 Cubikmeilen
und 265 9100000

7) In Ludolphs von Cöln Buche: van den Cirkel das ich 20 Abh. 16 §. beschrieben habe, findet sich am Ende des 19 Cap 58 Blatt 2 Seite die Berechnung einer Kugel deren Umkreis 5400 duytsche mylen wäre. Ludolf findet den Durchmesser grösser als

1718,873385392469592

und kleiner als diese Zahl wenn die drey letzten Ziffern 648 wären.

Die Fläche findet er, in Quadratmasse, grösser als 9281916 Meilen, 732 Morgen (Mergben) 48 Ruthen 246 Fuß; aber 247 Fuß wäre zuviel.

Die Länge einer Meile setzt er 20000 Fuß, die Ruthe 16 Fuß lang, einen Morgen Landes 600 Quadratruthen, also eine Quadratmeile 2604$\frac{4}{9}$ Morgen.

Zu seiner Zeit war noch keine nur mässig genaue Erdmessung bekannt. Also ist seine Angabe der Meile in Fussen gar nicht sicher, zumahl in einer so runden Zahl. Er sagt auch nicht was er für Fuß meynt, doch ohne Zweifel leidner das ist rheinländische. Deren rechnet man sonst 12 auf die Ruthe, vielleicht ist für die Fortification eine andere Ruthe gebraucht worden als für den Landbau; denn die holländische Fortification hat den Gebrauch der rheinländischen Ruthe in Deutschland verbreitet.

Wäre es hieher gehörig, so liesse sich aus Geogr. 41. I wo ich die Grösse einer geographischen oder sogenannten deutschen Meile in Toisen angegeben habe, berechnen was sie in rheinländischen Ruthen beträgt, dazu Geom. 32 S. 2 Anm. die Zahlen angegeben sind. Lulofs Kenntniß der Erdkugel 640 §. giebt einer deutschen Meile 1972 rheinl. Ruthen, zu 12 Fuß.

Den Nutzen der von ihm so genau begränzten Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise

zu

zu zeigen, erinnert Ludolph noch, wenn man den Durchmesser $3\frac{1}{7}$ mahl für den Umkreis nähme, kämen über 3730 Meilen, minder als recht.

8) Nach der Verhältniß die vordem insgemein als Archimeds seine gebraucht ward, (Geom. 43 S.) kömmt der Durchmesser $\frac{22}{7}$. 5400 = 1718, 1818 ... der Halbmesser = 859, 0909 ...

9) Schriftsteller die nicht überlegten daß sich eines Kreises Durchmesser und Fläche beyde unmittelbar aus dem Umfange berechnen lassen, haben diese geographische Rechnung so geführt, daß sie erst den Durchmesser in Meilen gesucht, und nun aus ihm Fläche des grössten Kreises und der Kugel hergeleitet haben. Weil es ihnen aber zu mühsam war mit den vielen Zifern zu rechnen die der Durchmesser genau angegeben erfodert, so haben sie etwas ihm nahe kommendes angenommen, und dann für die Fläche nicht unbeträchtlich geirrt.

10) So steht im Almanac de Gotha 1772; 17 S. die Fläche der Erdkugel = 9288000 Quadratmeilen, den Halbmesser = 860 Meilen gesetzt. Diese Fläche ist viel zu groß (3) weil der Halbmesser fast eine Meile zu groß ist (8).

Und doch finde ich $\log 739600 + \log \pi = 6,3661468$, welches für Halbmesser = 860;

die Kreisfläche 2323522 giebt, und die Kugelfläche = 9294088, daß also im Almanach ein Rechnungsfehler muß seyn begangen worden, wenn da der Halbmesser 860 gebraucht ist.

23.

Quadratrix des Dinostratus.

Wolf El. Analys. §. 564.

1) Mit CA = r, beschreibe man einen Quadranten AB, den theile man in eine willkührliche Menge gleicher Theile. Das kann selbst durch die gemeine Geometrie geschehen, wenn man ihn erst in drey Theile theilt, und dann Halbirungen fortsetzt.

2) In eben soviel Theile theile man den Halbmesser.

3) Man nehme den Bogen AN, einer willkührlichen Menge Theile des Quadranten gleich, und ziehe CN. Imgleichen AP eben soviel Theilen des Halbmessers gleich, und ziehe durch P, auf CA ein Perpendikel das CN in M schneidet.

4) So ist M ein Punct der Quadratrix.

5) Also Bogen AN : Bogen AB = AP : AC.

6) Der rechte Winkel ACB heisse $= \frac{1}{2}\pi$, der Winkel ACN $= \varphi$; CP $= x$; PM $= y$; CM $= z$; so ist

$\varphi : \frac{1}{2}\pi$

$\varphi : \frac{1}{2}\pi = r - x : r$ oder $r.\varphi = (r-x).\frac{1}{2}\pi$
Diese Gleichung giebt Wolf, nur in anderen Zeichen. Weiter sagt er auch nichts von der krummen Linie. Er giebt an diesem Orte nur Definitionen.

7) Die Grösse PM hat man aus der Zeichnung, aber berechnen kann man sie unmittelbar aus der Gleichung (6) noch nicht.

8) Gestattet man sich Anwendung der Trigonometrie, so ist $y = x.\ tang\,\varphi$; $z = x.\ sec\,\varphi$ auch $y = z.\ sin\,\varphi$.

9) Aus (6) ist $x = r.\ \frac{(\frac{1}{2}\pi - \varphi)}{\frac{1}{2}\pi}$,

10) Wollte man also Puncte der krummen Linie durch trigonometrische Rechnung finden, so wäre die Ordnung am bequemsten folgende:

Man nehme ACN nach Gefallen;
So hat man x (9)
Und nun y; z; (8).

11) Exempel. $\varphi = 30°$ also $x = r.\frac{2}{3}$;
$y = \frac{2.\sqrt{3}}{9}.\ r$; $z = \frac{4.\sqrt{3}}{9}.\ r$

12) Zwischen den drey Seiten des Dreyecks CPM giebt der pythagorische Lehrsatz die Gleichung, aber aus einer alleine, lassen sich die andern beyden nicht berechnen. Und so muß man alle drey zu haben nothwendig eine durch den Winkel selbst ausdrucken, die blossen trigonometrischen Linien reichen nicht zu.

13)

13) Ich sage eine das möchte seyn welche man wollte. Denn man könnte z. E. in der Gleichung die y durch x und die Tangente giebt, x aus (9) ausdrucken, so hätte man y, durch Winkel und Tangente.

14) Da man also, den Winkel nicht vermeiden kann, so ist wohl am natürlichsten alle drey durch Halbmesser, Winkel und trigonometrische Linien auszudrucken.

15) Das geschieht so: In (9) hat man x; blos durch Halbmesser und Winkel.

Folglich aus (8)

$$y = r.\frac{(\frac{1}{2}\pi - \varphi)}{\frac{1}{2}\pi}. \text{ tang } \varphi$$

$$z = r.\frac{(\frac{1}{2}\pi - \varphi)}{\frac{1}{2}\pi. \text{ sin } (\frac{1}{2}\pi - \varphi)}.$$

16) Exempel. Es sey $\varphi = 45°$, so ist $x = \frac{1}{2}r = y$; und $z = \frac{1}{2}r.\sqrt{2}$.

17) Wenn ein Winkel von 90 Graden bis an 0 abnimmt, so nimmt der Quotient den der jedesmalige Winkel mit seinem jedesmaligen Sinus dividirt giebt, ab, von 1,57 ... bis 1.

Das läßt sich leicht aus Trigonom. 9 S. darthun.

18) Der Werth von z (15) ist eine unveränderliche Grösse, mit dem Quotienten multiplicirt den ein Winkel mit seinem Sinus dividirt giebt.

19)

19) Indem φ von 0 bis an 90 Grad wächst, oder N von A bis in B rückt, nimmt der Winkel in (18) von 90° bis an 0 ab.

20) Also nimmt das Veränderliche im Werthe von z (18) beständig ab, folglich auch der Werth von z.

21) Der grösste Werth ist (17) $= r$, der kleinste $= \frac{r}{\frac{1}{2}\pi}$, dafür ich der Bequemlichkeit wegen in der Folge b schreibe.

22) Indem φ von 0 bis 90 Grad wächst, nimmt (9) x, beständig ab, von r bis an 0.

23) Aus (8) folgt für $\varphi = 90°$; $y = z$.

24) Wenn also D der Punct der Quadratrix in CB ist, so ist das $z = y$, für 90 Grad, oder $CD = b$ (21).

25) Also $\frac{1}{2}\pi = \frac{r}{b}$.

26) Könnte man also CD auf irgend eine Art bestimmen so gäbe der Quotient rechter Hand, den Quadranten für den Halbmesser $= 1$; also die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise.

27) Es ist aber klar daß die Zeichnung (4) den Punct D nicht angiebt. Wenn CN auf CB fällt, so liegt PM auch auf CN oder CB; sie schneiden einander also nicht, und man muß anderswoher wissen wie lang PM für $\varphi = 90°$ wird.

28)

28) In (15) ist y durch ein veränderliches Product aus einer Tangente in die Ergänzung ihres Bogens gegeben, also durch ein Product aus der Tangente des rechten Winkels in einen Winkel = 0, wenn $\varphi = 90^\circ$; welches Product ebenfalls nichts lehrt.

29) Man sieht also keinen Weg den Punct D zu bestimmen, wenn man nicht schon die Verhältniß des Durchmessers zum Umfange weiß. Und so dient diese Quadratrix, nicht zu der Absicht zu welcher sie ist vorgeschlagen worden, genannte Verhältniß zu finden.

30) Indem der Punct M nach B zu rückt, wächst der Winkel ACM, und folglich nimmt seine Ergänzung CMP ab; Ist M nahe bey B, so ist CMP sehr klein. Braucht man also die Verzeichnung so heißt das soviel: Mit AC macht eine Linie durch C einen Winkel der beynah ein rechter ist, durch P einen Punct nah bey C zieht man ein Perpendikel auf AC, und nun ist M da wo das Perpendikel die erwähnte Linie schneidet. Offenbahr wird dieser Punct immer unsicherer durch die Zeichnung angegeben, je näher P bey C und je näher er bey B fällt, weil sich die beyden Linien wegen ihres kleinen Winkels, schleifen.

31) Clavius Geom. pract. L. VII. Append. I. thut den Punct D zu finden einen Vorschlag, den ich meinem bisherigen Vortrage gemäß

gemäß so ausdrucke: Man finde einen Punct M nahe bey B, nach A zu, ... begreiflich vermittelst eines kleinen Bogens BM und kleinen Stückes CP.

Nun nehme man auf der andern Seite der Linie CB, von B, einen kleinen Bogen dem vorigen der nach A zu genommen war gleich, auch so von C auf der verlängerten AC, ein Stückchen so groß als voriges kleine CP; so giebt sich ein Punct wie M auf dieser andern Seite der Linie CB.

Beyde Puncte M ziehe man mit einer geraden Linie zusammen, die wird CB in dem verlangten Puncte D schneiden, so genau, daß man den Unterschied mit dem Zirkel nicht bemerken kann.

32) Diese Vorschrift ist aus (30) zu beurtheilen, keiner der Puncte M wird sehr zuverlässig angegeben werden, also der Punct in CB ebenfalls unsicher aus zween unsichern Puncten. Der Punct den man eigentlich sucht, kann es ohnedem nicht seyn, und so wäre die Arbeit sehr unnütz diese krumme Linie zu beschreiben von der man gerade den Punct dessentwegen man sie beschreibt, nicht sehr richtig finden kann. Cl. lehrt nachdem ein Verfahren wo dieses Schleifen vermieden wird, den gesuchten Punct giebt es doch auch nicht.

33) I) Man stelle sich an A eine Tangente des Quadranten vor.

II)

II) Dieser Tangente parallel bewege sich eine gerade Linie wie PM gleichförmig von A nach C, daß nähmlich der Punct P in gleicher Zeit, gleichviel auf AC fortrückt.

III) Um C drehe sich der Halbmesser von CA an gleichförmig, daß er in gleicher Zeit gleiche Winkel beschreibt.

IV) Die Geschwindigkeiten verhalten sich so daß P in der Zeit den Weg AC zurückgelegt hat, in welcher der Halbmesser sich um den rechten Winkel gedreht hat.

V) Dann ist der Punct der Quadratrix im jedesmahligen Durchschnitte der Linie (II) mit dem Halbmesser (III).

VI) Begreiflich heisst das soviel: AP: AC = Winkel ACM: 90 Graden das ist $r - x : r = \varphi : \frac{1}{2}\pi$.

34) Wie in (33) ist diese Linie, vom Dinostratus, Nikomedes und einigen neuern, beschrieben, und τετραγονίζουσα genannt worden. *Pappus* Collect. Math. Lib. IV. post Prop. XXV. p. 57. der Ausg. Pisauri 1588 fol. Pappus erinnert, gerade Linie und Halbmesser mit den erfoderlichen Geschwindigkeiten zu bewegen, müsse man schon die Verhältniß des Halbmessers zum Quadranten wissen, also diene dieses Verfahren nicht die Verhältniß zu finden.

35) Un-

35) Unter den unzählichen Cirkelquadrirern, haben wohl die wenigsten die Quadratrix des Dinostratus nur nennen gehört. Es verdient also wegen mehr Kenntniß, von ihnen der Hr. Verfasser nachstehender Schriften unterschieden zu werden:

Kurze Anleitung die Peripherie des Cirkels geometrisch zu rectificiren ... von einem Liebhaber der mathematischen Wissenschaften Frankf. 1788.

Weitere Ausführung der kurzen Anleitung ... wie solches durch die Quadratrix des Dinostratus, sowohl als auch durch die Parabel, Ellipse und Hyperbel, imgleichen durch die Radlinie geschehen könne. Frf. 1789.

Der Hr. Verf. hat Unterschiedenes über diesen Gegenstand in die frankfurter gelehrte Anzeigen rücken lassen, Als: in das Intelligenzblatt 1789; n. 5 und 6. auch n. 18 .. 22; daselbst 80 S. steht der Nahme: Friedrich Bramerell Fürstl. Hess. Rath, Hanau 7. Nov. 1789.

Von der kurzen Anleitung habe ich in den götting. gelehrt. Anz. 1788; 1406. S. geredet, auch anderswo in diesen Anz. von der weitern Ausführung. Auch in der jenaischen allgem. Litteraturzeitung ist soviel ich mich erinnere die Unrichtigkeit von des Hrn. Verf. Schlüssen bemerkt worden.

Es ist Schade daß er Einsichten die wie man schon aus dem Titel seiner Schriften sieht nicht ganz bey den ersten Anfangsgründen stehn geblieben sind, angewandt hat sich vergebne Mühe zu machen.

Er findet Durchmesser zum Umfange wie 12740: 40000 oder in kleinern Zahlen 637: 2000, das ist wie er selbst 18 S. der kurzen Anl. sagt = 100: 313 + $\frac{6}{637}$; also noch nicht = 100: 314.

Nun giebt bekanntermassen die Verhältniß 100: 314, den Umfang zu klein, Also giebt die seinige den Umfang noch viel mehr zu klein. Und man ist berechtiget sie zu verwerfen weil sie einer erwiesenen Wahrheit widerspricht, ohne daß man dem Hrn. Verf. durch das Labyrinth von Schlüssen folgt, in dem er sich zu ihr verirrt hat.

Fortsetzung der Quadratrix über den ersten Quadranten.

36) Schon des Clavius Vorschlag (31) setzt zum Voraus, man könne Puncte der Quadratrix angeben, die von CB nicht nach A zu liegen, sondern nach der entgegengesetzten Seite E.

37) Nähmlich: Solcher Theile, wie die in welche man den Quadranten AB getheilt hat, nehme man einige auf dem Quadranten BE von B nach E zu, und eben soviel ähnliche des

Halb-

Halbmessers CA auf CE von C nach E zu, so giebt sich ein Punct M innerhalb des rechten Winkels BCE, wie vorhin einer innerhalb des rechten Winkels ACB.

38) Dieses durch die Gleichungen (9) (15) darzustellen, nehme man, für jetzo noch, φ grösser als den Quadranten, aber kleiner als den Halbkreis;

So wird x verneint, das ist CP fällt von C nach E zu;

Weil tang φ verneint ist, (Trig. 4. Erkl. 2. Zus.) so ist y bejaht, oder M liegt rechter Hand der Linie CE, wie es vorhin rechter Hand der Linie CA lag.

In dem Werthe von z ist der veränderliche Bogen verneint, und sein Sinus ebenfalls, (Trig. 3. Erkl. 4. Zus.) also der Werth bejaht.

Für $\varphi = 180$ Grad, ist die Tangente $= 0$; also auch y; Folglich ist E ein Punct der krummen Linie. Deren Gang also für die ersten beyden Quadranten ist AMD2ME.

Die beyden veränderlichen Grössen die einen Punct der Quadratrix bestimmen, von einer und derselben Stelle angefangen.

39) Da man den Anfang der Quadratrix in A setzt, und einen Punct von ihr zu bestimmen, den Bogen AN braucht, so nehme man

die gerade Linie welche noch zu Bestimmung dieses Bogens erfodert wird, nicht wie bisher von C, sondern auch vom Anfange der Quadratrix, also, wenn man den Werth von b (21) braucht, und AP = r − x = u nennt, kömmt aus 6; 15;

$AP = u = b.\ \varphi$

$PM = y = (r - b\varphi).\ \text{tang}\ \varphi$

$CM = z = (r - b\varphi).\ \text{sec}\ \varphi$

So bleiben die Abscissen AP immer bejaht, wenn die CP, im ersten Quadranten bejaht, im zweyten verneint sind. Die Linien PM, werden Ordinaten genannt.

40) Puncte der Quadratrix welche in den folgenden Quadranten eben so bestimmt werden, wie M im ersten liessen sich folgendergestalt angeben.

Es sey $\varkappa$ ein Winkel kleiner als 90 Grad. Für ihn finden sich u, y, z, wenn man in (39) $\varkappa$ statt φ setzt.

Nun sey ein Winkel $= 90^\circ + \varkappa$, dieses statt φ gesetzt, giebt

$u = b.\ (\frac{1}{2}\pi + \varkappa) = r + b.\ \varkappa$

$y = (r - u).\ -\ \text{cot}\ \varkappa = +\ b.\ \varkappa.\ \text{cot}\ \varkappa$

$z = (r - u).\ -\ \text{cosec}\ \varkappa = +\ b.\ \varkappa.\ \text{cosec}\ \varkappa$

Den Punct der so bestimmt wäre könnte man mit 2M bezeichnen.

Auch

Auch hätte man b. $x = c$ eine unveränderliche Grösse.

41) I) Es sey allgemein $\varphi = \text{m.} \frac{1}{2}\pi + x$.

II) Wenn m gerade ist, ist $\tang \text{m.} \frac{1}{2}\pi = 0$; also (Trig. 19 S. 3. Zus.) $\tang \varphi = \tang x$.

III) Ist aber m ungerade, so ist $\tang \text{m.} \frac{1}{2}\varphi \pm$ Unendlich das

obere Zeichen für 1; 5; 9; 13 ...
untere — — 3; 7; 11; 15

Nähmlich jenes wenn m um 1 grösser ist als einer ganzen Zahl Vielfaches, dieses, wenn es um 1 kleiner ist. So ist allemahl $\tang \varphi = \frac{\pm \text{Unendl} + \tang x}{1 \mp \text{Unendl.} \tang x} = -\cot x$.

IV) Weil $\sec = \frac{1}{\cos}$ so suche man

$\cos \varphi = \cos(\text{m.} \frac{1}{2}\pi). \cos x - \sin(\frac{1}{2}\text{m.}\pi). \sin x$

V) Nun ist $\cos \text{m.} \frac{1}{2}\pi =$

$+1$ für m $= 0; 4; 8; 12 \ldots$
-1 —— $= 2; 6; 10; 14 \ldots$
0 —— ungerade.

Auch $\sin \text{m.} \frac{1}{2}\pi$
$= 0$ für m gerade
$= +1$ —— $= 1; 5; 9; 13 \ldots$
$= -1$ —— $= 3; 7; 11; 15 \ldots$

VI) Also cos φ

$= +$ cos $\varkappa$ für m $= 0; 4; 8; 12 \ldots$
$= -$ cos $\varkappa$ —— $= 2; 6; 10; 14 \ldots$
$= -$ sin $\varkappa$ —— $= 1; 5; 9; 13 \ldots$
$= +$ sin $\varkappa$ —— $= 3; 7; 11; 15 \ldots$

VII) Man hat also allemahl nach der Bezeichnung (40)

$u = m.\ r + c;$
$r - b.\ \varphi = -\ ((m-1).\ r + c).$

VIII) Und, für gerade m;

$y = -\ ((m-1).\ r + c).$ tang $\varkappa$
$z = \mp\ ((m-1).\ r + c).$ sec $\varkappa$

$-$ für m $= 0; 4; 8; \ldots$
$+$ —— $= 2; 6; 10; \ldots$

IX) Für ungerade m

$$y = +\ ((m-1).\ r + c).\ \cot \varkappa$$
$$z = \frac{\mp\ ((m-1).\ r + c)}{\sin \varkappa}$$

$-$ für m $= 3; 7; 11 \ldots$
$+$ —— $= 1; 5; 9 \ldots$

X) Für m $= 0$ und $= 1$ stehn die Werthe in 39 und 40; Ferner für

m =	2	3
u =	2. r + c	3. r + c
y =	$-$ (r + c). tang $\varkappa$	$+$ (2. r + c). cot $\varkappa$
z =	$+$ (r + c). sec $\varkappa$	$-$ (2. r + c). cosec $\varkappa$

u. s. w.

42) I) Man setze $x = 0$; also φ ein Vielfaches des Quadranten.

II) Also 41; VII;

$$u = m.\ r$$
$$r - b.\ \varphi = -(m-1).\ r$$

III) Für ein Vielfaches nach einer geraden Zahl (41; VIII)

$$y = 0;$$
$$z = \mp (m-1).\ r.$$

IV) Für ein Vielfaches nach einer ungeraden Zahl, wird in (41; IX)

$$y = +\ \text{Unendlich}$$
$$z = \mp\ \text{Unendlich}.$$

V) Das beruht darauf, daß $(m-1).\ r$ mit einer unendlichen Cotangente multiplicirt, mit einem verschwindenden Sinus dividirt wird; Aber $\frac{b.\ x}{\text{tang } x}$ und $\frac{b.\ x}{\text{sin } x}$ werden jedes $= b$ wenn der Bogen verschwindet, weil der verschwindende Bogen seinem Sinus und seiner Tangente gleich wird.

VI) Also gilt (IV) nicht für $m = 1$; da wird $u = r$; $y = b = z$ (40) wie schon in (24; 25;) gefunden ist.

In (39) werden y; z; durch Producte aus verschwindenden Grössen in Unendliche gegeben, man sieht hie daß jedes dieser Producte $= b$.

VII) Für $m = 2$ ist aus II; III;

$u = 2.r$; $y = o$; $z = +r$;

Das giebt also einen Punct der Quadratrix in E; und den Gang derselben AMD2ME im Halbkreise ANB2NE.

43) Für m grösser als 2; ist u grösser als 2. r (41; VII) also fallen alle Puncte der Quadratrix auser dem Kreise, die durch grössere Bogen als der Halbkreis bestimmt werden.

44) I) Für $\varphi = 2.\frac{1}{2}\pi + \varkappa$, ist y verneint (41; X) Man nehme also $A3P = 2.r + b.\varkappa = u$; und das Perpendikel $3M3P = (r + b.\varkappa).\ tang\ \varkappa$ linker Hand der Axe AE3P; so ist 3M ein Punct in der Quadratrix.

II) Nähmlich die bejahten y, nahmen von PM bis an CD zu, und von dar, durch 2P2M bis an o ab, lagen rechter Hand der Axe, also fallen die verneinten linker Hand.

III) Wenn nun in (44) $\varkappa$ von o bis 90 Grad wächst, so wächst u von 2.r bis an 3.r, y aber, bis ans verneinte Unendliche. Also $AG = 3.r$ genommen, ist ein Perpendikel auf die Axe durch G, eine Asymptote, über welcher sich die Quadratrix linker Hand ins Unendliche hinauszieht.

IV) Der Werth von z bleibt bejaht (41. X) und wächst ins Unendliche.

Nähm-

Nähmlich eine Linie aus des Kreises Mittelpuncte an Puncte der Quadratrix, liegt anfangs auf CA, dreht sich alsdann so, daß ihr Winkel $ACM = \varphi$ immer wächst, mehr als zweene rechte beträgt, wenn sie nach 3M zu geht, und so bis an drey rechte wächst, während dessen die gerade Linie immer fort bis ins Unendliche wächst, also immer bejaht bleibt.

45) I) Für $\varphi = 3.\frac{1}{2}\pi + \varkappa$, ist y bejaht (41; X) Man nehme also $A4P = 3.r + b.\varkappa = u$, ein Perpendikel durch 4P, rechter Hand der Axe $= (2.r + b.\varkappa).\cot\varkappa = y$, so ist 4M ein Punct in der Quadratrix. (41; X)

II) Die verneinten y, sind bis ins Unendliche gewachsen (44; I; III) endliche die ihnen folgen, sind also bejaht, (Geom. 12 S. 14 Zus.)

III) Indem $\varkappa$ von 0 bis an 90 Grod wächst, so wächst u von 3.r bis 4.r, das bejahte y aber nimmt von dem unendlichen Werthe den es für $\varkappa = 0$ hatte bis an den verschwindenden ab.

Offenbahr nimmt die Cotangente ab indem der Bogen von 0 bis an 90° wächst Ferner ist Bogen mit Cotangente multiplicirt, soviel als Bogen mit Tangente dividirt. Nun gehören gleichen Zunahmen des Bogens immer grössere der Tangente, wenn also Bogen und Tangente wachsen, nimmt der genannte Quotient ab, also auch das genannte Product. So erhellt

deutlich daß y immer abnimmt, und für $x = 90$ Grad verschwindet.

IV) Nimmt man also $A_2E = 4.r$, so zieht sich die Quadratrix rechter Hand der Axe, unter dem Perpendikel durch G (43; III) aus dem Unendlichen bis an 2E.

V) Dieses Perpendikel ist also Asymptote für den unendlichen Schenkel E_3M und für den unendlichen Schenkel $2E_4M$. Als beyder Tangente betrachtet, wird es von jenem oben berührt, von diesem unten.

VI) Der Werth von z ist durchgängig für (45) verneint (41; X). Nähmlich in (44; IV) wuchsen bejahte z ins Unendliche, denen also verneinte folgen.

(46) I) Für $\varphi = 4.\frac{1}{2}\pi + x$; ist (41; VIII)

$u = A_5P = 4.r + b.x$

$y = {}_5P_5M = -(3.r + b.x) \tang x$

Und so $_5M$ linker Hand der Axe ein Punct in der Quadratrix.

II) Verneinte y folgen nun den bejahten verschwindenden (45; III)

III) Indem x von 0 bis 90 Grad wächst, wächst u von 4.r bis 5.r, und das verneinte y ins Unendliche.

IV) Nimmt man also $A_2G = 5.r$ so ist ein Perpendikel durch 2G, eine Asymptote an welcher sich die Quadratrix linker Hand oben hinzieht.

V)

V) So zieht sich der Quadratrix Bogen 4M2E5M zwischen den beyden Asymptoten durch G und 2G.

47) I) Nimmt man von A, auf der Axe ein Vielfaches des Halbmessers nach einer ungeraden Zahl, nur 1 ausgeschlossen, also $u = 3.1; 5.1; 7.1; \ldots$ so ist das zugehörige y unendlich, (42; IV) also geht durch die Puncte der Axe die soweit von A abstehn allemahl eine Asymptote.

II) Jedem Vielfachen des Halbmessers nach einer geraden Zahl gehört $y = 0$; (42; III) also wird die Axe von der Quadratrix zwischen jedem Paare nächster Asymptoten geschnitten.

III) Von dem Vielfachen nach der ungeraden Zahl (I) bis zum Vielfachen nach der nächsten geraden (II) ist y bejaht (41; IX) und nimmt vom Unendlichen bis ans Verschwindende ab, indem x von 0 bis 90 Grad wächst.

Dieser Schenkel der Quadratrix liegt also unter der nächstvorhergehenden Asymptote, rechter Hand der Axe.

Wie 4M2E unter der durch C.

IV) Vom Vielfachen, nach nur erwähnter geraden, bis zum Vielfachen, nach der dieser geraden folgenden ungeraden, ist y verneint (41; VIII) und wächst ins Unendliche, indem x von 0 bis an 90 Grad wächst.

Das

Das giebt einen Schenkel der Quadratrix der sich aus einem Puncte der Axe, linker Hand derselben, über der nächstfolgenden Asymptote hinzieht.

Wie 2E5M über der durch 2G.

V) So bekömmt man wie in 46; V; zwischen jeden zwo nächst nach einander folgenden Asymptoten, einen Theil der Quadratrix; Es giebt unzählich viel Asymptoten (I) also unzählich viel Theile der Quadratrix, jeden zwischen ein Paar nächster Asymptoten die um 2.r von einander abstehn.

VI) Wie man leicht sieht, ist der Schenkel der sich von E aus über der ersten Asymptote die durch G geht, erstreckt, gegen selbige erhaben. Nun muß jede krumme Linie, gegen ihre Asymptote erhaben seyn, (An. Unendl. 110) also der Theil 4M5M, gegen die Asymptote durch G über ihm, und auch gegen die durch 2G unter ihm, folglich kehrt dieser Theil, der Asymptote durch 2G, eine hohle und eine erhabene Seite zu, hat also eine Stelle wo hohl in erhaben übergeht, einen Wendungspunct. (An. Unendl. 112).

VII) Dergleichen Wendungspuncte giebt es zwischen jedem Paare nächster Asymptoten. Wo sie liegen untersuche ich nicht.

VIII) Der Werth von z ist zwischen der ersten und zweyten Asymptote verneint (45;

VI)

VI) und wächst so ins Unendliche linker Hand der Axe. Also ist er zwischen der zweyten und dritten bejaht, zwischen der dritten und vierten verneint u. s. w. welches allgemein aus 49; IX; X; kann hergeleitet werden.

48) Exempel. Es sey $r = 1$; $x = 30$ Grad, so ist $b = 0,6366\ldots$ (Geom. 44 S. 5. Zus.) $b.x = c = \frac{1}{3}$.

Im ersten Quadranten $u = \frac{2}{3} = 0,6666\ldots$ und $y = \frac{2}{3}$. tang $30^\circ = 0,3849\ldots$

Im zweyten (40) $u = 1,3333\ldots$;
$y = \frac{1}{3}$. cot $30^\circ = 0,5773\ldots = c.$ cot x
auch $\frac{1}{3}$. tang $30^\circ = 0,1924\ldots = c.$ tang x

Folglich (41; X) für

$m =$	2	3	4
$u =$	2,3333	3,3333	4,3333
	$= A\,3\,P$	$= A\,4\,P$	$= A\,5\,P$
$y =$	$-0,7697$	$+4,0414$	$-1,9244$
	$= 3\,P\,3\,M$	$= 4\,P\,4\,M$	$= 5\,P\,5\,M$

Zweyte Hälfte der Quadratrix.

49) Alles bisherige, folgte aus einer Verzeichnung wie 1 . . 4; die man in dem Halbkreise ABE rechter Hand des Durchmessers AE anfing, und ferner fortsetzte.

50) Eben soviel Grund hat man, dergleichen Verzeichnung in dem Halbkreise AFE linker Hand des genannten Durchmessers anzufangen und fortzusetzen.

51)

51) Ein Bogen von A nach der linken Hand genommen wäre freylich in Absicht auf den rechter Hand genommen als verneint anzusehen.

52) Aber offenbahr ist, daß ein Bogen so groß als AN, linker Hand genommen ganz eben die AP gäbe, die der Bogen AN giebt, und wenn man nach seinem Ende einen Halbmesser zöge, auf solchen einen Punct bestimmte, der nur linker Hand, gegen AE so läge, wie M rechter Hand liegt.

53) Also: Ohne neue Formeln und Rechnungen stelle man sich nur vor; linker Hand des Durchmessers sey eine krumme Linie der AMDE gleich und ähnlich.

Sie wird sich von E an, über der Asymptote durch G, (42) rechter Hand ins Unendliche erstrecken, dann unter derselben linker Hand aus dem Unendlichen zurückkommen durch 2E, rechter Hand über der zweyten Asymptote die durch 2G geht, ins Unendliche hinaus streichen u. s. f.

54) Kurz, der Durchmesser AE ins Unendliche verlängert, hat auf jeder Seite eine Hälfte der Quadratrix, der Hälfte auf der andern Seite ähnlich und ähnlich liegend; Ist also in dieser Absicht, Axe der ganzen Quadratrix, welcher Nahme schon (44; 1) gebraucht worden.

55) Also hat die Asymptote durch G, über sich den gezeichneten Schenkel E3M (44) und einen

einen gleichen und ähnlichen Schenkel der andern Hälfte (53) unter sich den gezeichneten Schenkel 4M2E, und linker Hand der Axe den gleichen und ähnlichen der andern Hälfte.

So ziehen sich, an jeder Asymptote, über und unter ihr, rechter und linker Hand, der Quadratrix unendliche Schenkel, und schneiden einander in der Axe in Puncten E, 2E, u. s. w.

56) Das bisherige lässt sich blos aus den Anfangsgründen der Geometrie und Trigonometrie verstehen, Asymptoten und Wendungspuncte kommen freylich da nicht vor, ich dächte aber gegenwärtiger Vortrag würde jemanden diese Begriffe geben der auch noch nichts davon gehört hätte.

57) So führt der Kreis, durch ein sehr einfaches und leicht faßliches Verfahren auf eine krumme Linie die sich so vielfach ins Unendliche erstreckt, von welchem Dinostratus und seine griechischen Nachfolger keine Ahndung hatten, als sie sich mit AMD dem Anfange dieser Linie beschäfftigten.

58) Jede gerade Linie der Axe parallel, schneidet die Quadratrix unzählich vielmahl (46; V) So zeigt sich hie das Merkmahl einer transcendentischen krummen Linie (Anal. endl. Gr. 577.)

59) Montucla hist. des math. Part. I. Liv. 3. art. 18; p. 199; giebt in der Anm. b; die

Qua-

Quadratrix so weit an, als sie bestimmt wird wenn man nach meinem Verfahren, den Punct N durch den ganzen Kreis gehen lässt, (44; 45;) fängt aber die Bewegung von dem Halbmesser an, der bey mir CB heisst, und der Asymptote durch G parallel ist; So bekömmt er zwo Asymptoten, die man mit dem was ich finde vergleichen kann wenn man ihn nachsehen will. Ich erinnere es hie nur weil er sagt: toute la courbe sera comprise entre deux asymptotes parallèles .... Die ganze krumme Linie kann das nicht seyn, denn sonst würde sie von einer Linie senkrecht auf diese Asymptoten, nicht unzählich vielmahl geschnitten, wäre also nicht transcendentisch. M. hat nicht daran gedacht, daß der Punct im Kreise unzählich vielmahl herumgehen kann.

Uebrigens vermuthet M. Dinostratus habe dieser Linie Gebrauch zur Quadrirung des Kreises nur etwa zuerst bemerkt. Denn Proklus über Euklids I. B. p. 9. sage: Man habe die Theilung des Winkels in mehrere Theile, durch des Hippias Quadratricen versucht. M. kennt keinen Geometer dieses Nahmens als einen der zu des Socrates Zeiten gelebt hat.

Daß die Quadratrix anfangs nicht zum Quadriren erfunden worden sondern diesen Nahmen erst von der bey ihr bemerkten Eigenschaft erhalten, scheint mir richtig und M. mit recht sich deßwegen auf den Pappus zu berufen.

sen. Wahrscheinlich haben ihre ersten Erfinder sie zur Theilung des Winkels angewandt, welches sich aus dem Proklus schliessen lässt. Dessen Stelle, von M. etwas undeutlich angezeigt, findet sich, im dritten Buche seiner Erläuterungen, über Euklids erstes Buch, bey Euklids 9. Satze; 73 Seite des griechischen Textes welcher der griechischen Ausgabe des Euklid Basel 1533 Fol. beygefügt ist. Pr. nennt da, neben dem Hippias auch den Nikomedes; Andre sagt er hätten Archimeds Spirale dazu gebraucht.

60) *Wallisius* am Ende seines Buchs de angulo contactus; Op. T. II. p. 662. redet von der Quadratrix, bemerkt daß man ihre Beschreibung durch mehr Quadranten, selbst über den Halbkreis fortsetzen könne, daß sie die Rectification des Kreises zu finden nicht diene, sonst aber betrachtet er sie nicht umständlich.

Ueber die Mannichfaltigkeit der Wurzeln, in den Gleichungen welche man zu Theilung der Bogen oder Winkel braucht.

Vorerinnerung
zu nächstfolgenden vier Abhandlungen.

Aus dem Cosinus des ganzen Bogens findet man die Quadrate des Sinus und Cosinus des halben; (Trig 19 S. 7; 9; Zus.)

Diese beyden Quadrate sind nur dadurch unterschieden, daß des ganzen Bogens Cosinus, für das erste zu 1 als des Sinustotus Quadrate addirt für das andre abgezogen wird.

Des ganzen Cosinus ist aus dem Sinus durch eine Quadratwurzel gegeben. (Trigon. 3. Erkl.)

Jede Quadratwurzel kann bejaht oder verneint seyn; also auch der Cosinus zu einem gegebenen Sinus; wie ebenfalls Trig. 3. Erkl. 2. Zus. lehrt.

Druckt man also des ganzen Bogens Cosinus, durch seinen Sinus aus, so hat man das Quadrat vom Sinus oder vom Cosinus des halben, nachdem man die Quadratwurzel nimmt.

Nennt man den Sinus des halben $= x$; des ganzen $= p$; so ist $2.x^2 = 1 - \sqrt{(1-p^2)}$. Will man nun aber da nicht die Quadratwurzel beybehalten, sondern eine Gleichung zwischen x und p selbst haben, so muß man aus der angegebenen folgende machen $\sqrt{(1-p^2)} = 1 - 2.x^2$; und alsdann auf beyden Seiten quadriren, so bekömmt man $1 - p^2 = 1 - 4x^2 + 4.x^4$ und daraus $0 = p^2 - 4x^2 + 4.x^4$.

Hätte man angenommen x solle des halben Bogens Cosinus bedeuten, so wäre $2.x^2 = 1 + \sqrt{(1-p^2)}$; Verfährt man damit auf

eben

eben die Art, so bekömmt man eben die nur gefundene Gleichung.

Weil sich nicht unterscheiden läßt ob eine bejahte Quadratwurzel ist quadrirt worden, oder eine verneinte, so kann man nicht unterscheiden ob x^4 die vierte Potenz vom Sinus, oder vom Cosinus des halben Bogens ist.

Also auch nicht ob x den Sinus oder den Cosinus bedeutet? Es muß also wohl beydes zugleich bedeuten.

Und noch bleibt die Frage, was es sagen will daß die vierte Potenz in der Gleichung erscheint, da das was man wissentlich sucht, höchstens ein Cosinus mit einem Sinus ist, und also wie es scheint, nur nach zweyerley gefragt wird.

Bey der Halbirung, vermeiden die angeführten Formeln der Trigonometrie diese Fragen. Bey ihnen weiß man ob die Quadratwurzel soll addirt, oder abgezogen werden.

Sucht man aber aus dem Sinus eines ganzen Bogens den Sinus seines Drittheils, so lassen sich dergleichen Formeln nicht angeben, man findet zwischen beyden eine Gleichung, wo der gesuchte Sinus auf den dritten Grad steigt, und das bedeutet drey Sinus, da man doch nur einen zu wissen verlangt.

Sucht man des vierten, fünften, sechsten u. s. w. Theiles Sinus aus des ganzen seinem,

so bekömmt man eine Gleichung die wenn die Zahl des Theiles den man sucht gerad ist, acht, zwölf . . . Sinus angiebt, wenn die Zahl ungerade ist fünf, sieben . . .

Eben so was ereignet sich wenn man aus der Tangente oder Sehne des ganzen Bogens Tangente oder Sehne, der Hälfte, des Drittheils u. s. w. sucht.

Die Analysis zeigt was die unterschiednen Werthe der Grösse die man sucht bedeuten. Woher sie kommen, erläutert für einen besondern Fall Newton in s. Arithmetica vniuersali in der Abhandlung de natura radicum aequationis die nach den geometrischen Aufgaben folgt, 180 Seite von *s' Gravesande* Ausgabe Leiden 1732. Er zeigt da: Wenn man eines Bogens fünften Theil sucht, so suche man Fünftheile aller Bogen, die mit dem gegebenen einerley Gränzen haben.

Daß aber diese Fünftheile alle, nur fünf unterschiedne Sinus, Tangenten, Sehnen, haben, das hat er doch nicht umständlich dargethan.

Noch viel weniger was Allgemeines, von Theilungen in andre Zahlen von Theilen.

Gleichungen für Theilung der Winkel, und allgemeine Gesetze derselben, findet man in analytischen Schriften, z. E. für Sinus in meiner Analys. endl. Gr. 175; für Tangenten, in der

Anal.

Anal. des Unendlichen, 331. Aber ich verlangte noch Rechenschaft warum die Gleichungen auf einen gewissen Grad steigen, eine gewisse Gestalt haben.

Meine Untersuchungen hierüber enthält die Einladungsschrift zum Antritte meines hiesigen Lehramtes: Vnde plures insint radices, aequationibus sectiones angulorum definientibus; Gott. 1756. Sie findet sich auch in der letzten Stelle, von: Dissertationes Mathematicae et Physicae quas Soc. R. Sc. Gottingensi annis 1756 .. 1766 obtulit A. G. Kaestner Altenb. 1771.

Die Sache ist in der Analysis von Wichtigkeit, und daher schiene mir nützlich diese Erläuterungen auch hie beyzubringen. Ihre ersten Gründe, beruhen auf Lehren der Trigonometrie, und was in der Ausführung von der Theorie der Gleichungen vorausgesetzt wird, macht sich doch wohl jeder bekannt, der etwas über die ersten Anfangsgründe gehen will. Man wird mir also verstatten meine Erläuterungen hie mitzutheilen.

In vorerwähnter Schrift fing ich mit den Sehnen an, und leitete aus ihnen her was die Sinus betrifft.

Bey dem jetzigen Vortrage der Trigonometrie, wird man mit den Sinussen bekannter als mit den Sehnen, daher habe ich es jetzo umge-

kehrt, die Sinus zuerst betrachtet und auf sie gegründet was ich von den Sehnen sage.

Also konnte ich mein Lateinisches nicht übersetzen, sondern musste es umarbeiten.

24.

Alle Bogen die einerley Sinus haben.

Trigon. 2. Erkl.

1) Der Halbmesser sey immer = 1; Einem Bogen = u kleiner als 90 Grad, oder doch, nicht grösser, gehöre der bejahte Sinus = p.

2) Eben derselbe gehört dem Bogen 180° — u;

3) Und der verneinte Sinus = — p; den Bogen 180° + u, 360° — u.

4) Ist es möglich daß ein anderer Bogen mit einem gegebenen, einerley Anfang und Ende hat, so hat er auch mit dem gegebenen, der Grösse nach einerley Sinus.

Weil Sinus ein Perpendikel ist, das vom Ende auf den Halbmesser fällt der nach dem Anfange gezogen wird; so sind erwähnter beyder Bogen Sinus, gerade Linien die zwischen einerley Gränzen fallen, also gleich lang.

5) Nach-

5) Nachdem man im Bogen vom Anfange bis ans Ende gekommen ist, gehe man in eben der Kreisbewegung in welcher man durch den Bogen gegangen ist, im Kreise weiter fort, bis man wiederum zum Anfange kömmt, und von dar im Bogen weiter fort bis zum Ende.

Der Weg den man so gemacht hat, besteht aus dem Bogen, und dem ganzen Umkreise; hat mit dem Bogen einerley Anfang und Ende, folglich einerley Sinus.

6) Also, wenn man zu einem Bogen den ganzen Umfang des Kreises setzt, kömmt ein neuer Bogen heraus der mit dem vorigen völlig einerley Sinus hat.

So ist in der Figur der Trigonom.

DE Sinus der Bogen AD u. ADHBFAD
fe . . . . . Af u. AfBFADf
de . . . . . ABd u. ABdFABd
FE . . . . . ADBF u. ADBFADBF.

7) Bedeutet also π den halben Umkreis für den Halbmesser $= 1$ oder einen Bogen von 180 Graden; so ist (2; 3; 6)

$$\begin{aligned} +p &= \sin u = \sin(\pi - u) \\ &= \sin(u + 2\pi) = \sin(3\pi - u) \\ -p &= \sin(\pi + u) = \sin(2\pi - u) \\ &= \sin(2\pi + u) = \sin(4\pi - u) \end{aligned}$$

8) Es bedeute w einen Bogen, der von o an, nach der Richtung ADH . . . bis an den

ganzen Kreis, und so weit man will fort, wachsen kann.

9) Bey den Aenderungen des Bogens bis zum ganzen Kreise, ändert sich

sin w von	0 . . + 1	+ 1 . . . 0	0 . . − 1	− 1 . . 0
im	1 Quadr	2 Qu.	3 Qu.	4 Qu.
also ferner	5 Qu.	6	7	8

10) Allgemein also kommen völlig eben die Sinus, in Absicht auf Grösse und Bejahtes oder Verneintes vor, wenn man w durch den ganzen Kreis, und durch mehrere Kreise nach einander wachsen läßt, und, der Regel gemäß daß eine Grösse durch 0 ins entgegengesetzte übergeht, sind die Sinus

im Quadr.

bejaht	1	2	5	6	9	10	13	14..
verneint	3	4	7	8	11	12	15	16

Das ist, ein Bogen der sich im 4. n + 1 ten oder 4. n + 2 ten Quadranten endigt hat einen bejahten Sinus, der sich im 4. n + 3 ten oder 4. n + 4 ten endigt einen verneinten.

11) In (4) war gezeigt, daß von Bogen die einerley Anfang und Ende haben, die Sinus gleich lang sind, also, wie ich es da mit Bedacht ausgedruckt habe, der Grösse nach einerley. Könnte aber der eine verneint seyn, der andre bejaht, so wären sie dem Zeichen nach entgegengesetzt. Hie nun ist gewiesen daß einerley

nerley Anfang und Ende der Bogen, auch dem Zeichen nach einerley Sinus geben, also völlig einerley Sinus.

Daß eine Linie, bey einerley Länge bald bejaht, bald verneint seyn kann, ist schon daraus begreiflich, weil man einen Weg, hin und her gehen kann. Man s Ueber das Bejahte und Verneinte bey den Secanten; Geometr. Abhandl. I. Samml. 59 Abh.

Sollen also mehrere Bogen völlig einerley Sinus haben, so muß ihr gemeinschaftlicher Sinus, nicht nur für alle einerley Gränzen haben, sondern auch für alle bejaht seyn oder für alle verneint.

12) Am Anfange des 1; 3; 5; 7 . . . Quadranten, oder am Ende des 2; 4; 6; 8; verschwindet der Sinus; Man kann also folgende Frage untersuchen:

Wenn sind verschwindende Sinus bejaht oder verneint?

Nach Trigon. 2. Erkl. 8 Zus.

13) Wenn ein Bogen von 0 an zu wachsen anfängt, so wächst sein Sinus von 0 an bis an 1 des ersten Quadranten Sinus, nimmt dann wiederum ab bis er am Ende des zweyten Quadranten oder des ersten Halbkreises verschwindet.

14) Dieser verschwindende Sinus muß also als bejaht angesehen werden, denn bis an ihn nimmt die bejahte Einheit ab.

15) Nun kommen am Anfange des dritten Quadranten verneinte Sinus von 0 bis an — 1; Da muß wohl der entstehende Sinus = 0; am Anfange des zweyten Halbkreises als verneint angesehen werden, ihm folgen immer grössere und grössere verneinte; bis ans Ende des dritten Quadranten.

16) Vom Anfange des vierten Quadranten bis ans Ende desselben, oder des zweyten Halbkreises ändern sich verneinte Sinus, von — 1 bis 0;

Der verschwindende Sinus am Ende des zweyten Halbkreises, ist also das Ende einer Reihe verneinter Grössen, folglich als verneint anzusehen.

17) Dieses zeigt daß man auch beym 0 verneint und bejaht unterscheiden kann wie beym Unendlichen.

18) Wenn man diese Betrachtungen über den ersten ganzen Kreis fortsetzt, und sich den Kreis mit seinen Theilen wiederhohlt vorstellt, so erhellt folgendes:

Im 1; 3; 5; 7; ... Halbkreise sind die Sinus bejaht, also, der entstehende Sinus am Anfange jedes dieser Halbkreise, und der verschwindende am Ende desselben, als bejaht anzusehn.

Im

Im 2; 4; 6; 8 ... Halbkreise sind die Sinus verneint, also in jeden dieser Halbkreise, der entstehende am Anfange, der verschwindende am Ende verneint zu nehmen.

19) Kömmt man in einer Rechnung auf eine Formel wie $z = \frac{t}{\sin m.\pi}$ So ist der Nenner allemahl = o also, wenn t eine endliche Grösse ist, z unendlich.

20) Ferner, der Nenner bejaht, oder verneint, nach dem m ungerade oder gerade ist (18).

21) Ist also t bejaht, so ist z nach dem Unterschiede (20) ein bejahtes oder verneintes Unendliche. Und umgekehrt ein verneintes oder bejahtes, wenn t verneint ist.

Allgemeine Formeln für Bogen die einerley Sinus haben.

22) Aus (7; 11) gehören zusammen

Sinus		Bogen		
+ p	I) u	$2\pi+u$	$4\pi+u$	.... $2.k.\pi+u$ ...
— p	II) $\pi+u$	$3\pi+u$	$5\pi+u$	... $(2.k+1).\pi+u$ ...
+ p	III) $\pi-u$	$3\pi-u$	$5\pi-u$	... $(2.k+1).\pi-u$ ...
— p	IV) $2.\pi-u$	$4.\pi-u$	$6.\pi-u$	... $2.(k+1)\ \pi-u$ ...

wo k jede ganze Zahl bedeuten kann.

Der bejahte Sinus gehört zu jedem Bogen in den Reihen I; III; der verneinte zu jedem in den Reihen II; IV; jeder also zu unzählich viel Bogen.

23)

23) Wenn man irgend ein Glied der Reihe I; zu irgend einem der Reihe III addirt, so ist die Summe, ein Vielfaches des halben Umkreises durch eine ungerade Zahl, und der Bogen u ist in ihr nicht mehr zu finden.

Auch so verhält es sich wenn man irgend ein Glied der Reihe II zu irgend einem der Reihe IV addirt.

Jede dieser Summen ist ein Vielfaches des Halbkreises durch eine ungerade Zahl, und hat zum Sinus eine verschwindende bejahte Grösse oder + o (18).

24) Ein Paar Bogen deren Summe ein Vielfaches des Halbkreises durch eine ungerade Zahl ist, haben einerley Sinus.

Dieser Sinus aber kann bejaht oder verneint seyn.

So kömmt des halben Umfanges siebenfaches aus der Reihe I zweytem Gliede + der Reihe III drittem Gliede; aber auch aus der Reihe II erstem + der Reihe IV drittem Gliede. Die Glieder der Reihen I; III; haben einen bejahten Sinus, die der Reihen II; IV; den entgegengesetzten sonst gleichen.

25) Ein Glied von I zu einem von IV addirt, giebt ein Vielfaches des Halbkreises nach einer geraden Zahl, oder kurz: ein Vielfaches des ganzen Kreises; Eben so: ein Glied von II zu einem von III addirt.

Jede

Jede dieser Summen hat zum Sinus $-o$; (13) das Vielfache durch o, wäre freylich auch ein Vielfaches durch eine gerade Zahl, und hätte doch $+o$ zum Sinus (13) aber dieses Vielfache kömmt unter diesen Summen nicht vor.

26) Ein Paar Bogen deren Summe ein Vielfaches des ganzen Kreises ist, haben entgegengesetzte sonst gleiche Sinus.

Folgen hieraus,
wenn ein Bogen halbirt wird dessen Sinus bejaht, und gegeben ist.

27) Wenn weiter nichts von einem Bogen gegeben wird, als daß sein Sinus $= +p$; So ist des Bogens Hälfte, die Hälfte jedes Gliedes der Reihen I oder III (22).

28) Z. E. wenn eines Bogens Sinus $= \frac{1}{2}$ So ist der kleinste Bogen, welchem dieser Sinus gehört 30 Gr. Aber eben dieser Sinus gehört zu $360+30$; $2.360+30$ ... Graden.
Auch so zu 150; $360+150$; $2.360+150$... Graden.

Von einem Bogen dessen Sinus $= \frac{1}{2}$, kann also jedes Glied folgender Reihen die Hälfte seyn:

15	$180+15$	$360+15$ . . .
75	$180+75$	$360+75$ . . .

29)

29) Wenn also nur der Sinus gegeben ist, und dieser unzählich vielen Bogen gehört, so giebt es unzählich viel Bogen deren jeder die Hälfte eines Bogens ist welcher den gegebenen Sinus hat.

30) Haben aber diese unzählichen Hälften auch unzähliche Sinus?

31) Diese Frage lässt sich beantworten, wenn man die Reihen dieser Hälften darstellt.

giebt

$\frac{1}{2}$. I)	$\frac{1}{2}u$	$\pi+\frac{1}{2}u$	$\pi+\frac{1}{2}u$	.. k. $\pi+\frac{1}{2}u$ ...
$\frac{1}{2}$. III)	$\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}u$	$\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{2}u$	$\frac{5}{2}\pi-\frac{1}{2}u$	.. $(k+\frac{1}{2})\pi-\frac{1}{2}u$...

32) Der Reihe $\frac{1}{2}$. I zweytes Glied, hat zum Sinus $-\sin\frac{1}{2}u$.

Das dritte Glied hat einerley Sinus mit dem ersten. (6)

In einem der folgenden, sey

k { gerade, so ist sein Sinus, des ersten Sinus
  { ungerade, so ist sein Sinus, des zweyten S.

Nähmlich für k ungerade, besteht das Glied aus einem Vielfachen des ganzen Kreises und einem Halbkreise $+\frac{1}{2}u$.

Alle Bogen in der Reihe $\frac{1}{2}$. I haben also nur zweene Sinus, $\pm\sin\frac{1}{2}u$.

33) Der Reihe $\frac{1}{2}$. III erstes Glied hat zum Sinus $\cos\frac{1}{2}u$.

Das zweyte besteht aus 180 Gr + 90 Gr $-\frac{1}{2}u$ Sein Sinus ist also $-\sin(90\text{ Gr}-\frac{1}{2}u) = -\cos\frac{1}{2}u$.

Das

Das dritte Glied hat einerley Sinus mit dem ersten.

In einem der folgenden, sey k

gerade so besteht es aus einem Vielfachen des Umfanges, und dem ersten.

ungerade so besteht es aus einem Vielfachen des Umfanges und dem zweyten.

Alle Bogen in der Reihe $\frac{1}{2}$. III; haben nur zweene Sinus, $\pm \cos \frac{1}{2} u$.

34) Auf die Frage (30) kömmt also folgende Antwort.

Wenn man aus $\sin u = p$; $\sin \frac{1}{2} u = x$ sucht, so hat x vier Werthe $\pm \sin \frac{1}{2} u$; und $\pm \cos \frac{1}{2} u$.

35) Das läßt sich so darstellen.

Wenn x eines einfachen Bogens Sinus bedeutet, p des doppelten, also auch x des halben, p des ganzen; So ist (Trig. 19 S. 5. Zus.)

2. x. $\sqrt{(1 - x^2)} = p$; also quadrirt

$4x^2 - 4x^4 = p^2$ daraus

$x^4 = x^2 - \frac{1}{4} p^2$ und (An. endl. Grössen 78)

$x^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} . \sqrt{(1 - p^2)}$

Aber $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} . \cos u$ ist das Quadrat von $\cos \frac{1}{2} u$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} . \cos u$ ist das Quadrat von $\sin \frac{1}{2} u$

(Trig. 19 S. 5; 7; Zus.) Also ist x entweder $\pm \cos \frac{1}{2} u$ oder $\pm \sin \frac{1}{2} u$.

36) In Trig. 19 S. 7; 9; Zus. unterscheiden sich die Quadrate von $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ da-

dadurch daß $\cos 2.\varphi$ für das erste abgezogen wird, für das zweyte addirt. Nimmt man also des ganzen Bogens Cosinus als gegeben an, so unterscheiden die Quadrate der Sinusse und Cosinusse des halben durch Addition und Subtraction.

Nennt man aber des ganzen Sinus $= p$ so ist sein Cosinus $= \pm \sqrt{(1 - p^2)}$ weil jede Quadratwurzel entgegengesetzte sonst gleiche Werthe hat, und so giebt $1 \pm \sqrt{(1 - p^2)}$ zugleich die Quadrate des Sinus und Cosinus des halben nach dem man das untere oder obere Zeichen braucht.

37) Man könnte eben solche Untersuchungen über die Halbirungen anstellen, wenn $-p$ als Sinus eines Bogens gegeben wäre. Ich finde aber nicht für nöthig, Zeit und Platz darauf zu verwenden, theils weil man doch gewöhnlich den Sinus des ganzen Winkels als bejaht annimmt, theils weil man für diesen Fall das gewiesene Verfahren leicht nachahmen kann.

Wenn ein Bogen dessen Sinus gegeben und bejaht ist in drey Theile getheilt wird.

38) Aus (22) ist da

$\frac{1}{3}$. I)	$\frac{1}{3}u$	$\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}u$	$\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{3}u$	....	$\frac{2.k}{3}.\pi + \frac{1}{3}u$ ..
$\frac{1}{3}$. III)	$\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{3}u$	$\pi - \frac{1}{3}u$	$\frac{5}{3}\pi - \frac{1}{3}u$	....	$\left(\frac{2k}{3} + \frac{1}{3}\right).\pi - \frac{1}{3}u$

39)

39) Der Reihe $\frac{1}{3}$. I Glieder, haben offenbahr jedes einen andern Sinus, weil keines aus dem andern durch Zusatz des ganzen Umfangs entsteht.

Eben so hat keines der ersten drey Glieder von $\frac{1}{3}$. III einerley Sinus mit dem andern.

Das erste Glied in $\frac{1}{3}$. I und das zweyte in $\frac{1}{3}$. III machen zusammen 180 Gr. haben also einen Sinus $=$ sin $\frac{1}{3}$ u.

Eben so das erste in $\frac{1}{3}$. III und das zweyte in $\frac{1}{3}$. I, haben sin $(60° - \frac{1}{3}u)$.

Das dritte Glied in $\frac{1}{3}$. I ist $=$ 180 Grad $+ \frac{1}{3}(\pi + u)$ hat also zum Sinus
$-$ sin $(60° + \frac{1}{3}u)$.

Das dritte in $\frac{1}{3}$. III ist $= 360° - 60° - \frac{1}{3}u$ also sein Sinus $= -$ sin $(60° + \frac{1}{3}u)$ wie des nächst zuvorgenannten Gliedes.

Diese sechs Glieder haben also nur drey unterschiedne Sinus
sin $\frac{1}{3}$ u; sin $(60° - \frac{1}{3}u)$; $-$ sin $(60° + \frac{1}{3}u)$

39) Für das allgemeine Glied in jeder Reihe, sey

$k =$	$3.m$	$3.m + 1$	$3.m + 2$
$\frac{2.k}{3} =$	$2.m$	$2.m + \frac{2}{3}$	$2.m + \frac{4}{3}$
$\frac{2.k + 1}{3} =$	$2.m + \frac{1}{3}$	$2.m + 1$	$2.m + \frac{5}{3}$

Jede ganze Zahl nähmlich, ist, entweder ein Vielfaches der 3; oder ein solches Vielfache

um 1 vermehrt, oder ein solches Vielfache um 2 vermehrt.

40) Ein Glied der Reihe $\frac{1}{3}$. I besteht also aus einem Vielfacher des Umfanges, und dem ersten, oder zweyten, oder dritten Gliede, nach dem $k = 3.m$ oder $3.m + 1$ oder $3.m + 2$ ist; Und eben so für diese drey Werthe, ein Glied der Reihe $\frac{1}{3}$. III; aus einem Vielfachen des Umfanges, und dem ersten, oder zweyten, oder dritten, dieser.

Folglich hat jedes Glied dieser Reihen, zum Sinus, einen Sinus welchen eines der drey ersten Glieder hat.

Das ist, einen der drey Sinus, die am Ende von (38) angegeben sind.

41) Wer also den Sinus eines Bogens sucht, welcher $\frac{1}{3}$ des Bogens ist, dessen Sinus $= + p$; der sucht dreyerley Sinus, davon nur einer dem Drittheile des Bogens gehört dessen Sinus gegeben ist, die andern beyden gehören zu Bogen welche durch 60 Grad und dieses Drittheil gegeben sind.

42) Zur Erläuterung mache man eine Gleichung zwischen x des einfachen Bogens und p des dreyfachen Bogens Sinus, da dann rückwärts aus p als Sinus des ganzen Bogen, x als Sinus des Drittheils gesucht wird.

Weil der dreyfache Bogen aus doppelten und einfachen besteht, so findet sich nach Trig. 19. S.

$2.\sin\varphi.\cos\varphi.\cos\varphi + (1-2.\sin\varphi^2).\sin\varphi = \sin 3\varphi$

das ist

$2.x.(1-x^2) + (1-2.x^2).x = p$

daher

$3.x - 4.x^3 = p$

43) Will man diese Gleichung so einrichten daß x aus p gesucht wird so kömmt $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}p = 0$ (An. endl. Gr. 192.)

44) Exempel. I) Man setze $p = 1$ also den kleinsten Bogen welchem dieser Sinus gehört $= 90$ Grad. So ist $x^3 - \frac{3}{4}.x + \frac{1}{4} = 0$.

II) Nun ist $\frac{1}{3}.90$ Grad $= 30$ Grad, also ein Werth von $x = \frac{1}{2}$; welches auch zutrifft weil $\frac{1}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = 0$.

III) Nach An. 220 ist die Grösse die in I; $= 0$ gesetzt wird, ein Product aus drey Factoren, deren einer $x - \frac{1}{2}$ ist. Dividirt man sie mit diesem Factor, nach (An. 6) so kömmt als Quotient $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; Setzt man diesen $= 0$ und löset die quadratische Gleichung auf die alsdann entsteht (An. 78) so geben ihre beyden Wurzeln die beyden übrigen Factoren. Nähmlich aus $x^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ folgt $x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{(\frac{1}{16} + \frac{1}{2})} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$ also entweder $= +\frac{1}{2}$ oder -1.

IV) In der That ist $(x-\frac{1}{2}).(x-\frac{1}{2}).(x+1) = x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$;

V) Setzt man in (38) $u = 90$ Gr. so kommen die drey dort angegebenen Sinus, die

ersten beyden jeder $= \frac{1}{2}$, der dritte $= -1$; welches mit den gefundenen drey Werthen von x übereinstimmt.

45) Unter den drey Sinus (38) kann man den letzten so ausdrucken $\sin -(60° + \frac{1}{3}u)$.

So machen die Bogen dieser drey Sinus, zusammen $-\frac{1}{3}u$.

Man setze $u = 30°$, also in (43) $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$ die drey Werthe der unbekannten Grösse, sind die Sinus von 10 und von 50 Gr. und $-\sin 70°$. Aber $10 + 50 - 70 = -10$.

Allgemein.

Noch bedeute u einen Bogen nicht grösser als der Quadrant; $+p = \sin u$; Wieviel unterschiedne Sinus, haben alle die Bogen deren jeder $= \frac{\text{Bog } \sin p}{n}$ ist, oder $\frac{1}{n}$ eines Bogens der $+p$ zum Sinus hat?

47) In den Reihen I; III; übertrifft jedes folgende Glied sein vorhergehendes um den ganzen Umfang; In den ersten Gliedern der Reihen ist der ganze Umfang nicht vorhanden, sondern kömmt erst in den folgenden. Also ist in jedem Gliede der Reihen sein Vielfaches durch die um eins verminderte Zahl des Gliedes, und dazu kömmt in III noch der halbe Umfang.

48) Wenn

48) Wenn man jedes Glieder dieser Reihen mit n dividirt, so entstehen die Reihen V; VI; die sich so darstellen lassen

Zahl des Gliedes	1	2	...	h	...
V)	$\frac{u}{n}$	$\frac{2.\pi+u}{n}$	...	$\frac{2.(h-1).\pi+u}{n}$	...
VI)	$\frac{\pi-u}{n}$	$\frac{3.\pi-u}{n}$	...	$\frac{(2.h-1).\pi-u}{n}$	..

Die Glieder jeder Reihe wachsen ohne Ende, und sind alle bejaht, da jedes erste Glied, bejaht ist.

49) Man setze $h = n$ für das n te Glied.

50) So kömmt in V; dieses Glied

$= 2.\pi - \frac{(2\pi-u)}{n}$.

Was vom Halbkreise abgezogen wird, ist bejaht, weil u nicht grösser als der Quadrant ist; auch kleiner als der Halbkreis: Also ist dieses Glied ein bejahter Bogen wie (48) schon versichert, kleiner als der ganze Kreis.

Folglich ist jedes der ersten n Glieder in V; kleiner als der ganze Kreis.

51) Man setze $h + m.n$ statt der Zahl des Gliedes, m sey eine ganze bejahte Zahl.

52) So kömmt in V) das $(h + m.n)$ te Glied $= 2.m.\pi + \frac{2.(h-1).\pi+u}{n}$.

Dieses Glied entstehet also, wenn man zu einem der ersten n; dessen Zahl h ist, ein Vielfaches des ganzen Umfanges addirt, hat also mit diesem Gliede einerley Sinus.

53) Die unzählichen Glieder der Reihe V; haben also nicht mehr als n unterschiedne Sinus.

54) Ich sage nicht mehr; denn gäbe es unter den ersten n Gliedern, etwa ein Paar das zusammen den halben Umkreis ausmachte, so hätten diese beyden Glieder nur einen Sinus, und so könnte die Zahl der unterschiednen Sinus kleiner als n seyn, vielleicht noch aus andern Betrachtungen. Was hierüber statt findet, untersuche ich jetzo noch nicht, und mache nur diese Erinnerung, zu bemerken daß mein Ausdruck in (53) nicht sagt soviel.

55) Wenn man (49) in VI) braucht so kömmt da das n te Glied $= 2\pi - \frac{(\pi + u)}{n}$ kleiner als der ganze Umfang, und so ist jedes der ersten n Glieder kleiner als der ganze Umfang.

Die Voraussetzung (51) giebt in VI; m. n. $2.\pi + \frac{(2.h - 1).\pi - u}{n}$, wiederum einen Bogen der eben den Sinus hat, wie einer unter den ersten n, dessen Zahl h war.

56) Al-

56) Also haben auch die unzählichen Glieder der Reihe VI, nicht mehr als n unterschiedne Sinus, soviel als die ersten n Glieder haben können.

57) Man nenne $\frac{\pi}{n} = \lambda$; und $\frac{u}{n} = \mu$; welches nie grösser als $\frac{1}{2}\lambda$ seyn wird, allemahl kleiner wenn nicht $u = 90$ Grad (1).

Die ersten n Glieder beyder Reihen (48) mit denen in jeder Reihe alle folgenden einerley Sinus haben, lassen sich alsdann so darstellen

Glied	1	2	3	...	n
V	μ	$2.\lambda+\mu$	$4.\lambda+\mu$	...	$2.(n-1).\lambda+\mu$
VI	$\lambda-\mu$	$3.\lambda-\mu$	$5.\lambda-\mu$	...	$(2.n-1).\lambda-\mu$

In jeder Reihe ist jedes folgende Glied grösser als sein nächstvorhergehendes.

In VI ist in jedem Gliede, λ einmahl mehr da als in dem darüberstehenden von V.

Zieht man also von dem VI das darüberstehende in V ab, so bleibt

$$\lambda - 2\mu$$

das wird $= 0$ wenn $u = 90$ Gr.

In diesem Falle, sind die Glieder beyder Reihen, einerley, und eine wie die andre wird $\frac{1}{2}.\lambda$; $\frac{5}{2}.\lambda$ . . . . . $(4.n-3).\frac{1}{2}\lambda$.

In jedem andern Falle ist jedes Glied der Reihe VI, grösser, als das eben sovielte der Reihe V, welches über ihm steht.

Ferner ist jedes Glied der Reihe V, um $\lambda + 2\mu$ grösser, als das nächstvorhergehende der Reihe VI, das unter ihm eine Stelle rückwärts steht; 2 V als 1 VI; 3 V als 2 VI u. s. w.

Die Reihen V; VI; geben also zusammen eine einzige von wachsenden Bogen:
$\mu, \lambda - \mu$; $2.\lambda + \mu$; $3.\lambda - \mu \ldots . (2.n-1).\lambda - \mu$
dieses sind alle Bogen die unterschiedne Sinus haben.

Es sey n gerade.

58) Nun bedeute r eine bejahte Zahl kleiner als $\frac{1}{2}$n; Und es sey $h = \frac{1}{2}n + r$; So geben sich folgende Werthe für das Glied dessen Zahl = h ist.

59) In V) ist es $= \frac{(n+2.(r-1)).\pi + u}{n}$
besteht also aus dem halben Umfange und dem rten Gliede.

Folglich ist der Sinus des $(\frac{1}{2}n + r)$ten Gliedes = — sin des rten Gliedes.

60) In VI) ist es $= \frac{(n+2.r-1).\pi - u}{n}$
besteht also wiederum aus dem halben Umfange und dem rten Gliede, und hat zum Sinus = — sin des rten Gliedes.

61) Da nun alle Glieder der Reihen nicht mehr Sinus haben, als die ersten n Glieder (53; 56;) so erhellt folgendes.

Bey

Bey der Theilung in eine gerade Menge Theile; giebt es in V) $\frac{1}{2}$n unterschiedne Sinus, und eben soviel ihnen entgegengesetzte, sonst gleiche.

Auch so in VI).

Kein Sinus in VI) ist mit einem in V) einerley.

Denn: kein Glied der Reihe V; um Vielfache des Umfanges vermehrt giebt ein Glied der Reihe VI.

62) Man setze also in der allgemeinen Frage vor (47) bedeute x den Sinus eines Bogens der $\frac{1}{n}$ von irgend einem der Bogen ist die + p zum Sinus haben.

Unter diesen Bogen die + p zum Sinus haben, ist u der kleinste, der nächste nach ihm ist $180° - u$, Ueberhaupt sind ihrer unzählich viel. Von jedem $\frac{1}{n}$ genommen, giebt auch unzählich viel Bogen.

Man nenne überhaupt v einen Bogen welcher $\frac{1}{n}$ irgend eines Bogens ist, der + p zum Sinus hat.

Eines solchen Bogens Sinus sey $= x$; Cosinus $= y = \sqrt{(1 - x^2)}$.

Das ist

$$x = \sin v = \sin\left(\frac{1}{n} \text{Bog} \sin p\right)$$

und

$$y = \cos v.$$

Es giebt unzählichе v; Wieviel giebt es x?

Das ist die Frage welche beantwortet werden soll.

Von y wird nachgehends geredet.

63) Wenn n gerade ist, so hat nach (61) x, in V und VI zusammen n bejahte unterschiedne Werthe, und eben soviel verneinte deren jeder einem der bejahten entgegengesetzt, sonst gleich ist.

Also 2. n Werthe, die Hälfte bejahte, die Hälfte verneinte, sonst eben so grosse.

64) Der erste Fall hievon ist die Halbirung (34).

65) Ein etwas grösseres Exempel, sey die Theilung in sechs Theile. Den griechischen Buchstaben, der so oft wiederhohlt werden müsste, will ich durch einen Stern andeuten. Ueber den Reihen stehn die Zahlen der Glieder

	1	2	3	4	5	6
V	$\frac{u}{6}$	$\frac{2^*+u}{6}$	$\frac{4^*+u}{6}$	$\frac{6^*+u}{6}$	$\frac{8^*+u}{6}$	$\frac{10^*+u}{6}$
VI	$\frac{*-u}{6}$	$\frac{3^*-u}{6}$	$\frac{5^*-u}{6}$	$\frac{7^*-u}{6}$	$\frac{9^*-u}{6}$	$\frac{11^*-u}{6}$

Hie

Hie ist in jeder Reihe

Halber Umfang + 1 Glied = 4 Glied
+ 2 . . . = 5 . . .
+ 3 . . . = 6 . . .

Also Sin	= — Sin
1 Glied	4 Glied
2	5
3	6

So sind in V, drey bejahte Sinus für die drey ersten Glieder und drey ihnen entgegengesetzte für die drey letzten.

Auch so in VI;

Kein Sinus eines Gliedes in V kann einem Gliede in VI gehören.

Es giebt also sechs bejahte Sinus und eben soviel verneinte, sonst jenen gleiche.

66) Ein ganz bestimmtes Exempel sey u = 30 Grad, davon der sechste Theil = 5 Gr. Des halben Umfangs sechster Theil ist 30 Grad; dieser also, durch alle gerade und ungerade Zahlen multiplicirt giebt

V	5	65	125	185	245	305
VI	25	85	145	205	265	325

In jeder Reihe kommen die drey letzten Glieder heraus, wenn man zu den drey ersten, den halben Umfang addirt.

Nimmt

Nimmt man $\frac{1}{2}$ als den Sinus von 30 Graden, als gegeben an, und sucht den Sinus eines Bogens welcher $\frac{1}{6}$ des Bogen ist, der $\frac{1}{2}$ zum Sinus hat, so findet man die Sinus von 5; 65; 125; 25; 85; 145; und eben der Sinus entgegengesetzte, also sechs Paare Grössen, da in jedem Paare eine bejahte, und die ihr entgegengesetzte sonst gleiche ist.

Nun sey n ungerade.

67) Jedes der ersten n Glieder beyder Reihen ist kleiner als der ganze Umfang (50; 55).

68) Man addire irgend eines dieser ersten Glieder in V; zu irgend einem in VI; In der Summe hebt sich u auf, Sie ist ein Quotient, dessen Dividendus ein Product aus dem halben Umfange in eine ungerade Zahl ist, der Divisor auch eine ungerade Zahl.

69) Die Summe ist kleiner als zween ganze Umkreise (67) Ist sie also ein Vielfaches des halben Umkreises, so ist sie das einfache oder das dreyfache.

70) Man setze $h = \frac{n+1}{2}$; das Glied in VI das diese Zahl hat, macht zum ersten von V addirt, den halben Umkreis. Diese beyden Glieder haben also einen Sinus.

Geht man von diesem Gliede in VI, zurück auf das nächst vorhergehende, so ist in desselben

Divi-

Dividendus, ein Umkreis weniger, und wenn man vom ersten in V vorwärts auf das zweyte geht, so ist in dessen Dividendus ein Umkreis mehr; Diese beyden Dividendi zusammen betragen also soviel, als die Dividendi des $\frac{n+1}{2}$ ten Gliedes in VI und des ersten in VI; das ist die beyden Glieder das $\left(\frac{n+1}{2}-1\right)$ te in VI und das zweyte in V, machen auch zusammen den halben Umkreis.

71) Es sey in VI; $h = \frac{n+1}{2} - r$, so ist der Reihe VI $\left(\frac{n+1}{2} - r\right)$ tes Glied $= \frac{(n-2.r).\pi - u}{n}$ der Reihe V; $(r+1)$ tes Glied $= \frac{2.r.\pi + u}{n}$, also beyder Summe, der halbe Umkreis.

72) So haben einerley bejahte Sinus Glieder nach ihren Zahlen

V	1	2	....	$\frac{n+1}{2}$	
VI	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+1}{2} - 1$		$\frac{n+1}{2} - \left(\frac{n+1}{2} - 1\right)$	

Der

Der Sinus ist bejaht, weil jedes Glied kleiner als der Halbkreis ist, ihre Summe macht den Halbkreis aus.

73) Das nte Glied in VI) ist $= \frac{(2.n-1).\pi-u}{n}$; das $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ te in V) ist $= \frac{(n+1).\pi+u}{n}$.

Ihre Summe ist das Dreyfache des Halbkreises.

74) Ein Bogen $= \frac{\pi+u}{n}$ ist kleiner als der Halbkreis, denn sein Zähler ist nicht grösser als drey Quadranten, und der Nenner nicht kleiner als drey.

Dieser Bogen wird, in (73) für das Glied in VI) vom ganzen Kreise abgezogen, für das in V) zum Halbkreise addirt.

Folglich ist jedes dieser Glieder, kleiner als der ganze Kreis, wie so schon ausgemacht ist, aber grösser als der halbe: Hat also einen verneinten Sinus. Der ist für beyde Glieder einerley, weil ihre Summe das Dreyfache des halben Umfanges ist.

75) Man setze (48) $h = n - r$ für VI; und $= \frac{n+1}{2} + 1 + r$ für V; so sind die beyden Glieder in

VI)

VI) $= \frac{(2.n-2.r-1).\pi-u}{n}$

V) $= \frac{(n+1+2.r).\pi+u}{n}$

Ihre Summe ist der dreyfache Halbkreis; Sie haben also einerley verneinten Sinus.

76) So haben einerley verneinte Sinus Glieder nach ihren Zahlen.

V)	$\frac{n+1}{2}+1$	$\frac{n+1}{2}+2$	...	$\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}$
VI)	n	$n-1$	...	$\frac{n+1}{2}+1$

77) Nimmt man nun 71; 76; zusammen, so erhellt folgendes.

Die ersten $\frac{n+1}{2}$ Glieder beyder Reihen haben einerley bejahte Sinus, nur gehn die Zahlen für V vorwärts, für VI rückwärts.

Die letzten $\frac{n-1}{2}$ Glieder beyder Reihen, haben einerley verneinte Sinus, wiederum gehen die Zahlen in V vorwärts in VI rückwärts.

78) Setzt man also in (62) n ungerade, So hat x; bejahte Werthe an der Zahl $\frac{n+1}{2}$ und verneinte an der Zahl $\frac{n-1}{2}$.

79)

79) Der erste Fall ist die Theilung in drey Theile (42).

80) Ein etwas grösseres Exempel giebt die Theilung in sieben Theile. Da ist

	1	2	3	4	5	6	7
V	$\frac{u}{7}$	$\frac{2^*+u}{7}$	$\frac{4^*+u}{7}$	$\frac{6^*+u}{7}$	$\frac{8^*+u}{7}$	$\frac{10^*+u}{7}$	$\frac{12^*+u}{7}$
VI	$\frac{*-u}{7}$	$\frac{3^*-u}{7}$	$\frac{5^*-u}{7}$	$\frac{7^*-u}{7}$	$\frac{9^*-u}{7}$	$\frac{11^*+u}{7}$	$\frac{13^*-u}{7}$

81) Da ist $\frac{n+1}{2} = 4$, also machen folgende Glieder zusammen einen halben Umkreis (72)

1; V+4; VI=2; V+3; VI=3; V+2; VI=4; V+1 VI

und die beyden Glieder in einem Paare haben einerley bejahten Sinus.

82) Ferner, machen nach (75) drey halbe Umkreise zusammen

5; V+7; VI=6; V+6; V=7; V+5; VI

Und die Glieder in einem Paare haben einerley verneinten Sinus.

83) Für ein ganz bestimmt Exempel sey $u = 70°$ Davon der siebente Theil = 10 Grad; des halb. Umfangs siebenter Theil = $25\frac{5}{7}$ Grad, des ganzen = $51\frac{3}{7}$ Grad, welches zu jedem Gliede addirt, das nächstfolgende giebt.

Weil die vorkommenden Brüche, einer wie der andre 7 zum Nenner haben, so schreibe ich nur

nur ihre Zähler; z. E. 61; 3 bedeutet $61\frac{3}{7}$. Da lassen sich die ersten sieben Glieder der Reihen folgendergestalt darstellen.

	1	2	3	4	5	6	7
V	10	61; 3	112; 6	164; 2	215; 5	267; 1	318; 4
VI	15; 5	67; 1	118; 4	170	221; 3	272; 6	324; 2

Wer den Sinus von 70 Graden als gegeben = p annähme, und den Sinus eines Bogens = $\frac{1}{7}$ Bog sin p suchte, fände die Sinus der sieben Bogen, in einer von beyden Reihen.

Unter diesen vierzehn Bogen, die nur sieben Sinus haben, sind die kleinsten aus beyden Reihen zusammengesucht,

10; $15\frac{5}{7}$; $61\frac{3}{7}$; $67\frac{1}{7}$;

$215\frac{5}{7}$ davon der Sinus = — sin $35\frac{5}{7}$; $221\frac{3}{7}$ davon der Sinus = — sin $41\frac{3}{7}$; $267\frac{1}{7}$ davon der Sinus = — sin $87\frac{1}{7}$.

84) Der Unterschied zwischen der Theilung in eine ungerade, und in eine gerade Menge läßt sich folgendergestalt im Zusammenhange, darstellen.

Für die Theilung in eine gerade Menge.

Bedeutet x einen Sinus der Reihe V; so hat es (61) $\frac{1}{2}$n bejahte und eben soviel verneinte Werthe;

Das findet statt, wenn x^2 eine Menge = $\frac{1}{2}$n unterschiedner bejahter Werthe hat, denn

da hat x soviel bejahte, und auch soviel verneinte.

Aus eben dem Grunde, hat x^2 eine Menge $= \frac{1}{2}$ n unterschiedner bejahter Werthe, wenn x jeden Sinus in VI bedeuten soll.

Soll also x, jeden Sinus in beyden Reihen bedeuten, so hat x^2, eine Menge $= 2.\frac{1}{2}$ n bejahte Werthe.

Das heisst: eine Gleichung, in welcher x jeden Sinus dieser beyden Reihen bedeuten soll, muß x^{2n} zum höchsten Gliede haben.

So hat in ihr die unbekannte Grösse n unterschiedne bejahte Werthe, und eben soviel jenen entgegengesetzte.

Für die Theilung in eine ungerade Menge.

Bedeutet x jeden Sinus der Reihe V; so hat es $\frac{n+1}{2}$ bejahte Werthe, $\frac{n-1}{2}$ verneinte (78).

Und eben die bejahten und verneinten Werthe, wenn es jeden Sinus der Reihe (VI) bedeutet.

Bedeutet es also jeden Sinus in beyden Reihen, so hat es nicht mehr als $\frac{n+1}{2}$ bejahte,

jahte, und $\frac{n-1}{2}$ verneinte Werthe, zusammen n Werthe.

Die Gleichung also, in welcher es jeden Sinus dieser beyden Reihen bedeutet, hat zum höchsten Gliede x^n.

Ueber die Gleichung zwischen x und p.

85) Man sehe v (62) als einen einfachen Bogen an dessen Sinus und Cosinus gegeben sind, und suche daraus p, als Sinus von n. v.

86) Kann man unter diesen Umständen, p durch x und y ausdrucken, ferner aus diesem Ausdrucke y wegschaffen, so hat man eine Gleichung zwischen x und p.

87) Wenn v ein gegebener Bogen ist, so ist sein doppeltes, dreyfaches .... jedes Vielfache, ein einziger gegebener Bogen, der also nur einen einzigen Sinus hat.

87) Ist aber nicht eigentlich v gegeben, sondern sein Sinus, welcher unzählich viel Bogen gehören kann, so giebt es auch unzählich viel Vielfache des Bogens dessen Sinus gegeben ist.

Was aber diesen Vielfachen für Sinus zugehören lässt sich so beurtheilen.

88) Der kleinste Bogen dem + x als Sinus zugehört, heisse w; der nächste nach ihm ist = 180° — w.

So gehört + x als Sinus zu jedem Bogen w + 2.h. 180° u. 180° — w + 2.h. 180°. Dieser Bogen m fache sind m. w + m. 2.h. 180° und m. (180° — w) + m. 2. h. 180°.

Diese Vielfachen haben also keine andern Sinus, als die beyden Bogen m. w und m. 180° — m. w.

Des letzten dieser beyden Bogen Sinus, ist nach Trig. 19 S. I einerley mit dem Sinus des ersten, wenn m ungerade ist, aber ihm entgegengesetzt wenn m gerade ist.

Denn cos (m. 180°) ist für das ungerade = — 1 und für das gerade = + 1.

89) Die Bogen denen — x als Sinus gehört, sind

180° + w + h. 360°
360° — w + h. 360°

Davon die m fachen

m. (180° + w) + m. h. 360°
m. (360° — w) + m. h. 360°

Haben keine andern Sinus als die beyden für welche

h = o

Von diesen beyden hat der erste zum Sinus ± sin m. w bejaht wenn m gerade ist, verneint

wenn

wenn es ungerade ist. Weil cos (m. 180°) für den ersten Fall bejaht ist, für den andern verneint.

Der zweyte hat allemahl — sin m. w zum Sinus, weil cos (m. 360°) allemahl bejaht ist.

90) I) Für ein gegebenes m ist sin m. w ein einziger gegebener Sinus.

II) Das m fache eines Bogens dessen Sinus + x ist,

hat zum Sinus (88)

+ sin m. w wenn m ungerade ist

± sin m. w . . . . . gerade . . .

III) Das m fache eines Bogens dessen Sinus — x ist,

hat zum Sinus (89)

± sin m. w wenn m gerade ist

— sin m. w . . . . . ungerade ist

91) Begreiflich kann m. w ein Bogen seyn, grösser als der Halbkreis und kleiner als der ganze, imgleichen die Summe eines solchen Bogens, und eines Vielfachen des ganzen Kreises. Allsdann ist der Sinus dieses Bogens verneint, und dieser Sinus mit dem Zeichen — genommen wird bejaht.

92) Exempel; I) Für $w = 30$; ist $x = +\frac{1}{2}$ und gehört als Sinus zu 30 + h. 360 Graden auch zu 180 — 30 + h. 360.

II) Das siebenfache eines solchen Bogens, ist $7.30 + 7.h.360$
auch $7.180 - 7.30 + 7.360$.

Jedes der ersten Siebenfachen Sinus ist der von 210 Graden $= -$ sin 30 (91).

Jedes der andern Siebenfachen Sinus ist der von 1050 das ist von $2.360 + 330$, also auch $-$ sin 30.

Beyder Siebenfachen Sinus sind einerley, weil m ungerade ist (90; II).

III) Das Zehnfache eines Bogens (I) ist $300 + 10.h.360$
auch $1800 - 300 + 10.h.360$.

Jedes der ersten Zehnfachen Sinus ist der von 300 Graden $= -$ sin 60 Gr.

Jedes der andern Zehnfachen Sinus ist der von 1500 $= 4.360 +$ 60 Grade, also $=$ $+$ sin 60 Gr.

Einer von ihnen der Sinus von 10. 30 der andre das Gegentheil dieses Sinus; weil m gerade ist (90; II).

IV) $-\frac{1}{2}$ gehört als Sinus
zu $180 + 30 + h.360$
oder $360 - 30 + h.360$

V) Die Siebenfachen sind
$7.180 + 7.30 + 7.h.360$
$7.360 - 7.30 + 7.h.360$.

Der ersten Siebenfachen Sinus ist der von 1470 das ist von $4.360 + 30$.

Der

Der zweyten ist der von 2310 das ist von 6. 360 + 150.

Aber sin 30 = sin 150 = — sin 210, weil m ungerade ist (90; III).

VI) Die Zehnfachen sind

10. 180 + 10. 30 + 10. h. 360
10. 360 — 10. 30 + 10. h. 360.

Der ersten Zehnfachen Sinus ist der von 2100 = 5. 360 + 300 Also der von 10. 30.

Der zweyten, ist der von 3300 = 9. 360 + 60, also der von 60; = — sin 300; weil m ungerade ist (90; III).

Wie man den Sinus des vielfachen Bogens aus dem Sinus des einfachen findet.

93) Jedes Vielfache besteht aus dem nächstvorhergehenden Vielfachen, und dem einfachen. Hat man also Sinus irgend eines Vielfachen, folglich auch desselben Cosinus, so findet man Sinus und Cosinus des nächstfolgenden nach Trig. 19. S. I. und 2. Zus.

94) Des doppelten Sinus und Cosinus stehen Trig. 19 S. 5. Zus. In den hiesigen Zeichen (62)

Sinus = 2. x. y
Cosinus = 1 — 2. x^2.

95) So ist des dreyfachen

Sinus = 2. x. y. y + (1 — 2. x^2). x
= 3. x — 4 x^3

Cosinus $= (1 - 2.x^2).y - 2.x.y.x$
$= y - 4x^2.y$
$= y - x^2.y - 3.x^2.y$
$= y^3 - 3x^2.y.$

96) Ferner des vierfachen

Sinus $= (3.x - 4x^3).y + (y^3 - 3x^2.y).x$
$= (4x - 8x^3).y$
Cosinus $= (y^3 - 3.x^2.y).y - (3.x - x^3).x$
$= 1 - 8x^2 + 8x^4.$

97) Des fünffachen

Sinus $= (4.x - 8.x^3).y^2$
$+ (1 - 8x^2 + 8x^4).x$
$= 5x - 20.x^3 + 16.x^5.$

Man kann auch den Cosinus suchen und so immer weiter fortgehen.

98) Des einfachen, dreyfachen, fünffachen, Bogens Sinus sind allein durch den Sinus des einfachen gegeben, aber des doppelten und vierfachen, enthalten des einfachen Cosinus als einen Factor.

99) Also giebt es nur einen einzigen Sinus für den dreyfachen, und fünffachen Bogen, will man aber den Sinus des doppelten und des vierfachen Bogens ganz allein durch des einfachen seinen ausdrucken, so muß man des einfachen Cosinus wegschaffen, also die Formel

mel welche des doppelten oder vierfachen Bogens Sinus giebt, quadriren. So erhält man das Quadrat des Sinus des doppelten oder vierfachen Bogens, und der Sinus selbst bekömmt zweene entgegengesetzte, sonst gleiche Werthe.

Dieses als Exempel zu 90; Begreiflich auch wenn x einen verneinten Werth hätte, z. E. der Sinus von 180 + 30 wäre.

Jeder Sinus eines vielfachen Bogens ist entweder eine Reihe die nur Potenzen von x enthält, oder ein Product aus einer solchen Reihe in y.

100) Das erste zeigt sich in 95; 97; das zweyte in 94; 96.

Man kann also muthmassen, das erste werde bey Vielfachen mit ungeraden Zahlen statt finden, das andre bey Vielfachen mit geraden.

101) Diese Muthmassung zu prüfen nehme man für ein Vielfaches nach einer ungeraden Zahl, den Ausdruck des Sinus und Cosinus so an, wie eines der berechneten Exempel ihn giebt, und suche was daraus für das Vielfache nach der nächst grössern Zahl folgt, die gerade seyn wird. Ein Verfahren wie ich in Stat. 21 und anderswo brauche.

102) M, N, O, P . . . sollen hie der Kürze wegen, Reihen bedeuten die nur Potenzen von

x enthalten. Weil dergleichen Reihen unterschiedne seyn können, brauche ich für sie unterschiedne Buchstaben.

103) Es sey also m irgend eine ungerade aber bestimmte Zahl, und die Rechnung gebe für dieselbe

$$\sin m.w = M$$
$$\cos m.w = N.y$$

104) So ist

$$\sin (m+1).w = M.y + N.y.x$$
$$\cos (m+1).w = N.y^2 - M.x.$$

105) Da nun N eine Reihe Potenzen von x bedeutet, so ist N.x auch dergleichen Reihe, und man hat $\sin (m+1).w = (M+N.x).y$.

Der erste Factor enthält zwo Reihen von Potenzen von x; die zusammen eine einzige solche Reihe geben.

In den Cosinus (104) setze man $1 - x^2$ statt y^2; so giebt sich dieser Cosinus durch eine Reihe Potenzen von x ohne y; lässt sich also folgendergestalt ausdrucken

$$\cos (m+1).w = O.$$

106) Nun ist

$$\sin (m+2).w = (M+N.x).y^2 + O.x$$
$$\cos (m+2).w = O.y + (M+N.x).y.x = (O+(M+N.x).x).y$$

Wenn

Wenn man im Sinus, statt y^2 seinen Werth setzt, so ist der Sinus allein durch eine Reihe Potenzen von x gegeben, ohne y;

Der Cosinus aber ist ein Product aus einer Reihe von Potenzen von x, in y.

107) Aehnliche Ausdrückungen wurden in 103 angenommen; Das Gesetz also, nach welchem Sinus und Cosinus für das Vielfache mit irgend einer ungeraden Zahl bestimmt werden, gilt auch bey der nächstfolgenden ungeraden Zahl.

108) Nun gilt das Gesetz (103) beym dreyfachen (95) also auch beym fünffachen; Und, da es bey dem gilt auch beym siebenfachen, und so ohne Ende fort.

109) Wenn das Gesetz (103) bey irgend einem Vielfachen mit einer ungeraden Zahl statt findet, so findet für das Vielfache mit der nächstfolgenden geraden, das Gesetz 105; statt.

110) Aber (103) findet beym dreyfachen statt, also (105; 106) beym vierfachen; Ferner (103) beym fünffachen (109) also (105; 106;) beym sechsfachen. Und so aus (109) findet (105; 106;) bey allen Vielfachen mit geraden Zahlen ohne Ende, statt.

111) I) Man nehme an für irgend eine ungerade Zahl (103) enthalte M lauter Potenzen mit ungeraden Exponenten, aber N lauter Potenzen mit geraden, darunter auch 0 seyn kann.

II) So

II) So enthält in (106) $(M+N.x).y^2$ lauter Potenzen mit ungeraden Exponenten; Nähmlich $M+N.x$ hat lauter ungerade Exponenten, und zu jedem setzt die Multiplication mit $1-x^2$ einen geraden, oder o welches auch gerade ist, Summe von gerade und ungerade aber ist ungerade.

III) In (104) enthält $N.y^2$ lauter gerade Exponenten weil N lauter gerade enthält; eben so M. x lauter gerade. Folglich in (105); O lauter gerade; Also in (106) O. x lauter ungerade.

IV) Gilt also (I) für das m fache, so gilt eben das für das (m+2) fache, m ungerade gesetzt (II; III;) verglichen mit (106) Oder: Wenn der Ausdruck des Sinus für irgend ein Vielfaches nach einer ungeraden Zahl, lauter ungerade Exponenten enthält, so enthält auch der Ausdruck für das Vielfache nach der nächstfolgenden ungeraden Zahl, auch lauter ungerade Exponenten.

V) Die Voraussetzung ist beym dreyfachen wahr (95) Also die Folge beym fünffachen, wie auch die Rechnung zeigt (97) Und daher auch beym siebenfachen, neunfachen u. s. w.

VI) Der Ausdruck des Sinus eines Vielfachen nach einer ungeraden Zahl, durch des einfachen Sinus, enthält also lauter Potenzen vom Sinus des einfachen, die ungerade Exponenten haben.

112) Die Cosinus habe ich nur berechnet, von einem Vielfachen auf das Nächstfolgende zu kommen. Jetzo betrachte ich allein die Sinus, und da ist der Satz vor (100) nun folgendergestalt noch mehr bestimmt:

Der Sinus des Vielfachen, mit einer ungeraden Zahl ist nur eine Reihe Potenzen von x; mit einer geraden Zahl, ein Product einer solchen Reihe in y.

Welches allgemein zeigt wie dem Satze (90) genug geschieht. In (99) waren Exempel.

113) Die Analysis giebt ein Gesetz des Fortgangs an, nach welchem man jedes Vielfachen Sinus durch Sinus und Cosinus des einfachen ausdruckt. (Anfgr. der Analys. endl. Gr. 175.) Hie schränke ich mich auf den Sinus des einfachen ein.

114) Man hat also allemahl durch eine Reihe von Potenzen des Sinus des einfachen Bogens, den Sinus des Vielfachen selbst wenn das Vielfache mit einer ungeraden Zahl ist, oder sein Quadrat wenn es mit einer geraden Zahl ist (112).

115) Diese Reihe denke man sich linker Hand des Gleichheitszeichens, rechter Hand den Sinus des Vielfachen, oder sein Quadrat.

116) Man ordne nachdem die Reihe linker Hand so, daß 1) die Potenzen des Sinus des einfachen Bogens, von der linken Hand gegen

die

die Rechte immer kleinere Exponenten bekomme; II) Die höchste Potenz das Zeichen + vor sich hat, III) Nur in 1 multiplicirt ist, hat sie also einen andern Coefficienten so muß man mit demselben alle Glieder der Gleichung dividiren. IV) Bringe man allsdann was rechter Hand steht auch auf die linke.

117) So bekömmt man eine Gleichung in welcher Alles was linker Hand des Gleichheitszeichens steht sich aufhebt, rechter Hand desselben, o steht, und das letzte Glied linker Hand nichts vom Sinus des einfachen Bogens darstellt nur durch den Sinus des Vielfachen, und eine bestimmte Zahl gegeben ist.

118) Nun ist es einerley zu sagen x sey des einfachen Bogens Sinus, und p des *n* fachen, oder p sey des ganzen Bogens Sinus, und x der Sinus von $\frac{1}{n}$ dieses Bogens.

Sieht man also nun in (117) p als gegeben an, so sind die Werthe von x, Sinus von den $\frac{1}{n}$ Theilen des Bogens welcher p zum Sinus hat.

119) In (94; 95) sind Sinus des doppelten und dreyfachen Bogens durch des einfachen seinen ausgedruckt. Das ist schon 35; 42; auf die Halbirung und Theilung in drey Theile angewandt worden.

120)

120) In (96) ist
$(4.x - 8.x^3).\sqrt{(1-x^2)} = p$

Damit nach (116) verfahren kömmt
$x^8 - 2.x^6 + \frac{5}{4}.x^4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}.p^2 = 0$
Für die Theilung in vier Theile.

121) Aus (97) kömmt
$x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}.x - \frac{1}{16}.p = 0$
Für die Theilung in fünf Theile.

122) Die Untersuchungen von (93 ... 121) haben zur Absicht etwas Allgemeines von der Gleichung zwischen x und p (85) darzuthun. So ist nun gezeigt, daß sie eine Reihe Potenzen von x ist, in deren keine, p multiplicirt wird, so lange eine solche Potenz noch einen Exponenten hat der grösser als o ist. Der Gleichung letztes Glied kann angesehen werden als enthielte es die Potenz deren Exponent = o ist, und in diesem befindet sich p.

Gestalt der Gleichung für die Theilung in eine gerade Menge Theile.

123) In ihr muß sich x so befinden, daß, wenn irgend ein bejahter Werth statt x gesetzt, der Gleichung genug thut, der verneinte, sonst gleiche, eben das leistet (63). Folglich muß jedes Glied das x enthält, so beschaffen seyn, daß sein Werth, der Grösse und dem Zeichen nach, völlig einerley bleibt, man mag was bejahtes oder was verneintes, sonst gleiches,

statt

statt x setzen. Es muß also eine Potenz von x seyn, die zum Exponenten eine gerade Zahl hat. Bedeuten also A, B, C; ... L, Zahlen, die in die Potenzen von x multiplicirt werden, Coefficienten, ob diese Zahlen bejaht oder verneint sind, wird hie nicht angedeutet, so ist folgendes die Gestalt der Gleichung für die Theilung in n Theile unter der Voraussetzung (63)

$$x^{2n} + A.x^{2n-2} + B.x^{2.n-4} \ldots + L.x^2 + M = 0.$$

M ist nur durch eine Zahl, und das Quadrat von p (114) gegeben.

Gestalt der Gleichung für eine ungerade Menge von Theilen. (67 u. f.)

124) Die höchste Potenz von x in ihr, hat n zum Exponenten (78) und alle Glieder die wirklich x enthalten haben ungerade Exponenten (111) Also sieht die Gleichung so aus

$$x^n + Ax^{n-2} + Bx^{n-4} \ldots + L.x + M = 0$$

In dem letzten Gliede kann man sich x mit dem Exponenten o vorstellen, der als gerade angesehen wird. Es wäre also nicht ganz richtig gesagt: x habe in der Gleichung lauter ungerade Exponenten. Darauf bezieht sich das Wort wirklich.

Das letzte Glied enthält die erste Potenz von + p selbst, nicht ihr Quadrat (114).

Wieviel

Wieviel Cosinus, hat v (62).

Es sey n gerade.

125) In der Gleichung (123) setze man statt x^2 seinen Werth, so kömmt eine Gleichung, die alle Potenzen von $1 - y^2$ von der 1 bis zur nten enthält.

Folglich lauter Potenzen von y^2, keine von y selbst. Wie man leicht findet wenn man die höhern Potenzen durch Multiplication macht, der binomische Lehrsatz zeigt es allgemein (Analys. 116).

Also sind n bejahte Cosinus, und eben soviel verneinte, sonst jenen gleiche.

Es sey n ungerade.

126) Da kommen in der Gleichung für x; nur Potenzen mit ungeraden Exponenten vor (124). Statt jeder dieser Potenzen setzt man die von $\sqrt{(1 - y^2)}$ welche eben den Exponenten hat. Nun muß man die Gleichung welche solchergestalt den Cosinus als unbekannte Grösse enthält, rational machen, (An. 191) da kommen dann lauter Potenzen von y^2 weil die erste Potenz von y nicht in dem Werthe von x vorhanden ist. Die Gleichung giebt also 2.n Werthe für y; die Hälfte bejahte, die andre Hälfte verneinte. Noch einmahl soviel Werthe als x hat.

127) Weil die Quadratwurzel, kann bejaht, oder verneint genommen werden, so ge-

hören zu jedem x; zwey, entgegengesetzte sonst gleiche y.

Für n gerade, sind der Grösse nach nur soviel unterschiedne x; jedes aber, hat ein entgegengesetztes sonst gleiches, und da einer verneinten Grösse Quadrat, völlig mit der entgegengesetzten Quadrate einerley ist, so hat $\sqrt{(1-x^2)}$ nur n der Grösse nach unterschiedne Werthe, also y auch nur soviel, aber wenn man bejahte und verneinte Werthe unterscheidet, giebt das 2.n Werthe für y.

Für n ungerade, hat x nur n unterschiedne Werthe, die bejahten und verneinten zusammengezählt, also $\sqrt{(1-x^2)}$ auch nur soviel, und y soviel bejahte, und eben soviel entgegengesetzte.

Wieviel Secanten hat v?

128) Weil $\sec v = \frac{1}{\cos v}$ so ist klar daß der Secanten soviel sind als Cosinus.

129) Das bisherige zeigt wie vielerley Antworten die Frage hat: Wenn ein bejahter Sinus gegeben ist von allen Bogen, denen er gehört, des nten Theils, Sinus, Cosinus oder Secante zu finden. Noch ist der verneinte Sinus als gegeben zu betrachten.

Theilung

Theilung eines Bogens dessen Sinus $= -p$

130) In den Reihen II; IV; (22) dividire man jedes Glied mit n; so erhält man zwo Reihen von denen ich nur allgemeine Glieder hersetze.

131)

Zahl des Gliedes	h
Reihe VII	$\frac{(2h-1).\pi+u}{n}$
VIII	$\frac{2.h.\pi-u}{n}$

132) So lange h nicht grösser als n ist, sind die Glieder kleiner als der ganze Umfang.

133) Das $(h+m.n)$ te Glied jeder Reihe besteht aus dem h ten und einem Vielfachen des ganzen Umfangs, hat also mit dem h ten einerley Sinus.

134) Wiederum also haben in jeder Reihe nur die ersten n Glieder, unterschiedne Sinus wie in 53; 57.

135) In der Reihe V (48) ist das $(r+1)$ te Glied $= \frac{2.r.\pi+u}{n}$.

In der Reihe VIII (131) ist das $(n-r)$ te Glied $= \frac{(2n-2r)\pi-u}{n}$; beyde Glie-

der zusammen machen den ganzen Umfang, haben also entgegengesetzte sonst gleiche Sinus.

136) Auch so ist der Reihe VI; $(r+1)$tes Glied $= \frac{(2.r+1).\pi - u}{n}$;

Der Reihe VII; $(n-r)$tes $= \frac{(2.n-2.r-1).\pi - u}{n}$. Beyde zusammen betragen auch den ganzen Umfang.

137) In den Reihen VII; VIII; haben die Glieder die nach den ersten n folgen keine andern Sinus als die genannten ersten (133).

Diese ersten, haben der Grösse nach, keine andern Sinus, als die ersten der Reihen V; VI; nur dem Zeichen nach entgegengesetzte (135; 136).

Die Glieder der Reihen V; VI; haben keine andern Sinus als ihre ersten (53; 57).

Also haben die Glieder der Reihen VII; VIII; Sinus, denen der Reihen V; VI; entgegengesetzt, sonst gleich.

138) So sind die Sinus von $\frac{1}{n}$ Bog $\sin -p$; nur als entgegengesetzte, von denen für $\frac{1}{n}$ Bog $\sin +p$ unterschieden. Erfodern also keine neue Untersuchung weiter.

139) Exempel. Ich will die gegenwärtigen Reihen in einem bestimmten Exempel darstellen, das mit dem (83) in Verbindung steht. Die beyden kleinsten Bogen, deren Sinus $= -\sin 70°$; sind $180° + 70°$ u. $360° - 70°$; Nimmt man nun Siebentheile dieser Bogen, und aller die eben den verneinten Sinus haben, so kommen, nach den in (83) zur Berechnung schon angegebenen Grössen, zwo Reihen, deren erste sieben Glieder ich darstelle, die Bezeichnung der Brüche wie in (83)

	1	2	3	4	5	6	7
VII	35; 5	87; 1	138; 4	190	241; 3	292; 6	344; 2
VIII	41; 3	92; 6	144; 2	195; 5	247; 1	298; 4	350

140) Da machen nun zusammen den ganzen Umkreis; $1\,V + 7\,VIII = 2\,V + 6\,VIII = \ldots . 7\,V + 1\,VIII$. Eben so $1\,VI + 7\,VII = 2\,VI + 5\,VII \ldots 7\,VI + 1\,VII$ So ist z. E. $6\,VI = 272°$; 6, hat zum Sinus $-\sin(360 - 272\frac{6}{7}) = -\sin(87; 1) = -\sin 2\,VII$.

Gestalt der Gleichungen für (130).

141) Für die Theilung des Bogens dessen Sinus $= +p$ in eine gerade Menge Theile, ist die Gestalt der Gleichung (123) angegeben.

In dieser Gleichung enthält das letzte Glied das Quadrat von p; nicht die erste Potenz.

Also ist es für sie einerley ob + p oder — p gebraucht wird.

Die Potenzen von x die sich in ihr befinden haben lauter gerade Exponenten.

Thut ihr also irgend ein Werth statt x gebraucht genug, so leistet eben das, der entgegengesetzte sonst gleiche.

Nun sind für (130), die Sinus den für (48) entgegengesetzt sonst gleich (138).

Also kann in der Gleichung (123); x die Sinus für (130) bedeuten, wenn die Zahl der Theile gerade ist.

142) Für die Theilung des Bogens dessen Sinus = + p in eine ungerade Menge von Theilen, ist die Gestalt der Gleichung (124) gegeben.

Das letzte Glied, dieser Gleichung enthält die erste Potenz von + p, nicht ihr Quadrat.

Setzt man also in diesem Gliede — p statt + p; so bekömmt es das entgegengesetzte Zeichen.

In den übrigen Gliedern sind lauter Potenzen von x mit ungeraden Exponenten.

Setzt man also in jedes solche Glied — x statt + x so bekömmt es den entgegengesetzten sonst gleichen Werth.

Macht man diese beyden Veränderungen, — p statt + p und — x statt + x in der Gleichung

chung (124) so bekommen alle ihre Glieder entgegengesetzte Zeichen, das höchste das Zeichen —.

Bringt man nun alle diese Glieder, auf die entgegengesetzte Seite des Zeichens der Gleichheit, also wie sie (124) stehen, auf die rechte Hand, so bekommen sie wiederum jedes das Zeichen das es in (124) hatte, das höchste das Zeichen + und das niedrigste eben das Zeichen das es in (124) hatte, linker Hand kömmt o.

Wenn nun + x Sinus von einem $\frac{1}{n}$ Bog sin + p ist, so ist — x Sinus von einem $\frac{1}{n}$ Bog sin — p (138).

Folglich gilt die Gleichung (124) auch für die Theilung der Bogen deren Sinus = — p ist, in eine ungerade Menge von Theilen.

143) Also erfodert $\frac{1}{n}$ Bog sin — p keine andern Gleichungen, als $\frac{1}{n}$ Bog sin + p.

Theilung des Halbkreises in gleiche Theile.

144) Weil der Bogen o der kleinste ist welcher o zum Sinus hat, so ist für gegenwärtige Frage nach (47) p = o; und in den Glei-

chungen (123) (124) verschwinden die letzten Glieder; Man kann also die erste dieser Gleichungen mit x^2 dividiren, und die letzte mit x;

Das ist, für die Theilung des Halbkreises in eine gerade Menge von Theilen giebt es zweene Sinus jeden $= 0$; und für die Theilung in eine ungerade Menge, einen dergleichen.

Nach diesen Divisionen kommen Gleichungen welche die wirklichen Sinus enthalten.

145) Für die gerade Zahl

$$x^{2.n-2} + A.x^{2.n-4} \ldots + L = 0$$

146) Für die ungerade

$$x^{n-1} + A\,x^{n-3} \ldots + L = 0$$

147) Nähmlich in (1) ist $u = 0$; Also nach (57)

Glieder	1	2	....	n
Reihe V	0	$2.\lambda$	....	$2.(n-1).\lambda$
VI	λ	$3.\lambda$	....	$2.\pi - \lambda$

Exempel.

148) Die Theilung in vier Theile giebt (120; 144)

$$x^6 - 2.x^4 + \tfrac{5}{4}x^2 - \tfrac{1}{4} = 0.$$

Nun ist klar, daß ein Viertheil des Halbkreises $= 45$ Grad ist, dessen Sinus $= \frac{\sqrt{2}}{2}$; Da nun allemahl bey der Theilung nach einer gera-

geraden Zahl, zweene entgegengesetzte sonst gleiche Werthe der Gleichung genug thun (63) so wird gegenwärtige Gleichung $= 0$, wenn man $x^2 = \frac{1}{2}$ setzt.

Sie lässt sich also mit $x^2 - \frac{1}{2}$ dividiren (An. endl. Gr. 226)
Der Quotient ist $x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$;

Dieser Quotient wird $= 0$ wenn man $x^2 = 1$ setzt.

Man kann ihn also mit $x^2 - 1$ dividiren, und da giebt er den Quotienten $x^2 - \frac{1}{2}$.

Die Gleichung des sechsten Grades entsteht also aus drey quadratischen Factoren
$(x^2 - \frac{1}{2}) \cdot (x^2 - \frac{1}{2}) \cdot (x^2 - 1)$

Folglich sind die sechs Werthe, die sie auf 0 bringen zweymahl $x = + \sqrt{\frac{1}{2}}$; auch zweymahl $x = - \sqrt{\frac{1}{2}}$; dann $x = \pm 1$.

Man findet eben das, wenn man in (120) das Product $4x \cdot (1 - 2x^2) \cdot \sqrt{(1 - x^2)} = 0$ setzt, da jeder der drey Factoren $= 0$ werden kann; Nur findet man da, den mittelsten Factor $= 0$ gesetzt blos einmahl $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$, hat man aber die daselbst befindliche Gleichung vom achten Grade gemacht, so hat man quadrirt, und also auch das Quadrat dieses mittelsten Factors bekommen.

Hie wird nähmlich aus (147)

Glieder	1	2	3	4
Reihe V	0	90	180	270
VI	45	135	225	315

Da gehören nun die

Sinus	zu
0	1 V; 3 V
± 1	2 V; 4 V
$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	den vier Gliedern VI.

149) Die Theilung in fünf Theile giebt (121)

$x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{16} = 0$ also

nach Anal. endl. Gr. (78)

$$x^4 = \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{16}$$

$$x^2 = \frac{5}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{64} - \frac{5}{16}\right)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

Was die vier Werthe welche in diesem Ausdrucke enthalten sind, bedeuten, erhellt aus den Reihen

Glieder	1	2	3	4	5
V	0	72	144	216	288
VI	36	108	180	252	324

Also nach (77) haben die ersten drey Glieder beyder Reihen einerley bejahte Sinus, und sind gleich die Sinus

von 0 u. 180; von 72 u. 108; von 144 u. 36;

Die

Die beyden letzten Glieder beyder Reihen haben einerley verneinte Sinus, und sind gleich die Sinus von 216 u. 324; von 288 u. 252 Auser 0, sind die Sinus $\pm$ sin 36; $\pm$ sin 72.

Weis man das aus den Reihen so folgt daß von den beyden Werthen für x^2; der kleinere das Quadrat von sin 36 ist, also der grössere das von sin 72; Wie sich auch bestätiget, wenn man $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ für das Quadrat von sin 36 annimmt, und daraus das Quadr. von sin 2.36 sucht.

Ein Fünfeck im Kreise beschreiben lehrt Euklid; IV. B. 11 Satz und zeigt im 13 B. 10 S. das Quadrat der Seite des Fünfecks, betrage die Quadrate, des Halbmessers und der Seite des Zehnecks.

Wie diese Untersuchungen jetzo angestellt werden, und wie man die Seite des Fünfecks, und des Zehnecks durch den Halbmesser ausdruckt, lehrt meine Analys. endl. Gr. 156; 159;

Des Fünfecks und des Zehnecks Seiten, halbirt, geben die Sinus von 36 und von 18 Graden. Der letzte ist der Cosinus von 72 Graden. Man hat also den Sinus von 72 Graden aus ihm, oder auch als den Sinus von 2.36 Gr. So findet man auch die hie gegebenen Ausdrücke.

Theilung des ganzen Kreises in gleiche Theile.

150) Wird der ganze Kreis, als der kleinste der Bogen angesehen, die einerley Sinus haben, und getheilt werden sollen, so ist sein Sinus $= -0$ (16) Also gehört seine Eintheilung für (130).

Sie giebt aber keine andern Sinus, und Gleichungen, als herauskommen, wenn man eben soviel Theile von Bogen macht, deren kleinster $+0$ zum Sinus hat. (137; 143)

Aus (131) mit der Bezeichnung (147) kömmt hie

Glied	1	2	n
Reihe VII	λ	$3.\lambda \ldots$	$2.\pi - \lambda$
VIII	$2.\lambda$	$4.\lambda \ldots$	$2.\pi$

wo nach 135; 136; die Glieder der Reihen V; VI; (147) und hie VIII; VII; immer zusammen den Umkreis ausmachen, und so entgegengesetzte Sinus haben.

151) Folglich gilt (142) gemäß auch für des ganzen Kreises Theilung, was 145; 146; für die Theilung des Halbkreises ist gelehrt worden.

152) So geben in 148; 149; auch des ganzen Kreises Theilung in vier und in fünf Theile.

25.

Alle Bogen die einerley Tangente haben.

Trigonom. 4. Erklär.

1) Man zieht an den Anfang eines Bogens, eine gerade Linie die den Kreis da berührt. Durch den Mittelpunct des Kreises, und des Bogens Ende zieht man eine gerade Linie, die man bis an die berührende verlängert. Was von der berührenden zwischen Berührungspuncte und nur erwähnter geraden Linie liegt, heisst des Bogens Tangente.

2) So ist in der Fig. der Trigon. AG des Bogens AD Tangente und auch des Bogens ADBd der jenen um den Halbkreis übertrifft.

Des ersten Bogens Ende liegt zwischen Mittelpuncte und Tangente, des andern seines hat den Mittelpunct zwischen sich und Tangente.

3) Eben so ist Ag Tangente des Bogens ADf; und des Bogens ADfBF der den vorigen um den Halbkreis übertrifft.

4) Den Anfang jedes Bogens in A gesetzt, und die Bogen nach dem Gange ADH . . . genommen, ist AG Tangente jedes Bogens der sich in D oder d endigt und Ag Tangente jedes Bogens der sich in f oder F endigt. Die erste Tangente, die bejaht ist heisse $= + q$ so ist die zweyte $= - q$.

5) Ein

5) Ein Bogen AD = u kleiner oder doch nicht grösser als der Quadrant, habe zur Tangente + q; so gehört diese Tangente zu allen Bogen die entstehen, wenn man zu u; den Halbkreis, ein oder mehrmahl addirt.

6) Ein Bogen Af, grösser als der Quadrant, aber kleiner als der Halbkreis, also = $180^\circ - u$ habe zur Tangente, − q; so gehört diese Tangente zu allen Bogen die entstehen wenn man zum nur genannten, Vielfache des Halbkreises addirt.

7) So gehört jeder der beyden Tangenten, eine unendliche Reihe von Bogen, deren erster, den halben Umkreis nicht enthält, der zweyte einmahl, der dritte zweymahl, der vierte dreymahl u. s. w. Nennt man die Reihe, welche der bejahten Tangente gehört die erste, die welche der verneinten gehört die zweyte, so sind allgemeine Glieder dieser Reihen folgende

8) Tangente	(k + 1) tes Glied	Reihe
+ q	$u + k.\pi$	I
− q	$(k+1).\pi - u$	II

9) Es sey + q als Tangente eines Bogens gegeben, x bedeute die Tangente eines Bogens der $\frac{1}{n}$ des vorigen ist. Wieviel Werthe hat? $x = \text{tang}\left(\frac{1}{n}\text{ Bog tang} + q\right)$.

10) Aus

10) Aus der Reihe I; giebt sich eine Reihe von Bogen, deren jeder $\frac{1}{n}$ Bog tang q ist. Sie heisse

Reihe	(k + 1) tes Glied
III	$\frac{u + k.\pi}{n}$

11) In dieser Reihe, haben die Glieder einerley Tangente die von einander um Vielfache des Halbkreises unterschieden sind. (5; 6)

Zum ersten Gliede der Reihe $\frac{u}{n}$; einen Halbkreis addirt, giebt $\frac{u + n.\pi}{n}$ das (n+1) te Glied.

Man urtheilt hieraus sogleich, wie weit die Glieder gehen werden, deren jedes seine eigne Tangente hat.

12) So lange k kleiner ist als n so lange kömmt zum ersten Gliede was kleiners als der halbe Umfang; Und da jedes folgende Glied grösser ist als das vorhergehende, so übertrifft unter den ersten n Gliedern keines das andre um den halben Umfang, also hat von diesen Gliedern keines mit dem andern einerley Tangente.

13) Kömmt zu dem Gliede dessen Zahl k + 1 ist, ein Vielfaches des halben Umfangs, so

so entsteht das Glied $\frac{u + (k + n.h).\pi}{n}$, an der Zahl das $k + 1 + h$ te.

Läßt man also k von 0 bis $n - 1$ wachsen, so hat man alle Glieder denen unterschiedne Tangenten gehören, und die folgenden Glieder haben keine andern Tangenten als die ersten n Glieder.

Das letzte und grösste unter diesen ersten Gliedern ist kleiner als der Halbkreis.

14) Weil u nicht grösser ist als 90 Grad (5) so hat im III (10) der erste Bogen eine bejahte Tangente, und dergleichen haben alle nächstfolgenden, bis einer kömmt der einem Quadranten gleich oder grösser ist. Jenes Tangente ist unendlich noch bejaht, dieses seine verneint.

15) Ferner ist jedes der ersten n Glieder kleiner als der Halbkreis (13) kömmt also unter diesen ersten Gliedern eines vor das eine verneinte Tangente hat, so haben dergleichen alle folgenden unter diesen ersten.

Welches ist das kleinste Glied das eine verneinte Tangente hat?

16) Es sey n gerade.

Man setze $k = \frac{1}{2} n$; so ist das $(\frac{1}{2} n + 1)$ te Glied $= \frac{u}{n} + \frac{1}{2} \pi$ grösser als ein Quadrant.

Dieses

Dieses ist das erste der Glieder welche eine verneinte Tangente haben.

Das nächst vorhergehende, ist um $\frac{\pi}{n}$ kleiner, und hat also eine bejahte Tangente, endlich oder unendlich, nachdem u kleiner als ein Quadrant ist, oder gleich so groß.

Für n gerade, hat also die erste Hälfte der Glieder bejahte Tangenten, die zweyte, verneinte.

17) Es sey n ungerade.

Man setze $k = \frac{n+1}{2}$ so ist das $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)^{te}$ Glied $= \frac{u+\frac{1}{2}.(n+1).\pi}{n}$

$= \frac{u+\frac{1}{2}\pi}{n} + \frac{1}{2}\pi.$

Dieß ist das kleinste Glied das grösser als ein Quadrant ist. Sein nächstvorhergehendes ist um $\frac{1}{n}\pi$ kleiner, also $= \frac{1}{2}\pi + \frac{u-\frac{1}{2}\pi}{n}$; entweder kleiner als ein Quadrant, oder einem Quadranten gleich, nachdem u kleiner ist als ein Quadrant oder einem Quadranten gleich.

Für n ungerade also haben die ersten $\frac{n+1}{2}$ Glieder bejahte Tangenten, die letzten $\frac{n-1}{2}$ verneinte.

18) Hat nähmlich einmahl ein Bogen unter den ersten n eine verneinte Tangente, so haben alle die folgenden dieser ersten, verneinte Tangenten weil der letzte unter ihnen noch kleiner ist als der Halbkreis.

19) Erstes Exempel. $u = 30$ Grad, $n = 5$; so sind die ersten fünf Glieder
$6; 6+36; 6+72; 6+108; 6+144$
Da haben die ersten drey Glieder bejahte Tangenten, die letzten beyden verneinte (17).

Zweytes Exempel; wiederum $n = 5$; $u = 90$ Grad; so ist die Reihe
$18; 18+36; 18+72; 18+108; 18+144;$
Das dritte Glied ist $= 90$ Grad, die beyden folgenden haben verneinte Tangenten. (17)

Drittes Exempel. Nun $n = 6$; $u = 30$ Grad, die Reihe
$5; 5+30; 5+60; 5+90; 5+120; 5+150.$
Hie sind der ersten drey Glieder Tangenten bejaht, der letzten drey verneint. (16)

20) Wenn zu einem Bogen kleiner als 90 Grad, ein Quadrant kömmt, so hat die Summe zur Tangente, die verneinte Cotangente des kleinern Bogens.

Wie

Wie man leicht in einer Figur sieht, auch durch Rechnung aus Trigon. 19 S. 3. Zus. herleitet.

Es sey n gerade.

21) Eine ganze Zahl kleiner als $\frac{1}{2}n$, heisse g; Man setze in (10) $k = \frac{1}{2}n + g$; so kömmt das $(\frac{1}{2}n + g + 1)$ te Glied $= \frac{u + g \cdot \pi}{n} + \frac{1}{2}\pi$

Also um einen Quadranten grösser als das $(g + 1)$ te Glied.

Beyde Glieder finden sich unter den ersten (13) Also muß daß $(g + 1)$ te Glied kleiner als ein Quadrant seyn.

So sind um einen Quadranten unterschieden

Glied	1	2	3	....	$\frac{1}{2}n$
und	$\frac{1}{2}n + 1$	$\frac{1}{2}n + 2$	$\frac{1}{2}n + 3$	....	n

wie man findet wenn man nach und nach g von o bis an $\frac{1}{2}n - 1$ wachsen.

Jedes Glied in der untersten Reihe, hat zur Tangente die verneinte Cotangente dessen in der obern.

Im dritten Exempel (17) ist

— cot von	5	35	65
= tang von	95	125	155

22) Wenn n ungerade ist, so kann unter den ersten Gliedern (12) keines das andre um einen Quadranten übertreffen.

Denn es sey irgend ein andres, als das in (10) ausgedruckte $= \frac{u.K.\pi}{n}$. Beyder Unterschied ist $= \frac{(K-k).\pi}{n}$. Sollte der ein Quadrant seyn, so wäre $\frac{K-k}{n} = \frac{1}{2}$; Aber $K-k$ ist eine ganze Zahl, und die ungerade Zahl im Divisor, kann davon nicht das doppelte seyn.

23) Auf die Frage (9) ist also die Antwort: x hat n unterschiedne Werthe (13). Wenn n gerade ist, ist die Hälfte der Menge dieser Werthe bejaht, die andre Hälfte verneint, nach dem Gesetze (22). Ist aber n ungerade, so sind der verneinten Tangenten, die den letzten Bogen gehören, eine weniger, als der bejahten, aber das Verhalten von Tangenten und Cotangenten findet nicht statt. (17; 22;)

Folgen aus der Reihe II; in (8).

24) Jedes Glied der Reihe, mit n dividirt, giebt $\frac{1}{n}$ Bog tang $-q$; und die Reihe dieser Quotienten lässt sich folgendergestalt darstellen

Reihe IV | $(k+1)$tes Glied $\frac{(k+1).\pi-u}{n}$

25) Je-

25) Jedes folgende Glied ist um $\frac{1}{n}$ des Halbkreises grösser als das nächstvorhergehende.

26) Lässt man k von 0 bis $n-1$ wachsen, so ist das letzte und grösste unter den ersten n Gliedern $= \frac{n.\pi - u}{n}$; kleiner als der Halbkreis. Also hat keiner dieser ersten Bogen einerley Tangente mit einem der vorhergehenden.

27) Kömmt zum $(k+1)$ten Gliede der halbe Umfang mit h multiplicirt, so hat man $\frac{(k+1+h).\pi - u}{n}$ das $(k+1+h)$te Glied. Das hat einerley Tangente mit dem $(k+1)$ten, also kommen in der ganzen Reihe keine andren Tangenten vor als die der ersten n Glieder.

28) Das erste Glied der Reihe (IV) ist $\frac{180\,\text{Grad} - u}{n}$ also kleiner als ein Quadrant, hat folglich eine bejahte Tangente.

29) Soll ein Glied der folgenden unter den ersten (26) eine bejahte Tangente haben, so ist $\frac{(k+1).\pi - u}{n}$ kleiner als $\frac{1}{2}\pi$; also k kleiner als $\frac{1}{2}n - 1 + \frac{u}{\pi}$, folglich kleiner als

$\frac{1}{2}n - 1$. Für grössere k haben die letzten Glieder der ersten n; verneinte Tangenten.

30) Zu drey Exempeln wähle ich eben die drey Paare von Grössen, die in den drey Exempeln (19) gegeben waren. Also hie

Erstes Exempel die ersten fünf Glieder
36—6; 72—6; 108—6; 144—6; 180—6
weil hie $\frac{1}{2}n - 1 = \frac{3}{2}$ so darf k nicht grösser seyn als 1; auch haben nur die ersten beyden Glieder bejahte Tangenten.

Zweytes:
36–18; 72–18; 108–18; 144–18; 180–18
Des dritten Gliedes Tangente wird unendlich.

Drittes;
30–5; 60–5; 90–5; 120–5; 150–5; 180–5;
k wächst bis 2; der ersten drey Glieder Tangenten sind bejaht.

31) Wiederum also, die Tangente von $\frac{1}{n}$ Bog tang — q suchen, heisst n unterschiedne Tangenten suchen von denen einige bejaht die andren verneint sind.

Vergleichung der Reihen III in (10) und IV (25).

32) Weil in jeder dieser Reihen nur die ersten Glieder unterschiedne Tangenten haben, (13; 27) So betrachte man in jeder Reihe nur diese ersten Glieder.

33) In

33) In III; ist das $(r+1)$te Glied $= \frac{u + r.\pi}{n}$.

34) In IV (24) setze man $k+1 = n-r$ So ist da das $(n-r)$te Glied $= \frac{(n-r).\pi - u}{n}$.

35) Die Glieder (33; 34) machen zusammen den Halbkreis.

36) Man lasse also r von o bis $n-1$ wachsen, so machen zusammen den Halbkreis folgende Glieder

III)	1	2	3	....	n
IV)	n	n—1	n—2		1

Oder die ersten n Glieder in III vom Anfange gezählt, und in IV vom Ende, machen Glieder die so zusammenkommen den Halbkreis.

37) So machen in den Exempeln (19; 30;) zusammen den Halbkreis

I Ex.)	1 Glied	2	3	4	5
	5	4	3	2	1

Auch so im II. Exempel.

III Ex.)	1 Glied	2	3	4	5	6
	6	5	4	3	2	1

38) Man braucht also die Tangenten der Reihe IV; nicht besonders zu untersuchen. Je-

de ist einer Tangente der Reihe III; entgegengesetzt sonst gleich (6).

In 33; 34; ist

$$\text{tang}\left(\pi - \frac{(r.\pi + u)}{n}\right) = -\text{tang}\,\frac{r.\pi + u}{n}$$

oder die Tangente des $n - r$ Gliedes in IV, der Tangente des $(r+1)$ Gliedes in III; entgegengesetzt, sonst gleich.

39) Und so haben die Tangenten von $\frac{1}{n}$ Bog tang $= q$ (24) keine andern Werthe als x (9).

40) Man kann aus diesen Betrachtungen herleiten, wie die Gleichung zwischen x und q aussieht nachdem n gerade oder ungerade ist, und wie im ersten Falle, die verneinten Werthe von x, Cotangenten zugehöre. Das wäre aber doch nicht brauchbar, wenn nicht ausführlich gezeigt würde wie man solche Gleichungen findet. Ich verweise also deßwegen, auf meine Schrift: Vnde plures insint radices ... 86 u. f. §. und meine Analysis des Unendlichen 331 u. f. §.

26.

Alle Bogen die einerley Sehne haben.

1) Der kleinste Bogen, zu welchem die gerade Linie AM = z als Sehne gehört, sey ALM = w. Dieser Buchstaben kann bis an den Halbkreis wachsen, wenn der Durchmesser als Sehne zu jedem Halbkreise gehört.

2) Man ziehe durch A, des Bogens Anfang, den Durchmesser ACB, C sey der Mittelpunct. Der Halbmesser heisse wie gewöhnlich = r.

3) L (1) befinde sich in der Mitte des Bogens; Man ziehe dadurch den Durchmesser LCL*; So ist AL = BL* = $\frac{1}{2}$w.

4) Nun gehört auch die gerade Linie AM als Sehne zum Bogen MBL* A = 2π — w.

Der Bogen, wie ich ihn genannt habe, fängt sich an, wo der erste (1) aufhört, und hört auf, wo dieser sich anfängt.

So sind beyde Bogen als bejaht anzusehen, weil man in ihnen nach einerley Ordnung um den Kreis geht.

5) AL* BM, wäre der Grösse nach dem Bogen (14) gleich, aber dem Zeichen nach ihm entgegengesetzt, verneint wenn jener bejaht ist, man geht durch ihn nach einer Ordnung,

die der Ordnung nach welcher man durch jenen geht entgegengesetzt ist.

Eben so ist AL* B ein verneinter Halbkreis, wenn ALB ein bejahter ist.

6) Ein Paar Puncte deren einer auf einem Kreisbogen, der andre auf dem entgegengesetzten geht, begegnen einander, da ein Paar Puncte auf entgegengesetzten geraden Wegen sich immer weiter von einander entfernen.

7) Es sey der Bogen AL $= \frac{1}{2} w = u$; sein Sinus LK $= p$.

8) Die gerade Linie AM als Sehne des Bogens w, betrachtet ist $= 2 . \sin u = 2 . p$.

9) Was bey einem Bogen welcher kleiner als der Halbkreis ist, in die Augen fällt; Die Sehne noch einmahl so groß als der Sinus der Hälfte ihres Bogens, erstreckt man auf Sehnen von Bogen die grösser als der Halbkreis sind, mit eben dem Rechte, mit welchem man den Begriff vom Sinus auf Bogen erstreckt, die grösser sind als der Quadrant.

11) Des Bogens (4) Hälfte $= 180$ Gr. $- u$ (7) hat auch p zum Sinus, und so ist z als Sehne des Bogens (4) auch das Doppelte des Sinus seiner Hälfte.

12) Eine gerade Linie, deren beyde Endpuncte im Umfange eines Kreises liegen, ist offenbahr Sehne jedes Bogens der eben diese Endpuncte zu Gränzen hat.

Wie

Wie die genannte gerade Linie, der beyden Bogen (1; 4).

13) Man setze also zu dem Bogen (1) den ganzen Umfang, so kömmt ein Bogen AMBL* AM = u + 360 Grad, welcher auch AB zur Sehne hat.

14) Dieses Bogens Hälfte = w + 180 Grad = ALBL*, hat zum Sinus L* K* = — p (7) Folglich ist nach (9) des Bogens (13) Sehne = — 2. p, der Sehne des Bogens (1) entgegengesetzt sonst gleich (8).

15) Setzt man den ganzen Umkreis zum Bogen (4), so kömmt MBL* ALMBL* A = 360° — w + 360°.

16) Dieses Bogens Hälfte = 360 Grad — u hat auch — p zum Sinus, also ist des ganzen Bogens Sehne = — 2. p.

17) Hat also ein Bogen, kleiner als der ganze Umfang zur Sehne + z; so hat die Summe dieses Bogens und des ganzen Umfangs zur Sehne — z.

18) Die trigonometrische Rechnung (14; 16) stimmt mit folgender geometrischen Betrachtung überein.

19) In (1) wachse der Bogen ALM bis zum Halbkreise, so wächst seine Sehne AM bis zum Durchmesser.

Wächst

Wächst der Bogen noch weiter über den Halbkreis bis zum ganzen, so nimmt die Sehne wiederum vom Durchmesser ab, bis auf Nichts.

20) Zu dieser Absicht darf man sich nur vorstellen der Punct M gehe durch den Umkreis fort nach der Ordnung (4) bis er in A kömmt, und führe eine gerade Linie AM um A mit sich.

21) So ist o der Anfang der Sehnen für Bogen die von o an wachsen, und das Ende für Bogen die bis an den ganzen Umkreis wachsen.

22) Wächst also der Bogen noch weiter über den ganzen Umkreis so muß seine Sehne verneint werden, wie eine veränderliche Grösse wird, wenn sie als bejaht, bis auf Nichts abgenommen hat, und von neuem entsteht.

23) Bey der Bewegung (20) nimmt der Bogen 360 Grad — AM ab, bis auf Nichts, da verschwindet ebenfalls seine Sehne, und entsteht von neuem verneint, wenn der Bogen von neuem entsteht.

24) Bey der Bewegung (20) bleibt der Bogen der sich von A anfängt nicht immer der kleinere der beyden die eine gemeinschaftliche Sehne haben, also gehört ihm nicht immer der Buchstabe w, welcher höchstens den Halbkreis bedeutet (1).

25) Es

25) Es sey die gerade Linie AM* = AM. Da ist sie Sehne des Bogens ABM*, und des Ueberrestes M* A.

26) Das zeigt, wie man die beyden Bogen die in einem Kreise, einer Sehne gehören von einem und demselben Puncte anfangen kann. Die beyden Sehnen (25) sind gleich, und wenn die eine zum Bogen ALM = w gehört, so gehört die andre zum Bogen AMBM* = 360 Gr. — w. Diese beyden Bogen, haben also der Grösse nach eine Sehne, obgleich jedes Sehne eine andre Lage hat, eine Sehne aber nicht eine gemeinschaftliche, wie die beyden Bogen (1; 4;).

27) Da einerley Linie allemahl als Sehne zu zween Bogen gehört, die zusammen den Umkreis ausmachen, so betrachte ich nur die Aenderungen des Zeichens welche des Bogens w Sehne leidet, wenn zu ihm der Umfang ein oder mehrmahl gesetzt wird, und wende das alsdann, auf den zugehörigen Bogen an.

28) Nach (9) ist Sehne von (2. 360 Gr. + w) = 2. sin (360 Gr. + u) Aber der Sinus ist = + p; also die Sehne = + 2. p = + z.

29) Nähmlich: ein Bogen grösser als ein Umkreis, hat eine verneinte Sehne (22). Diese wird indem der Bogen wächst, immer eine grössere verneinte Grösse, bis sie dem verneinten

Durch-

Durchmesser gleich wird, von da an, bey fortgesetztem Wachsthume des Bogens, nimmt die verneinte Sehne immer ab bis auf nichts, wenn der Bogen zween Umkreisen gleich wird. Nimmt der Bogen noch weiter über zween Umkreise zu, so geht sie aus dem Verneinten, durch o, ins entgegengesetzte Bejahte über.

30) Es bedeute h, erst = o; darnach 1; 2; 3; ... jede ganze bejahte Zahl. So ist nach (9)

31) Sehne von (2. h. 360 Grad + w) = 2. sin (h. 360 Grad + u) Dieser Sinus aber ist = + p; Also die Sehne = + 2. p = + z.

32) Sehne von ((2.h + 1) 360 Gr. + w) = 2. sin (h. 360 Grad + 180 Grad + u) dieser Sinus aber ist = — p Also die Sehne = — z.

33) Sehne von (2. (h + 1) 360 Gr. — w) = 2. sin ((h + 1) 360 Gr. — u); Dieser ist = — p, also die Sehne = — z.

34) Sehne von ((2.h + 1). 360 Gr. — w) = 2. sin (h. 360 Grad + 180 Grad — u) Der ist = + p; also die Sehne = + z.

35) Die Sehne geht allemahl ins Entgegengesetzte über, wenn zu den vorigen Vielfachen des Umkreises, ein Umkreis mehr kömmt. Dieß ist wie in (22; 29;) zu erklären; die

Sehne

Sehne geht allemahl durch o ins Entgegengesetzte.

36) Es bedeute C den ganzen Umfang des Kreises, so entstehen vorgehenden Sätzen gemäß vier Reihen, von deren jeder ich nur das allgemeine Glied hersetze:

37) Es hat nähmlich zur Sehne

	Reihe	(h + 1)tes Glied
+ z	I	w + 2. h. C (31)
	II	(2. h + 1). C − w (34)
− z	III	(2. h + 1). C + w (32)
	IV	2. (h + 1). C − w (33)

Nähmlich es sind die ersten Glieder der Reihen

I	II	III	IV
w	C − w	C + w	2. C − w

Wenn in jeder Reihe die Sehne so bleiben soll, wie sie ist, für die ersten beyden bejaht, für die letzten beyden verneint, so muß zu jedem Gliede, der doppelte Umkreis kommen, um das nächstfolgende zu erhalten; Folgen also nach dem ersten Gliede h Glieder, das ist: hat man das (h + 1)te Glied; so ist zum ersten Gliede 2. h. C gekommen. So entstehen die angegebenen Ausdrückungen.

Es

Es ist eine Sehne gegeben. Wieviel unterschiedne Sehnen haben die Bogen, deren jeder $\frac{1}{n}$ eines Bogens ist welcher die gegebne Sehne hat.

38) Die gegebene Sehne sey $+z$ So entstehen in 37; aus den Reihen I; II; welche, deren allgemeine Glieder so aussehen

Reihe	(h+1)tes Glied
V	$\frac{w+2.h.C}{n}$
VI	$\frac{(2.h+1).C-w}{n}$

39) Ist $-z$ die gegebne Sehne, so entstehen aus III; IV; eben so

VII	$\frac{(2.h+1).C+w}{n}$
VIII	$\frac{2.(h+1).C-w}{n}$

40) Ueber diese Reihen liessen sich Untersuchungen anstellen wie über die Sinus (24 Abh. u. f.) Dergleichen Weitläuftigkeit erspare ich hie, vermöge (9) und (4).

41) In

41) In (38) ist jede Sehne der Reihe

$$V) = 2.\,\mathrm{Sin}\left(\frac{u + h.C}{n}\right)$$

$$VI) = 2.\,\mathrm{Sin}\left(\frac{h.C + \pi - u}{n}\right)$$

Wo $C = 2.\pi$.

42) In der 24 Abh. 48; findet man Reihen V; VI; für welche die Menge der Sinus angegeben werden. Diese Reihen sind mit den hiesigen (41) völlig einerley, das allgemeine Glied hie (41) ist die Hälfte des $(h+1)$ten (38) aber in (24 Abh. 48) ist das allgemeine Glied das hte. Man setze also in der 24 Abh. $(h+1)$ statt h, so verwandeln sich die dortigen allgemeinen Glieder, beyde in die hiesigen (41).

43) Folglich haben hie in (38), die Reihen V; VI; soviel unterschiedne Sehnen, soviel unterschiedne Sinus in 24 Abh. 48; die dasigen V; VI; haben. Jeder dieser unterschiedenen Sinus verdoppelt, giebt eine unterschiedne Sehne.

Es sey n gerade.

44) Nach 24 Abh. 63; giebt es da n bejahte, und eben soviel verneinte sonst jenen gleiche Sinus. Folglich hie, n bejahte Sehnen und eben soviel verneinte sonst jenen gleiche.

45) **Exempel.** Es sey $w = 30$ Grad, $n = 6$; also $\frac{w}{n} = 5$ Grad. So sind in (38) der Reihen V; VI; erste Glieder, 5 Grad und 55 Grad. Jedes folgende Glied entsteht wenn man zum vorhergehenden $\frac{2.360}{6}$ Gr $= 120$ Grad addirt.

46) So erhält man

Glieder		1	2	3	4	5	6	7
Reihe	V	5°	125	245	365	485	605	725
	VI	55°	175	295	415	535	655	775

47) Die siebenten Glieder sind $= 2.360 + 5$ und $= 2.360 + 55$; haben also jedes einerley Sehne mit seinem ersten, und so die achten mit ihren zweyten u. s. w.

48) Weil die Summe eines Bogens, und des einfachen Umkreises, zur Sehne das Gegentheil der Sehne des Bogens hat, so erhellt folgendes:

49) Die ersten drey Glieder in den beyden Reihen (46) haben jedes eine andre bejahte Sehne, da jedes kleiner als der ganze Umkreis ist, und keines mit dem andern den ganzen Umkreis ausmacht. Das giebt also sechs unterschiedne bejahte Sehnen.

50) Das 4; 5; 6; Glied jeder Reihe übertrifft das 1; 2; 3; Glied eben der Reihe, um

um einen Umkreis. Hat also zur Sehne, die verneinte Sehne des Gliedes das von ihm um einen Umkreis übertroffen wird.

So $365 = 360 + 5$; $415 = 360 + 55$ u. s. w.

51) Das giebt also in jeder Reihe drey verneinte Sehnen, den drey bejahten in eben der Reihe (49) entgegengesetzt sonst gleich.

52) Zusammen also, sechs bejahte Sehnen, und auch soviel verneinte, sonst den bejahten gleiche.

Nun sey n ungerade.

53) Nach 24 Abh. 77; hat hie in (41) die Reihe V; $\frac{n+1}{2}$ bejahte Sinus die ihren ersten Gliedern von vorne herein gezählt gehören; Und eben diese bejahten Sinus gehören den ersten $\frac{n+1}{2}$ Gliedern der Reihe VI; nur daß die Glieder dieser Reihe welche mit jenen Gliedern einerley Sinus haben, rückwärts gezählt werden.

54) Jedes der letzten $\frac{n-1}{2}$ Glieder der Reihe V in (41) hat einen verneinten Sinus, und eben den hat auch eines der letzten Glieder der Reihe VI in (41) nur daß in jener die Glieder vorwärts, in dieser rückwärts gezählt werden.

54) Geht man also auf die Sehnen über, so hat in (38) jedes der ersten $\frac{n+1}{2}$ Glieder der Reihe V; eine andre bejahte Sehne, und diese ist einerley mit der Sehne eines der ersten $\frac{n+1}{2}$ Glieder in VI;

Jedes der letzten $\frac{n-1}{2}$ Glieder in V; hat eine andre verneinte Sehne, einerley mit der Sehne eines der letzten $\frac{n-1}{2}$ Glieder der Reihe VI.

55) Exempel. Es sey wiederum $w = 30$ Grad, aber $n = 5$; Folglich $\frac{w}{n} = 6$ Grad; Jedes folgende Glied ist grösser als das nächstvorhergehende um $\frac{720}{5} = 144$ Grad.

56) Also

Glieder		1	2	3	4	5	6
Reihe	V	6	150	294	438	582	726
	VI	66	210	354	498	642	786

57) Die sechsten Glieder sind 720 Grad + den ersten, haben also mit ihnen einerley Sehnen, so die siebenten mit den zweyten u. s. w.

58)

58) Von den drey ersten Gliedern der Reihe V; hat jedes seine eigne bejahte Sehne. Es machen aber zusammen den ganzen Umfang

$$1\,V + 3\,VI = 2\,V + 2\,VI = 3\,V + 1\,VI$$

Also haben diese sechs Bogen, nur drey unterschiedne bejahte Sehnen. Es sind die drey Sehnen von 6; 66; 150 Graden.

59) Auch machen 1080 Grad oder drey Umkreise zusammen, $4\,V + 5\,VI = 5\,V + 4\,VI$, In jedem dieser Paare, muß der eine Bogen eben die verneinte Sehne haben welche der andre hat.

60) Das erhellt allgemein so: Ein Paar Bogen sollen zusammen den dreyfachen Umkreis ausmachen und jeder eine verneinte Sehne haben. Bedeutet nun W einen Bogen kleiner als der Umkreis so muß der eine $2.C - W$ seyn der andre $C + W$.

Aber Sehne $(2.C - W) = -$ Sehne $(C - W)$
(14) Eben so Sehne $(C + W) = -$ Sehne W; Und Sehne $W = +$ Sehne $(C - W)$
Also Sehne $(2.C - W) =$ Sehne $(C + W)$.

61) Im Exempel (59) ist $4\,V = C + 78°$; $5\,VI = 2.C - 78°$ Also jedes Chorde $= -$ Ch $78°$.

Gestalt der Gleichungen zwischen Sehne des ganzen Bogens und eines Theils der den ganzen misst.

62) Die für den ganzen Bogen heisse $P = 2.p$ (8) Die für den Theil, sey $X = 2.x$ (24 Abh.)

63) In die Gleichungen der 24 Abh. setze man $\frac{1}{2}P$ statt p, und $\frac{1}{2}X$ statt x; so hat man die Gleichungen die hie verlangt werden.

In ihnen kann auch X die Sehne eines einfachen Bogen heissen, P des Vielfachen seine.

64) Die Gleichungen für die Sinus findet man 24 Abh. 123; 124; verfährt man mit ihnen nach (63) so bekömmt das Glied in welchem sich die höchste Potenz von X befindet, zum Divisor, die Potenz der 2 deren Exponent $= n$. Damit nun der unbekannten Grösse höchste Potenz, zum Coefficienten (1) habe, multiplicirt man mit dieser Potenz der 2; alle Glieder. So erhält man folgendes.

Für Theilung in eine gerade Menge.

65) $X^{2n} + 4.A.X^{2.n-2} + 16.B.X^{2.n-4} \ldots$
$\ldots + 2^{2n-2}.L.X^2 + 2^{2.n}M = 0.$

Für Theilung in eine ungerade Menge.

66) $X^n + 4.A.X^{n-2} + 16.B.X^{n-4} \ldots$
$\ldots + 2^{n-1}.L.X + 2^n.M = 0.$

Die

Die letzten Glieder enthalten $P = 2.p$ (24 Abh. 122).

Eben die Gleichungen gelten für $-P = -2.p$ (das. 143).

Exempel.

Halbirung, oder Verdoppelung (62).

67) Aus der bekannten Formel für den Sinus des doppelten Bogens

$$X^4 - 4.X^2 + P^2 = 0$$

Ist auch Geom. 43. S.

Trisection oder Multiplication mit 3.

68) Aus 26 Abh. 42

$$X^3 - 3.X + P = 0.$$

Theilung oder Multiplication mit 4.

69) Nach 24 Abh. 120;

$$X^8 - 8X^6 + 20.X^4 - 16X^2 + P^2 = 0.$$

Mit 5.

70) Daselbst (121)

$$X^5 - 5X^3 + 5.X - P = 0.$$

Theilung des ganzen Kreises.

71) Der Halbkreis hat 0 zum Sinus. Die 24 Abh. 144 u. f. leitet daraus die Theilung des Halbkreises her.

Der Sinus von irgend einem Stücke des Halbkreises, giebt wenn man ihn verdoppelt, die Sehne, von eben dem Stücke des ganzen.

72) In 24 Abh. 147; enthalten die Reihen V; VI; zusammen alle Vielfachen von $\frac{1}{n}$ des Halbkreises, das grösste darunter das $(2.n-1)$ fache.

73) Jedem dieser Vielfachen, gehört als Sinus ein x in 24 Abh. 145; 146; gerade und ungerade unterschieden.

74) Verdoppelt man jedes Glied der Reihen in 24 Abh. 147; so hat man eben die Vielfache von $\frac{1}{n}$ des ganzen Kreises, darunter macht o den Anfang, das grösste ist

$$2.(n-1).\frac{1}{n}.2.\pi.$$

75) Die Gleichungen 24 Abh. 145; 146; nach (63) behandelt, geben also die Sehnen für die Eintheilung des ganzen Kreises.

76) Für die Eintheilung des Bogens dessen Sehne $= P$ hat man die Gleichungen hie (65; 66;).

Gegenwärtig fallen dieser Gleichungen letzte Glieder weg (67; 71).

Also erhält man eben das was (75) gäbe, wenn man in den Gleichungen (65; 66) die letzten

letzten Glieder wegläßt, und die übrigen mit der Potenz von X die ihnen gemein ist dividirt. So kömmt für die Theilung des ganzen Kreises

In eine gerade Zahl

77) $X^{2.n-2} + 4.A.X^{2.n-4} \ldots + 2^{2.n-2}.L = 0$

In eine ungerade Zahl

78) $X^{n-1} + 4.A.X^{n-3} \ldots + 2^{n-1}.L = 0$

79) Diese Gleichungen enthalten die wirklichen Sehnen jeder Menge von n Theilen des Umkreises, wie die 24. Abh. 145; 146; die wirklichen Sinus, jeder Menge von n Theilen des Halbkreises.

Für die gerade Zahl.

80) Da ist in 24 Abh. 147; der Quadrant $= \frac{1}{2}n.\lambda$ Dieser Bogen kömmt dorten in V oder in VI vor, nachdem $\frac{1}{2}n$, gerade oder ungerade ist. Die Sinus der vorhergehenden Vielfachen von λ wachsen, bis an dieses Vielfache dessen Sinus $= 1$; für die folgenden Vielfache kommen eben die Sinus wiederum abnehmend vor, denn der kleinste unter denen die noch bejaht sind gehört zu $(n-1).\lambda$, befindet sich in VI; weil das Vielfache mit einer ungeraden Zahl ist, und ist darinn das $(\frac{1}{2}n)$te Glied.

81) Dann kömmt ein Sinus $= 0$, und ihnen folgen verneinte.

82) Der bejahten wirklichen Sinuſſe (80) ſind alſo $\frac{1}{2}n$ für VI; und $\frac{1}{2}n-1$ für V; weil da das erſte Glied $= 0$ iſt, zuſammen $n-1$; darunter iſt einer der Sinustotus, die übrigen $n-2$ geben $\frac{1}{2}n-1$ Paare gleicher, da in jedem Paare der letzte zu einem Bogen gehört, welchem zum Halbkreiſe der Bogen fehlt, dem der erſte gehört.

83) Das nun durch Verdoppelung auf Sehnen angewandt heiſſt ſoviel:

Im ganzen Kreiſe gehören zu der geraden Zahl Theile n; bejahte Sehnen, an der Zahl $n-1$; die gröſſte unter ihnen iſt der Durchmeſſer, das Doppelte des Sinus des Quadranten, Bogen die zuſammen den Umkreis machen, haben gleiche Sehnen, die doppelten Sinus, der Hälften dieſer Bogen welche zuſammen den Halbkreis ausmachten.

84) Nennt man alſo den ganzen Umkreis C; ſo haben gleiche Sehnen, folgende untereinanderſtehende Bogen.

$\frac{1}{n}C$	$\frac{2}{n}C$	.... $(\frac{1}{2}n-1)$. $\frac{1}{n}C$
$\frac{n-1}{n}C$	$\frac{n-2}{n}C$	.... $(\frac{1}{2}n+1)$. $\frac{1}{n}C$

Zu ihnen kömmt noch der halbe Umkreis, deſſen Sehne der Durchmeſſer iſt.

85)

85) Das giebt also $\frac{1}{2}n-1$ Paare gleicher Sehnen, das ist $n-2$ Sehnen die Paarweise gleich sind. Der Durchmesser, ist eben so, zugleich die Sehne vom Halbkreise $\mp o. \frac{1}{n} C$; bedeutet also auch ein Paar.

Dieses giebt n bejahte Wurzeln der Gleichung (77).

86) Jeder Sehne eine entgegengesetzte sonst gleiche, giebt eben soviel verneinte.

87) Die Gleichung (72) hat noch eine Wurzel, den Durchmesser $= +2$ und eben so, eine $= -2$; Sie lässt sich also mit X^2-4 dividiren. Der Quotient ist vom Grade $2.n-4$, und wenn man ihn $= o$ setzt, giebt das eine Gleichung deren Wurzeln die Sehnen (85; 86) sind, den Durchmesser ausgeschlossen.

Für ein ordentliches Vieleck wo die Zahl der Seiten gerade ist, im Kreise beschrieben.

88) Da sind die Sehnen, der ersten beyden Bogen in (84) die erste und die letzte Seite des Vielecks; der folgenden Bogen ihre sind Diagonalen, alle aus dem Puncte gezogen von dem man Bogen und Seiten des Vielecks zu zählen anfängt.

So sind der zweyten Bogen Sehnen, die erste und die letzte Diagonale, der Bogen ihre

die

die am Ende der Reihen stehn, die welche zunächst vor dem Durchmesser liegt, und die welche zunächst nach ihm folgt. Der Durchmesser ist zugleich Diagonale in der ersten und in der zweyten Hälfte des Vielecks.

So geben der Gleichung (77) bejahte Wurzeln, Seiten und Diagonalen, des ordentlichen Vielecks.

89) Wie man bey der Beschreibung dieses Vielecks, das erstemahl im Kreise herumgegangen ist, kann man das zweytemahl herumgehn.

Was das erstemahl die Sehne von $\frac{1}{n}C$ war, ist nun die Sehne von $C + \frac{1}{n}C$ u. s. w. Der Durchmesser jetzo die Sehne von $C + \frac{1}{2}C$.

Diese Sehnen sind also alle verneint, sonst den vorigen gleich (22).

90) Ginge man eben so das drittemahl im Kreise herum, so kämen wiederum bejahte Sehnen wie das erstemahl, und beym viertenmahle wiederum verneinte, wie das zweytemahl u. s. w. ohne Ende. Es kommen also nie andre Sehnen, als die ersten beydenmahle.

Das giebt Rechenschaft von der Menge der Wurzeln in der Gleichung (77).

91) Es wird nicht unnütz seyn, dieses durch ein Exempel zu erläutern.

92)

92) In Geom. 43 S. sey AI = g. die Sehne des halben Bogens, wie f des ganzen seine; oder welches eben das ist, g des einfachen Bogens, f des doppelten, Auch r = 1.

93) Das giebt $f = g. \sqrt{(4 - g^2)}$ des doppelten Bogens Sehne aus des einfachen seiner.

94) Des einfachen Sehne heisse nun X; so ist des doppelten seine $= X. \sqrt{(4 - X^2)}$.

95) Setzt man diese = g, so kömmt des vierfachen,
$= X. \sqrt{(4 - X^2)}. \sqrt{(4 - 4. X^2 + X^4)}$

96) Die wiederum statt g gesetzt, giebt des achtfachen
$X.(2-X^2).\sqrt{(4-X^2)}.\sqrt{(4-16.X^2+20X^4-8.X^6+X^8)} = P.$

97) Die Quadratwurzeln, schafft man nach (An. endl. Gr. 191) weg und erhält so die Gleichung

$$64. X^2 - 336. X^4 + 672. X^6 - 660. X^8 + 352. X^{10} - 104. X^{12} + 16. X^{14} - X^{16} = P^2$$

98) Das gäbe überhaupt Sehnen von Achttheilen eines Bogens dessen Sehne = P.

99) Hie ist P = 0. Die Gleichung lässt sich also auf den 14 Grad bringen (90) und ferner durch die zweyte dort angezeigte Division auf den zwölften.

100) Auf diesen Grad gebracht hat sie drey Paar bejahter, und eben soviel verneinter Wurzeln (91) Jene enthalten die Sehnen von $\frac{1}{8}$; $\frac{2}{8}$; $\frac{3}{8}$ des Umkreises, und den Ergänzungen dieser Bogen zum Umkreise, das ist Seiten und Diagonalen des Achtecks; kleiner als der Durchmesser, dieser war in (99) schon weggeschafft.

Die Bedeutung der verneinten Wurzeln erklärt (89).

101) Die Gleichung nach (99) zu behandeln wende ich hie die Mühe nicht an, sondern suche ihre Wurzeln, aus den Factoren (96) die ich in der Ordnung vornehme wie sie von der linken Hand gegen die rechte folgen. Man muß sich zugleich jeden auf das Quadrat erhoben vorstellen, wenn er Factor der Gleichung (99) seyn soll (97).

102) So behandelt, giebt der erste zweymahl $X = 0$.

103) Der zweyte $X = \pm \sqrt{2}$.

104) Der dritte $X = \pm 2$.

105) So geben diese drey Factoren Sehnen von folgender Menge Achttheile des Umkreises

$X =$	0	$\pm\sqrt{2}$	± 2
von	0; 8	2; 6	4;
		10; 14	12

106) Nun gehören Paare gleicher bejahter Wurzeln der Gleichung (97) für $\frac{1}{8}$ und $\frac{7}{8}$; $\frac{2}{8}$ und

$\frac{2}{8}$ und $\frac{6}{8}$; $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{8}$ (84) und jede dieser Wurzeln verneint, zu Bogen grösser als der Umkreis.

In (105) findet sich nur das Paar bejahte Wurzeln das zu 2 und 6 Achttheilen gehört, nebst dem Paare ihnen entgegengesetzter.

107) Folglich enthält der dritte Factor in (96) noch die Paare bejahter Wurzeln die zu 1 und 7, und die zu 3 und 8 Achttheilen gehören, nebst den ihnen entgegengesetzten.

Ich will zeigen durch was für eine Analysis man diese Wurzeln fände, wenn man auch gar nichts von ihnen wüsste, als daß zwey Paar gleiche von ihnen bejaht, zwey Paar jenen entgegengesetzt sind.

108) Eine von diesen Wurzeln sey $+a$ eine andre $+b$; Jede ist zweymahl da, und jeder Gegentheil auch zweymahl. Ein Ausdruck der $=o$ werden soll, man mag ihn a, oder b, oder $-a$, oder $-b$ setzen, und dem dieses von jeder dieser Voraussetzungen zweymahl wiederfahren soll, hat zu Factoren, die Quadrate von $X-a$; von $X+a$; von $X-b$; von $X+b$; wie man sich leicht aus An. endl. Gr. 219 unterrichtet.

Ein solcher Ausdruck ist also $=$
$(X^4-2.a^2.X^2+a^4).(X^4-2b^2.X^2+b^4)$

109)

109) Dieses Product ist

$$X^8 - 2.(a^2 + b^2).X^6 + \left.\begin{matrix} a^4 \\ +4a^2b^2 \\ +b^4 \end{matrix}\right\}.X^4$$
$$- 2.a^2.b^2.(a^2 + b^2).X^2 + a^4.b^4.$$

110) Man vergleiche dieses, mit dem was im letzten Factor (96) hinter dem Wurzelzeichen steht, so, daß man die Coefficienten gleich setzt, die sich bey einerley Potenz von X befinden.

111) Also $a^4.b^4 = 4$;
giebt $a^2.b^2 = 2$;
Das Zeichen — darf nicht vor 2 gesetzt werden, weil linker Hand des Gleichheitszeichens ein Quadrat steht.

112) Auch ist $2.a^2.b^2.(a^2 + b^2) = 16$;
Also (111) $a^2 + b^2 = 4$, das ist (111)
$a^2 + \frac{2}{a^2} = 4$.

113) Daraus kömmt $a^4 = 4.a^2 - 2$ und $a^2 = 2 \pm \sqrt{2}$; folglich $4 - a^2$ oder $b^2 = 2 + \sqrt{2}$.

114) Man kann also für eines dieser Quadrate willkürlich vor der Wurzelgrösse das Zeichen + brauchen, so bekömmt sie für das andere das Zeichen —.

So setze ich $a^2 = 2 - \sqrt{2}$; $b^2 = 2 + \sqrt{2}$.

115)

115) Sollen diese Werthe statt finden, so müssen sie auch bey der vierten und sechsten Potenz zutreffen. Es ist aber

$$\begin{array}{rl} a^4 & = 4 - 4.\sqrt{2} + 2 \\ 4.a^2.b^2 & = 8 \\ b^4 & = 4 + 4.\sqrt{2} - 2 \\ \hline \text{Summe} & = 20 \end{array}$$

Auch $2.(a^2 + b^2) = 8$.

Also trifft alles zusammen.

116) Folglich hat man für 106

Sehnen von	$\pm\sqrt{(2-\sqrt{2})}$	$\pm\sqrt{(2+\sqrt{2})}$
	$\frac{1}{8}C$; $\frac{7}{8}C$	$\frac{3}{8}C$; $\frac{5}{8}C$
	$\frac{9}{8}C$; $\frac{15}{8}C$	$\frac{11}{8}C$; $\frac{13}{8}C$

117) Begreiflich war meine Absicht hiedurch die allgemeine Theorie der Gleichungen zu erläutern. Die Sehne vom Achttheile des Kreises findet man freylich leichter aus der bekannten Sehne des Quadranten nach Geom. 43 Satze.

Zweyter Fall zu dem ersten vor (80).

Theilung in eine ungerade Zahl.

118) Da kömmt in 24 Abh. 147; der Quadrant nicht vor; Aber der Halbkreis, ist in VI; das Glied dessen Zahl $\frac{n+1}{2}$ ist.

Die Sinus der Bogen in beyden Reihen zusammen, bis an diesen Halbkreis, wachsen anfangs, aber nur bis an einen der kleiner als 1 ist, von dem an, nehmen sie wiederum ab bis an den o der dem Halbkreise gehört, und so lange sind sie alle bejaht,

Die $\left(\frac{n+1}{2} + 1\right)$ ten Glieder der Reihen, haben verneinte Sinus, und so die ihnen folgen, auch die nten Glieder der Reihen haben noch verneinte Sinus.

119) Der bejahten wirklichen Sinusse, sind also $\frac{n+1}{2} - 1$ in VI; und eben soviel in V; weil da das $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ te Glied noch nicht der Halbkreis ist, aber das erste Glied, o zu Sinus hat.

120) Zusammen also sind $n-1$ bejahte Sinus; Sie gehören zu den Bogen λ; $2.\lambda$; $3.\lambda \ldots (n-1).\lambda$; der erste und letzte sind gleich, so der zweyte vom Anfange und der zweyte vom Ende u. s. w. Also giebt es $\frac{n-1}{2}$ Paare gleiche bejahte Sinus, jeder kleiner als der Halbmesser. (118)

121)

121) Nach dem $\frac{n+1}{2}$ ten Gliede folgen noch $\frac{n-1}{2}$ bis mit zum nten. Diese folgenden Glieder, haben verneinte Sinus (118) Es giebt also verneinte Sinus an der Zahl $n-1$ Nähmlich allemahl für die untereinanderstehenden Glieder der Reihen V und VI, zweene.

122) In der Reihe V; sind $\frac{(n+1)}{2}-1$ bejahte Sinus, (119) und $\frac{n-1}{2}$ verneinte (121) zusammen also n wirkliche Sinus; Dazu kömmt noch der Sinus o des ersten Gliedes.

123) Auch soviel wirkliche Sinus sind in VI; und kömmt der Sinus o für (118).

124) Aber die Sinus der Reihe V; sind keine andern als der Sinus der Reihe VI; Daher bedeutet ein Werth von x allemahl sowohl einen Sinus der einen Reihe als der andern und so; o eben sowohl den Sinus des ersten Gliedes der Reihe V; als des Gliedes in (VI).

Dieses hängt mit 24 Abh. 84 zusammen, und giebt Rechenschaft warum in 24 Abh. 144; die Gleichung für eine Theilung nach einer ungeraden Zahl, nur eine Wurzel $= o$, hat die nach einer geraden Zahl zwo dergleichen.

125) Die Anwendung hievon auf Sehnen giebt also:

Im ganzen Kreise, gehören zu der ungeraden Zahl Theile n; bejahte Sehnen, an der Zahl $n-1$ jede kleiner als der Durchmesser, aber $\frac{n-1}{2}$ Paare gleicher.

Das sind die bejahten Wurzeln der Gleichung (78).

Verneinte Sehnen an der Zahl eben soviel, auch eben soviel Paare gleicher.

Zwo Sehnen jede $= o$.

Die Gleichung für diese Sehnen alle ist nur vom Grade n, und lässt sich, wegen einer Wurzel $= o$, mit x dividiren (124) Also die Gleichung welche die wirklichen Sehnen enthält, (78) ist vom Grade $n-1$; und hat $\frac{n-1}{2}$ bejahte Wurzeln von unterschiedner Grösse, eben soviel ihnen entgegengesetzte verneinte. Keine unter diesen ist ein Durchmesser.

126) Will man, wie in (84) die beyden Reihen von Bogen darstellen, die gleiche, bejahte Sehnen haben, so sind nur die letzten Glieder anders als dorten, hie nähmlich

$$\frac{n-1}{2}.\frac{1}{n}.C$$

$$\frac{n+1}{2}.\frac{1}{n}.C$$

127) Dieser Bogen Sehnen sind der Gleichung (78) bejahte Wurzeln, und Sehnen der Summen vom Umkreise und diesen Bogen, ihre verneinten.

128) Für ein ordentliches Vieleck von einer ungeraden Menge Seiten, sind die bejahten Sehnen, erste und letzte Seite, und Diagonalen.

129) Die verneinten, sind eben so was wenn man das Vieleck zu beschreiben zum zweytenmahle im Kreise herumginge. Dieß alles, nur ungerade statt gerade gesetzt, wie in (88 ... 90).

Exempel.

130) Auch ohne eine allgemeine Regel für den Sinus des vielfachen Bögens durch den Sinus den einfachen zu wissen, kann man für jeden besondern Fall dieses finden, wie 24 Abh. 93; Anleitung giebt.

131) Es ist also begreiflich daß man eine Gleichung finden kann wo x den Sinus des einfachen, und p des siebenfachen seinen bedeutet.

132) Und daraus nach hiesiger Abh. (64) eine wo Sehne des siebenfachen Bogens, durch Sehne des einfachen gegeben ist.

133) Und wenn man nun des siebenfachen Bogens Sehne $= o$ setzt, eine Gleichung, deren Wurzeln die Sehnen aller Siebentheile des

Bogens dessen Sinus = 0; das ist (hie 126) bejahte und verneinte Sehnen aller Siebentheile des Umkreises von 0. $\frac{1}{7}$ bis mit $\frac{13}{7}$.

134) Diese Gleichung ist folgende

$$X^7 - 7.X^5 + 14.X^3 - 7.X = 0.$$

135) Wenn man sie mit X dividirt, und im Quotienten, Z statt X^2 setzt, so kömmt

136) $Z^3 - 7.Z^2 + 14.Z - 7 = 0.$

137) Diese Gleichung muß lauter bejahte Wurzeln haben, weil Z ein Quadrat bedeutet. Hat man die drey Wurzeln gefunden so ist $+\sqrt{z}$, Seite oder Diagonale des Siebenecks; und mit dem Zeichen — genommen was (129) erklärt.

138) Die Gleichung (134) nur in den sonst gewöhnlichen cossischen Zeichen ausgedruckt, findet sich in Keplers Harmonice Mundi, (Lincii 1619 fol.) Lib. I. Prop. 45; pag. 36. Sie ist von Jobst Byrgen, kaiserl. und landgräfl. hessischen Mathematicus. Kepler erinnert auch, daß sie dreyerley giebt.

139) Man hat keinen allgemeinen Ausdruck der Wurzeln einer cubischen Gleichung, wie für die quadratische (An. endl. Gr. 76) Cardans an sich nicht sehr brauchbare Formel (An. endl. Gr. 699 u. f.) hätte bey der Anwendung auf gegenwärtige noch die Schwürigkeit, die sie bey einer Gleichung hat wo alle drey Wurzeln möglich sind.

140)

140) Es lässt sich also hie nichts anders thun, als durch Versuche, erst Gränzen zu finden zwischen die eine Wurzel fällt, und dann sich ihr immer mehr und mehr zu nähern etwa wie An. endl. Gr. 304 lehrt. Eben darauf bezieht sich was Lambert angiebt Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen (Berlin 1770) Tab. XXVIII; XXIX und p. 70 u. f.

141) Aus dergleichen Ursachen, erkennt Kepler diese cossische Angabe der Seiten des Siebenecks nicht für geometrisch. Man findet was man wissen will nur durch Versuche, und nähert sich ihm, stellt es aber nie vollkommen dar, wie geometrische Constructionen thun.

142) Daß man cubische Gleichungen durch andre krumme Linien als den Kreis construiren kann, (An. endl. Gr. 500) daran hat Kepler hie nicht gedacht, obgleich Vorschriften dieser Art, wenigstens für die Erfindung zwoer mittleren Proportionalen (An. endl. Gr. 508) ihm bekannt seyn mussten. Freylich aber ist es ganz was anders, solche krumme Linien zu beschreiben, als einen Kreis, und so kommen solche Constructionen mit denen in keine Vergleichung welche die Elementargeometrie lehrt.

143) Das Verfahren (140) hätte bey gegenwärtiger Gleichung keinen praktischen Nutzen, weil Seite und Diagonalen des Siebenecks,

aus den trigonometrischen Tafeln, sich genauer als zum Gebrauche, etwa zu Verzeichnung des Siebenecks, nöthig ist, finden lassen. *Clavius* Geom. Pract. Lib. IV. cap. V. giebt die Seite des Siebenecks 0,8677674; Wer Lust zu rechnen hat, kann versuchen ob diese Zahl, sowohl mit + als mit — genommen, eine Wurzel der Gleichung (134) ist nachdem man solche Gleichung um einen Grad erniedriget hat; Oder ob die Quadratwurzel aus dieser Zahl, ein Werth von z in (136) ist.

144) Wenn sich die Gleichung (135) auf eine quadratische bringen lässt, so giebt es für die Werthe ihrer unbekannten Grössen, Ausdrückungen durch Quadratwurzeln, und Constructionen aus der Elementargeometrie. (An. endl. Gr. 502)

Für die Theilung in fünf Theile.

145) Aus 24 Abh. 149; kömmt hie in (66)

$$X^4 - 5X^2 + 5 = 0$$

giebt $X^2 = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

Das kleinere dieser beyden Quadrate, ist das Quadrat der Seite, das grössere, das Quadrat der Diagonale, der Sehne von $\frac{2}{5}$ des Umkreises, die es zugleich von $\frac{3}{5}$ ist. Man s. hierüber die angeführte Stelle der 24. Abh.

146)

146) In meiner Abhandl. Vnde plures insint radices §. 44. habe ich gesagt: Wenn man an einem ordentlichen Vielecke in den Kreis beschrieben, von einer Seite zu zählen anfinge, die man die erste nennte, dann die erste, zweyte, dritte ... Diagonale, bis man an die letzte Seite käme, so wären, die erste Seite für bejaht angenommen, die erste Diagonale verneint, die zweyte bejaht, die dritte verneint, und so abwechselnd.

Einen Beweis davon habe ich nicht ausführlich gegeben, mich nur auf Betrachtungen berufen die ich zuvor über Reihen angestellt hatte.

147) Jetzo erkenne ich dieses für eine Uebereilung, ich hätte, statt des haec deducuntur ex 22; meine Schlüsse nur mehr aus einander setzen sollen so wäre sie vermieden worden. Alle Seiten und Diagonalen des Vielecks im ersten Kreise sind bejaht, im zweyten alle verneint. (89)

Das kann ich auch zu einiger Entschuldigung anführen; Ich habe die erste Diagonale für Sehne von $C + \frac{2}{n} C$ angesehen, da sie es von $\frac{2}{n} C$ selbst ist.

148) Ad angularium sectionum analyticen, theoremata καθολικωτερα; a *Francisco Vieta*

Fontenacensi primum excogitata, at absque vlla demonstratione ad nos transmissa, iam tandem demonstrationibus confirmata; opera et studio Alexandri Andersonii Scoti, Paris. 1615; enthält Theilungen der Bogen vermittelst Sehnen, welche Kunstgriffe damahls noch sehr neu waren; .... Doch um eben die Zeit Jobst Byrgen nicht unbekannt (138) ... Ein Consectarium bey Probl. II. p. 40. fängt sich an: Quoniam eadem recta, circulo inscripta, non diameter, duabus circumferentiis subtenditur, quarum vna minor est semicircumferentia circuli, altera maior, aequalitas inter subtensam minori maioriue, et subtensam segmento minoris pertinebit ad subtensam quoque simili segmento maioris et ad subtensas denique reliquis circumferentiis quae aeque multiplices maiorem, minoremue in circulationibus componunt.

149) Anderson hat also bemerkt daß eine Sehne bey Wiederhohlung des Bogens in mehreren Umkreisen vorkömmt. Vom Uebergange ins Entgegengesetzte, und überhaupt von verneinten Grössen, konnte er die Einsichten nicht haben, die man erst in spätern Zeiten erlangt hat. Problemation. I. p. 42; lehrt er die Theilung eines Bogens dessen Sehne gegeben ist in drey Theile so: Dreymahl das Quadrat des Halbmessers in die Sehne des Drittheils, weniger dem Würfel dieser Sehne, ist das Quadrat

drat des Halbmessers in die Sehne des ganzen multiplicirt. In meinen Zeichen aus 26 Abh. 43 und hie (66)

$$X^3 - 3.X + P = 0.$$

Da sagt nun A. das was ich X nenne, ... er nennt es E; ... sey zweyerley; 1) die Sehne des Drittheils vom Bogen, 2) die Sehne des Drittheils vom Bogen, der zum ganzen Kreise übrig war.

A. betrachtet nähmlich daß eine Sehne zu zween Bogen gehört, einer kleiner als der Halbkreis, der andre grösser; Und so bemerkt er richtig; Drittheil eines Bogens dessen Sehne gegeben ist, sey Drittheil jedes dieser beyden Bogen.

Daß aber die Grösse die er E nennt, drey Werthe haben muß, weil sich ihr Würfel in der Gleichung befindet ist ihm also nicht bekannt gewesen auch nicht, daß nach hie (54) dieser Werth verneint ist, die Sehne des Drittheils von der Summe des kleinsten Bogens der die gegebene Sehne hat und dem vierfachen Umkreise.

150) Im Problemat. II. giebt Anderson für die Theilung eines Bogens in fünf Theile, eine Gleichung vom fünften Grade, und sagt, die gesuchte Sehne habe drey Werthe; nach den Bezeichnungen die ich brauche, von $\frac{w}{5}$;

$C - w$

$\frac{C-w}{5}$; $\frac{w+2.C}{5}$ welches er auch durch eine Figur erläutert. Es sind dieses die drey kleinsten Bogen denen unterschiedne bejahte Sehnen gehören, wie hie (54); und das Exempel (55) zeigen. Die drey grössern Bogen, welche eben die bejahte Sehne haben, nennt er nicht, das ist aber kein Fehler, wenn er nur alle Sehnen angeben will.

151) Problemation. III. p. 44; giebt er für die Theilung in sieben Theile eine Gleichung vom siebenten Grade, und als Werthe der unbekannten Grösse in ihr die Sehnen von $\frac{w}{7}$; $\frac{C-w}{7}$; $\frac{2.C+w}{7}$; $\frac{4.C+w}{7}$ also von vier Bogen, mit denen noch vier andre, einerley bejahte Sehnen haben (126).

152) Anderson hat also richtig, alle bejahte Sehnen angegeben. Das Gesetz der Coefficienten für solche Gleichungen wie hie 66; 67; giebt er auch schon durch die Coefficienten des binomischen Lehrsatzes.

27.

Theilung aller Bogen die einerley Gränzen haben.

1) Im Vorhergehenden ist gezeigt worden, die Frage: Einen Bogen zu theilen, dessen Sinus, Tangente, Sehne, gegeben sind habe soviel Antworten, soviel Theile sollen gemacht werden.

2) Rührt also vielleicht diese Mannichfaltigkeit daher, daß man das theilt, was diese Linien bestimmen, die doch dem Bogen zufällig sind, weil man ihn ohne sie denken kann? Und wäre also etwa die Frage einen Bogen selbst zu theilen, nicht so vielfach? als die: einen Bogen zu theilen dessen Sinus, Tangente, Sehne, gegeben ist.

3) Diese Frage war mir bey meinem frühern mathematischen Fleisse wichtig. Ich legte sie Leonhard Eulern vor, und ward von ihm auf die algebraischen Gleichungen verwiesen. Das befriedigte mich nicht, denn diese Gleichungen beziehen sich auf die Linien die ich zufällig genannt habe, und entscheiden also nicht was statt finden würde wenn man den Bogen ohne sie behandelte.

4) Endlich versicherten mich geometrische Betrachtungen daß auch wenn man den Bogen selbst

selbst theilet, die Theilung soviel unterschiedene Bogen giebt, soviel Theile sollen gemacht werden.

5) Ich setze zum voraus daß Bogen für einerley angenommen werden, die um Vielfache des Umkreises unterschieden sind. In astronomischen Rechnungen wird ein Bogen der den Umfang mehrmahl und was darüber enthält, nur für das angenommen, was er über die Vielfachen enthält.

6) Geht man in der Figur der 26. Abh. durch ALM, und so ferner mehrmahl durch den ganzen Umkreis, so kömmt man allemahl von A durch L in M, Alle diese Bogen haben also einerley Anfang und Ende, und einerley Gang vom Anfange zum Ende.

Eben so wenn man durch MBA, und mehrmahl den wiederhohlten Umkreis geht.

7) Also nehme ich mit dem Bogen ALB $= u$ für einerley, alle Bogen

I) $u;\ u+C \ldots . u+k.C.$

8) Und mit MBA, einerley, alle Bogen

II) $C-u;\ 2.C-u \ldots (k+1).C-u.$

9) Dividirt man jedes Glied dieser Reihen mit n; so geben die ersten n Glieder

10) III) $\frac{u}{n};\ \frac{u+C}{n};\ \ldots .\ \frac{u+(n-1).C}{n}$

IV) $\frac{C-u}{n};\ \frac{2C-u}{n};\ \ldots\ \frac{n.C-u}{n}$

11) Das

11) Das (n + 1) te Glied jeder Reihe ist das erste um C vermehrt, und so kommen zweyte Perioden von n Gliedern, deren jedes um einen Umkreis grösser ist, als das ebensovielte in der ersten Periode. Nun dritte Perioden, deren Glieder die der zweyten jedes um den Umkreis übertreffen u. s. w. Diese neuen Perioden, geben also keine andern Bogen als die ersten geben (5).

12) So giebt (9) aus der Reihe I nur n Bogen, in III; und aus der Reihe II nur eben soviel in IV.

13) Der erste in III und der n te in IV; geben zusammen den Umkreis;

Geht man in III um ein Glied vorwärts und vom Ende der Reihe IV um eines rückwärts, so hat man $\frac{1}{n}$ C dorten mehr, hie weniger, also machen beyde Glieder allezeit einerley Summe, den ganzen Umkreis.

14) Wie zweene Bogen die zusammen den ganzen Umfang ausmachen, einerley Gränzen haben, erklärt 26 Abh. 4;

15) Sieht man sie also in dieser Betrachtung als einerley an, so enthalten die Reihen III; IV; zusammen nur n Bogen, und die Frage: Einen Bogen dessen Gränze gegeben ist, in n Theile zu theilen, hat nicht mehr noch weniger, als n Antworten.

16)

16) Stellt man sich aber einen Bogen kleiner als der Umkreis, und seine Ergänzung zum Umkreise, als zweene unterschiedne Bogen vor; so erhellt doch soviel:

Was für eine Arbeit, alle Bogen angiebt die in III; dargestellt werden, die giebt auch zugleich alle Bogen an welche in IV dargestellt werden, weil Bogen und Ergänzung von ihm allemahl zugleich da sind.

17) Also: einen gegebenen Bogen in n Theile zu theilen, braucht man nur n Bogen anzugeben; Und so hat diese Frage auch vom Bogen selbst angestellt, soviel Antworten, soviel Theile sollen gemacht werden.

18) Das einfachste Exempel ist die Halbirung. In der Figur zur 26 Abh. sey der Bogen ALM = u; also MBA = C — u.

19) Eine gerade Linie durch des Kreises Mittelpunct, welche den ersten Bogen in L halbirt, halbirt auch den zweyten in L*.

20) Sie giebt also zugleich mit der genannten Bogen Gränzen, folgende Bogen an;

$\frac{1}{2}u = AL$; $\frac{u+C}{2} = ALMBL^*$.

$\frac{C-u}{2} = MBL^*$; $\frac{2C-u}{2} = MBL^*M^*AL$.

In jeder der Reihen (10) die zwey ersten Glieder.

21) Al-

21) Also; wer einen Bogen halbirt, findet allemahl zugleich vier Hälften, die Paarweise zusammen den Umkreis ausmachen; Der Durchmesser LL* giebt diese vier Hälften an, und zugleich alle Hälften, der unzählichen Bogen welche die Gränzen A und M haben.

22) Wer etwa nur den spitzigen Winkel ACM gezeichnet hätte, denselben, und den Bogen welcher ihn misst, halbirte, der dächte vielleicht nur an diesen einzigen Bogen und dessen Halbirung.

Allsdann aber dächte er nicht an Alles was zum Begriffe des gezeichneten Winkels gehört.

23) Dieser Begriff enthält nicht nur was Tusche, Bleystift oder Kreide, dem Auge darstellen, sondern was ein Paar gerade Linien, die einander schneiden, dem Verstande darstellen.

Also, weil man jede dieser Linien nach Gefallen verlängern kann; Scheitelwinkel und Nebenwinkel.

Allemahl also vier Winkel, die einmahl paarweise gleich sind, das andremahl paarweise zusammen zween rechte betragen.

24) Wird noch aus des Winkels Scheitel, mit einem willkührlichen Halbmesser ein Kreisbogen geschrieben;

So ist dieser, nie ohne den übrigen Bogen der mit ihm den Kreis ergänzt.

Und, weil man in einem Kreise so oft man will, herumgehen kann, wie auf einer geraden Linie, fort, soweit man will;

25) So liegen in dem Begriffe eines Bogens der einen Winkel misst, auch die Ergänzung dieses Bogens zum Umkreise, und unzählige Summen aus beyden Bogen, und Wiederhohlungen des Umkreises.

28.

Wie trigonometrische Tafeln nur nach Lehren der Elementargeometrie sind berechnet worden.

1) Des Ptolemäus Sehnentafeln, (Geom. Abh. I. Samml. 60 Abh. 113) gehen durch halbe Grade. Von seinem Verfahren bey ihrer Berechnung ziehe ich folgendes aus dem I. B. seines Lehrbegriffs aus;

Es ist in Schreckenfuchsens Ausgabe das 9 Cap. Im griechischen muß man eine Aufschrift aufsuchen, die auf deutsch heisst: Von der Grösse der geraden Linien die im Kreise gezogen sind.

2) Zuerst lehrt er die Seiten des Zehnecks und Fünfecks mit des Sechsecks seiner vergleichen. (Euklid IV. B. 11 und 13 B. 10). Das sind also Sehnen von 36; 72; 60 Graden.

Man

Man hat auch leicht die Seiten des Dreyecks und Vierecks, Sehnen von 120 und 90 Graden.

Wenn eines gegebenen Bogens Sehne gegeben ist, weiß man auch die Sehne seiner Ergänzung zum Halbkreise. Also aus der Vorhergehenden die von 144; 108;

Sehnen aus andern zu finden dient der Lehrsatz: Wenn ein Viereck im Kreise beschrieben ist, so ist das Rechteck unter den Diagonalen so groß, als die Summe der beyden Rechtecke unter den Seiten die einander gegenüberstehn.

Wenn von zween Bogen die Sehnen gegeben sind, weiß man die Sehne ihrer Summe; Oder ihres Unterschiedes.

Also, aus den Sehnen von 72 und von 60 Graden die von 12;

Man weiß auch aus eines Bogens Sehne, die Sehne der Hälfte oder des Doppelten.

Also aus der Sehne von 12 Graden, die für 6; 3; $1\frac{1}{2}$ Grad.

Nun aber, aus der letzten der genannten Sehnen, die von $\frac{1}{2}$ Grade zu finden, müsste man den Bogen in drey Theile theilen.

Das, sagt Pt. gehe durch Linien nicht an, ἢ τὸ τριτὸν τῆς ὅλης περιφερείας διὰ τῶν γραμμῶν ἁπτόμενον πως; Könnte man das, so gäben sich die Sehnen durch alle halbe Grade.

3) Also, etwas der Wahrheit nahes anzugeben, bedient sich Pt. eines Satzes der sich so ausdrucken lässt; Wenn ein kleinerer Bogen u, ein grösserer w heisst, so ist $\frac{\text{Sehne } (w-u)}{\text{Sehne } u}$ kleiner als $\frac{w-u}{u}$.

Auch $\frac{\text{Sehne } w}{\text{Sehne } u}$ kleiner als $\frac{w}{u}$.

Sätze die etwas allgemeiner sind als Geom. 41 Satz III.

4) Nun setzt Pt. sey $u = \frac{3}{4}$ Grad. Die Sehne davon durch halbiren gefunden ist $0^\circ\ 47'\ 8''$ den Durchmesser $= 120$ gesetzt. Nähmlich die 0, 1, 11, bedeuten hie Sechzigtheile des Halbmessers, ferner nach 60 getheilt. Ist nun $w = 1$ Grad $= \frac{4}{3}$ u; so ist die Sehne davon kleiner als $\frac{4}{3}$. $(0^\circ\ 47'\ 8'')$ das ist kleiner als $1^\circ\ 2'\ 50''\frac{2}{3}$ den Bruch der Secunden lässt Pt. weg.

5) Zweytens setzt Pt. $u = 1$ Grad, $w = \frac{3}{2}$ Grad, davon hat er die Sehne gefunden $= 1^\circ\ 34'\ 15''$.

Hie also ist $\frac{\text{Sehne } w}{\text{Sehne } u}$ kleiner als $\frac{3}{2}$; folglich Sehne u grösser als $\frac{2}{3}$ Sehne w, das ist grösser als $1^\circ\ 2'\ 50''$.

6) Nun

6) Nun schliesst Pt. Die Sehne von einem Grade war nach (4) kleiner nach (5) grösser als 1° 2′ 50″; Folglich ist dieses ihre richtige Grösse.

7) Deutlich heisst das soviel: Die Sehne fällt zwischen zwo nah beysammen liegenden Gränzen, die eine mehr als das angegebne, die andre weniger. Diese Gränzen müssen nur in Tertien des Halbmessers unterschieden seyn, und weil Pt. die Sehnen nur bis auf Secunden des Halbmessers angiebt, so ist der Werth der Sehne für ihn, was zwischen diese Gränzen fällt.

8) Aus dem Angeführten folgert er: Die Sehne des halben Grades halte beynah 31′ 25″; Setzt also zum voraus daß sich der kleinen Bogen Sehnen beynah verhalten wie die Bogen.

9) In vorhin erwähnter 60 geom. Abh. 114; habe ich erinnert, daß Pt. die Sehnen etwa bis auf 4 Milliontheile des Halbmessers angiebt.

10) Aus unsern trigonometrischen Tafeln läßt sich berechnen daß zwischen den Sehnen von 179 Gr. und 178 Gr. 58 M.; der Unterschied etwa 52 Zehnmilliontheilchen des Sinustotus beträgt.

11) Also wäre Pt. Eintheilung zulänglich bis fast ans Ende des Halbkreises Paare von Minuten anzugeben.

12) Weil auch Pt. die meisten Sehnen nach angezeigten Lehrsätzen berechnet, hat, nicht etwa durch Vervielfältigung der Bogen von ganzen und halben Graden gesucht, so hat die geringe Unrichtigkeit bey diesen letztgenannten Sehnen, keine nachtheiliche Folgen.

13) Königsbergers Auszug aus Ptolemäus Werke: Epytoma Joannis de monte regio In almagestum prolomei Venedig 1496; auch mit lateinischen Lettern Bas. 1543; trägt die hieher gehörigen Lehren des Pt. auch im I. B. vor, die Sätze sind deutlicher abgetheilt, und ausgedruckt als beym Pt. selbst, sonst ist nichts beygefügt.

14) Menelaus hat im ersten Jahre Kaiser Trajans eine Bedeckung eines Fixsterns vom Monde beobachtet, die Prolem. VII B. 3. C. anführt. Riccioli Chronic. Astronomor. vor dem I. B. des Almag. Nou. nennt von ihm 6 Bücher de subtensis und 3 B. sphaericor. triangulor.

Die Bücher von den Sehnen kenne ich weiter nicht. Heilbronner Hist. Mathes. L. I. c. 13. §. 215, giebt die Erläuterung: Sie hätten die Methode enthalten den Canon der Sehnen zu verfertigen welche de Chales in vier oder fünf Sätzen verfasst habe.

Zur Geschichte wollte man wissen wie es Menelaus gemacht hat.

Wahr-

Wahrscheinlich hat es Ptolem. nach ihm im Hauptwerke eben so gemacht.

16) Die Bücher von den Kugeldreyecken, sagt Heilbronner a. a. O. fänden sich in Marii Mersenni Synopsi Mathematica lateinisch aus dem arabischen übersetzt.

Mersenns Vornahme ist Marinus auf dem Titel seines Buchs: Cogitata Physico Mathematica Paris 1644; 4.

17) Das Werk das H. anführt ist: Universae Geometriae mixtaeque Mathematicae Synopsis Par. 1644; 4. Es enthält, aus dem Euklid, Archimed, und andern alten Geometern die vornehmsten Sätze, ohne Beweise, auch so aus mechanischen und optischen Wissenschaften.

Im Anfange der Vorrede sagt M.: Wer diese Tractate mit sich auf dem Lande (ruri) herumtragen wolle, sich aller Theile der Mathematik zu erinnern, und die Sätze der Alten und Neuen zu citiren der dürfe nur auf den Rand oder auf eingelegte Blätter die Figuren zeichnen die er für nöthig hält, im Drucke haben sie ohne die grössten Kosten nicht können beygefügt werden. Eben deßwegen hat M. aus manchen Schriftstellern z. E. dem Pappus nur die Sätze ausgezogen die sich leicht ohne Figuren verstehen lassen.

Ich kannte von dieser Synopsis bisher nur den Titel, musste mir sie von der göttingischen

Bibliothek ausbitten, wo sie sich unter der bülowischen Sammlung befindet, und die erlangte Bekanntschaft, tröstete mich daß ich sie nicht selbst besitze.

18) Menelaus ist eben so geliefert wie die andern alten Geometer. Voran steht eine Vorrede, darinn: Hos Menelai libellos, cum ego in antiquis ex membrana codicibus reperissem, conatus sum eos, quoniam corruptissimum erat exemplar, emendare ac restituere, nec non quamplurimis tum necessariis tum argutis augere propositionibus . . .

Diese Worte führt Vossius de sc. math. cap. 23. §. 12, an als hätte Mersenn das geschrieben, und ohne Zweifel sagt dieses dem Vossius nach, Heilbronner a. a. O.

Indessen steht in der Aufschrift des zweyten dieser Bücher beym Mersenn: Ex traditione Maurolyci. Vor dem ersten und dritten, steht das nicht, wahrscheinlicher aber ist daß es nur fehlt, als daß diese beyden Bücher woanders her wären, da die Einrichtung bey ihnen völlig ist wie bey dem zweyten.

19) Ich glaube also die Worte gehören dem Maurolycus; unter den Werken des Abts von Messina die ich besitze, findet sich freylich Menelaus nicht.

20) In dieser Vorrede steht: Nadir arcus cuiuspiam esse rectam siue chordam quae duplo ipsius

ipsius arcus subtenditur; Sinum rectum alicuius arcus, esse dimidium ipsius nadir, seu chordae dupli eiusdem arcus. Vnde manifestum est, quod, quidquid Menelaus de ipsis nadir arcuum demonstrauit, idem de sinibus, et e contrario concludi potest.

Diese Bedeutung des Worts Nadir ist sonst unbekannt. Auch Vitalis in lex. math. giebt nur die astronomische an.

21) Noch wird in der Vorrede erwähnt: Tebit habe unterschiednes im Menelaus und Ptolemäus erläutert und ergänzt. Der Verf. der Vorrede, hat also vermuthlich eine arabische Uebersetzung des Menelaus gehabt, oder eine Uebersetzung aus dem arabischen. Das Wort Nadir, und der Gebrauch der Sinus statt der Sehnen, zeugen auch davon. In der Bedeutung kann Heilbronner sagen: Menelaus befinde sich bey dem Mersenn aus dem arabischen übersetzt.

22) Menelaus heisst in dieser Vorrede auch Mileus; Vossius muthmasst das sey aus falsch gelesener Abkürzung jenes Nahmens entstanden.

Peurbach.

23) In dem Buche dessen Titel I. Samml. 60 Abh. 141 angeführt ist, beschreibt P. drey gleiche Kreise, zweene um entgegengesetzte Enden eines Durchmessers des mittelsten. Ihre Durchschnitte mit dem Mittelsten, nebst des Durch-

messers Enden, begränzen Sechstheile des mittelsten, Er findet ferner Bogen von 30 Gr. 45 Gr. u. a.

24) Die Hälfte des Halbmessers, oder der Sinus von 30 Gr. heisst bey ihm sinus duarum kardagarum simul. So sind von 60; 45; 15; 75; 90 Graden, die Sinus, quatuor, trium, kardagarum, primae kardagae, 5; 6; kardagarum.

25) Also heisst beym P. Kardaga nichts anders als ein Bogen von 15 Graden. Der Zweifel den ich mir am angeführten Orte der 60 Abth. machte, wäre unterblieben, wenn ich diese Stelle genauer angesehen hätte. Damahls aber wollte ich nur die Einrichtung der Tafeln beschreiben, und dachte nicht an ihre Berechnung.

26) Indessen kommen doch so zu reden Ordnungen von Kardagen vor. P. sagt: Habitis igitur sinibus sex kardagarum minue sinum arcus 15 Gr. de sinu arcus 30 Gr. et residuum erit sinus kardagae secundae. Deinde subtrahe sinum duarum kardagarum hoc est arcus 30 Gr. a sinu arcus trium kardagarum, et remanebit sinus tertiae kardagae et ita de ceteris . . .

27) Das lässt sich so darstellen, die Sinus der 4 u. f. Kardagen nach dem Gesetze das P. hie vorschreibt; selbst nennt er sie nicht.

sin —	sin =	sin kardagae
15	0	1
30	15	2
45	30	3
60	45	4
75	60	5
90	75	6

28) Davon bemerkt P. ferner die Eigenschaft: Sinus rectus primae kardagae est sinus versus sextae; et sinus rectus secundae est sinus versus quintae etc. Item sinus rectus duarum kardagarum primarum scilicet primae et secundae est sinus versus duar. vltimar. scilicet primae et sextae ....

Ad inueniendum autem sinus minorum circuli portionum. Sinum sextae kardagae multiplica per sinum arcus 30 grad. et producti radix erit sinus arcus 7 grad. et dimidii ....

29) Dergleichen Vorschriften werden mehrere gegeben, die immer auf Sinus von Graden mit 30 oder 45 Minuten führen. Die letzten Worte sind: Eodem modo fit in vniuersis circuli portionibus vsque ad minutissimas eius portiones. Haec de mente Arzahelis.

30) Sinus sextae kardagae mit dem Sinus von 30 Gr. multiplicirt ist $= (1 - \cos 15^\circ) \cdot \frac{1}{2}$, allerdings das Quadrat des Sinus der Hälfte von 15 Graden (Trig. 19 S. 7. Zus.)

31) Da

31) Da dieses mit P. Regel den Sinus von $7\frac{1}{2}$ Gr. zu finden übereinstimmt, so habe ich den Sinus der sechsten Kardage, richtig in (27) nach dem Gesetze (26) angegeben.

32) Daß beym P. sinus versus eben die Bedeutung hat wie jetzo, belehren mich Stellen seiner Schrift.

33) So wäre sinus versus kardagae sextae $= 1 - \sqrt{(\cos 15°. (2 + \cos 15°))}$ das kann nicht sinus rectus kardagae primae seyn.

34) Die Rechnung in Zahlen bestätiget dieses $1 - \sin 75° = 0{,}0340742$; fällt zwischen die Sinus von 1 Gr. 57 und 58 M. das sind also Gränzen der sechsten Kardage.

Der Quersinus dieser Kardage fällt also zwischen 5791 und 5891 Zehnmilliontheilchen des Sinustotus.

Das ist doch gewiß nicht der Sinus der ersten Kardage, die ausdrücklich beym P. 15 Grad heisst.

35) Ferner ist der Sinus der sechsten Kardage mit dem von 30 Graden multiplicirt $=$ 0,0170371

$$20 + \log 0{,}0170371 = 18{,}2313956$$
$$\text{halbirt} = 9{,}1156978$$

giebt genau den Tafellogarithmen des Sinus von 7 Gr. 30 M. wie nach (30) seyn soll.

36) Al-

36) Also ist fehlerhaft was den Quersinus der Kardage betrifft; oder ich verstehe Peurbachen nicht recht.

Das Wort ist sicher arabisch wie ich in angeführter 60 Abh. schon geurtheilt habe.

37) Arzahel hat um das Jahr 1070 gelebt, und ist als Astronome bekannt. Daß Schriften von ihm gedruckt wären weiß ich nicht. Heilbronner Historia Matheseos nennt unter den Manuscripten von denen er Verzeichnisse gesammlet hat, mehrmahl Tafeln vom Arzahel, alle lateinisch.

38) Vielleicht ist also was P. beybringt die umständlichste bekannte Nachricht wie A. die Berechnung der Tafeln gelehrt Wie die Sinus vom halben, und vom ganzen Grade gefunden werden lehrt Peurbach doch nicht deutlich, es steckt bey ihm unter Eodem modo (29).

39) Deutlicher und umständlicher ist bey ihm, die darauf folgende Darstellung secundum sententiam Ptolemaei.

Regiomontan.

40) Nach dieser Darstellung folgt in dem (23) angezeigten Buche: Compositio tabularum sinuum rectorum per Ioannem de Regiomonte.

Ptolemäus habe den Durchmesser in 120 Theile getheilt, Arzahel in 300; freylich diese

Theile

Theile wiederum in Minuten und Secunden. Im Bogen seyen sie bey den Sinussen nur durch Viertheilsgrade gegangen, daher man sehr oft mit Beschwerlichkeit Proportionaltheile nehmen müsse. Dieserwegen habe R. neue Tafeln berechnet, durch alle einzelne Minuten, für den Sinustotus 6000 000.

41) Halbirung der Ptolemäischen Sehnen, gab zuerst die Sinustafel (I. Samml. 60 Abh. 137; IV) so bekam man Viertheilsgrade aus Pt. halben. Auch Arzahel scheint nicht genauer getheilt zu haben (29).

42) Daß Regiomontan auch kardagas nennt habe ich in nur erwähnter Abhandl. schon gesagt. Er giebt auch zuerst die Sinus aller Sechstheile des Quadranten, und nach der Regel aus des ganzen Bogens Quersinus, den Sinus des halben zu finden (Trigon. 19 S. 7 Zus.) berechnet er die Sinus aller Vielfachen von $3\frac{3}{4}$ Gr.

45) Ferner aus den Seiten des Zehnecks und Fünfecks die Sinus von 18 und von 36 Graden.

46) Er beweist besonders daß die Sinus von 18 und von 30 Gr. zusammen addirt den von 54 geben; welches sich leicht aus den Formeln für Zehneck und Fünfeck herleiten lässt. Man s. meine Anal. endl. Gr. 156 u. f.

Es ist auch cos 36 Gr. = sin 54 Gr.

46) Aus

46) Aus den beyden Vielecken, findet man also unmittelbar und durch Halbirungen, die Sinus

von	36	18	9	$4\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
die Ergänz.	54	72	81	$85\frac{1}{2}$	$87\frac{3}{4}$

47) Aus diesen Bogen und den Ergänzungen folgen durch Halbirungen wiederum andre; So aus 54 Gr.

	27	13; 30	6; 15
Ergänz.	63	76; 30	83; 45

Ferner aus 81 Gr.

	40; 30	20; 15
Ergänz.	49; 30	69; 45

48) Die Bogen die man so bekömmt, und die (40) zusammengeordnet, geben Bogen, die nach Unterschieden von 2 Gr. 15 M. fortgehn.

49) Nun findet R. die Seite des Funfzehnecks, oder die Sehne von 24 Gr. Sein Verfahren ist: Weil $24 = 54 - 30$, so ist der Sehne ihr Quadrat die Summe der Quadrate von sin 54 — sin 30 und von sintot — cos 54. Das Verfahren läßt sich wie er bemerkt, allgemein machen.

Die Hälfte dieser Sehne, ist der Sinus von 12 Graden, also folgende Sinus

	12	6	3	1; 30	45′
Ergänz.	78	84	87	88; 30	89; 15

Diese

Diese Bogen zu den vorigen geordnet sagt R. geben alle Bogen die durch 45 M. wachsen.

50) Nun beweist R. einen Satz der sich so ausdrucken lässt: Wenn drey Bogen, jeder kleiner als ein Quadrant, f; f + g; f + 2.g, heissen, so ist, sin (f + g) — sin f grösser als sin (f + 2.g) — sin (f + g).

Allgemein wie bekannt: Bey gleichem Wachsthume der Bogen von o bis zum Quadranten, wachsen die Sinus immer langsamer.

51) Nun ist die Frage, die Sinus von 15 M.; 1 Gr.; 1 Gr. 30 M. zu finden.

52) Zu dieser Absicht zeichnet R. einen Bogen der 1 Gr. 30 M. bedeutet, also aus sechs Theilen jeder 15 M. besteht; nebst dem Sinus jedes Vielfachen dieser 15 M.

53) Er hat schon berechnet die Sinus von 45 M. und 1 Gr. 30 M. (49).

54) Vermöge (50) ist $\frac{1}{3}$.(sin 1° 30′ — sin 45′) kleiner als sin 1° — sin 45′.

Nähmlich wenn 45 M. um 15 M. wächst, 1 Gr. zu werden, so wächst sin 45′ um eine gewisse Grösse;

Wenn nun 45 M. um 3. 15 M. wächst 1 Gr. 30 M. zu werden, so wächst eben der Sinus um etwas geringers als um dreymahl die gewisse Grösse.

55) Eben so ist $\frac{1}{3}$ sin 45 M. grösser als sin 45 M. — sin 30 M. folglich noch viel mehr grösser als sin 1° — sin 41 M.

Wenn

Wenn nähmlich die Bogen immer um 15 M. wachsen, so wachsen die Sinus immer weniger und weniger.

56) Nun findet R. nach vorangezeigtem Verfahren, die Rechnung selbst hat er nicht dargestellt; für den Sinustotus = 600000000

sin 45 M.	=	7853773
dazu das Drittheil	=	2617924
giebt	=	10471697

grösser als sin 1 Grad (55).

57) Ferner hatte R. berechnet

sin 1 Gr. 30 M.	=	15706169
abgezogen sin 45 M.	=	7853773
lässt	=	7852396
davon das Drittheil	=	2617465
dazu addirt sin 45 M.	=	7853773
giebt	=	10471238

kleiner als sin 1 Grad (54).

58) So hat man Gränzen zwischen die sin 1 Gr. fällt (56; 57).

59) Zieht man das Quadrat der (56) gefundenen Zahl vom Quadrate des Halbmessers ab, so ist die Wurzel daraus, kleiner als cos 1°; weil die gefundene Zahl grösser als der Sinus ist.

Die Wurzel ist 59990813.

60) Vom Sinustotus abgezogen, lässt sie 91387, mehr als rad — cos 1° lassen würde, also mehr als Quersinus 1°.

61) Folglich ist 300000000. 91387 grösser als das Quadrat des Sinus von 30 Minuten. (Trig. 19 S. 7 Zus.)

62) Die Wurzel aus diesem Producte ist = 5236044; grösser als sin 30 M.

63) Auch die Quadratwurzel des Ueberschusses vom Quadrate des Halbmessers über die Zahl (61) kleiner als cos 30′ oder kleiner als sin 89° 30′.

Diese Wurzel ist = 59977152.

64) So hat man aus (56) Zahlen, grösser als Sinus, und kleiner als Cosinus von 30 M.

65) Ein ähnliches Verfahren giebt aus (57) cos 1° kleiner als 599908621.

66) Die Zahl vom Halbmesser abgezogen lässt 91379; kleiner als Quersinus 1°.

67) Mit der Zahl (66) verfahren, wie mit der (60) kömmt 5235815 kleiner als sin 30 M.

68) Auch 599977155 grösser als sin 89° 30′.

69) So hat man cos 30 M. innerhalb sehr enger Gränzen (63; 68).

70) Und sin 30′ fällt zwischen die Gränzen (62; 67).

71) R.

71) R. erinnert, er habe den Halbmesser wie in (56) angenommen, die Rechnung schärfer zu führen; bey den Zahlen der Tafeln aber könne man die beyden niedrigsten Stellen weglassen; Also sind des Sinus von 30′ Gränzen

52360 und
52358

72) Folglich setze man ihn ohne nachtheilichen Fehler = 52359.

73) Daraus sagt R. finde man ferner die Sinus von

15 M	=	26180
1 Gr	=	104715
89 Gr	=	5999086
89 Gr 45′	=	5999943

74) Nun lassen sich nach vorhergehenden Lehren die Sinus durch alle Viertheilsgrade berechnen.

75) Ein ander Verfahren lehrt R. so: Habes antea, omnium arcuum per tres quartas gradus vnius crescentium sinus, eos ordinabis vt debet (man lese: decet) differentiasque omnium sibi proximorum nota, quarum quaelibet 45 minutis mediis correspondebit, quamlibet earum, quemadmodum ab initio ad finem continue decrescunt, ita secabis in partes quod ipsae sectae quoque vniformitatem in decrescendo seruent quod facile fiet, dum mediam earum semper adaequatam differentiae tertiam constitues.

76) Diese Vorschrift verstehe ich nicht. Soviel ist deutlich: Man hat nach R. sin m. 45 M. und sin (m + 1). 45 M. Dieser beyden Unterschied soll man nicht schlechthin in drey gleiche theilen, sondern bemerken daß die Sinus der Vielfachen von 45 M. durch m; m + $\frac{1}{3}$; m + $\frac{2}{3}$; m + 1; abnehmendes Wachsthum haben, der Sinus vom ersten Bogen bis zum zweyten mehr wächst als vom zweyten bis zum dritten, und zwischen diesen beyden mehr als vom dritten bis zum vierten. Wie aber R. dieses in Rechnung bringt, hätte er wohl mit einem Exempel erläutern mögen.

77) Zu unsern Zeiten würde man sich hie etwa durch zweyte Differenzen helfen (Anal. endl. Gr. 725) wie die Astronomen interpoliren. Wahrscheinlich hat R. einen ähnlichen Kunstgriff gebraucht.

78) Nachdem man so die Sinus per quindecim minuta authorum gefunden hat, erhält man aus ihnen die von fünf zu fünf Minuten, auch mit Beobachtung des Gesetzes der Abnahme. Und auf ähnliche Art ergänzt man die Tafel durch alle einzelne Minuten.

79) Das letzte geschieht natürlich durch Theilung der Differenzen in fünf. R. erinnert das nicht ausdrücklich, wie er überhaupt hie kürzer ist als er für seine Zeiten hätte seyn sollen.

80) Di-

80) Diligens differentiarum notator atque iuxta proportionem decremento (vielleicht decrementi) earum sector, sagt R. werde die Sinus so genau finden als nach den vorigen Lehrsätzen. Er habe sie meist auf beyde Arten gesucht und keinen Zwist gefunden. Bey den (damahls) gewöhnlichen Tafeln die durch Viertheilsgrade gingen, erhalte man nicht diese Genauigkeit, eben weil die Differenzen ungleich abnehmen.

81) Die Elementargeometrie, lehrt allgemein keine andere Theilung von Bogen als Halbiren. Nur den Quadranten theilt man vermittelst des gleichseitigen Dreyecks in drey gleiche Theile. Bey Bogen deren Sehnen oder Sinus man aus der Elementargeometrie weiß, führen Halbirungen, so weit man sie auch fortsetzt, nie auf einzelne Grade. Die Elementargeometrie kann also nichts weiter thun als Gränzen angeben, zwischen welche der Sinus eines Grades fällt. Wieviel Arbeit solches den ältern Berechnern der Tafeln gekostet hat, zeigt das Vorhergehende.

82) Ferner, auch den Sinus eines Grades angenommen, führen Halbirungen des Grades auf keine kleinere Zahl ganzer Minuten als 15. Selbst liesse sich hie den Sinus von 1 M. zu finden, nicht so was machen wie für sin 1° (58) denn fortgesetzte Halbirungen führten auf 7′ 30″; 3′ 45″; und nun gäbe die nächste, Tertien.

Es war also nicht Bequemlichkeit sondern Nothwendigkeit, die Sinus einzelner Minuten, durch Differenzen zu finden.

Uebereilte Behauptung des Joh. Dee.

83) Parallaticae Commentationis Praxeosque Nucleus quidam Authore Joanne Dee Londinensi; Lond. 1573. hat auf dem Blatte C. jjjj; folgenden Satz, aus dem Regiomontan:

Si data fuerit differentia duorum arcuum, cum proportione sinuum suorum, vterque eorum cognitus habetur.

84) Offenbahr ist dieses der 14 Satz meiner Trigonometrie, nur der Winkel Unterschied als gegeben angenommen, nicht wie in der trigonometrischen Aufgabe auf welche er angewandt wird die Summe.

85) Ein Paar unbekannte Winkel sind β; γ; ihrer Sinusse Verhältniß ist gegeben $=$ b : c, auch ihr Unterschied $\delta = \beta - \gamma$ so ist nach angeführtem Satze;

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \frac{b+c}{b-c} \cdot \text{ tang } \tfrac{1}{2}\delta.$$

86) Wenn man keine Tangenten brauchen wollte oder könnte wäre doch von $\frac{1}{2}\delta$; Sinus und Cosinus gegeben. Allemahl also die Grösse rechter Hand gegeben. Sie heisse $=$ m; so ist $\frac{\text{sin } \frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\text{cos } \frac{1}{2}(\beta+\gamma)} = m.$

Daraus

Daraus $\sin \frac{1}{2}(\beta+\gamma) = \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}}$.

87) Dee giebt eine sehr weitläuftige Auflösung, wo er nur Sinus braucht. Ihren Grund wird man allgemein aus (86) sehn. Er findet auch den Sinus der Summe, und für ein Exempel stimmt seine Rechnung genau mit dem überein was mir die gemeine trigonometrische (85) giebt.

88) Bey dieser Aufgabe setzt Dee; als Appendix 1. Hinc Peurbachii votis satisfacere possumus, qui 30 minutorum chordam veraciter non haberi querebatur in fine libelli sui de sinubus et chordis. Quae (inquit ille) si haberetur omnes chordae arcuum aliorum veraciter essent notae.

89) Die Stelle findet sich am Ende des Buches davon ich 23 u. f. geredet habe. Ich sehe nicht wie D. der Klage abhilft. Chorden, oder auch Sinus von 45 M. und von 90 M. hatten Peurbach und Regiomontan durch Halbirungen (53) keinen Sinus oder Sehne zwischen diesen Bogen. Was wären also ein Paar unbekannte Winkel, deren Unterschied und Verhältnisse der Sinusse gegeben wären, die Summe 30 Minuten?

Eine Bemerkung wenn die Seite des Zehnecks durch analytische Trigonometrie gesucht würde.

90) Ich bringe diese hieher, weil die Sehne von 36 Gr. unter die gehört, welche sich durch gemeine Geometrie leicht finden lassen, und vom Ptolemäus im I. B. bey Verfertigung der Tafeln vorausgesetzt wird. Was Euklid davon sagt, und wie in meinen Anfangsgr. der Analys. endl. Gr. 156 §. gelehrt wird wollte ich nicht abschreiben und so schien es mir am besten hie eine Kleinigkeit anzuhenken, die doch einem angehenden Analysten Schwürigkeit scheinen möchte.

91) Die Seite des Zehnecks zwischen den Halbmessern welche sie begränzen, giebt ein gleichschenklichtes Dreyeck, wo jeder Winkel an der Grundlinie noch einmahl so groß ist als der an der Spitze; Dieses Dreyeck ist das einzige bey dem solches Verhalten der Winkel statt findet.

92) Dergleichen Dreyeck zu machen lehrt Euklid IV. B. 10 Satz, und leitet daraus Verzeichnungen des Fünfecks her. Seine Vorschriften sind etwas weitläuftig daher zeigt Clavius in s. Commentarius wie man nach dem Ptolemäus bequem die Seite des Zehnecks und des Fünfecks auf einmahl findet. Ohngefähr wie in meiner Analys. endl. Gr. 159 §.

In

In Euklids XI. B. 10 u. f. S. kommen wiederum Zehneck und Fünfeck vor. Die Veranlassung ist, weil des Dodecaeders Seitenflächen Fünfecke sind.

93) Nach (91) könnte man auf folgende Rechnung verfallen: Eines Dreyecks gleiche Schenkel seyen jeder $= 1$, machen unter sich den Winkel $= \lambda$; und mit der Grundlinie, die x heissen mag den Winkel $= \varkappa$.

Ferner sey $2.\lambda = \varkappa$; also $\sin \varkappa = 2. \sin \lambda. \cos \lambda$.

Allgemein ist $\cos \lambda = 1 - \frac{x^2}{2}$ (Trigon. 20 Satz 33).

Auch allgemein $x : 1 = \sin \lambda ; \sin \varkappa$. Hie, wird die letzte Verhältniß $= 1 : 2 \cos \lambda$ also ist

94) $x : 1 = 1 : 2 - x^2$; Folglich
$2x - x^3 = 1$.

95) Nun sollte x die Seite des Zehnecks seyn. Die ist nicht durch eine cubische Gleichung gegeben, weil man sie durch euklidische Geometrie findet.

96) Auch hat man für sie, eine quadratische Gleichung (Anal. endl. Gr. 156) in der allerdings x noch was anders bedeutet als die Seite des Zehnecks, aber doch überhaupt nur zweene Werthe hat. Was sind also hie die drey Werthe?

97) Man sieht sogleich, daß ein Werth $= 1$ ist, weil $2 - 1 = 1$;
Also lässt sich $x^3 - 2.x + 1$ mit $x - 1$ dividiren (Anal. endl. Gr. 226). Der Quotient ist $x^2 + x - 1$; dieser $= 0$ gesetzt, giebt die Gleichung für die Seite des Zehnecks (96).

98) Woher kömmt der Werth $= 1$?

Man denkt freylich an ein Dreyeck wo der Winkel an der Grundlinie noch einmahl so groß ist als der an der Spitze; Aber die Rechnung (93) wird daraus geführt daß $x : 1$ sich verhalten soll, wie der Sinus eines einfachen Winkels zum Sinus eines doppelten; jener Sinus gehört dem Winkel an der Spitze, dieser, dem Winkel an der Grundlinie.

99) Kann es also an der Spitze einen Winkel geben der mit seinem doppelten einerley Sinus hat, so kann der Winkel an der Grundlinie, den Sinus des doppelten Winkels an der Spitze haben, und doch selbst nur dem einfachen Winkel an der Spitze gleich seyn.

Auch ist allsdann $\sin \lambda : \sin \varkappa$ die Verhältniß der Gleichheit, folglich $x = 1$.

100) Das findet nun statt wenn der Winkel an der Spitze $= 60$ Grad ist. Sein doppeltes 120 Grad hat mit ihm einerley Sinus, und der Winkel an der Grundlinie, kann — nicht 2. 60 Grad seyn, wenn es überhaupt ein Dreyeck mit jenem Winkel an der Spitze geben soll,

soll, — aber 1. 60 Grad seyn und doch den Sinus des doppelten Winkels an der Spitze haben.

Da ist cos 60 Grad $= \frac{1}{2}$; und die Verhältniß 1 : 2. cos $\lambda = 1 : 1$.

101) Weil also in die Rechnung nicht der doppelte Winkel selbst, sondern nur das doppelte Sinus gebracht wird, so enthält die Gleichung (94) auch: Grundlinie der Seite gleich, das gleichseitige Dreyeck.

102) Dieses Beyspiel gehört zu der allgemeinen Erinnerung daß eine algebraische Gleichung oft Fragen beantwortet, an welche der Fragende nicht gedacht hat, und daß man daher bey seiner Frage ihren Begriff und ihren Ausdruck deutlich überdenken muß wenn man nicht unerwartete Antworten bekommen will.

103) Ob sich durch analytische Trigonometrie die Seite des Zehnecks ohne diese Vieldeutigkeit finden liesse untersuche ich nicht, weil man sie so leicht auf andre Art findet.

29.

Wie trigonometrische Tafeln durch Auflösung höherer Gleichungen sind berechnet worden.

1) Wenn man von 30 Graden anfängt, da der Sinus so leicht und einfach gegeben ist, so kömmt man auf 1 Grad nicht anders als durch Theilung des Bogens von 15 Graden, in 3 und dann in 5 Theile. Das leistet die Elementargeometrie nicht, diese Theilungen führen auf Gleichungen, wie 24; 25; 26. Abh. sind betrachtet worden. Eben solche Theilungen sind nöthig vom Grade auf einzelne Minuten, von der Minute auf einzelne Secunden zu kommen.

2) Die welche solche Theilungen anwandten haben natürlich nicht alle einerley Verfahren gebraucht. Wer jedes eigne Verhalten wollte kennen lernen, müsste völlig durchgehn, was von Jedem vorhanden ist, und fände vielleicht nicht allemahl befriedigenden Unterricht. Ich schränke mich hie auf des Pitiscus Verfahren ein, das er im II. B. seiner Trigonometrie beschrieben hat. (*Barthol. Pitisci* Trigonometria; Francof. 1612; edit. 3. Man s. dieser geometrischen Abhandlungen I. Samml. 60 Abhandl. 154. S.)

3) In

3) In diesem Buche, leitet er aus dem Sinustotus, alle Sinus vermittelst neun Sätze her, die ich hie in analytischen Formeln ausdrucke, und ihre Beweise angeben will. Beym Pitiscus sind sie XXX u. f. Absätze. Den Sinustotus setze ich wie gewöhnlich = 1.

4) I. S. $\cos\alpha = \sqrt{(1-(\sin\alpha)^2)}$ (Pit. XXX).

5) II. S. $2.\sin\alpha.\cos\alpha = \sin 2.\alpha$ (Pit. XXXI).

6) III. S. Sehne $3\beta =$
$$\frac{(\text{Sehne } 2.\beta)^2 - (\text{Sehne } \beta)^2}{\text{Sehne } \beta}$$
oder
$= 2.(1-(\text{Sehne } \beta)^2).\ \text{Sehne } \beta + \text{Sehne } \beta$ (Pit. XXXII).

Beweis der ersten Formel.

In 26 Abh. (67) ist
$(\text{Sehn } 2\beta)^2 = 4.(\text{Sehn } \beta)^2 - (\text{Sehn } \beta)^4$
Davon $(\text{Sehne } \beta)^2$ abgezogen, und den Rest mit Sehne β dividirt, kömmt
$3\ \text{Sehne } \beta - (\text{Sehne } \beta)^3$ und das ist = Sehne 3β (26 Abh. 68) Die zweyte Formel ist offenbahr die 26 Abh. 68.

7) IV. Satz (Pit. XXXIII)
$$\text{Sehne } 5\beta = \frac{(\text{Sehn } 3\beta)^2 - (\text{Sehn } 2\beta)^2}{\text{Sehn } \beta}$$

Beweis.

Beweis. Es sey Sehne $\beta = c$ so ist (6) (Sehn $3\beta)^2 = 9.c^2 - 6.c^4 + c^6$; Zieht man davon $4c^2 - c^4$ ab, als das Quadrat von Sehne 2β; (6). Und dividirt man den Rest mit c; so kömmt $c^5 - 5c^3 + 5c$, die verlangte Sehne des fünffachen Bogens (26 Abh. 70).

8) V. Satz (Pit. XXXIV)

$\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{((\sin \gamma)^2 + (1 - \cos \gamma)^2)}$

auch

$(\text{Sehn } \frac{1}{2}\gamma)^2 = 2 - \text{Sehn } (180° - \gamma)$

auch

$(\text{Sehn } \gamma)^2 = 4.(\text{Sehn } \frac{1}{2}\gamma)^2 - (\text{Sehn } \frac{1}{2}\gamma)^4$.

Beweis. In der ersten Formel ist die Grösse unter dem Wurzelzeichen $= 2.(1 - \cos \gamma)$. Also ist diese Formel meiner Trigonom. 19 S. 7. Zus.

Für die zweyte Formel;

Das Quadrat einer Sehne, ist die Summe der Quadrate des Sinus und des Quersinus;

Das Quadrat der Sehne von $\frac{1}{2}\gamma$; ist also

$= (\sin \frac{1}{2}\gamma)^2 + (1 - \cos \frac{1}{2}\gamma)^2$

$= 2 - 2.\cos \frac{1}{2}\gamma = 2 - \text{Sehne } (180° - \gamma)$.

Die dritte Formel.

Ist 26 Abhandl. 67;

Pitiscus, sagt diese Formel sey ex mente Iusti Byrgii, und rechnet sie zur Algebra.

9) VI.

9) VI. Satz. Wenn eines Bogens Sehne gegeben ist, die Sehne des Drittheils dieses Bogens zu finden. Pit. XXXV.

Pitisci Vorschrift ist diese: Man nehme etwas an, ein wenig grösser als $\frac{1}{3}$ der gegebenen Sehne. Dieses Angenommne, sehe man als Sehne eines Bogens an, und suche daraus die Sehne des dreyfachen Bogens, nach dem III. Satze (6). Findet sich so die gegebne Sehne, so hat man richtig angenommen, Sonst muß man die Annahme durch die Regel Falsi verbessern.

10) Pit. Exempel ist folgendes: Für den Sinustotus 10000000 ist die Sehne von 30 Graden = 5176385;

Ihr Drittheil = 1725460

Etwas vergrössert = 1730000 = p

oder = 174.... = q

oder = 175.... = r

Aus der ersten dieser drey Voraussetzungen findet sich

des dreyfachen Bogens Sehne = 5138223

die gegebene Sehne = 5176381

die Vorauss. zu wenig = 38158

Aus der zweyten Voraussetzung folgt Sehne

des dreyfachen Bogens = 5167320

Sie giebt also zu wenig = 9061

11) Nun sagt P. nach den Vorschriften der Regel Falsi soll man so verfahren. Man multipli-

tiplicire, creuzweis, das erste zu wenig durch die zweyte Voraussetzung, das zweyte zu wenig, durch die erste, und weil beydes, zu wenig ist, ziehe man die Producte von einander ab, das giebt einen Dividendus; nähmlich

q. 38158 = 66394920000
p. 9061 = 1567553....
Dividend = 5071939000

Ferner ziehe man das eine zu wenig von dem andern ab, das gebe den Divisor;

38158 — 9061 = 29097

Der Quotient ist = 1743114; Mit diesem verfahre man, wie nach der ersten oder zweyten Voraussetzung, so bekömmt man etwas sehr geringes zu wenig, nähmlich 3;

Man nehme also eine Zahl etwas grösser als diesen Quotienten, nähmlich 1743115 und wiederhohle die Arbeit wie bey vorigen Voraussetzungen, so findet man die Sehne des Bogens, dreymahl so groß als der dem 1743115 gehört, genau so groß als die anfangs gegebne 5176381; Dieser letzte Zifer ist etwas zu groß, also auch der Sehne 1743115 letzte Zifer etwas zu groß, doch der Wahrheit näher als 1743114; wie die Rechnung darthut, weil sich zwischen der Sehne die aus jener berechnet wird und der gegebenen kein merklicher Unterschied zeigt.

12) P. erinnert noch die Regel Falsi gebe die Wahrheit wenigstens in noch einmahl soviel Stel-

Stellen, als eine oder die andre Voraussetzung geltende Zifern hat, die Nullen (am Ende versteht sich wohl,) nicht mit gezählt. So hatte im Exempel, jede Voraussetzung drey geltende Zifern, 173; 174; daher giebt die Regel Falsi sechs Zifern richtig 174311. Nähme man also zur ersten Voraussetzung 174311400000000 zur andern 174311 5 mit eben soviel Nullen, so käme die Sehne genau richtig für einen Halbmesser von Hundert Billionen oder eine Einheit der 14 Ordnung henkte man ferner an die so gefundene Sehne wiederum vierzehn Nullen und nähme die niedrigste bedeutende Zifer für eine Voraussetzung kleiner, für die andre grösser, so fände man die Sehne für den Sinustotus zehntausend Quadrillionen, oder eine Einheit der 28 Ordnung; u. s w.

13) Zu diesem Gebrauche, müsste man von der Regel Falsi eine vollständigere Kenntniß besitzen als ich in der Fortsetzung der Rechenkunst, am Anf. des XIII Cap. gegeben habe und als überhaupt jetzo wohl nöthig ist. Man sieht daß P. sie zu Näherungen anwendet, wie man jetzo auf mehrerley Arten bey den Gleichungen erhält (Meine Analys. endl. Gr. 321.) Pitiscus braucht die Regel Falsi nur, die Algebra zu vermeiden, wie ich schon in der I. Samml. dieser geom. Abhandl. 60 Abh. 154 erwähnt habe. Es kömmt offenbahr hie nur auf einen Nahmen an.

14) Auch fügt P. sogleich dieser Rechnung eine andre per Algebram bey. Die Regel ist: Subtensam datam divide per 3. l. — 1. c. Quotus erit subtensa tertiae partis arcus dati.

Ratio Regulae ist ihm: Subtensa cuiuscunque arcus aequatur tribus radicibus minus vno cubo, qualium radicum vna est subtensa tertiae partis illius arcus.

15) Nähmlich, wenn des ganzen Bogens Sehne = b; des dritten Theils = x; ist $3.x - x^3 = b$ (6);

Also bedeutet beym Pitiscus l die gesuchte Sehne und c ihren Würfel.

16) Pitiscus Ausdruck kann nicht heissen $\frac{b}{3.x - x^3}$ sey die gesuchte Sehne, denn dieser Quotient ist = 1; Er versteht also unter Dividiren, hie was anders; die Auflösung der cubischen Gleichung deren Wurzel x ist. Er trägt sie freylich ganz anders vor als man jetzo gewohnt ist.

17) VII Satz; Wenn eines Bogens Sehne gegeben ist, die Sehne des fünften Theils davon zu finden (Pit. XXVI.)

Auch hie braucht P. einmahl die Regel Falsi, und dann das algebraische Verfahren, das er wie vorhin, Dividiren nennt, nach unsern Ausdrückungen die Gleichung $x^5 - 5.x^3 + 5.x = b$ (7) aufzulösen.

18)

18) Zur Auflösung beyder Gleichungen, bereitet den Weg, daß die Sehne des dritten Theils grösser als $\frac{1}{3}$; die Sehne des fünften Theils, grösser als $\frac{1}{5}$ der Sehne des ganzen ist.

Wenn c des ganzen Bogens Sehne ist, x die Sehne von $\frac{1}{m}$ dieses Bogens, so ist nach geom. Abh. I. Samml. 29 Abh. $m.x+c$ grösser als $2.c$ also x grösser als $\frac{1}{m}.c$.

19) Man setze also $x=\frac{1}{3}b+p$; So ist für (15)
$o=-\frac{1}{27}.b^3+(3-\frac{1}{3}b^2)\ p+b.\ p^2+p^3$.

20) Und weil b ein kleiner Bruch ist dessen höhere Potenzen wenig beträchtlich sind, hat man beynahe $p=\frac{b^3}{27.(3-\frac{1}{3}b^2)}$.

21) Will man die Näherung weiter treiben, so setze man in der Gleichung (19)
$p=\frac{b^3}{27.(3-\frac{1}{3}.b^2)}+q$; aus der Gleichung die man solchergestalt bekömmt suche man q so daß man wiederum das Quadrat und den Würfel davon wegläßt.

Und so findet man nach Anal. endl. Grössen 321. §. das Gesuchte so genau als man will.

22) Eben so für (17) setze man $x=\frac{1}{5}b+p$, so erhält man eine Gleichung in welcher die

Grösse p welche man sucht ein kleiner Bruch ist, da man allsdann verfährt wie bey der cubischen Gleichung ist gewiesen worden.

23) Weil es allgemein für x, in (15) drey Werthe giebt, und in (17) fünf (27. Abh.) so kommen auch soviel Werthe für p in (20; 22;)

Man verlangt aber das x welches die Sehne von $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{5}$ des bestimmten Bogens ist, dessen Sehne gegeben wird, natürlich, des kleinsten Bogens welcher diese gegebene Sehne hat.

Diese verlangte Sehne nun, ist ein wenig grösser als $\frac{1}{3}$ b; die andern x; sind mehr von $\frac{1}{3}$ b unterschieden.

Also bestimmt man das verlangte p eben dadurch, daß es ein kleiner Bruch seyn soll, dessen höhere Potenzen nicht sehr beträchtlich sind.

24) Uebrigens ist klar daß man nach der 27 Abh. Gleichungen zwischen Sehne des einfachen und des siebenfachen, neunfachen, eilffachen, dreyzehnfachen Bogens u. s. w. finden kann, und wenn man aus einer solchen Gleichung die Sehne des einfachen sucht, das soviel ist als einen Bogen in 7; 9; 11; 13 ... Theile theilen.

Dieses erinnert Pitiscus bey seinem VII Satze (17).

25) VIII. Satz (Pit. XXXVII.)

$\sin(\delta \pm \varepsilon) = \sin\delta.\cos\varepsilon \pm \cos\delta.\sin\varepsilon.$

26)

26) IX. Satz (Pit. XXXVIII)

$\cos(\delta \mp \varepsilon) = \cos\delta.\cos\varepsilon \mp \sin\delta.\sin\varepsilon.$

27) Aus diesen neun Sätzen, nun, oder Aufgaben, wie sie Pitiscus nennt, hat er Sehnen und Sinus für einen Sinustotus berechnet, der 1 mit 25 Nullen ist. Er giebt sie XXXIX an, ich erzähle hie nur die Bogen.

28) Bogen zu denen die Sehnen berechnet sind

Grade	60	30	10	2	1
Minuten	20	10	2	1	
Secunden	20	10	2		

29) Hälften dieser Bogen, deren Sinus also die Hälften der gefundenen Sehnen sind

Grade	30	15	5	1
Minuten	30	10	5	1
Secunden	30	10	5	1

30) Aus (29) lassen sich offenbahr vermöge vorhin angeführten Sätze, die Sinus aller Bogen im Quadranten berechnen, selbst wenn man wollte durch alle einzelne Secunden.

31) Begreiflich muß man die Sinus aus denen man andre herleitet, auf sehr viel Zifern richtig haben, weil die hergeleiteten auf weniger richtig sind, wie aus der Decimalrechnung erhellt. (Arithm. III. C. 13. Trigon. 19 Satz 2. Zus.)

32) Noch lehrt Pitiscus Vortheile; Als: XXXX Art.

$\sin(60° + \eta) - \sin(60° - \eta) = \sin \eta$

Folgt aus (25) weil $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

Für die Tangenten.

33) $\cot \eta - \tang \eta = 2 \cdot \cot 2 \cdot \eta$ (Pit. XLIII).

Beweis

$$\frac{\cos \eta}{\sin \eta} - \frac{\sin \eta}{\cos \eta} = \frac{\cos \eta^2 - \sin \eta^2}{\sin \eta \cdot \cos \eta}$$

das ist (Trigonometrie 19 Satz 5. Zusatz) $=$

$$\frac{\cos 2 \cdot \eta}{\frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot \eta}.$$

34) $\tang(45° + \frac{1}{2}\varkappa) - \tang(45° - \frac{1}{2}\varkappa) = 2 \cdot \tang \varkappa$ (Pit. eben das. Appendix.)

Bew. $\tang(45° + \frac{1}{2}\varkappa) = \cot(45° - \frac{1}{2}\varkappa)$ Man setze also in (33) $\eta = 45° - \frac{1}{2}\varkappa$.

35) Wenn ein paar Bogen zusammen 90 Grad machen so ist die Secante ihres Unterschiedes, weniger des Unterschiedes Tangente, so groß als die Tangente des kleinern Bogens (Pit. XLIV).

Bew. Der grössere Bogen sey $= 45° + \varkappa$ der kleinere $= 45° - \varkappa$; also der Unterschied $= 2 \cdot \varkappa$

$$\sec 2 \cdot \varkappa - \tang 2 \cdot \varkappa = \frac{1 - \sin 2\varkappa}{\cos 2\varkappa}.$$

In diesem Ausdrucke ist der Zähler = $\sin x^2 + \cos x^2 - 2.\sin x.\cos x = (\cos x - \sin x)^2$.

Der Nenner = $\cos x^2 - \sin x^2$ (Trig. 19 S. 5. Zus.) = $(\cos x + \sin x).(\cos x - \sin x)$

Folglich der Ausdruck = $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{1 - \tang x}{1 + \tang x} = \tang (45° - x)$ (Trigon. 19 S. 4. Zus.)

36) Auch ist in (35) die Summe der Secante und der Tangente des Unterschiedes, so groß als die Tangente des grössern der beyden Bogen. (Pit. XLV)

Bew. Die Summe ist = $\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$

Der Zähler = $(\cos x + \sin x)^2$; also die Summe = $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \tang (45° + x)$

37) Für dem Bogen $2.x$ ist $45° - x$ die Hälfte seiner Ergänzung, und $45° + x$, die Summe, von ihm und der Hälfte seiner Ergänzung. Also

Eines Bogens Secante, weniger seiner Tangente, ist die Tangente der Hälfte seiner Ergänzung.

Eines Bogens Secante und Tangente zusammen addirt, giebt die Tangente der Sum-

me des Bogens und der Hälfte seiner Ergänzung.

So druckt Pitiscus diese Sätze ebenfalls aus.

38) Im XXI. Art. erinnert er daß Bogen die zusammen den Halbkreis ausmachen, einerley Sinus haben. Bogen über 90 Grad, aber haben keine Tangenten und Secanten, weil die Linie welche den Bogen an seinem Anfange berührt, von dem Halbmesser der durch das Ende geht, wenn man ihn verlängert nicht geschnitten wird.

39) Pitiscus dachte nicht an die Verlängerung rückwärts, und verneinte Tangenten. Er hätte eben so, einem Bogen über den Quadranten, Cosinus abgesprochen, weil diesem Bogen nichts zum Quadranten fehlt.

40) Zur Berechnung der trigonometrischen Tafeln reicht also die Elementargeometrie nicht zu; man muß für Drittheile und Fünftheile von Bogen rechnen, welches ein alter Vers für die Eintheilung des Quadranten in Grade so ausdruckt:

In tres, in binas, in tres, in quinque secato.

Die erste Theilung des Quadranten in drey Theile, jeder = 30 Gr. läßt sich durch das gleichseitige Dreyeck bewerkstelligen, oder welches eben soviel ist, durch den Halbmesser als Sehne von 60 Graden.

Diese

Diese Drittheile halbirt, geben Bogen von 15 Graden.

Und nun, ein solcher Bogen in drey Theile getheilt, ferner sein Drittheil in fünf Theile führt auf den einzelnen Grad.

41) Die Gleichungen vom dritten und fünften Grade, würden sich durch wiederhohlte Versuche auflösen lassen, da man doch weiß was man zuerst der Wahrheit nahe annehmen muß (19; 22). Die Algebra giebt nur Vorschriften diese Versuche ordentlicher und bequemer anzustellen, die Arbeit dabey abzukürzen. So wird begreiflich, wie selbst die ältern Berechner solcher Tafeln, mit viel Arbeit etwas leisten konnten, das man nach dem leichter und dabey schärfer bewerkstelligen lernte.

42) Unterschiedne Lehrsätze dienen noch die Arbeit zu vermindern; So erinnert P. wenn man von sechszig Graden, welche es auch seyn mögen die Sinus hat, lassen sich die Sinus der übrigen dreyssig nur durch Addiren und Subtrahiren finden, nach (32).

43) Bey Pitisci Thesauro Mathematico finden sich Principia sinuum; (Meine geom. Abh. I. Samml. 60 Abh. 162) Sehnen eben der Bogen die ich (28) erzählt habe, mit noch einigen andern, und Darstellung der Rechnung wie P. sie gefunden.

Vorschriften zu Berechnung des trigonometrischen Canons aus einem Buche für das vormahlige göttingische Gymnasium.

44) *Henrici Tollii* Propaedia Mathematica ... in usum studiosae juventutis; ist zu Göttingen 1681; mit Justi a Dransfeld Vorrede herausgekommen, 104 Octavs. Blosse Erklärungen, Lehrsätze und Aufgaben, aus Arithmetik Geometrie und Trigonometrie. Bey meinem Exemplare sind keine Figuren, ob sich gleich natürlicher Weise die geometrischen Lehren auf Figuren beziehen. Vor der Trigonometrie stehn Problemata de sinuum magnitudine invenienda, darunter: Sinus von Summen, Unterschieden, Doppelten zu finden, auch der Satz (32).

Zur Berechnung des Canons, sollen erst die Sinus von 45; 30; 18; 36; Graden gefunden werden; Aus diesen, durch Halbirungen und Ergänzungen die übrigen.

Daß man ohne Theilung in drey und fünf, auf einzelne Grade nicht kömmt, hat der Verf. nicht bedacht, Er müsste sich da, wie er sonst thut durch Proportionaltheile helfen.

Blosse Lehren und Ausübungen ohne allen Beweis vorzutragen, billige ich nicht, selbst nicht bey einer mathematischen Propädie. So wird schwerlich die Absicht erreicht, den Verstand zu bilden, und zur Philosophie vorzubereiten, derentwegen Dransfeld in der Vorrede die Mathematik rühmt.

Indessen schien es mir doch, wenigstens für die Geschichte der Wissenschaften merkwürdig, daß um 1681; göttingische Gymnasiasten gelernt haben, was hundert und zehn Jahre darauf, den meisten gelehrten Mitbürgern der Georgaugustusuniversität, viel zu schwer ist.

Verfahren in Gellibrands Trigonometria Britannica Goudae 1633 fol.

45) Auch da wird im I. Buch die Theilung in 3; 5; 7; Theile vermittelst der Sehnen gelehrt, nebst einem Satze der Sehne des vielfachen und des einfachen Bogens vergleicht.

Von Gellibrands Arbeit, rede ich in meiner astron. Abhandl. II. Samml. 4. Abh. 2.

46) Im XIII Cap. dieses Buches lehrt er wie man die Sinus für Tausendtheile des Grades findet. Erstlich durch Trisection die Sehne von 20 Graden, aus dieser des fünffachen 100 Grade, daraus ferner anderer Bogen Sehnen durch Theilung und Multiplication. Die Hälften der Sehnen geben Sinus, und zwischen die welche solchergestalt sind berechnet worden, werden andre vermittelst der Differenzen eingeschoben. Der Sinustotus zur anfänglichen Rechnung ist eine Eins mit 20 Nullen. Die Tafeln selbst gehen durch Hunderttheile des Grades und haben für die Sinus, zum Sinustotus, eine Eins mit 15 Nullen. Im XIV Cap. zeigt er wie man Tafeln berechnen könnte, wenn

der

der ganze Kreis in 100 Theile getheilt würde, ein solcher Theil in 1000. Das XV. betrifft Tangenten und Secanten.

47) Allgemeinere Sätze zu Theilung der Winkel hatte schon Viera gegeben, (26. Abh. 148) Sie stehen auch in *Franciſci Vietae* Operib. Mathematicis, die Franciſcus a Schooten Leiden 1646 herausgegeben hat p. 287. Auch bey Gelegenheit einer Frage Adriani Romani p. 305 u. f. viel dahin gehöriges. Vieta hat darnach trigonometriſche Tafeln berechnet, nennt aber die Ausgabe derſelben 1579, unglücklich, und macht zu einer beſſern Hoffnung. Die Tangenten nennt er Proſinus, die Secanten Transſinuoſas; p. 323. Vieta ſtarb 1603. Das waren alſo trigonometriſche Kunſtwörter ehe die jetzigen allgemein eingeführt wurden. Andere nennt der I. Samml. 60 Abhandl. 147; 153.

30. Sum-

30.

Summen der Sinusse von Vielfachen eines gegebenen Bogens.

1) In einem Kreise dessen Durchmesser AK; nehme man gleiche Bogen AB = BC = CD ... jeden = β; und ebenfalls diesen gleiche, Ab = bc = cd ... so daß von A an, über und unter dem Durchmesser, gleicher Bogen Gränzen mit den gleichgültigen grossen und kleinen Buchstaben bezeichnet sind, AD = Ad u. s. w.

2) Des Kreises Halbmesser heisse = 1, also der Durchmesser = 2.

3) Perpendikel von der Bogen Gränzpuncten auf den Durchmesser gezogen, geben Sinus der Bogen die sich in A anfangen, BL = b L = sin β, CN = cN = sin 2. β u. s. w.

4) Man ziehe gerade Linien, von jedem grossen Buchstaben im obern Halbkreise, zum nächstvorhergehenden kleinen im untern, Cb;; Dc ... Sie schneiden den Durchmesser in M; O; ...

5) Jeder grosse Buchstabe im obern Halbkreise begränzt da einen Bogen von A an gerechnet der um β grösser ist als der Bogen, eben von dem Anfange im untern Halbkreise gerechnet, den der nächstvorhergehende kleine Buchstabe

stabe begränzt. Folglich liegt jeder Durchschnitt (4) zwischen den beyden Puncten des Durchmessers, durch welche die Sinus eines Bogens, und des nächst kleinern gehn.

6) BA gehört unter die geraden Linien (4) in der Bedeutung, daß der Punct des Halbmessers in dem sich oberer und unterer Halbkreis anfangen, zugleich a heissen könnte.

7) Die Winkel ABb; BbC; bCc; CcD... stehen jeder, am Umkreise auf Bogen $= \beta$, also ist jeder $= \frac{1}{2}\beta$.

8) Jede der Linien (4) geht durch die Endpuncte eines grössern, und eines kleinern Bogens; (5) Und macht den Winkel (7) am obern Halbkreise mit dem Sinus des grössern Bogens, am untern mit des kleinern Sinus.

9) Es sey $\tan \frac{1}{2}\beta = b$.

10) So ist (8)

$AL = LM = \sin \beta . b$
$MN = NO = \sin 2.\beta . b$
$OP = PQ = \sin 3.\beta . b$
$AQ = 2.b . (\sin \beta + \sin 2.\beta + \sin 3.\beta)$.

11) Es sey ein unbestimmtes Vielfache der gleichen Bogen (1) $AF = m.\beta$, das nächstgrössere $AG = (m+1).\beta$, Fe (4) schneide den Durchmesser in S; und Gf in V.

12) So ist $SV = (\sin m.\beta).2.b$ (wie in 10).

13)

13) Man nehme an es sey
$AS = (\sin\beta + \sin 2.\beta \ldots + \sin(m-1).\beta).2.b$
14) So folgt aus (12)
$AV = (\sin\beta + \sin 2.\beta \ldots + \sin m.\beta).2.b.$
14) Was in (13) gesagt wird, ist für einige bestimmte Werthe von $m-1$ schon in (10) dargethan; da ist nähmlich

für $m-1$	1	2	3
	S	M	O	Q

15) In Worten sagt (13) soviel
Die Summe aller Sinusse vom einfachen Bogen (1) bis mit zum $(m-1)$ fachen, mit der doppelten Tangente des halben multiplicirt giebt das Stück des Durchmessers von A an, bis dahin wo ihn eine Linie von dem Endpuncte des m fachen im obern Halbkreise, nach dem Endpuncte des $(m-1)$ fachen im untern scheidet.

16) Wenn nun das wahr ist, so folgt: die Summe aller Sinusse vom einfachen Bogen, bis mit zum m fachen, mit eben der Tangente multiplicirt, giebt das Stück des Durchmessers, bis dahin, wo ihn eine Linie vom Endpuncte des $(m+1)$ fachen Bogens oben zum Endpuncte des m fachen unten, schneidet.

17) Nun ist (15) wahr wenn $m-1=3$ (14)
also (16) wahr für $m=4$;
Nun (15) wahr für $m-1=4$
also (16) wahr für $m=5$

Und

Und so immer fort von jedem Vielfachen auf das nächstfolgende.

18) Also ist (14) allgemein wahr, wie es in (16) erläutert ist.

19) Das ist also richtig, wenn nur die Bogen von A an gerechnet, Vielfache von einem und demselben Bogen sind, Ob der Halbkreis ein Vielfaches dieses Bogens ist, darauf kömmt nichts an.

20) Setzt man aber der Halbkreis sey ein Vielfaches dieses Bogens, $= (m+1).\beta$ so fällt nach (11)

$$\text{in} \left|\begin{matrix} G \\ K \end{matrix}\right| \begin{matrix} f \\ i \end{matrix} \left|\begin{matrix} V \\ K \end{matrix}\right.$$

und es ist der Durchmesser

$$2 = 2.b.\ (\sin\beta + \sin 2.\beta \ldots . + \sin m.\beta)$$

21) Also die Summe der Sinusse rechter Hand $= 1.\ \cot\frac{1}{2}\beta$.

22) Bogen die zusammen den Halbkreis ausmachen, haben einerley Sinus. Also Vielfache von β; die zusammen das $(m+1)$ fache ausmachen (20); das ist folgende Vielfache

$$\begin{matrix} 1 \\ m \end{matrix} \left|\begin{matrix} 2 \\ m-1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \ldots \\ \ldots \end{matrix} \left|\begin{matrix} n+1 \\ m-n \end{matrix}\right.$$

23) Die Menge der Theile sey ungerade

$$m+1 = 2.r+1$$

So

So haben gleiche Sinus die Vielfachen

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & \dots & r \\ 2.r & 2.r-1 & \dots & 2.r-(r-1) \end{array}$$

24) Da giebt es r Paare gleicher Sinus und die Summe der Sinusse ist =

$$2.(\sin\beta \dots + \sin r.\beta)$$

Diese Summe nun ist (20) $= \frac{2}{2.b}$ also

25) $\frac{1}{2}.\cot\frac{1}{2}\beta = \sin\beta \dots + \sin r.\beta$ wo rechter Hand die Summe der Sinus aller Bogen steht deren jeder kleiner als der Quadrant ist.

26) Die Menge der Theile sey gerade $m+1 = 2.r$ so haben gleiche Sinus die Vielfachen

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & \dots & r \\ 2.r-1 & 2.r-2 & & r \end{array}$$

27) Da giebt es $r-1$ Paare gleicher Sinus und nun noch einen einzelnen. Die Summe (20) ist =

$$2.(\sin\beta \dots + \sin(r-1).\beta) + \sin r.\beta = \frac{1}{b}$$

28) Also

$$\sin\beta \dots + \sin(r-1).\beta + \tfrac{1}{2}\sin r.\beta = \tfrac{1}{2}.\cot\tfrac{1}{2}\beta$$

Ein allgemeinerer Satz.

29) Damit $m+1$ die Menge der Theile im Halbkreise bleiben kann will ich die unbe-

stimmte Menge gleicher Bogen (11) anders bezeichnen. Es sey

in (11)	m	m + 1
nun	p − 1	p

30) So ist in (14) allgemein, vermöge (18) $AV = (\sin\beta \ldots + \sin(p-1).\beta)\ 2.b$ Dazu addire man VW; so hat man AW = Quersinus von AG; das ist Quersinus $p.\beta = b.(2.(\sin\beta \ldots + \sin(p-1).\beta) + \sin p.\beta)$

oder

31) $2.(\sin\beta \ldots + \sin(p-1)\beta) + \sin p.\beta = \text{Quers}\ p.\beta.\cot\frac{1}{2}\beta$

32) Ist in (29) p die Menge der Theile im Halbkreise, also = m + 1 in der Bedeutung (20) So ist $\sin p.\beta = 0$, Quers $p.\beta = 2$ und (31) verwandelt sich in (20).

33) Aus Trig. 19 S. 10. Zus. ist $\cot\frac{1}{2}\beta = \frac{\sec\beta + 1}{\tan\beta} = \operatorname{cosec}\beta + \cot\beta.$

Exempel.

34) Zu (20); m + 1 = 3 ungerade, $\beta = 60°$; so ist $\sin\beta + \sin 2.\beta = \frac{2\sqrt{3}}{2}$ $= \sqrt{3} = \cot\frac{1}{2}\beta.$

In 23; ist hie r = 1 es giebt nur ein Paar gleiche Sinus und die Summe beyder Sinusse ist das Doppelte des einen nach (24).

35)

35) Nun sey $m+1=6$; gerade; $r=3$ (26) $\beta=30$ Grad; So ist in (20) die Summe der Sinusse rechter Hand

von 30 Gr + v. 60 Gr + v. 90 Gr + v. 120 Gr + v. 150 Gr.

Also nach (28)

$$\sin 30^\circ + \sin 60^\circ + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \cdot \cot 15^\circ$$

Was linker Hand steht ist $= 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Aus (33) ist $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$; Also die Hälfte davon dem gleich was linker Hand steht.

36) Man kann nicht alle Sinusse durch Quadratwurzeln ausdrucken; nur die welche sich aus der Elementargeometrie finden liessen. (28 Abh. 81) Und auch diese erfodern oft sehr zusammengesetzte Ausdrückungen, wo sich die Summe nur durch eine sehr mühsame Rechnung gäbe.

Will man also den Halbkreis in andre Theile theilen, als die zunächst sind gebraucht worden, so nimmt man die Sinus aus der Tafel, freylich mit der Bemerkung, daß sie da nicht in völliger Richtigkeit stehen, wäre an einer sehr genauen Rechnung gelegen, so müsste man sie aus Pitiscus oder Gellibrands Tafeln nehmen wo sie auf mehr Decimalstellen angegeben sind.

37) Exempel zu (31) $\beta=20^\circ$; $p=5$; so hat man

Sinus von 20 Gr = 0,3420202
40 = 0,6427876
60 = 8660254
80 = 9848077
Summe = 2,8356409
verdoppelt = 5,6712818
sin 100 Gr. = 9848077
Summe = 6,6560895

Diese Summe soll = Quers 100°. cot 10 Gr seyn. Es ist aber Quersinus 100 Grad = 1−cos 100 Gr = 1+cos 80 Gr = 1+sin 10 Gr. Folglich nur genanntes Product = cot 10 Gr + cos 10 Gr. Es ist aber

cot = 5,6712818
cos = 9848077
Summe = 6,6560895

völlig obige aus den Sinussen hergeleitete Zahl.

38) Den Satz (21) habe ich zuerst von Krafften gelernt Institut. Geom. sublimioris §. 100. Seine Figur ist im wesentlichen von mir beybehalten worden, Seinen Beweis führt er durch Verhältnisse wie bey mir AL : BL; MN : CN u. d. gl. wären, die alle gleich sind, und deren vorhergehende und folgende Glieder summirt werden (Arithm. V. Cap. 33; II). Krafft nimmt die Zahl der Theile gerade, meine erste Untersuchung dabey war ob es bey einer ungeraden Menge statt finde, und so gerieth ich auf vorhergehende Lehren.

39)

39) Kraft sagt: Der Lehrsatz gehöre dem Vieta Op. p. 375; Er steht in der Schrift: Variorum de rebus mathematicis responsorum Liber VIII; Theor. 3. Er theilt den Halbkreis in eine Menge gleicher Theile, seine Figur zeigt deren acht; Aus einem Ende des Durchmessers zieht er Sehnen nach allen Theilungspuncten, so heisst der Satz:

40) Die kleinste Sehne verhält sich zum Durchmesser, wie die Summe, des Durchmessers, der kleinsten Sehne, und der Sehne der Ergänzung des Bogens der kleinsten Sehne zum Halbkreise, zum Doppelten der Summe aller Sehnen.

Das sagt er, sey genugsam in Analyticis angularium sectionum dargethan.

41) Andersons ad angulares sectiones Theoremata, enthalten soviel ich weiß was vom Vieta in dieser Absicht bekannt ist. Man findet sie auch in Schootens Ausgabe vom Op. Vietae 287 u. f. S. Zu gegenwärtigem wird daselbst Theor. VII. gehören.

42) In Zeichen wie ich vorhin gebraucht habe lässt sich Vietas Satz folgendergestalt ausdrucken.

Der Halbkreis sey in q Bogen getheilt, Jeder $= \gamma$.

43) Die kleinste Sehne ist $=$ Sehne γ Die Summe, von ihr, der Sehne ihrer Er-

gänzung zum Halbkreise, und dem Durchmesser ist = Sehne γ + Sehne $(180° - \gamma)$ + 2.

44) So ist die Proportion (40) die drey ersten Glieder; aus (43) und das vierte = x genannt

Sehn γ: 2 = 2 + Sehn γ + Sehn $(180° - \gamma)$: x.

45) Man drucke die Sehnen, durch die Sinus aus; so heisst (44)

2. sin $\frac{1}{2}\gamma$: 2 = 2. (1 + sin $\frac{1}{2}\gamma$ + cos $\frac{1}{2}\gamma$) : x.

46) Daraus $\frac{1}{2}x$ = cosec $\frac{1}{2}\gamma$ + cot $\frac{1}{2}\gamma$ + 1

= cot $\frac{1}{4}\gamma$ + 1 (33)

$x = 2.\cot\frac{1}{4}\gamma + 2$

47)

Sehne γ + Sehne 2. γ ... + Sehne (q−1). γ + 2 ist =

2. (sin $\frac{1}{2}\gamma$ + sin 3. $\frac{1}{2}\gamma$ .... + sin (q−1). $\frac{1}{2}\gamma$ + 1)

48) Es ist also 2. q. $\frac{1}{2}\gamma = \pi$; folglich

in 26	r	β
hie	q	$\frac{1}{2}\gamma$

Daher (28)

sin $\frac{1}{2}\gamma$ .... + sin (q−1) $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. cot $\frac{1}{4}\gamma$.

49) Also mit 2 multiplicirt und die Sehnen (47) wiederum hergestellt

Sehne γ .... + Sehne (q−1). γ + 1 = cot $\frac{1}{4}\gamma$.

50) Auf beyden Seiten mit 2 multiplicirt, und dann auf jeder Seite 2 addirt

2. (Sehne γ .... + Sehne (q−1). γ + 2) =

2. cot $\frac{1}{4}\gamma$ + 2 Das ist = x (46)

Welches Vietas Satz ist.

51)

51) Vieta erinnert selbst, der Satz diene die Summe aller Sinusse im Quadranten zu finden, wenn die Bogen nach gegebnen Unterschieden fortgehn. Weil die Zahl der Bogen im Halbkreise allemahl gerade ist, so wird sich (28) bequem brauchen lassen.

52) Summe der Sinusse aller ganzen Grade im Quadranten.

Also in (26) $r = 90$; $\beta = 1$ Grad und (28)
$\sin 1^\circ + \sin 2^\circ \ldots + \sin 89^\circ + 1 = \frac{1}{2}(1 + \cot 30')$

Aus Gellibrands Tafel ist, den Halbmesser $= 1$ gesetzt, $1 + \cot 30' =$
115,5886501293; also die Summe =
57,7943250646.

53) Aller Minuten im Quadranten. Also
$r = 90.60 = 5400$; $\beta = 1'$ und
$\sin 1' + \sin 2' \ldots + \sin 5399' + 1 = \frac{1}{2}(1 + \cot 30'')$

In des Rhäticus grossem Canon, bey Pitisci Thesauro math. (Geom. Abhandl. I. Samml. 60 Abh. 155, und 153;) steht in serie tertia bey $89^\circ\ 59'\ 30''$ die verlangte Cotangente. Wenn ich sie auf den Sinustotus $= 1$ bringe, und 1 dazu addire kömmt

6876,4936735144

Davon die Hälfte, oder die Summe der verlangten Sinusse

3438,2468367572

54) Dieses Exempel ist das einzige das Vieta giebt. Seine Vorschrift ist: Addat logis-

gisla transsinuosam complementi, suo congruenti prosinui, et insuper sinui toto, et constabitur duplum summae quaesitae. Transsinuosas voca hypotenusas, quas suppeditat canon foecundissimus, Prosinus latera circa rectum quas canon foecundus.

55) Vietas Kunstwörter sind schon (29 Abh. 47) erwähnt worden. Seine Regel heisst in der jetzigen Sprache

$$\tfrac{1}{2} \cdot (\cot 1' M + \operatorname{cosec} 1' M + 1)$$

ist vermöge (33) mit 28) einerley.

Vieta rechnet für einen Sinustotus = Hundert Millionen. Wenn ich seine Zahlen auf Sinustotus = 1 bringe, sind es folgende:

Cosec $1'$	=	3437,7468 923
Cot $1'$	=	3437,74667379
Summe $+1$	=	6876,49349302
halb	=	3438,24674651

Die Summe der Sinusse aller Minuten.

56) Nimmt man die Zahlen aus kleinen Tafeln in denen doch auch Secanten für den Halbmesser = zehn Millionen stehn, wie Vlacqs und Ozanams so findet man die Summe nur bis auf Hunderttausendtheile des Sinustotus = 1; aber eben die Zifern wie Vieta bis auf diese Stellen angiebt.

Der Unterschied zwischen Vietas Zahl und der (53) rührt also von unterschiedner Berechnung

nung in des Vieta und des Rhäticus Canon her; Bey Tausenden von Halbmessern, sind Zehntausendtheile unbeträchtlich.

57) Kraft dachte nicht daran, nach Vietas Vorschrift, Cotangente und Cosecante zu brauchen die man auch in kleinern Tafeln findet. Er hie t die Cotangente von 30 Mi nöthig, wie bey mir (28) erfodert wird; Und weil er mit Tafeln darinnen sie sich findet nicht versehen war hilft er sich so: Er berechnet, für den Sinustotus zehn Millionen; $\frac{1}{2}$. sintot. $\frac{\text{Sehne } 179^\circ\ 59'}{\text{Sehne } 1'}$ findet so für die Summe der Sinusse was anders als Vieta, und glaubt das rühre daher weil Vieta einen grössern Canon gebraucht.

Rechenschaft zu geben warum Kraft was anders herausbringt müsste man sein ganzes Verfahren darstellen. Nach (56) lässt sich einerley mit Vietas Zahl, auch aus den kleinern Tafeln herausbringen so weit dieselben reichen.

58) Summe der Sinusse aller Secunden. In (28) $r = 90.3600 = 324000$; $\beta = 1''$ und $\sin 1'' \ldots + \sin 89^\circ\ 59'\ 59'' + 1 = \frac{1}{2}(1 + \cot 30''')$

59) Die Cotangente einer halben Secunde oder zu Vietas Vorschrift, Cotangente und Cosecante der ganzen zu berechnen, möchte wohl die Mühe nicht belohnen. Etwas beynahe wahres findet man leicht so: Die Hälfte der

Cotangente der halben Secunde, ist

$= \frac{1}{2 \text{ tang } \frac{1}{2}''}$, also beynahe $\frac{1}{\text{tang } 1''}$ weil sich die kleinen Tangenten beynahe wie die Bogen verhalten. Nun ist —

log tang $1'' = + 5{,}3144251$ dazu gehört die Zahl 206262; Soviel ganze Halbmesser beträgt diese Summe, dazu noch der halbe, und mehr Theile des ganzen gehören.

60) Was in (28) rechter Hand steht ist

$= \frac{1}{2 \text{ tang } \frac{1}{2}\beta}$.

61) Je kleiner $\frac{1}{2}\beta$ ist, desto näher kömmt die Länge dieses Bogens in Theilen des Halbmessers ausgedruckt seiner Tangente, und zugleich ist der Divisor in (60) desto näher, die Tangente des ganzen Bogens, das ist: der ganze Bogen selbst.

62) Also beträgt die Summe der Sinusse aller Secunden, sehr beynahe, soviel Halbmesser, soviel Secunden auf einen Halbmesser gehn. Die Zahl die aus dem Logarithmen (59) gefunden ward, ist nur ein wenig zu klein. In meiner I. astronomischen Abhandlung 102; ist der Halbmesser in Graden, Minuten, Secunden angegeben; Ich setze hieher nur die ganzen und Hunderttheile

Secun-

Secunden	206264,80
Minuten	3437,74
Grade	57,29

Vergleicht man hiemit (59; 54; 52) so wird man sehen wie die dort gefundenen Zahlen von den gegenwärtigen abweichen, dabey man aber nicht vergessen muß, daß (54; 32) noch $\frac{1}{2}$ zur jedesmaligen Cotangente addirt ist.

63) Aus (21) ist die Summe der Sinusse aller Grade im Halbkreise = cot 30 M = sec 89 Gr + tang 89 Gr. (33)

64) Auf die letzte Art giebt Kepler diese Summe an: Comment. de motibus stellae Martis; P. IV. c. 43; p. 211.

65) Kraft meynt Kepler hätte den Satz nur dunkel verstanden, und sagen sollen: entweder die Tangente von 89 $\frac{1}{2}$ Gr. oder die Secante von 89 $\frac{1}{2}$ Gr. denn jede mache allein die Summe aus.

66) Das letzte wäre der Wahrheit nur so nahe, so nahe man Secante und Tangente gleich setzen könnte, denn eigentlich ist es die Tangente welcher die Summe gleich ist (63) Aber Kraft hat Keplers Stelle nicht recht angesehn, da stehen nicht 89 $\frac{1}{2}$ sondern 89; und das völlig richtig. Kraft hat nähmlich hie an den Satz (33) nicht gedacht, der doch schon nöthig ist Vietas Vorschrift (97) auf eine einzige Cotangente zu bringen. Folglich ist Krafts Tadel ungegrün-

gegründet, und seine Verbesserung nicht glücklich. Kraft scheint an den Satz (33) gar nicht gedacht zu haben, wie auch aus (57) erhellt.

67) Kepler sagt von seinem Satze: manu ducente nos *Cardano* in libris de subtilitate, quo loco circuli proprietates explicat. Eius rei demonstrationem profitetur *Iustus Byrgius*.

Ohne Zweifel ist die Stelle die Kepler meynt, gleich im Anfange des 16 B. de subtilitate das de scientiis überschrieben ist, 754 Seite der Ausg. Basel 1582; 8°; u. 441 S. der Basler Fol. Ausg. in eben dem Jahre, beyde per Sebastianum Henric. Petri. Sie heisst in der Folio-Ausgabe: Quodsi diametros producatur, extra quantumlibet, alia vero diametro, in centro secetur ad rectos, ex huius fine diuisa portione quarta circumferentiae in quotquot aequales partes, per earum vltimam recta ducatur ad eam, quae exterius in directo diametri adiacet erit ipsa diametro adiacens, aequalis omnibus rectis ex diuisionum peripheriae punctis ductis perpendicularibus in subiectam diametrum, vsque ad aduersam circumferentiae partem, quae quidem lineae omnes, vt palam est, diametro quae exterius est producta aequidistant. Quodsi ab eadem extremitate diametros, lineae quotquot, seu intra, seu extra, ad adiacentem quidem extra, ad circumferentiae vero partem alteram intra ducantur, erunt in exterioribus rectan-

ctangula ex tota linea in partem intercluſam peripheria circuli, et in interioribus ex tota in partem reliqua diametro ad rectas ſtante intercluſam, quadrato circulo inſcripto ſemper aequalia.

Es iſt keine Figur dabey. Die müſſte man ſich entwerfen, wenn man die Stelle vollkommen verſtehen, und den Innhalt beweiſen wollte.

Da Cardan lauter einzelne Merkwürdigkeiten des Kreiſes erzählt, ſo giebt das vorhergehende und das folgende keine Erläuterung. Zuvor ſteht der Satz von Rechtecken der Stücken einer geraden Linie von einem Puncte auſer dem Kreiſe an ihre beyden Durchſchnitte mit dem Kreiſe (Trig. 16 S.) darnach, folgen Vergleichungen des Kreiſes mit Hyperbel und Ellipſe.

Man findet beym Cardan manches Mathematiſche, das auch bey dem jetzigen Zuſtande der Wiſſenſchaft noch Aufmerkſamkeit verdient.

In Iul. Caeſ. Scaligeri Exercitat. de ſubtilitate ad Cardanum, (Frf. 1582) finde ich nichts dieſe Stelle betreffendes.

68) Den Satz (21) braucht Leonh. Euler de inuentione integralium ſi poſt integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur. Miſc. Berolin. Cont. VI. ſiue Tomus VII; (Ber. 1743) Cl. Math. n. III. §. 8. Schreibt ihn auch dem Vieta zu.

69)

69) Noch, nach (33) und Vietas Vorschrift (55) Summe der Sinusse, aller Hunderttheile von Graden im Quadranten, wie die Bogen in Gellibrands Trig. Brit. angegeben sind. Ein Hunderttheil beträgt 36 Secunden.

In Gellibrands Tafel ist für Tangenten und Secanten der Sinustotus = Zehntausend Millionen, für die Sinus = Tausend Billionen; Also, Gellibrands Zahlen auf Sinustotus = 1 gebracht.

cosec 36″	=	5729, 5779803970
cot 36″	=	5729, 5778931305
Summe + 1	=	11460, 1558735285
halb	=	5730, 0779.....

31.

Fläche eines Kugeldreyecks

zur Geschichte der Vergleichung der Fläche eines Kugeldreyecks mit der Kugelfläche.

Die Verhältniß eines Kugeldreyecks zur Kugelfläche, läßt sich leicht durch die Rechnung des Unendlichen finden. So hat Jac. Bernoulli sie angegeben Act. Er. Lipſ. 1691; Op. Iac. Bern. T. I. n. 42. Auch Leonh. Euler Mem. de l'Ac. de Pruſſe 1753; p. 233. Ich habe es als einen Lehnſatz bey einer Abhandlung welche ich der götting. Soc. der Wiſſ. 1762 vorlegte gewieſen Diſſertationes Mathematicae et Phyſicae (Altenb. 1771) n. VIII.

Bekannt iſt indeſſen dieſe Verhältniß längſt vor Erfindung analytiſcher Rechnungen geweſen. Daß drey Linien auf einander ſenkrecht, den achten Theil einer Kugelfläche einſchlieſſen, die ihren Mittelpunct hätte, wo die Linien zuſammenſtoſſen, bemerkt *Vitello*, Optices L. I. §. 87. (Opticae Theſaurus ... a *Federico Riſnero*, Baſ. 1572 fol. im Vitello p. 33.) Den körperlichen Winkel dieſer drey Linien nennt er einen körperlichen rechten. Acht dergleichen um den Mittelpunct geſetzt füllen den körperlichen Raum aus, und ein körperlicher Winkel der ſeine Spitze am Mittelpuncte hat, verhält ſich zu dieſen acht

Rech-

Rechten, wie das Stück Kugelfläche das zwischen seine Schenkel fällt, zur ganzen Kugelfläche. Deswegen beruft er sich auf eines Nicolaus Cabasilla Commentar über das dritte Buch von Ptolemäus Astronomie. Dieser Cabasilla oder Cabasilas wie ihn Vossius nennt war in der Mitte des vierzehnten Jahrhunderts, Erzbischof zu Thessalonich (Voss. de Scient. Math. cap. 62; §. 15; p 360.) Viel hieher gehöriges enthält Iohannis Broscii Aristoteles et Euclides defensus contra Petrum Ramum et alios, additae sunt duae disceptationes de numeris perfectis Amst. 1699; 4°. In diesem Buche art XXIV. p. 78; führt Broscius: ex antiquis ad Vitellonem notis eine Regel an, zu berechnen, wie sich ein Raum auf der Kugelfläche zwischen mehrern Bogen grösster Kreise eingeschlossen, ein Kugelvieleck zur Kugelfläche verhält. Ich werde davon weiter unten reden. Dieser Raum giebt das Maaß eines körperlichen Winkels, den mehr als drey Ebenen einschliessen. Auf der 79 S. sagt er: Demonstratio amplitudinis anguli solidi refertur ab Henrico Briggio ad Thomam Harriotum. Aream Trianguli Sphaerici vel quantitatem anguli solidi inuenire primus docuit peritissimus Geometra Thomas Harriotus cum ante eum nemo hoc sit assecutus. Das kann Brigg wohl geschrieben haben, aber Broscius hätte dabey erinnern sollen, daß er es in antiquis ad Vitellonem notis schon gefunden hatte. Man

Man theile den Aequator einer Kugel in 360 Grad, und lege durch die Gränzen dieser Grade Meridiane. Was zwischen zweene Quadranten der Meridiane, und einen Grad des Aequators fällt, nennt Br. gradum superficialem. Die Kugelfläche, hält dergleichen Grade 720; Vorerwähnter körperlicher rechter Winkel, fasst solcher Flächengrade 90.

Br. erinnert: die Alten hätten durch solche Grade, körperliche Winkel gemessen, Es sey unrecht daß die Neuern solches aream trianguli sphaerici nennten; denn es könne gleiche körperliche Winkel in unterschiedenen Kugeln geben, einen im Mittelpuncte der Erde, den andern im Mittelpuncte der achten Himmelssphäre (Nach dem ptolemäischen System,) den gehörten aber sehr ungleiche Flächen auf ihren Kugeln.

Innerhalb des körperlichen rechten Winkels, fällt ein gleichseitiges Kugeldreyeck, jede Seite ein Quadrant, das den achten Theil der Kugelfläche ausmacht. Der Halbmesser mag nun der Erde ihrer seyn, oder der ptolemäischen Sphäre der Fixsterne. Dieses Dreyeck, nennt man doch also mit eben dem Rechte, Maaß des körperlichen rechten Winkels, mit welchem man eines ebenen rechten Winkels Maaß. Quadranten nennt die Schenkel des Winkels mögen jeder einen Fuß seyn, oder jeder vom Auge des Beobachters bis an die Himmelssphäre erstreckt werden.

Br. gesteht es endlich selbst daß es auf die Verhältniß des Dreyecks zur Kugelfläche ankomme.

Broscius nimmt die Vergleichung von Kugeldreyecken mit der Kugelfläche als bekannt an, und vergleicht daraus mit der Kugelfläche Vielecke, die auf der Kugelfläche zwischen Bogen grösster Kreise enthalten sind, welches zu Beschreibung von Körpern in die Kugel gehört. Ich handele davon, sowohl a. a. O. meiner Dissert. math. et phys. als auch in Aufsätzen: de corporibus polyedris, data lege irregularibus, die ich der götting. Soc. der Wiss. vorgelegt habe. Commentationes Societ. Reg. Sc. Gott. 1783 et 1784; auch 1786.

Ausrechnungen von Flächen auf der Kugel zwischen Bogen grösster Kreise eingeschlossen lehrt auch *Cavalieri* im Directorio Vranometrico. Frisii Elog. del Cavalieri p. 28.

Das Angeführte soll nur lehren wie lange man schon diese Vergleichung gewusst hat.

Broscius zeigt in erwähntem Buche, für die damalige Zeiten nicht gemeine Einsichten. Ich finde indessen seinen Nahmen nicht im Register beym Vossius de scient. math. Im Gelehrtenlexicon schlug ich ihn nach mit der Erwartung ihn nicht zu finden die auch erfüllt ward. Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum et alios, Ioannis Broscii, Curzelovienſis ist die Aufschrift seines Werkes, vor einer kur-

kurzen Vorrede. Als occasio scribendi wird von ihm folgendes erzählt pag. 3: Octoginta anni abierunt, et aliquot, cum Petrus Ramus ex Academia Parisiensi ad Academiam Cracoviensem, de periodis tunc acriter disputantem animadversiones suas in Aristotelem transmisit. Servantur adhuc ipsius authoris manusubscripta apud Decanum inclytae Facultatis artium ingenuarum. Id ego, cum a Praeceptoribus meis Excellentissimis Stanislao Iacobeio et Valentino Fontano cognovissem, saepe mecum cogitavi quonam consilio id Ramus fecerit. An ut aliquem ex Academia ad examen suarum rationum provocaret? An potius ut Aristotelis contemptum persuaderet? Incideram autem antea puer adhuc, in Ludimagistros primo quidem, qui encyclopaediam Cornelii Valerii viam ad Aristotelem et Ciceronem praeparantem gnaviter docebant: mox deinde alios, Petri Rami cum viveret auditores qui ejus artes atque inter illas Geometriam praelegebant: cumque jam eorum auscultatione ad Aristotelem et Euclidem incitatus essem, graviorum postea in Academia Praeceptorum admonitione, nonnullis etiam scriptis adnotationibus Reverendi olim Ioannis Musaenii veteris adhuc Academiae discipuli, ante studiosorum 1549 dispersionem; post dispersionem ultra annos quinquaginta professoris adjutus, multo ardentius inquirere coepi in ipsius Geometriam, rationes quas Aristoteli vel Eucli-

di, aliisque objicit examinans. Quid animadverterim, paucis explicabo, Rami verba cum opus erit primum proponens. Quam vero libertatem sibi sumpsit in praestantissimos authores ac Philosophiae parentes, eandem aliis concedet Ramus. Etsi enim summis in Geometria viris, Vietae ac Snellio videatur λογικώτατος, aliis tamen, rem diligenter considerantibus, non tantus videtur ut propter illum Aristotelis et Euclidis via et ratio deserenda sit.

Diese Stelle verdient bekannt gemacht zu werden, weil sie allerley litterarische Nachrichten enthält. Was mögen wohl auf der cracauischen Universität die scharfen Streitigkeiten de periodis gewesen seyn? Was für eine Zerstreuung der Studenten ist 1549 vorgegangen? Hierüber möchten Kenner der polnischen Gelehrtengeschichte Auskunft geben. Von des Broscius Bildung lernt man doch allerley, z. E. daß die ludimagistri zum Aristoteles, Cicero, und Euklid, angeführt haben. Rechnet man die 50 Jahr des Musänii zu 1549 so könnte man muthmassen Broscius habe das um 1599 geschrieben. Vieta und Rud. Snellius fallen in diese Zeiten auch R. Sohn Willebrord, dessen Eratosthenes Batavus 1617 herausgekommen ist. Soviel lehrt die Stelle von Broscii Lebenszeit. Ob das Buch 1699 zum erstenmahle erschienen ist kann ich nicht sagen, es ist im geringsten keine Anzeige vom Herausgeber und dergl. dabey.

Auf

Auf dem Titelblatte meines Exemplars von: Raddologia ouero Arimmetica virgolare ... Inuentore il Baron *Giovanni Nepero*, Tradottore della Latina nella Toscana lingua il Cavalier *Marco Locatello*. Verona 1623; 8° ist unten mit rother Dinte geschrieben: *Ioannis Brosii*. Ich schmeichele mir also, mit seiner Hand, auch ein Datum mehr, wenn er gelebt hat zu besitzen.

Hoffentlich wird mir verziehen was ich hie zum Andenken, des polnischen Mathematikers eingeschoben habe. Ich komme nun wiederum zu der Vergleichung zwischen körperlichen Winkeln und Kugelflächen.

In einem besondern Falle fällt sie sogleich in die Augen. Wenn ein Paar Quadranten den Winkel $= \zeta$ machen, und so mit dem Bogen des Kreises der diesen Winkel misst, ein Kugeldreyeck einschliessen, das zweene rechte Winkel nebst dem genannten hat so verhält sich offenbar dieses Kugeldreyeck zur halben Kugelfläche $= \zeta : 360$ Gr und zur ganzen $= \zeta : 2.360$ Grad. Es ist aber ζ der Ueberschuß der Summe aller Winkel des Kugeldreyecks über 180 Grad.

Vermuthlich hat man so zuerst Kugeldreyecke von veränderlicher Grösse mit der Kugelfläche verglichen.

Wenn nicht beyde Schenkel des Winkels Quadranten sind, ist dieses Verfahren nicht brauchbar.

Aber das bleibt noch: Wenn zweene grösste Halbkreise einen Winkel machen, so verhält sich das Stück Kugelfläche zwischen ihnen zur ganzen, wie der Winkel zu vier rechten.

Das Kugeldreyeck ist in drey Bogen eingeschlossen, die Paarweise mit einander drey Winkel machen, Wenn man diese drey Bogen in ihre Halbkreise ergänzt, so liegt zwischen jedem Paare Halbkreise, das Kugeldreyeck dessen Fläche man sucht, und noch eins. Beyder Summe verhält sich zur Kugelfläche wie der Winkel der Halbkreise das ist wie ein Winkel des Kugeldreyecks zu vier rechten.

Darauf beruht Girards Beweis den ich hie vortrage.

Leonhard Euler hat diesen Beweis wiederum bekannt gemacht. De Mensura angulor. solidor. Acta Acad. Sc. Petrop. pro 1778; Pars Posterior p. 33. Ohne Zweifel hat Girard selbst den Beweis nicht in den bequemen analytischen Ausdrückungen vorgetragen, in die Euler ihn übersetzt hat. Mir schienen deutlichere Zeichnungen als Euler hat dienlich.

Die Puncte A* B* C* meiner Figuren, heissen in seiner einzigen a, b, c, und er erinnert, daß sie soweit von einander sind, als A, B, C, ob es gleich in der Figur ganz anders aussehe. Meine Abbildungen werden also wohl diese Wahrheit offenbahrer darstellen, so habe ich auch meinen eignen Gang der Rechnung genommen,

men, und bin nicht Eulers seiner Schritt vor Schritt gefolgt.

In welchem Buche G. diesen Beweis gegeben habe führt E. nicht an.

Les Oeuvres Mathematiques de *Simon Stevin* ... Le tout reveu, corrigé et augmenté par *Albert Girard* Samielois, Mathematicien, Leiden 1634 fol. von G. übersetzt. Sie sind den Generalstaaten der vereinigten Niederlande, und dem Statthalter Prinz von Oranien zugeeignet, von G. hinterlassenen armen Wittwe und 11 Waisen .... Im III. B. der Cosmographie, des triangles spheriques 51 Seite, sagt G. J'ay aussi escrit un livret des superfices des triangles et polygones sphériques incognues auparavant, qui sert aussi pour la mesure des secteurs spheriques, et des angles solides, où le Lecteur curieux pourra voir l'expedition succincte en la mesure d'iceux. Je l'ay fait imprimer à Amsterdam en l'an 1629 en quarto.

Ich besitze von G. Tables des Sinus Tangentes et Secantes selon le raid de 100 000 Parties Haag 1626; 12°. Dabey ist eine ebene und sphärische Trigonometrie, die Manches nicht gemeines enthält.

Ich brauche zu Girards Lobe nichts mehr zu sagen, als daß ihn Euler acutissimum Geometram nennt.

Sein gegenwärtiger Beweis ist kürzer als den man durch die Rechnung des Unendlichen

giebt, und da man bey dem letztern, vom rechtwinklichten Dreyecke anfängt, so thut G. die Sache sogleich von jedem Dreyecke dar. Sonderbar genug, daß seine Scharfsinnigkeit hie die Rechnung des Unendlichen, in den beyden Vollkommenheiten übertrifft die sie sich sonst vor den Bemühungen älterer Geometer zueignet: Kürze und Allgemeinheit.

Im I. Th. meiner Anfangsgründe, im 2. Satze der sphärischen Trigonometrie brachte mich die dasige Untersuchung darauf, daß mit einem Kugeldreyecke BPD dasiger 5 Fig. noch drey andre entstehn, und alle vier die halbe Kugelfläche ausmachen das ist also wie hie in der 1 Fig. Kugeldreyecke mit der Kugelfläche zu vergleichen war damahls meine Absicht nicht, sonst hätte mich das leicht auf Beyfügung der andern Halbkugel und so auf Girards Verfahren geführt.

Man muß nähmlich bedenken, daß, ohne Absicht auf die Flächen der Kugeldreyecke, schon lehrreich ist, die acht Kugeldreyecke zu beobachten, die allemahl zusammen entstehen, und paarweise gleich sind. Sie gehören so zusammen, wie die vier ebenen Winkel um einen Punct wenn man gleich nur einen betrachtet, und die beyden entgegengesetzten Kegel wenn man gleich nur an einen denkt. Das sind Beyspiele wie viel oft in einem Begriffe liegt, das man nur allsdann entwickelt wenn man Veranlassung dazu bekömmt.

Sind

Sind nun diese acht Dreyecke bemerkt worden, so ist Girards Beweis nur eine sehr leichte und kurze Anwendung dieser Bemerkungen.

Mit jedem Kugeldreyecke entstehen noch sieben; also zusammen acht um die ganze Kugel herum.

1) Das Kugeldreyeck sey ABC; welches ich mit I bezeichne.

2) Man nenne seine drey

innern Winkel	Seiten
$BAC = \alpha$	$BC = a$
$ABC = \beta$	$AC = b$
$ACB = \gamma$	$AB = c$

3) Die grössten Kreise von denen AB, AC, Bogen sind, schneiden einander zum zweytenmahle in A* und die von denen AB, BC, Bogen sind, in B*

So entstehen folgende Dreyecke

II) A* BC

innre Winkel	Seiten
$A^* = \alpha$	$BC = a$
$B = \pi - \beta$	$A^*C = \pi - b$
$C = \pi - \gamma$	$A^*B = \pi - c$

III) A* B* C

innre Winkel	Seiten
$A^* = \pi - \alpha$	$B^* C = \pi - a$
$B^* = \pi - \beta$	$A^* C = \pi - b$
$C = \gamma$	$A^* B^* = c$

IV) A B* C

innre Winkel	Seiten
$A = \pi - \alpha$	$B^* C = \pi - a$
$B^* = \beta$	$A C = b$
$C = \pi - \gamma$	$A B^* = \pi - c$

4) Die grösten Kreise von denen AC, BC Bogen sind, schneiden einander das zweytemahl in C*.

5) In der Figur welche dieses Alles zusammen darstellt sind also ganze Kreise

A B A* B* A

B C B* C* B

C A C* A* C

6) Jeder besteht aus zween Halbkreisen zwischen einem Buchstaben ohne Stern, und eben demselben Buchstaben mit Sterne.

7) In jedem der beyden Halbkreise die zusammen einen ganzen ausmachen, liegt noch ein andrer Buchstabe als der (6) und zwar in einem dieser beyden Halbkreise ohne Stern, im andern mit Sterne.

So

So

A in B A B*	A* in B* A* B
B ... A B A*	B* ... A* B* A
C ... B C B*	C* ... B* C* B

8) Einen solchen Buchstaben wie (7) nenne ich mittlern zwischen den beyden äusern (6).

9) Bogen von mittlern ohne Stern einer bis an den äusern ohne Stern, der andre bis an den äusern mit Sterne, machen zusammen einen Halbkreis.

10) Auch so Bogen vom mittlern mit Sterne, an die beyden äusern.

11) Also sind in einem und demselben Kreise folgende vier Bogen, jeder kleiner als ein Halbkreis.

1) Zwischen zween Buchstaben ohne Stern
wie AB.

2) Zwischen einem ohne Stern, und einem mit Sterne
wie B A* und B* A.

3) Zwischen zween mit Sterne
wie A* B*.

12) Der erste Bogen macht mit jedem der beyden zweyten einen Halbkreis;

13) Auch so der dritte, mit jedem der zweyten.

Folglich sind dritter und erster gleich.

14) In

14) In 1 . . 3; betrachtete ich vier Dreyecke die eine gemeinschaftliche Spitze in C haben.

15) In (5) zeigen sich vier andre Dreyecke die eine gemeinschaftliche Spitze in C* haben.

Sie sind von jenen vieren durch den Kreis A B A* B* abgesondert, jene vier liegen auf einer Seite dieses Kreises, diese auf der andern.

16) Jede vier füllen eine Halbkugel aus, alle acht, die ganze.

17) Die Seiten der vier Dreyecke (15) sind folgende (12; 13)

V) A* B* C*;
B* C* = a
A* C* = b
A* B* = c.

VI) A B* C*
B* C* = a
A C* = π — b
A B* = π — c.

VII) A B C*
B C* = π — a
A C* = π — b
A B = c

VIII) A* B C*
B C* = π — a
A* C* = b
A* B = π — c.

18) Al-

18) Also haben folgende Dreyecke einerley Seiten

I und V
II . . VI
III . . VII
IV . . VIII.

19) **Wenn zwey Kugeldreyecke gleiche Seiten haben so haben sie auch gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber, und alles gleich.**

Jede Seite des Kugeldreyecks, hat eine gerade Linie zur Sehne, welche die Kugel in den beyden Gränzen des Bogens schneidet der die Seite des Kugeldreyecks ist. Wenn also ein zweytes Kugeldreyeck eben die Seiten hat welche das erste hat, so haben beyder Dreyecke Seiten gleiche Sehnen, diese Sehnen geben gleiche ebene Dreyecke, die einander decken; folglich kann man die Winkelspitzen des einen Kugeldreyecks auf die Winkelspitzen des andern legen, und, da die Seiten der Kugeldreyecke Bogen gleicher Kreise sind, so decken sie einander, wenn die Winkelspitzen auf einander fallen.

So hat **Wolf** den Satz bewiesen. Elementa Sphaericorum §. 58; im T. III. seiner Elem. Mathes.

20) **Aus den ebenen Dreyecken welche die Sehnen der Seiten von Kugeldreyecken geben, kann man mehr Vergleichungen von Kugeldreyecken**

ecken herleiten; Nur muß man sich erinnern, daß der sphärische Winkel des Kugeldreyecks, nicht mit dem Winkel der Sehnen einerley ist.

21) Vermöge (19) haben die Dreyecke mit einerley Seiten (18) auch einerley Winkel, wie man sich auch leicht insbesondre überzeugt.

22) Die Ordnung der Dreyecke in (17) habe ich so gefunden:

Weil das erste drey Buchstaben ohne Sterne hatte, so nahm ich für das V; drey mit Sternen.

Jedes der vier (15) hat C*; wie jedes der vier (2; 3) C.

Nun nahm ich von den übrigen beyden Buchstaben die jedes Dreyeck haben muß die beyden welche den beyden

in II gegenüber sind zum VI
III VII
IV VIII

23) Weil ein paar Kugeldreyecke die einerley Seiten und Winkel haben, einander decken, also auch dem Raume nach gleich sind, so hat man (18)

Δ I = Δ V
II = VI
III = VII
IV = VIII.

Ver-

Vergleichung der Kugeldreyecke mit der Fläche der Kugel = S.

24) $I + II : S = \alpha : 2\pi$ oder

$$I + II = \frac{S}{2\pi} . \alpha$$ auch so

$$I + IV = \frac{S}{2\pi} . \beta$$ und

$$I + VII = \frac{S}{2\pi} . \gamma$$

25) $VII = \frac{1}{2}S - V - VI - VIII$

$= \frac{1}{2}S - I - II - IV$

Daher I + VII oder

$$\frac{1}{2}S - II - IV = \frac{S}{2\pi} . \gamma$$ das ist

$$\frac{1}{2}S - \frac{S}{2\pi} . (\alpha + \beta) + 2.I = \frac{S}{2\pi} . \gamma$$

Folglich $2.I = \frac{1}{2}S . \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\pi} - 1 \right)$

Also

26) $$I = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{4\pi} . S.$$

27) Das Dreyeck verhält sich zur Kugelfläche, wie der Ueberschuß der Summe seiner drey Winkel über zweene rechte, zu acht rechten.

28) So ist $II = \frac{S}{2\pi} . \alpha - I$

Das giebt aus (26)

II =

$$II = (\alpha - \beta - \gamma + \pi). \frac{S}{4\pi}$$

Der erste Factor, ist der drey Winkel in II; Ueberschuß über zweene Rechte (3).

29) Da VII = III (18) So ist (24)

$$III = \frac{S}{2.\pi}. \gamma - I$$ also aus (26)

$$III = \frac{S}{4.\pi}. (2.\gamma - \alpha - \beta - \gamma + \pi)$$

Der letzte Factor ist der drey Winkel in III; Ueberschuß über 2 Rechte (3).

30) Aus (24)

$$IV = \frac{S}{2.\pi}. \beta - I;$$ also aus (26)

$$= \frac{S}{4.\pi}. (2.\beta - \alpha - \beta - \gamma + \pi)$$

wo wiederum der letzte Factor der drey Winkel in IV Ueberschuß über 2 Rechte ist (3).

31) Da nun die letzten vier Kugeldreyecke in (23) den ersten vieren gleich sind, so ist vermöge (26 .. 30) allgemein dargethan:

Jedes Kugeldreyeck, verhält sich zur ganzen Kugelfläche, wie der Ueberschuß der Summe seiner drey Winkel über zweene Rechte, zu acht Rechten.

32) Also, um den Satz kurz in Zeichen darzustellen, nenne man die Fläche eines Kugel-

geldreyecks = T; seine drey innern Winkel A, B, C, so ist $T = \frac{A+B+C-180^\circ}{720^\circ}$. S.

Exempel. Es sey $c = 66^\circ 45'$; b = 65 Gr 30 M 45 S; a = 39 Gr 29 M Daraus berechnet Wolf El. Trig. Sphaer. §. 166. u. f.

C =	82 Gr	34 M	6 S
B =	79	9	59
A =	43	20	
Summe =	205	4	5
Ueberschl =	25	4	5 = 90445 S

wie leicht aus der Tafel am Ende der IV. astronomischen Abhandlung berechnet wird.

Ferner 720 Gr = 2592000 S

log 90445 = 4,9563846

log 2592000 = 6,4136350

log (T:S) = 0,5427496 — 2

log 4.π = 1,0992099

0,6419595 — 1

Diese Logarithmen geben: Der von T:S; das Dreyeck = 0,034893 der Kugelfläche. Und weil 4.π die Kugelfläche durch des Halbmessers Quadrat ausgedruckt ist:

So giebt der letzte Logarithme des Dreyecks Fläche = 0,43849 vom Quadrate des Halbmessers.

33) Ist die Verhältniß der Flächen von Kugeldreyecke und Kugel gegeben, so findet man

den Ueberschuß der drey Winkel über zweene rechte $= A + B + C - 180° = \frac{2.T}{S}.360°$

So: wenn das Dreyeck $= \frac{1}{360}$ der Kugelfläche seyn sollte, wäre der drey Winkel Summe $= 182$ Grad.

Und wenn es dazu gleichseitig seyn soll, jeder Winkel $= 60\frac{2}{3}$ Grad.

34) Offenbahr giebt des Dreyecks Fläche, mit der Kugelfläche dividirt einen bejahten Quotienten: Also ist die Summe der drey Winkel in jedem Kugeldreyecke grösser als zweene rechte.

Dieser Satz ist freylich schon bekannt, ehe man die Fläche des Kugeldreyecks berechnen lehrt, Er steht auch in meiner astronomischen Abhandlung I. Samml. II. Abh. 2. Cap. 41. §. Wer ihn aber noch nicht wüsste, erkennt ihn doch sogleich in gegenwärtiger Formel.

Wäre die Summe zween rechten gleich, so verschwände der Quotient $\frac{T}{S}$. Die Seiten müssten so klein seyn daß man das Dreyeck für ein ebenes, gegen die Kugelfläche unbeträchtliches ansehen könnte.

35) Kein Kugeldreyeck das in drey Bogen grösster Kreise eingeschlossen ist, kann grösser seyn als die halbe Kugelfläche.

Man

Man nehme irgend einen Bogen eines grössten Kreises als Grundlinie des Dreyecks; so muß man noch einen Punct in der Kugelfläche nehmen, von welchem die Schenkel nach den beyden Gränzen der Grundlinie gehn. Dieser Punct, liegt in einer der beyden Kugelhälften, welche der erst erwähnte grösste Kreis macht, also liegen in ihr auch die beyden Schenkel, und folglich die drey Seiten des Dreyecks.

Man wird in diesem Beweise keinen Fehler angeben können, wenn man sphärisches Dreyeck in der allgemein gewöhnlichen Bedeutung nimmt. Und doch läßt sich etwas so nennen, das grösser ist als halbe Fläche der Sphäre. Ich rede davon in der 35. Abh. 10. XXI; wenn man diese Stelle nachsehen will, wird man finden, warum ich in dem Satze gesagt habe: das Dreyeck solle eingeschlossen seyn.

36) Vorerwähnter Punct, von welchem die Schenkel nach den Gränzen der Grundlinie gehn, nähere sich immer mehr und mehr der Ebene, und folglich, weil er in der Kugelfläche ist, dem Umfange, des grössten Kreises, in welchem man den Bogen als Grundlinie nahm; So nähern sich die beyden Schenkel, immer mehr und mehr Bogen, die mit der Grundlinie zusammen, einen ganzen Kreis ausmachen, und jeder Winkel des Dreyecks nähert sich immer mehr und mehr zween rechten.

37) Also: der ganze Kreis aus drey Bogen zusammen gesetzt, ist die Gränze an welcher sich das Dreyeck verliert, sechs rechte Winkel sind die Gränze der Summe seiner Winkel, die halbe Kugelfläche ist die Gränze seiner Grösse.

Das zeigt die Formel (33) folgendergestalt: $\frac{T}{S}$ kann nicht grösser werden als $\frac{1}{2}$ (35) folglich $A + B + C - 180$ Gr. nicht grösser als 360 Gr.; also: die Summe der drey Winkel, nicht grösser als sechs Rechte.

Ist sie so groß, so ist das Dreyeck zum grössten Kreise geworden, nähern kann sich die Summe, sechs Rechten so genau man will (37).

Man sehe das Exempel des gleichseitigen Dreyecks; 31. Abh. XXIII.

$\frac{2.T}{S}$. 360° als ein Winkel betrachtet.

38) Offenbahr ist es ein Theil von vier rechten, nie grösser. (35) Dieses Winkels (33) den ich W nennen will

$$\text{Sinus} = - \sin (A + B + C)$$
$$\text{Cosinus} = - \cos (A + B + C)$$

Dieser Winkel durch eine Zahl von Secunden ausgedruckt.

39) Aus 21 Abhandl. 26; ist

$$S = 4.180.3600.1.e$$

was 1. e bedeutet ist daselbst (25) erklärt.

Nun

Nun sind 360 Gr. = 2. 180. 3600 Secund.

Also ist $W = \frac{T}{1.e}$ Secunden.

Was die Menge von Secunden angiebt ist eine ungenannte Zahl, weil 1. e ein Rechteck, und T eine Fläche ist.

Es sey $T = q. e^2$ oder die Fläche des Dreyecks betrage q Quadrate deren jedes die Länge des Bogens einer Secunde zur Seite hat, So ist $W = \frac{q. e}{1}$ Secunden.

40) Exempel. Des Dreyecks Fläche soll dem Quadrate des Halbmessers gleich seyn; also $q = p^2$ (21 Abh. 24) folglich die Menge der Secunden in W; $= p^2. \frac{e}{1} = p.$

Diese Menge von Secunden, beträgt 57 Gr 17 M 44 S .... (1. astron. Abh. 102).

Die Kugelfläche ist noch nicht 13 mahl so groß als das Quadrat des Halbmessers; also beträgt dieses Dreyeck mehr als der dreyzehnte Theil der Kugelfläche. Daher übertrifft die Summe seiner Winkel, zween rechte um soviel Grade. Ein Dreyeck mit drey rechten Winkeln, beträgt den achten Theil der Kugel, und bey ihm ist der Ueberschuß 90 Grad.

Kugeldreyeck in geographischen Meilen.

41) Wenn die geographische Meile $= M$, der Kugel Halbmesser $= r = \frac{5400 . M}{2 . \pi}$, ihre Fläche $= \frac{5400^2 . M^2}{\pi}$; So sey das Dreyeck $= n . M^2$ also

$$n = \frac{A + B + C - 180^\circ}{2 . 360^\circ} . \frac{(15 . 360)^2}{\pi}$$

$$= \frac{A + B + C - 180^\circ}{1^\circ} . \frac{15 . 15 . 180}{\pi}$$

42) So giebt sich das Dreyeck in geographischen Quadratmeilen, wenn seine Winkel gegeben sind. Man kann umgekehrt fragen: Wieviel beträgt der Ueberschuß seiner Winkel über zweene rechte, wenn der Innhalt in Quadratmeilen gegeben ist?

43) Da wäre

$$A + B + C - 180^\circ = n . \frac{\pi}{15 . 15 . 180} . 1^\circ$$

44) Druckt man rechter Hand, den Grad durch 3600 Sec. aus, so ist $\frac{3600}{15 . 15 . 180} = \frac{4}{45}$ Folglich, wenn das Dreyeck n Quadratmeilen halten soll, so ist der Ueberschuß der Summe seiner Winkel über 180 Grad; $= \frac{4}{45} . \pi . n$ Secunden.

45)

45) Der beständige Factor, ist $= \frac{8}{90} \pi = \frac{8.3,14159\ldots}{90} = 0,279252$ Sein Logarithme findet sich $= 0,4459974 - 1$ Umgekehrt $\log \frac{90}{8.\pi}$ gehört der Zahl 3,5820 —.

46) Aus der Zahl des letztgenannten Logarithmen folgt, daß das Dreyeck mehr als 3,58 Quadratmeilen halten muß wenn der Ueberschuß der Summe der drey Winkel, eine Secunde betragen soll.

47) Exempel. Das Dreyeck halte 80 Quadratmeilen, so ist der Ueberschuß $=$ 80. 0,279 $=$ 22,32 Secunden.

48) Man findet diese Untersuchung in Joh. Tob. Mayers jetzigen Hofr. und Prof. der Phys. und Mathem. zu Erlangen, praktischer Geometrie III. Th. 356 §.

Er setzt den beständigen Factor (45) $=$ 0,192 giebt aber den allgemeinen Ausdruck wie selbiger gefunden wird nicht an. Ich darf also wohl vermuthen er habe sich verrechnet. Für (47) findet er 14,2 Secunden, und doch wäre 80. 0,192 $=$ 15,36.

32.

Vergleichung des gleichseitigen Kugeldreyecks mit der Kugelfläche.

I) Seine Seite sey $= \eta$; Winkel $= \varkappa$; So ist (sphär. Trigonom. 8. Satz) $\sin \frac{1}{2}\varkappa = \frac{\sin \frac{1}{2}\eta}{\sin \eta} = \frac{1}{2 \cos \frac{1}{2}\eta}$; Also $\cos \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2 \cdot \sin \frac{1}{2}\varkappa}$.

II) Des Kugeldreyecks Fläche ist $\frac{3\varkappa - 180^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{1}{2}S$ oder $\frac{\varkappa - 60^\circ}{240^\circ} \cdot S$.

III) Sie sey $= \frac{1}{n} S$; so ist $\varkappa = \frac{240^\circ}{n} + 60^\circ$.

IV) Also für

$n =$	3	4	5	6	8	10	20
$\varkappa =$	140°	120	108	100	90	84	72
$n =$	24	30	60	120	240	480	2400
$\varkappa =$	70	68	64	62	61	$60\frac{1}{2}$	60, 1

V) Es sey für $n = 2400$; $\frac{1}{2}\varkappa = 30^\circ\, 3'$

$20 + \log 0,5 = 19,6989700$

$\log \sin \frac{1}{2}\varkappa = 9,6996258$

$\log \cos \frac{1}{2}\eta = 9,9993442$

Ist

Ist in den löserischen Tafeln (Astron. Abhandl. 2. Samml. Vorrede)

$$\begin{array}{rrrrr} \log \sin & 86^\circ & 51^\circ & 7'' & + \\ \text{also } \frac{1}{2}\eta = & 3 & 8 & 53 & - \\ \eta = & 6 & 17 & 46 & - \end{array}$$

Winkel des gleichseitigen Kugeldreyecks wenn die Seite klein ist.

VI) Allsdann lässt sich der Seite Cosinus nicht wohl aus den Tafeln nehmen weil Sinus von Bogen die sehr nahe an 90 Grad fallen vom Sinustotus, in den Theilen welche die Tafeln angeben, nicht unterschieden sind, mit den Logarithmen verhält es sich auch so.

VII) Statt dessen, kann man brauchen, daß eines kleinen Bogens, Sinus und Tangente, ohne beträchtlichen Fehler mit dem Bogen selbst können verwechselt werden, sein Cosinus aber für 1 angenommen.

VIII) Nun ist allgemein (I)
$\sin \frac{1}{2}\varkappa = \frac{1}{2}.\sec \frac{1}{2}\eta$ (Trigon. 4. Erkl. 5. Zus:)
$= \frac{1}{2}.\sqrt{(1 + (\text{tang } \frac{1}{2}\eta)^2)}$ (Eben daselbst).

Die Secante der kleinen halben Seite ist (VII) $= \sqrt{(1 + \frac{1}{4}\eta^2)} = 1 + \frac{1}{8}.\eta^2$ wenn man höhere Potenzen der Seite als die zweyte weglässt. (An. endl. Gr. 625)

Wem die analytische Art die Quadratwurzel durch eine Reihe auszudrucken nicht bekannt wäre, der dürfte sich die Sache nur so auf das

Verfahren der gemeinen Arithmetik bringen: Der erste Theil der Wurzel ist offenbahr = 1; Wenn man nun vom vorgegebenen Quadrate, das Quadrat des ersten Theils der Wurzel abzieht, und den Rest mit dem doppelten des ersten Theils der Wurzel dividirt, findet sich der zweyte Theil, (Arithmet. 4. Cap. 23) weiter geht man hie nicht.

IX) Nun sey e die Länge des Bogens vom Halbmesser = 1 der eine Secunde misst. Diese Länge und ihr Logarithme finden sich Geom. 44. S. 7 Zus. V und IX.

X) Ist also die Zahl der Secunden welche auf die Seite gehen = m; daher in Theilen des Halbmessers $n = m. e$; so ist die Secante (VIII) $= 1 + \frac{1}{8}. m^2. e^2$.

XI) Da der Winkel nur wenig über 60 Gr. ist, so sey $\frac{1}{2}\varkappa = 30^\circ + \frac{1}{2}. y. e$; wo y die Zahl von Secunden ist, um welche, der ganze Winkel des Dreyecks, 60 Grad übertrifft. Da ist nun $\frac{1}{2}. y. e$ zugleich Länge des Bogens von $\frac{1}{2}. y$ Secunden, und Sinus dieses Bogens (VII) Auch wird dieses Bogens Cosinus für 1 angenommen.

XII) Folglich aus Trigonometr. 19. Satze

$$\sin \tfrac{1}{2}\varkappa = \tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \tfrac{1}{2}. y. e.$$

XIII)

XIII) Diesen Sinus, der halben Secante (IX) gleich gesetzt (VIII) kömmt

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot y \cdot e = \frac{m^2 \cdot e^2}{16} \text{ also } y = \frac{m^2 \cdot e}{4 \cdot \sqrt{3}} = \frac{e \cdot \sqrt{3}}{12} \cdot m^2.$$

XIV) Für eine andre Seite, ist nur m anders; Man hat also einen beständigen Logarithmen;

$$\begin{aligned} \log e &= 0,6855749 - 6 \\ \log \sqrt{3} &= 0,2385606 \\ &\quad 0,9241355 - 6 \\ \log 12 &= 1,0791812 \\ \text{best Log} &= 0,8449543 - 7 \end{aligned}$$

XV) Exempel. Jede Seite des Dreyecks sey = 1 Grad; also m = 3600

$$\begin{aligned} 2 \cdot \log m &= 7,1126050 \\ \text{beständ Log} &= 0,8449543 - 7 \\ \log y &= 0,9575593 \\ \text{giebt } y &= 9,069 \end{aligned}$$

des Dreyecks Winkel = 60 Gr 0 M 0,069 S.

Dieses Exempel läßt sich noch nach (I) durch die Tafeln berechnen.

$$\begin{aligned} 20 + \log \tfrac{1}{2} &= 19,6989700 \\ \log \cos 30' &= 9,9999835 \\ \log \sin \tfrac{1}{2}\varkappa &= 9,6989865 \end{aligned}$$

giebt

giebt den halben Winkel = 30 Gr 0 M 4,5 S
den ganzen = 60 0 9

Und das Dreyeck = $\frac{9}{240.60.60} = \frac{1}{96000}$

der Kugelfläche.

XVI) Aber wenn die Seite 1 Minute wäre, fände man in den avignoner Tafeln, bey dem Cosinus von 30 S. keinen andern Logarithmen als beym Sinustotus wegen (VI) und müsste Tafeln haben die den Logarithmen von $\frac{1}{2}$, sowohl als die Logarithmen der Sinus, auf mehr als sieben Decimalstellen angäben. Nach der Formel, rechnete ich so: m = 60; also

2. log m = 3,5563025
0,8449543 — 7
log y = 0,4012568 — 3
y = 0,002519

XVII) Bey einer Disputation des vormahligen Prof. der Physik zu Leipzig, Funk, stand die Thesis: Geometra in campo ex tribus trianguli angulis, latera inuenire potest. Freylich nur ein witziger Einfall zum Disputiren, den Er so vertheidigen wollte: Weil die Erde eine Kugel ist, so ist jedes Dreyeck auf dem Felde ein sphärisches, und im Kugeldreyecke hat man die Seiten aus den Winkeln.

XVIII) Allerdings, wenn man die Winkel auf dem Felde so genau messen kann, als erfodert wird.

Wenn

Wenn der Geometer drey Winkel seines Dreyecks, jeden 60 Grad 9 Sec. fände, so wüsste er, jede Seite sey ein Grad auf der Erdkugel, also 15 geographische Meilen, oder etwa 57108,5 Toisen. Die drey Winkel eines solchen Dreyecks bekömmt der Feldmesser nicht zu messen, wenn er sich auch getraute 9 Secunden bey 60 Graden anzugeben.

XIX) Eine Minute auf der Erde beträgt 5710,85 pariser Fuß, und der Feldmesser der aus den Winkeln eines gleichseitigen Dreyecks dessen Seite diese Grösse hätte, die Seite herleiten wollte, müsste jeden Winkel in Tausendtheilen einer Secunde haben (XVI).

XX) So kann doch geometra in campo, nie leisten was ihm die Thesis zuschreibt. Daß aber die drey Winkel eines Dreyecks auf der Erde mehr betragen als zweene rechte, ist bey Messungen die ins Grosse gehen, wie bey Gradmessungen, nicht unbemerkt geblieben.

XXI) Daß das Dreyeck auf der Kugel schon einen beträchtlichen Raum einnehmen muß, wenn der Ueberschuß der Summe der Winkel über 180 Grad nicht ganz unmerklich seyn soll, lehret schon 30 Abh. 33. Ich betrachtete hie das gleichseitige Dreyeck besonders, weil man da bequem aus seiner Seite rechnen kann.

Wie

Wie das gleichseitige Kugeldreyeck sich ändert indem sein Winkel wächst.

XXII) Indem in (I) der Winkel von 60 Grad bis an 180° wächst, nimmt der Cosinus der Hälfte der Seite von 1 bis an $\frac{1}{2}$ ab, das ist η wächst von 0 bis an 120°.

Nähmlich, wenn der Winkel 60 Grad seyn sollte, müsste das Kugeldreyeck ein ebenes seyn, oder seine Seite ein verschwindender Bogen, den man für gerade annähme.

In Winkeln von 180 Graden, drey Bogen jeder = 120 Grad an einander gefügt geben einen grösten Kreis als das letzte dieser Dreyecke. Auch begränzt er die Halbkugel, wie $\varkappa =$ 180° in (I) gesetzt zeigt.

XXIII) Man setze $\varkappa = 177°$, also die Hälfte 88° 30′ so ist

$$\begin{aligned} 20 + \log \tfrac{1}{2} &= 19{,}6989700 \\ \log \sin \tfrac{1}{2}\varkappa &= 9{,}9998512 \\ \log \cos \tfrac{1}{2}\eta &= 9{,}6991188 \end{aligned}$$

giebt $\frac{1}{2}\eta$ = 59 Gr 59 M 20 S.
die Seite = 119 58 40

welches zur Erläuterung von 30. Abhandl. 37 dient: Ein Beyspiel daß die Summe der Winkel an sechs rechte, und die Summe der Seiten an 360 Grad, so nahe als man will kommen kann.

Gleich-

Gleichseitiges Dreyeck dessen Fläche des Halbmessers Quadrate gleich ist.

XXIV) Nach 30 Abh. 40; beträgt der Ueberschuß jedes seiner drey Winkel über 60 Grad;

$19^\circ\ 5'\ 54'' \ldots$

Daher $\frac{1}{2}\varkappa = 39\ 32\ 57 \ldots$

von $20 + \log 0{,}5 = 19{,}6989700$

abgezog. $\log \sin \frac{1}{2}\varkappa = 9{,}8039623$

$\log \cos \frac{1}{2}\eta = 9{,}8950077$

$\frac{1}{2}\eta = 39^\circ\ 15'\ 23''$

des Dreyecks Seite $= 78\ 30\ 46$

33.

Fläche eines rechtwinklichten sphärischen Dreyecks aus seinen Seiten.

1) Die Seiten des Dreyecks werden wie gewöhnlich mit den kleinen Buchstaben der Winkel benennt denen sie gegenüber stehn. Der rechte Winkel sey A.

2) Was ich in (30 Abh. 38) W genannt habe, ist hie $= B + C - 90^\circ$; also

$$\sin W = -\cos (B + C)$$
$$\cos W = +\sin (B + C)$$
$$\operatorname{tang} W = -\cot (B + C)$$

wie auch aus der dortigen allgemeinen Formel folgt.

3) Nun

3) Nun aus sphär. Trig. 1. Satz I und V;

$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$; $\sin C = \frac{\sin c}{\sin a}$

$\cos B = \cot a . \tan g c$; $\cos C = \cot a . \tan g b$

also

$$-\sin W = (\cot a)^2 . \tan g c . \tan g b - \frac{\sin b . \sin c}{(\sin a)^2}$$

$$= \frac{(\cos a)^2 . \tan g c . \tan g b - \sin b . \sin c}{(\sin a)^2}$$

4) Weil nun $\cos a = \cos b . \cos c$ (sphär. Trig. I Satz III) so ist

$(\cos a)^2 . \tan g b . \tan g c = \cos b . \cos c . \sin b . \sin c$

5) Folglich (3)

$$+\sin W = \frac{\sin b . \sin c . (1 - \cos b . \cos c)}{(\sin a)^2}$$

6) Da ist nun der letzte Factor im Zähler $= 1 - \cos a$ (4) $= 2 . (\sin \frac{1}{2} a)^2$ (Trigonom. 19 S. 7. Zus.)

7) Der Nenner in (5) ist $= 4 . (\sin \frac{1}{2} a . \cos \frac{1}{2} a)^2$.

8) Folglich $\sin W = \frac{\sin b . \sin c}{2 . (\cos \frac{1}{2} a)^2}$

9) Dieses steht beym Euler de Mensura angulor. solidor. §. 12; Acta Ac. Imp. Petrop. pro anno 1778; pars posterior p. 39. Nur hat er den Nenner durch $1 + \cos a$ ausgedruckt.

10)

10) Wenn man aus der Spitze eines sphärischen Winkels, Bogen von 90 Graden = a = b; nimmt, so geben sie, mit der Seite = c welche das Maaß des sphärischen Winkels ist, ein Dreyeck, für welches also $\frac{1}{2}$ a = 45 Grad, und sin W = sin c; also $\frac{2.T}{S} = \frac{c}{360^\circ}$

Nähmlich das Dreyeck ist halb so groß als die Fläche zwischen den beyden Halbkreisen die den Winkel = c machen.

11) Exempel zu (8); $b = 20^\circ$; $c = 17^\circ$ $a = 26^\circ\ 2' -$ nähmlich

log cos b = 9,9729858
log cos c = 9,9805963

log cos a = 9,9535821

Folglich $\frac{1}{2}$ a = 13° 1′ —

10 + log sin b = 19,5340517
log sin c = 9,4659353

28,9999870

log 2 + 2. log cos $\frac{1}{2}$ a = 20,2784194

log sin W = 8,7215676

W = 3° 1′ +

Also $\frac{T}{S} = \frac{181}{2.360.60}$

log 181 = 2,2576786
log 43200 = 4,6354837
0,6221949 — 3
giebt T = S. 0,004189

Zur Probe nach sphär. Trigonom. I. Satz II.

10 + log tang b = 19,5610658
log sin c = 9,4659353
log tang B = 10,0270011
giebt B = 51° 13′
auch so C = 41 47
Summe = 93

welches mit voriger Rechnung übereinstimmt, da ich die Winkel nicht mit grösster Schärfe gesucht habe.

34.

Fläche durch Seiten und Winkel zusammen bey einem kleinen Dreyeck ausgedruckt.

1) Man stelle sich aus der Spitze des Winkels A einen Bogen auf die gegenüber stehende Seite a, senkrecht vor. Er heisse h.

2) Nun ist

1 : sin B = sin c : sin h
sin A : sin C = sin a : sin c

sin A : sin B. sin C = sin a : sin h

Für jedes Kugeldreyeck.

3) Wenn man den Sinustotus, und so jeden andern als eine Linie ansieht, so muß man das vierte Glied dieser Proportion so ausdrucken:

$\sin h = \frac{\sin B . \sin C}{1 . \sin A}$. sin a damit das was man in sin a multiplicirt, eine ungenannte Zahl, und sin h eine Linie darstellt. (Geom. 66 Satz)

4) Die erwähnte ungenannte Zahl sey = n also sin h = n. sin a.

5) Man kann jeden Sinus als eine Menge von Secunden ansehn, die Secunde = e in Theilen des Halbmessers nach Geom. 44 Satz 7. Zus. ausgedruckt.

6) Ist in der Bedeutung m die Menge von Secunden welche auf den Sinus von a geht,

oder $\sin a = m.e$; so hat man in (4)
$\sin h = m.n.e.$
Dieses gilt für jedes Kugeldreyeck.

Nun nehme man eines solchen Dreyecks Seiten klein an.

7) Da kann man es wie ein ebnes behandeln, seine Fläche ist $= \frac{h.a}{2}$, und die kleinen Bogen mit ihren Sinussen verwechselt, diese Fläche $= n.a.\frac{1}{2}a = \frac{n.m^2.e^2}{2} = T.$

8) Der Ueberschuß der Summe der Winkel über 180 Grad, der Winkel W (30. Abh. 39) ist also hie $= \frac{n.m^2.e}{2.1}$ Secunden $= \frac{n.a^2}{2.e}$ Secunden; a bedeutet die Länge des Bogens welcher dem Winkel A gegenübersteht.

9) Befände sich auf einer Kugel deren Halbmesser $= r$ ein Dreyeck, dem bisher betrachteten ähnlich, und wäre in selbigem, die Seite a^* der Seite a ähnlich, also ihre Länge $= r.a$, so wäre für dieses Dreyeck $W = \frac{n}{2.e}.\left(\frac{a^*}{r}\right)^2$ Secunden wo $\frac{n}{2.e} = \frac{1}{2}n.p$ (21. Abh. 24)

10)

10) In Mem. de l'Ac. des Sc. 1787; p. 352 ... findet sich von *Mr. le Gendre*, ein Aufsatz: Sur les operations trigonometriques dont les resultats dependent de la figure de la terre. Es ist eine Sammlung von Formeln, die bey grossen Messungen auf der Erde; z. E. Gradmessungen brauchbar sind, aber ohne Beweis, und ohne anzuzeigen, wo man den Beweis findet. So p. 152. Winkel deren Schenkel gegen den Horizont geneigt sind, auf horizontale zu bringen, eine Vorschrift, die nur in andern Zeichen, völlig einerley mit Mayers Vorschrift ist, deren Beweis ich I. astronom. Abh. 206; gegeben habe. Vorschriften wie hie 7; 9; stehen da p. 358; Formule pour avoir l'excès de la somme de trois angles d'un triangle reduit à l'horizon sur 180 degrés. Er nennt R was ich p nenne, sein a ist mein a* weil er sogleich eine Länge die auf der Erde ist gemessen worden als Bogen eines grösten Kreises auf dieser Erde ansieht.

11) Ich bekenne daß ich den Nutzen dieser Untersuchung nicht einsehe. Die Fläche des kleinen Dreyecks nach (7) zu berechnen, muß man ja der drey Winkel Sinus haben, also hat man die Winkel und den Ueberschuß ihrer Summe, ehe man die Fläche hat, aus der man diesen Ueberschuß berechnen soll. Mich deucht also in Hr. l. G. Verfahren werde ein Zirkel begangen.

12) Er giebt auch nur ein Exempel von einem gleichseitigen Dreyecke, dessen Seite 20000 Toisen lang sey. Den Halbmesser der Erde selbst = r giebt er nicht an, nur desselben Logarithmen in sechs Decimalstellen. Ich will diesen Logarithmen brauchen, die siebente Stelle mit o ausgefüllt, und berechnen was für einen Bogen bey diesem Halbmesser 20000 Toisen in Secunden geben, den nenne ich wie in 31. Abhandl.

$$\begin{aligned} \log 20000 &= 4{,}3010300 \\ -\log e &= -\,0{,}6855749 + 6 \\ & \qquad 9{,}6154551 \\ \log r &= 6{,}5154390 \\ \log \eta &= 3{,}1000161 \end{aligned}$$

giebt $\eta = 1259$ Secunden $= 20' 59''$

Nun rechne ich nach 31. Abh. XV. dortiges $m = 1259$

$$\begin{aligned} 2 \log m &= 6{,}2000514 \\ \text{best log} &= 0{,}8449543 - 7 \\ \log y &= 0{,}0450057 \end{aligned}$$

Der Winkel des Dreyecks übertrifft also den von 60 Graden um 1,109 Secunden, und die drey Winkel übertreffen 180 Grad um 3,327 Secunden. Daraus hat man also wenn man will die Fläche des Dreyecks, ohne das Perpendikel zu brauchen, und das Dreyeck wie ein ebenes zu berechnen.

13)

13) *Le Gendre* giebt den Ueberschuß der Summe der Winkel über zweene rechte $3\frac{1}{8}$ Secunden, zeigt aber nicht wie er ihn gefunden hat, also lernt man von ihm nicht wie er (hie 3) n fände ehe er den Winkel weiß. Wenn man den Winkel weiß braucht man es nicht.

14) Aus log r den l. G. annimmt (12) folgt der Halbmesser = 3276717 Toisen, Ein wenig kleiner als der Halbmesser des Aequators der in den berliner Tafeln angenommen wird, (Geogr. 19; II) Dieß nur im Vorbeygehn, weitere Untersuchung darüber wäre hie unnütz.

15) Hr. l. G. sagt: "Bey grossen geographischen Messungen kämen unendlich wenig krumme Dreyecke vor, die dürfe man nicht als geradelinicht betrachten und den Ueberschuß der Summe ihrer Winkel über 180 Gr. vernachlässigen, wollte man sie als sphärische behandeln so würde man bey den kleinen Kreisbogen weder genau noch mit den gewöhnlichen Tafeln bequem rechnen."

Wie man bey kleinen Kreisbogen, ihre Sinus, und Cosinus anzugeben schon in der ebenen Trigonometrie verfährt, ist bekannt, auch von Hr. l. G. gebraucht worden. Es war also gar nicht nöthig, zwischen sphärischen und ebnen Dreyecken eine Mittelart unendlich wenig krumme zu nennen, deren Benennung so mathematisch ist, als das französische Compliment: Je vous suis infiniment obligé.

16) In seinem VI. Art. giebt Hr. l. G. einen Lehrsatz von Kugeldreyecken deren Seiten gegen den Halbmesser klein sind. Er sagt: Wenn man in einem unendlich kleinen Kugeldreyecke die Summe der Winkel = 180 Gr + w setzt, und von jedem Winkel $\frac{1}{3}$ w abzieht, daß der übrigbleibenden Winkel Summe genau 180 Grad ist, so werden die Sinus dieser Winkel sich verhalten wie die Seiten, ihnen gegenüber, und man wird das Dreyeck mit so verminderten Winkeln berechnen, als wäre es vollkommen geradelinicht.

Dieser wunderbare Satz, fährt er fort, bringe diese unendlich wenig krummen Dreyecke die ein Mittel zwischen geradelinichten und Kugeldreyecken zu halten scheinen, auf einmahl auf geradelinichte. In allen Fällen müsse man w, vermittelst der Formel des V. Artikels (bey mir 7; 8;) zuerst berechnen. Uebrigens bleibe der Satz der Wahrheit ziemlich nahe, auch für grössere Kugeldreyecke da der Ueberschuß einige Grade wäre.

17) Wenn ich die drey Winkel habe, so habe ich schon w, und berechne nicht erst aus den drey Winkeln die Fläche des Dreyecks als eines ebenen, und leite darnach w aus dieser Fläche her.

Aus drey Winkeln die Seiten zu finden steht Eulers Formel in meiner II. astronom. Abh. 2. Cap. 65; wenn man da $A + B + C - 180^{\circ}$

$180° = w$ setzt, also $-\cos\frac{1}{2}(A+B+C) = +\sin\frac{1}{2}w$ so ist $(\sin\frac{1}{2}a)^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}w.\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B.\sin C}$ woraus man leicht durch gehörige Verwechselung der Winkel, der andern halben Seiten Sinus herleitet. Auch ist da $\frac{1}{2}(B+C-A) = 90° + \frac{1}{2}w - A$.

Ich dächte aus dieser Formel liessen sich die Seiten ohne Schwierigkeit berechnen.

18) Hr. l. G. Verfahren $\frac{1}{3}w$ zu jedem Winkel zu addiren ist ohngefähr wie der Feldmesser ihres, wenn die Summe der Winkel am Umfange einer Figur ihnen mit der Theorie nicht zutrifft, Sie dividiren auch den Unterschied mit der Zahl der Winkel, und setzen den Quotienten gehörig zu jedem Winkel.

19) Ich will jetzo den wunderbaren Satz nicht untersuchen, er gehört in die sphärische Trigonometrie, und führte mich zu weit von meinem jetzigen Gegenstande. Auch scheint mir etwas wunderbares, der Wahrheit nur nahe, und nicht völlig wahr, nicht so gar viel Mühe zu verdienen. Bedenklich ist mir daß die drey Winkel des Kugeldreyecks doch sehr ungleich seyn können; Die Verminderung um $\frac{1}{3}w$ ist also bey einem beträchtlicher als bey dem andern, und ändert die Verhältnisse ihrer Sinusse ungleich, daß ich nicht deutlich sehe was nun für ein geradelinichtes Dreyeck aus dem sphärischen wird?

Endlich, wenn man im sphärischen nur die drey Winkel weiß, berechnet man aus ihnen die Seiten: Aber im geradelinichten weiß man aus den Winkeln nur die Verhältnisse der Seiten; was hat man also mit dieser Verwandlung gewonnen?

20) Hr. l. G. zeigt diesen Satz nur an, ohne seinen Gebrauch zu entwickeln. Bis ich also sicher bin man könne damit was ausrichten, das sich durch bekannte Lehren nicht ausrichten lässt; werde ich statt des wunderbaren Satzes, und der unendlich wenig krummen Mittelding zwischen sphärischen und ebenen Dreyecken, die natürlichen Kunstgriffe brauchen, bey kleinen Kreisbogen zu rechnen.

35.

Kugelvielecke.

1) Durch einen willkührlichen Punct auf der Kugelfläche K, lege man Bogen gröster Kreise, KA, KB, KC, KD u. s. w. von gleicher oder ungleicher Grösse, in gleichen oder ungleichen Winkeln gegen einander; Das setze man so lange fort, bis die Summe ihrer Winkel um K, 360 Grad beträgt;

Nun lege man durch jedes Paar Endpuncte der Bogen die einander am nächsten sind, wie durch

durch A und B, B und C u. s. w. Bogen grösster Kreise.

So entsteht auf der Kugel eine Figur in lauter Bogen grösster Kreise eingeschlossen ein Kugelvieleck.

ABCDE in der Fig. stellt ein solches Fünfeck vor.

2) Das Vieleck, besteht aus soviel sphärischen Dreyecken als es Seiten hat, der Dreyecke Spitzen sind an K; begreiflich kann das jeder Punct auf der Kugelfläche innerhalb des Vielecks seyn. Jedes Dreyeck hat einen Winkel an der Spitze, und zweene an seiner Grundlinie. Jeder Winkel des Vielecks besteht aus zween Winkeln zweyer an einander liegender Dreyecke an ihrer gemeinschaftlichen Seite; So ist die Summe der Winkel des Vielecks, so groß als die Summe der Winkel der Dreyecke an ihren Grundlinien, das ist: als die Summe aller Winkel der Dreyecke weniger 360 Gr; soviel nähmlich die Winkel an den Spitzen zusammen betragen (1).

Wie bey einer ebenen Figur Geom. 13 S. 6 Zus. Nur ist hie die Summe der Winkel in jedem sphärischen Dreyecke grösser als 180 Gr.

Auch ist das Kugelvieleck nie eine ebene Figur, wenn es nicht ein einziger grösster Kreis ist.

3) Wenn man die Winkelpuncte des Vielecks mit den grossen Buchstaben bezeichnet hat,

so

so nenne man die beyden Winkel der Dreyecke die zusammen den Winkel des Vielecks ausmachen, mit den kleinen gleichgültigen griechischen und lateinischen Buchstaben, so

$$\begin{aligned} EAB &= KAB + KAE \\ &= \alpha + a \\ ABC &= \beta + b \\ BCD &= \gamma + c \\ CDE &= \delta + d \\ DEA &= \varepsilon + e \end{aligned}$$

u. s. w.

Ich gebe die griechischen Buchstaben, den Winkeln KBC, KCD, KDE, KEA u. s. w. damit die dreyerley Buchstaben wenn man um die Figur geht in einerley Ordnung folgen.

4) Die Dreyecke bezeichne ich mit I; II; III; IV; V; die Winkel an ihren Spitzen mit K1; K2; K3; K4; K5.

5) Die Fläche des Vielecks, ist die Summe der Flächen der Dreyecke.

6) Also findet sich die Fläche des Fünfecks das die Figur darstellt folgender Gestalt

Drey:

Dreyeck

$$\left.\begin{array}{l} I = \alpha + b + K1 - 180^\circ \\ II = \beta + c + K2 - 180 \\ III = \gamma + d + K3 - 180 \\ IV = \delta + e + K4 - 180 \\ V = \varepsilon + a + K5 - 180 \end{array}\right\} \cdot \frac{S}{2.360^\circ}$$

$$\text{Summe} = \left(\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon + 360^\circ \\ +a+b+c+d+e-5.180^\circ \end{array}\right) \cdot \frac{S}{2.360^\circ}$$

$$= \left(A+B+C+D+E-(5-2).180^\circ\right) \cdot \frac{S}{2.360^\circ}$$

7) Man entdeckt aus diesem Exempel leicht die Formel für ein Vieleck von n Seiten. Die Rechnung für sie erfodert n Zeilen, wie 5 beym Fünfecke. Setzt man den Factor der allen Zeilen gemeinschaftlich ist beyseite, so ist die Summe der übrigen Factoren, in allen Zeilen = der Summe der Winkel des Vielecks + 360 Grad — n. 180 Grad.

8) Nennt man also die Summe der Winkel des Vielecks $= \mu$; so ist die Fläche eines Vielecks von n Seiten

$$= (\mu - (n-2).180^\circ) \cdot \frac{S}{2.360^\circ}$$

$$= \left(\frac{\mu}{360^\circ} - \tfrac{1}{2}.n + 1\right) \cdot \tfrac{1}{2}.S.$$

9) Diese Regel giebt Broscius in der Anfangs vor 31 Abhandl. angeführten Schrift XXIV;

XXIV; p. 78. Sein Ausdruck ist in meinen Zeichen
$\mu - (2.n - 4).\ 90^\circ : 720^\circ =$ Fläche : S.

10) I) Wenn man eine Seite verlängert, z. AB; so macht die Verlängerung mit der folgenden Seite einen äusern Winkel $= 180^\circ -$ ABC. Geht man so rings um das Vieleck, und hat es lauter auswärts gehende Winkel, so machen diese alle, mit allen äusern zusammen n. 180 Grad. Heisst also der äusern Summe $= \lambda$; so ist $\lambda + \mu =$ n. 180 Grad.

II) Setzt man in (8) $\mu =$ n. $180^\circ - \lambda$ So wird daselbst der erste Factor $= 360^\circ - \lambda$; und das Vieleck $= \left(1 - \frac{\lambda}{360}\right).\ \frac{1}{2}$ S.

III) Weil der Werth des Vielecks gewiß nicht verneint ist, so ist λ nicht grösser als 360 Grad, und kein Vieleck das lauter auswärts gehende Winkel hat, grösser als die halbe Kugelfläche.

IV) Nähmlich wenn alle Winkel des Vielecks auswärts gehende sind, so ist keiner grösser als 180 Grad, folglich ihre Summe μ, nicht grösser als n. 180 Gr. So zeigt auch (8) daß das Vieleck nicht grösser als $\frac{1}{2}$ S ist.

V) Wäre genau $\mu =$ n. 180 Grad so hätte das Vieleck n Winkel jeden $= 180$ Grad weil keiner grösser seyn kann. Seine Seiten wären n Bogen, eines und desselben grössten Krei-

Kreises, der allerdings die halbe Kugelfläche enthält. Es gäbe keine äusre Winkel, also wäre $\lambda = 0$.

VI) Die Summe der Winkel des Vielecks, ist die Summe der Winkel von n Dreyecken um 360 Grad vermindert, um die Summe der Winkel die um K herum liegen. Die Summe der Winkel der Dreyecke ist grösser als n. 180°; Folglich μ grösser als (n — 2). 180 Grad.

VII) Diese beyden Grössen gleich setzen hiesse das sphärische Vieleck in ein ebenes verwandeln wo die Summe der Winkel soviel beträgt, dessen Fläche verschwände gegen die Kugelfläche, es wäre so was wie beym Dreyecke (31. Abhandl. 34)

VIII) Sind unter des Vielecks Winkeln einwärts gehende, so giebt die Verlängerung einer Seite die nach der Spitze eines solchen Winkels zu geht, keinen äusern Winkel (I) Also kann man, was von λ gesagt wird, nicht anbringen; Auch ist da nicht offenbahr wie in IV; daß μ nicht grösser seyn kann als n. 180 Grad.

IX) Auch lässt sich eine Bedeutung angeben, in welcher man Vielecke nennen kann, die grösser sind als die Hälfte der Kugelfläche.

X) Das Vieleck ABCDE, mit lauter auswärts gehenden Winkeln ist kleiner als diese Hälfte.

Man

Man ziehe durch K einen Durchmesser der Kugel, dessen andres Ende steht also dem K e diametro gegenüber.

Alle Bogen grösster Kreise durch K, zu Halbkreisen ergänzt, schneiden einander in dem bestimmten, dem K gegenüberstehenden Puncte.

XI) Wenn also von K nach allen Winkelpuncten des Vielecks Bogen gehn, so gehn, nach eben den Winkelpuncten, vom entgegengesetzten Puncte, Ergänzungen dieser Bogen zu Halbkreisen.

XII) Wenn ein solcher Bogen, mit der Seite des Vielecks einen gewissen Winkel macht, z. E. KAB; so macht des Bogens Ergänzung zum Halbkreise, mit eben der Seite, an eben dem Puncte einen Winkel der mit dem genannten 180 Grad beträgt. Besteht also des Vielecks Winkel an selbigem Puncte aus zween, deren einen die eine Seite, den andern die anliegende, mit einem und demselben Bogen macht; z. E. EAB = EAK + KAB; So finden sich an dem Bogen der des genannten Ergänzung zum Halbkreise ist, zwischen ihm, und eben den Seiten, zweene Winkel einer 180 Grad — EAK der andre 180 Grad — KAB;

XIII) Geben jene beyden zusammen einen Winkel EAB kleiner als 180 Grad so geben die andern beyden zusammen einen Winkel, den man grösser als 180 Grad zu nennen gewohnt ist.

Lauter solche Winkel kehren ihre Spitzen gegen den Punct welcher dem K entgegengesetzt ist, wenn lauter Winkel jeder kleiner als 180 Grad, an eben den Spitzen, gegen K gekehrt sind.

XIV) Das Vieleck (X) theilt also die Kugelfläche in zweene Theile, in einem befindet sich K; im andern der entgegengesetzte Punct.

Ohngefähr wie eine Sehne den Umfang des Kreises in zweene Theile theilt, in deren einem sich ein Endpunct eines Durchmessers befindet, im andern der entgegengesetzte.

XV) Betrachtet man also das Vieleck in Beziehung auf den entgegengesetzten Punct, so hat es da lauter einwärts gehende Winkel, derselben Summe ist = n. 360 Grad $- \mu$.

Setzt man diese Summe in (8) statt μ welches dorten die Summe bedeutete, so kömmt für des Vielecks Fläche;

$$\left(n - \frac{\mu}{360^\circ} - \tfrac{1}{2}n + 1\right) \cdot \tfrac{1}{2}S$$

Das zu der Fläche die in (8) angegeben ward addirt, giebt zur Summe S, wie gehörig.

XVI) Jedes Kugelvieleck kann also angesehen werden, wie es auf der Kugelfläche einen Raum begränzt kleiner als derselben Hälfte, und auch einen Raum grösser als diese Hälfte, beyde zusammen machen die ganze aus.

XVII) Hätte ein sphärisches Vieleck das der Rechnung (8) gemäß weniger als die Hälfte der sphärischen Fläche beträgt, unter seinen Winkeln auch einwärts gehende, so gäbe es eines das mit ihm diese Fläche ergänzt, und auswärts gehende hat, wo jenes seine einwärts gehn.

XVIII) Freylich denkt wohl jeder beym sphärischen Vielecke zuerst — das welches kleiner als die Halbkugel ist, und muß sich erst entwikkeln, daß mit dem noch ein andres vorhanden ist, ohngefähr wie man bey dem sphärischen Dreyecke ABC in der 31. Abh. eines denkt obgleich mit demselben allemahl noch sieben vorhanden sind.

XIX) Das wird zugleich die Frage beantworten: Wie der Satz XVI; beym sphärischen Dreyecke anzubringen ist. Nähmlich das Dreyeck das mit dem vorgegebenen die Kugelfläche ausmacht besteht aus den andern sieben zusammen. Offenbahr ist durch die drey Bogen AB, BC, CA, auch ein grösseres Stück als die Halbkugel begränzt, das man sich sichtlich machen kann, wenn man das Dreyeck ABC herausschneidet. Freylich hat es ein paradoxes Ansehn.

XX) Nähme man innerhalb des Dreyecks ABC einen Punct an wie K innerhalb des Vierecks, so theilten Bogen durch diesen Punct das Dreyeck in drey kleinere, und die Ergänzungen

dieser

dieser Bogen zu Halbkreisen, theilten aus dem entgegengesetzten Puncte das Stück der Kugelfläche in drey Theile das mit dem vorgegebenen Dreyecke die ganze ausmachte.

XXI) Gleichwohl habe ich 31 Abh. 35; behauptet: kein sphärisches Dreyeck sey grösser als die halbe Kugelfläche: Im Ausdrucke des Satzes, foderte ich eingeschlossen seyn; Ich glaube man kann sagen, das Stück grösser als die Halbkugel (XIX) umgiebt die drey Seiten. Freylich wüsste ich diese beyden Wörter nicht schulgerecht zu definiren. Wenn aber jemand die Sache auf einer Kugel ansehen will, wird er verstehen was ich meyne.

XXII) Und so lassen sich auch wohl die beyden Stücke der Kugelfläche die ein Vieleck zur gemeinschaftlichen Gränze haben (XVI) so unterscheiden, daß das kleinere eingeschlossen ist, das grössere umgiebt.

11) Sind alle Winkel gleich jeder $= \varphi$.

So ist die Fläche $= \frac{n.\varphi - (n-2).180^\circ}{2.360^\circ}.S.$

Man setze $\psi = 90$ Grad $- \frac{1}{2}\varphi$ so bekömmt man die Fläche $= \frac{1}{2}S.\left(1 - \frac{n.\psi}{180^\circ}\right)$.

Vieleck das lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat; ordentliches Kugelvieleck.

12) In (1) lege man durch K gleiche Bogen grösster Kreise in gleichen Winkeln gegeneinander.

Durch ihre Gränzpuncte Bogen grösster Kreise gelegt, geben mit ihnen, gleiche gleichschenklichte Dreyecke, und machen eine Figur, von soviel gleichen Seiten als Winkel um K sind, und lauter gleichen Winkeln. Die Gränzpuncte der Seiten, liegen alle in einem Kreise, dessen Pol K ist.

13) Die Sehnen dieser Seiten geben ein ebenes ordentliches Vieleck, auch von soviel Seiten. Seine Ebene schneidet die Kugelfläche in dem Kreise dessen Pol K ist. (12)

14) In diesem ebenen Vielecke sey der Centriwinkel $= \frac{180^\circ}{n}$, der Polygonwinkel $= \frac{n-2}{n} . 180^\circ$.

15) Der Kreis in dem es beschrieben ist (13) habe zum Halbmesser y; eine Seite sey $= x = 2 . y . \sin \frac{180^\circ}{n}$.

16) Die Winkel am Pole (12) sind alle gleich, ihrer soviel, als Seiten des ebenen, oder auch des Kugelvielecks, also jeder $= \frac{360^\circ}{}$

$\frac{360^\circ}{n}$ = dem Centriwinkel (14) welches mit Geom. 52 S. übereinstimmt.

17) Jede Seite des sphärischen Polygons (12) heisse θ; also, weil der Kugel Halbmesser $= 1$ gesetzt wird; $\sin \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}x = y \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$ (15).

18) Wenn des ebenen Polygons (13) Grösse gegeben ist, so findet sich der Abstand seines Mittelpuncts vom Mittelpuncte der Kugel $= \sqrt{(1 - y^2)}$ welches von 1 abgezogen, den Abstand vom Pole giebt.

19) Man bekömmt also auch ein ordentliches Kugelvieleck, wenn man die Kugelfläche, mit der Ebene eines ordentlichen ebenen Vielecks schneidet, nur muß der Kreis in welchem das letztere beschrieben ist, nicht grösser seyn als der grösste der Kugel.

20) Es sey der Bogen KA = KB u. s. w. (12) $= \psi$, also $y = \sin \psi$ (15) des sphärischen Polygons Winkel $= \varphi$ (10).

21) Im sphärischen Dreyecke KAB, hat man die Grundlinie (17) den Schenkel (20) den Winkel an der Spitze (12) $= \frac{360^\circ}{n}$; also $\sin \theta : \sin \psi = \sin \frac{360^\circ}{n} : \sin \frac{1}{2}\varphi$.

22) Nun ist

$$\sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{x}{y} . \cos \frac{180^\circ}{n} \quad (15)$$

das mit $\sin \psi$ (20) multiplicirt, giebt

$$x . \cos \frac{180^\circ}{n}$$

Ferner $\sin \theta = x . \cos \frac{1}{2} \theta$ (17).

23) Also $\sin \frac{1}{2} \varphi = \dfrac{\cos \frac{180^\circ}{n}}{\cos \frac{1}{2} \theta}$

$$\text{auch} = \frac{\sin \frac{360^\circ}{n}}{2 . \sin \frac{180^\circ}{n} . \cos \frac{1}{2} \theta}$$

24) Wenn nichts weiter gegeben ist, als n, die Zahl der Seiten, des sphärischen, und auch des ebenen Polygons, (16) so ist nichts weiter gegeben, als die Verhältniß $x : y$ (15) $= 2 . \sin \frac{1}{2} \theta : \sin \psi$ (22; 20)

25) Man kann also von θ; ψ eins nach Gefallen annehmen, das andre bestimmt sich aus dem ersten durch n.

26) Auch ist φ durch n und θ gegeben (23).

27) Wenn also die Zahl der Seiten gegeben ist, kann man von folgenden drey Dingen eins nach Gefallen annehmen,

Den

Den Bogen ψ vom Pole, an jeden Winkel des sphärischen Vielecks (20)

Die Seite des Vielecks θ (17)

Den sphärischen Polygonwinkel φ (10)

Jedes dieser drey, bestimmt die übrigen beyden.

28) Exempel. Es sey $n = 5$, also $\frac{180^\circ}{n}$ $= 36^\circ$ davon das Doppelte $= 72^\circ$.

29) Also (23) $\sin \frac{1}{2}\varphi$ grösser als $\cos 36^\circ$, folglich, einmahl: der halbe Winkel grösser als 54 Grad, der ganze Polygonwinkel (10) grösser als 108 Gr.

Der Sinus von 54 Graden gehört auch dem Bogen von 126 Graden. Weiß man also von einem Sinus nur: Er sey grösser als jener, So kann dieser Sinus auch einem Bogen gehören der kleiner als 126 Gr. ist.

Das schränkt den ganzen Polygonwinkel (10) zwischen 108 und 252 Grad ein.

Es ist nichts ungereimtes wenn er über 180 Grad wäre. Es wäre allsdenn in diesem Polygon ein einwärts gehender Winkel, wie auch bey ebenen statt findet (Geom. 13 Satz 7. Zus. Anm.)

30) Man nehme den Polygonwinkel $=$ 120 Gr. also $\frac{1}{2}\varphi = 60$ Gr. also (23)

$$10 + \log \frac{180^\circ}{n} = 19{,}9079576$$
$$\log \sin \tfrac{1}{2}\varphi = 9{,}9375306$$
$$\log \cos \tfrac{1}{2}\theta = 9{,}9704270$$
$$\text{giebt } \tfrac{1}{2}\theta = 20^\circ\ 54' +$$
$$\theta = 41\ 48$$

31) $\log \sin \tfrac{1}{2}\theta = 0{,}5523494 - 1 = \log \tfrac{1}{2}x$ (17)
$\log \sin \frac{180^\circ}{n} = 0{,}7692187 - 1$

(17) $\log y = 0{,}7831307 - 1$
$\tfrac{1}{2}x = 0{,}3567380$
$x = 0{,}71347..$
$y = 0{,}60691..$
$1 - y = 0{,}39308$

32) Für den Abstand vom Mittelpuncte und vom Pole (18)

$\log 1{,}6069 = 0{,}2059889$
$\log 0{,}39308 = 0{,}5944809 - 1$
$1{,}8004698 - 2$
$\log \sqrt{(1-y^2)} = 0{,}9002349 - 1$

Abstand vom Mittelpuncte $= 0{,}79477$
Pole $= 0{,}20522$

Fläche

Fläche dieses sphärischen ordentlichen Fünfecks.

33) In (11) ist des ersten Factors Nenner 5. 120 Grad — 3. 180 Grad = 60 Grad also die Fläche = $\frac{1}{12}$. S.

34) Wegen des Polygonwinkels = 120 Gr. lassen sich um einen Punct, drey solche sphärische Fünfecke legen, deren jedes $\frac{1}{12}$ der Kugelfläche beträgt. Man kann also leicht auf die Gedanken kommen, jedes gehöre (13) einem der zwölf ebenen ordentlichen Fünfecke die das Dodecaeder einschliessen. Hievon sich geometrisch zu überzeugen gehören noch mehr Untersuchungen im Zusammenhange, die hie nicht Platz finden.

Sind bey sphärischen Vielecken gleiche Seiten und gleiche Winkel allemahl beysammen?

34) Was man von ebenen weiß, wird schon geneigt machen die Frage zu verneinen. Man kann sie nur bey ebenen Dreyecken bejahn: Auch ist bey sphärischen Dreyecken die Antwort auf sie bejahend.

Daß ein Satz allgemein wahr sey, läugnen die alten Geometer nie deßwegen weil sie keinen allgemeinen Beweis für ihn hatten, sondern, sie wiederlegten die Allgemeinheit durch, wenigstens ein, Exempel. Das will ich jetzo nachahmen.

Zwey rechtwinklichte, gleichschenklichte, gleiche, Kugeldreyecke, lege man mit ihren Hypotenusen an einander. Sie geben ein Viereck, das zweene rechte Winkel hat, der Diagonale gegenüber auf welche beyde Hypotenusen fallen. Die beyden andern Winkel sind gleiche stumpfe, weil jeder schiefe Winkel der Dreyecke grösser ist als 45 Grad. Hie sind gleiche Seiten mit ungleichen Winkeln.

Ein grösster Kreis, in ungleiche Theile getheilt, ist ein sphärisches Vieleck, mit ungleichen Seiten und gleichen Winkeln jedem = 180 Grad.

Ueber die Summe der Winkel in einem Vielecke.

35) Sind alle Winkel auswärts gehende, so ist jeder kleiner als zweene rechte, und ihre Summe kleiner als n. 180 Grad.

Die einzige Ausnahme wäre, wenn das Vieleck sich in einen grösten Kreis verwandelt (34) da wäre doch die Summe nicht grösser als hie angegeben ist.

36) Hat das Vieleck einwärts gehende Winkel, so beträgt jeder, als innerer der Figur angesehn, doch weniger als 360 Grad.

37) Ferner liegt jeder einwärts gehende zwischen zween auswärts gehenden; Bezeichnet man also diese mit a; jene mit r; und fängt von einem auswärts gehenden an zu zählen, so

giebt

giebt sich die grösste mögliche Menge einwärts gehender so:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	....
a	r	a	r	a	r	a	r	a	....

Nur die Winkel deren Zahlen gerade sind können einwärts gehende seyn.

38) Das Vieleck habe eine gerade Zahl von Winkeln.

So kann die Hälfte davon einwärts gehende seyn, und die Summe aller ist kleiner als $\frac{1}{2}$ n. 180 Gr + $\frac{1}{2}$. n. 360 Grad das ist kleiner als n. 270 Grad.

39) Ist der Winkel Menge ungerade, so ist die Zahl der auswärts gehenden um 1 grösser als der einwärts gehenden, folglich die Summe kleiner als $\frac{n+1}{2}$. 180 Gr + $\frac{n-1}{2}$. 360 Grad, das ist kleiner als n. 270 Grad — 90 Grad.

40) Offenbahr sind das nur Angaben für die allergrösten Summen, natürlich sind einwärts und auswärts gehende Winkel immer viel kleiner als hie angenommen wird.

Kleinste Summe der Winkel

41) Ist allemahl grösser als (n — 2). 180 Grad wenn das Vieleck eine Grösse haben soll (8).

Grän-

Gränzen der Winkel im ordentlichen Vielecke. (12)

42) Weil da alle Winkel gleich sind, müssen sie alle auswärts gehende seyn, und der Polygonwinkel ist kleiner als 180 Grad (35) oder doch nicht grösser.

Aus (11) ist er grösser als $180° - \frac{360°}{n}$ (auch 41).

Ordentliche Vielecke von denen die Kugelfläche ein Vielfaches ist.

43) Also die Fläche (11) $= \frac{1}{m} S$ wo m eine ganze bejahte Zahl ist.

44) Also $m.(n.\varphi - (n-2).180°) = 720$ Grad.

45) Daraus

$$\varphi = \frac{720°}{m.n} + \frac{n-2}{n}.180°$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi = \left(\frac{360°}{m} + (n-2).90°\right).\frac{1}{n}$$

46) Und, für des Vielecks Seite, θ; (23)

$$\operatorname{cof}\tfrac{1}{2}\theta = \frac{\operatorname{cof}\frac{180°}{n}}{\operatorname{sin}\tfrac{1}{2}\varphi}$$

Drey-

Dreyecke.

47) Der Winkel $= \frac{240^\circ}{m} + 60^\circ$

So gehören zusammen

m	2	3	4	5	6	8	12	20	100	1000
$\frac{\varphi}{180^\circ}$	1	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{75}$	$\frac{251}{750}$

48) Jedes Glied der untern Zeile ist $= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{m} + 1\right)$ Ich wähle diesen Ausdruck der Kürze wegen, man kann ihn jedesmahl in Grade verwandeln. Diese Untersuchung ist schon in der 31 Abh. angestellt worden, es sind

dorten	$\varkappa$	η	n
hie	φ	θ	m

Hieher gehörte sie als Beyspiel der allgemeinen Formel, und wegen fernerer Betrachtungen welche sie veranlassen wird. Das erste Glied der gegenwärtigen untern Zeile, ist der Kreis 31. Abhandl. XXII; und die Glieder nähern sich ins Unendliche, einem Kugeldreyecke, dessen Seiten ihrer Kleinigkeit wegen als gerade angesehen würden (31. Abh. IV).

Netz von Dreyecken das die Kugel bedeckt.

49) Nach (47) findet man für jede angenommene ganze Zahl, ein Dreyeck das so vielmahl

mahl in der Fläche der Sphäre enthalten ist. Aber daraus darf man nicht schliessen: Soviel dergleichen Dreyecke könne man allemahl an einander hängend auf die genannte Fläche verzeichnen daß sie solche wie ein Netz bedeckten.

Die Rechnung sagt nur: die Fläche sey 1000 mahl so groß als ein Dreyeck dessen Winkel $= \frac{2}{7}\frac{5}{5}\frac{1}{0}$. 180 Grad ist, aber nicht: man könne soviel solche Dreyecke auf die Kugel zeichnen.

So, wenn die Fläche einer ebenen schiefen Raute, 1000 Quadratfuß hält, heisst das nicht: Man könne soviel Quadrate in die Raute setzen.

Das veranlasst also folgende:

50) Aufg. ABC sey ein gleichseit. Dreyeck von welchem die Kugelfläche ein Vielfaches ist: Man beschreibe über jeder seiner Seiten gleiche u. ähnliche ABF; BCE; ACD; und wiederum dergleichen, wie AFG, über dieser Dreyecke Seiten. Wenn man so fortfährt soll ein Netz aus diesen an einander gefügten Dreyecken entstehn, das die ganze Kugelfläche überzieht, so daß nirgends ein Theil von ihr zum Vorscheine kömmt, den nicht etwas von diesen Dreyecken bedeckte, aber auch nichts von diesen Dreyecken übrig bleibt, das nicht auf die Kugelfläche fiele. Man fragt wie die Dreyecke zu dieser Absicht müssen beschaffen seyn?

5) Um jeden Winkelpunct, wie A, C, D, müssen gleich viel Dreyecke liegen, weil kein solcher Punct etwas von dem andern Unterschied-

nes

nes haben darf, wenn das Netz einen Theil der Kugel wie den andern bedecken soll.

52) Die Winkel der Dreyecke die um einen solchen Punct liegen, müssen den Raum rings um ihn ausfüllen, keine Leere zwischen sich lassen.

Also muß ihre Summe 360 Grad betragen.

53) Folglich, wenn r. $\varphi = 360$ Gr., muß r eine ganze Zahl seyn, die durch den Winkel gegeben wird; oder umgekehrt, wenn sie angenommen wird, ist durch sie der Winkel gegeben.

54) Also ist aus (47) r. $\left(\frac{240^\circ}{m} + 60^\circ\right) = 360^\circ$ Man dividire auf beyden Seiten mit 60 Graden, so heben sich die Grade auf, und kömmt die Gleichung zwischen ungenannten Zahlen r. $\left(\frac{4}{m} + 1\right) = 6$; Daraus

$$\frac{4.r}{6-r} = m.$$

55) Hie muß r grösser als 1 seyn, und kleiner als 6. Man setze also statt dieses Buchstabens, alle Werthe die er haben kann, so gehören zusammen

r =	2	3	4	5
m =	2	4	8	20
φ =	180	120	90	72 Grad

56)

56) Der Cosinus der halben Seite ist (46)

$$= \frac{1}{2 \cdot \sin \frac{1}{2}\varphi}$$

Diese Cosinus sind also in der Ordnung wie r wächst

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}}$$

Der Sinus von 36 Graden ist die halbe Seite des Fünfecks die in Anal. endl. Gr. 159; gefunden worden.

57) Die Sinus sind in eben der Ordnung

$$\frac{\sqrt{3}}{2};\ \sqrt{\tfrac{2}{3}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}};$$

58) Aus (56; 57) hat man die Sinus der ganzen Seite, oder $\sin \theta$ in eben der Ordnung

$$\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{2\sqrt{2}}{3};\ 1;\ \frac{2\sqrt{5}}{5};$$

Hieraus die Seiten selbst zu berechnen

$10 + \frac{3}{2} \cdot \log 2 = 10{,}4515450$
$\log 3 = 0{,}4771212$
$9{,}9744238$

gehört 70 Gr. 31 M. 43 S.

Des letzten Sinus Quadrat ist $\frac{4 \cdot 5}{25} = 0{,}8$

also

also $20 + \log 0{,}8 = 19{,}9030900$
halb $= 9{,}9515450$
gehört 63 Gr 26 M 7 S.

59) So sind in der angezeigten Ordnung

$\theta = | 120° | 70° 31' 43'' | 90° | 63° 26' 7''$

60) Jedem sphärischen Dreyecke gehört ein ebenes (13) Dieser ebenen Dreyecke Seiten sind nach (57)

$$\sqrt{3};\ 2.\sqrt{\tfrac{2}{3}};\ \sqrt{2};\ 2.\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

61) Noch hat man (21) $\sin\psi = \frac{\sin\theta.\ \sin\frac{1}{2}\varphi}{\sin 120°}$

Diese Sinus sind also hie in der Ordnung

$$1 \left| \frac{2\sqrt{2}}{3} \right| \sqrt{\tfrac{2}{3}} \left| \sqrt{\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{15}\right)} \right.$$

62) Das erste Netz also wären zween grösste Kreise, jeder in seine Drittheile getheilt, an einander liegend.

Man sehe einen solchen Kreis als Meridian an, so hat er ostwärts ein Hemisphär westwärts das andre.

Um irgend einen seiner Puncte als Pol, beschreibe man einen Kreis dessen Ebene auf seiner Ebene senkrecht steht.

Dieses Kreises östliche Hälfte misst den Winkel den die beyden östlichen Seiten der Bogen des grössten, vom Pole bis an ihn machen:

Und eben so die westliche Hälfte den Winkel dieser beyden Bogen auf der Westseite.

Jeder dieser Winkel ist 180 Gr. ihre Summe 360 Grad.

So ist des grössten Kreises östliche Seite ein Kugeldreyeck das die östliche Hälfte der Fläche der Sphäre enthält.

Und die westliche Seite, eines das dieser Fläche westliche Hälfte enthält.

So stellen des grössten Kreises beyde Seiten, zween an einander liegende vor, und zugleich zwey sphärische Dreyecke deren jedes die Hälfte der sphärischen Fläche enthält.

63) Auser diesem Falle giebt es Netze von 4; 8; 20; Dreyecken. Die ihnen zugehörigen gleichseitigen ebenen Dreyecke, sind Seitenflächen vom Tetraeder, Octaeder, Icosaeder. Ich erwähne das hie nur im Vorbeygehen, weil die Theorie der regulären Körper hie sich nicht wohl einschieben lässt.

Nun wie in (43) Vierecke.

$$64)\ \varphi = \frac{180^\circ}{m} - + 90^\circ \quad (45)$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\theta = \frac{\cos 45^\circ}{\sin \tfrac{1}{2}\varphi} \quad (46)$$

Begreiflich liessen sich auch eine Menge Vierecke angeben, deren Vielfaches die Kugelfläche

fläche ist wie in (47) Ich will aber hie nur die wählen die wie in (50) die Dreyecke, ein Netz geben.

65) Sind dergleichen, auch r um einen Winkelpunct gelegt, so ist

$$r.\left(\frac{180^\circ}{m}+90^\circ\right)=360^\circ$$

also

$$r.\left(\frac{2}{m}+1\right)=4;\text{ oder}$$

$$2r=(4-r).m;\text{ und }\frac{2.r}{4-r}=m;$$

66) Da gehören zusammen

r =	2	3
m =	2	6

67) Und $r=2$ giebt den Polygonwinkel $=180$ Grad, Also einen grösten Kreis in seine Quadranten getheilt, auf beyden Seiten betrachtet wie den in drey Theile getheilt (62).

68) Für $m=6$ kömmt $\varphi=120^\circ$; $\cos\frac{1}{2}\theta=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin\frac{1}{2}\theta=\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ und aus (21) $\sin\psi=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Dem sphärischen gleichseitigem und gleichwinklichtem Vierecke gehört (13) ein ebnes Quadrat, dessen Seite $x=2.\sin\frac{1}{2}\theta$; in ei-

nem Kreise dessen Halbmesser $y = \sin \psi$ (20) die Seitenfläche des Hexaeders.

Fünfecke.

68) In (45) kömmt hie

$$\varphi = \frac{144^\circ}{m} + 108^\circ.$$

69) Ich suche wiederum nur was ein Netz giebt, also

$$r. \frac{144^\circ}{m} + r. 108^\circ = 360^\circ$$

Mit 36 Graden dividirt, kömmt

$$\frac{4. r}{m} + 3. r = 10, \text{ und daraus}$$

$$\frac{4. r}{10 - 3r} = m.$$

70) Aus $r = 2$ folgt $m = 2$; Das Netz besteht aus zween Kreisen, jeder in fünf Theile getheilt.

71) Aus $r = 3$; kömmt $m = 2$; Folglich (68) $\varphi = 120^\circ$ und aus (46)

$$\cos \tfrac{1}{2}\theta = \frac{\cos 36^\circ}{\sin 60^\circ}$$

72) Es ist aber, wie sich aus An. endl. Gr. 159; herleiten lässt $\cos 36^\circ = \frac{1}{4}. (1 + \sqrt{5})$ folglich $\cos \frac{1}{2}\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2. \sqrt{3}}$

Dar-

Daraus $\sin\frac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}$; $\sin\theta = \frac{2}{3}$;

$\sin\psi = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi . \sin\theta}{\sin 72^\circ}$; Aber auch nach An. endl. Gr. 157; ist $\sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$

Also $\sin\psi = \frac{4}{\sqrt{(30+6\sqrt{5})}}$.

73) Zu diesem sphärischen gleichseitigen und gleichwinklichten Fünfecke, gehört ein ebenes ordentliches, dessen Seite $= 2.\sin\frac{1}{2}\theta$; in einem Kreise dessen Halbmesser $= \sin\psi$. Seitenfläche des Dodecaeders.

Sphärische gleichseitige und gleichwinklichte Vielecke einerley Art, von denen die Kugelfläche ein Vielfaches ist, lassen sich nicht in ein Netz zusammenfügen wenn sie mehr als fünf Seiten haben.

74) In dem Ausdrucke des Winkels eines solchen Vielecks (45) kömmt der letzte Theil blos auf die Zahl der Seiten an, ist $= 180^\circ - \frac{2}{n}.180^\circ$, wird also immer grösser, je grösser die Zahl der Seiten wird.

Für sechs Seiten, ist er $= 120$ Grad also für sieben oder mehr Seiten, grösser als 120 Grad.

Der Polygonwinkel ist grösser als er;

Also betragen beym Sechsecke und jedem der folgenden Vielecke drey Polygonwinkel mehr als 360 Grad.

75) Wird also zum Netze erfodert, daß um einen Punct der Kugelfläche, wenigstens drey sphärische Vielecke stehn:

So lässt sich aus Vielecken die nach dem Fünfecke folgen, kein Netz machen.

76) Freylich giebt $r = 2$ gesetzt, allemahl den Polygonwinkel $= 180°$; Daraus folgt in (45) $m = 2$; und n geht aus der Rechnung.

Wie man also in (62; 67; 70;) verfuhr, kann man sich einen grössten Kreis in soviel gleiche Theile als man will getheilt vorstellen, ihn auf der einen Seite als ein Polygon mit n Winkeln betrachten, das die halbe Fläche der Sphäre einschliesst, eben so auf der andern Seite

Es lässt sich also sagen: Zwey ordentliche Kugelvielecke, von soviel Seiten als man will, geben allemahl zusammen ein Netz das die ganze Kugelfläche überzieht.

Aber freylich muß man sich bey diesem Ausdrucke erinnern, daß ein grösster Kreis auch sphärisches Vieleck heissen kann, und seine beyden Seiten zusammen ein Netz geben. Da man aber gewöhnlich nicht so redet, so bleibt für die andern Fälle wo man diese Bedeutungen der Wörter Vieleck und Netz nicht gelten lässt, die Voraussetzung (75).

Ordent-

Ordentliche Kugelvierecke deren Seiten gegeben sind.

77) Jedes ist $= \left(\frac{\varphi}{180} - \frac{1}{2}\right)$. S (9)

wo $\sin \frac{1}{2}\varphi = \cos 45°$. $\sec \frac{1}{2}\theta$ (23) Dieser Sinus ist also grösser als der von 45 Graden, wenig oder viel nachdem die Seite klein oder groß ist.

Setzt man also $\frac{1}{2}\varphi = 45° + u$ so ist des Vielecks Innhalt $= \frac{u}{90°}$. S.

78) Es sey jede Seite $=$ 1 Grad; so ist aus Gellibrands Tafeln

10 + log cos 45°	=	19,849485002
log cos 30′	=	9,999983463
log sin $\frac{1}{2}\varphi$	=	9,849501539
log sin 45° 0′ 8″	=	9,849501845
		306

Den log sin 45° 0′ 8″ habe ich aus den lösserischen Tafeln genommen. Er übertrifft den von 7 Secunden um 21054; Also fehlten zu 8 Secunden $\frac{306}{21054} = 0{,}01$ einer Secunde. Man kann also wohl $u = 8$ Secunden setzen.

Die Rechnung nach den avignoner Tafeln gab mir durch Proportionaltheile auch 8 Secunden.

So ist des Vierecks Fläche $= -\frac{8}{90.3600}$ $= \frac{1}{405000}$ der Kugelfläche.

Da bey dieser Seite der Winkel so wenig über 45 Grad beträgt, so ist klar daß er für eine kleinere Seite, so nah an 45 Grad kommen wird daß für die Rechnung nach der Formel, die Tafeln den Unterschied nicht angeben können.

79) Man setze also $\frac{1}{2}\varphi = 45° + u$ wo u kleiner als 8 Secunden ist, wenn θ kleiner als ein Grad ist

$$\cos 45°. (\cos u + \sin u) = \frac{\cos 45°}{\cos \frac{1}{2}\theta}$$

da kann $\cos u = 1$ setzen, und hat $\sin u = \frac{1 - \cos \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} = \frac{2 (\sin \frac{1}{4}\theta)^2}{\cos \frac{1}{2}\theta}$ (Trigon. 19. Satz 7. Zus.)

Wenn nun die Seite kleiner als 1 Grad ist, so kann man den Cosinus ihrer Hälfte, im Divisor $= 1$ setzen.

80) Ferner halte die Seite h Secunden der Winkel u; x Secunden. Heisst also e die Grösse einer Secunde in Decimaltheilen des Halbmessers, so ist die Länge des Bogens $\frac{1}{4}\theta$; $= \frac{1}{4}$ h. e und die kann man statt der Länge des Sinus von diesem Bogen setzen.

Auch des Bogens u; Länge $=$ x. e die man statt seines Sinus setzen kann.

Aus

Aus $\sin u = 2.(\sin \frac{1}{4}\theta)^2$ wird also $x.e = 2.\frac{1}{16}.h^2.e^2$ oder $x = \frac{1}{8}.h^2.e$.

81) Es sey die Seite = 1 M. = 60 S. also $h = 60$; so ist $x = \frac{1}{8}.3600.e = 450.e$;

$\log 450 = 2,6532125$
$\log e = 0,6855748 - 6$
$\log u$ in Sec. $= 0,3387873 - 3$
$\log 90.60.60 = 5,5105450$
$\log \frac{u}{90\text{ Grad}} = 0,8282423 - 9$

giebt dieses Viereck = 0,000000006733 5 der Kugelfläche.

Auch ist $\log \frac{90\text{ Grad}}{u} = 8,1717577$

oder die Kugelfl. beträgt mehr als 148510000 mahl die Fläche eines solchen Vierecks.

82) Es sey die Seite = 1 Secunde also $h = 1$ so ist $x = 0,000000606017$ (Geom. 44 Satz 7. Zus. V) Der Ueberschuß des halben Polygonwinkels über 45 Grad beträgt noch bey weitem nicht 7 Zehnmilliontheile einer Secunde, und die vier Winkel zusammen übertreffen vier rechte, noch nicht um 56 solcher Zehnmilliontheile.

Es ist ferner

$\log 90.3600 = 5,5105450$
abgezogen $\log 0,125.e = 0,7824849 - 7$
giebt $= 11,7280609$

also die Kugelfläche mehr als 534638 Millionenmahl so groß als die Fläche dieses Vierecks.

Diese Vierecke durch Quadrate von Bogen ausgedruckt.

83) Der Umfang enthalte einen Bogen k. mahl. Der Bogen heisse γ. Also $k.\gamma = 2.\pi$

Bedeutet π; 180 Grad, so bedeutet γ eine Zahl von Graden, Minuten u. s. w.

Bedeutet π die Zahl 3,14159.... so bedeutet γ, die Länge des Bogens von $\frac{360^\circ}{k}$ in Decimaltheilen des Halbmessers.

84) Die Fläche = der Kugel ist = $4.\pi = 4.3,14159\ldots$ mit dem Quadrate des Halbmessers multiplicirt, welcher hie = 1 gesetzt wird.

85) Soll also des Vierecks Fläche, so groß seyn als das Quadrat des Bogens, so ist (77)

$$\left(\frac{\varphi}{180^\circ} - \tfrac{1}{2}\right).\ 4.\pi = \frac{4.\pi.\pi}{k.k}$$

Das giebt

$$\varphi = \frac{\pi}{k.k}.\ 180^\circ + 90^\circ$$

Was in 180 Grad multiplicirt wird, ist: die Zahl 3,14... mit dem Quadrate von k dividirt.

So

So kömmt für φ, eine Zahl von Graden Minuten u. s. w.

Auch $\frac{1}{2}\varphi = 45° + \frac{\pi}{k.k} \cdot 90°$

Da lassen sich bey dem Theile der zu 90 Gr. oder 45 Grad zu addiren ist, beständige Logarithmen brauchen, weil sich nur k ändert.

86) Nun hat man für die Seite $\cos\frac{1}{2}\theta = \frac{\cos 45°}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$.

87) Wenn k eine grosse Zahl ist, wird in (84) der Divisor nur wenig grösser als der Dividend, und man bekömmt so den Cosinus eines kleinen Bogens, wo die Tafeln zur genauen Rechnung nicht hinreichen.

In dem Falle, hat man aus (80) $h.h = \frac{x}{\frac{1}{8}.e}$; Des Divisors beständiger Logarithme steht in (82).

88) Man setze das Viereck soll so groß seyn als das Quadrat eines Grades; also $k = 360$

beständiger $\log(90.\pi) = 2,4513924$
abgezogen $2.\log 360 = 5,1126050$
$\log u$ in Graden $= 0,3387874 - 3$

gehört zu 0,0021876 Grad, um so viel ist $\frac{1}{2}\varphi$ grösser als 45 Grad.

Nun

Nun zu $0,3387874 - 3$
$2.\log 60 = 3,5563025\ldots$
$\log x = 0,8950899$
abgez. $\log 0,125.e = 0,7824849 - 7$
$2.\log h = 7,1126050$
$\log h = 3,5563025$

gehört wiederum zu 3600; Also unterscheidet die Seite des Vierecks sich um keine Secunde von einem Grade. Der Logarithme giebt $x = 7,853$ also den Winkel des Vierecks $= 90$ Grad $+ 15'',706$.

89) Dieses Viereck kömmt nähmlich schon einem ebenen sehr nah, und, man wird also leicht erachten daß bey Vierecken deren Flächen Quadrate einer Minute, einer Secunde seyn sollen, die Seiten sich von einer Minute, einer Secunde, nicht unterscheiden lassen.

90) Ich will also noch ein Viereck berechnen das so groß seyn soll als das Quadrat von 30 Graden.

Hie ist $k = 12$
$\log (90.\pi) = 2,4513924$
$\log 144 = 2,1583625$
$\log u$ in Graden $= 0,2930299$

giebt 1,9634 also $\frac{1}{2}\varphi = 46°,9634 = 46$ Gr 57 M ...

Ich brauche in folgender Rechnung den Sinus von 46,9634 Graden aus Gellibrands Tafeln durch Proportionaltheile gesucht.

$$
\begin{aligned}
10 + \log \cos 45^\circ &= 19{,}8494850 \\
\log \sin \tfrac{1}{2}\varphi &= 9{,}8638686 \\
\log \cos \tfrac{1}{2}\theta &= 9{,}9856164
\end{aligned}
$$

giebt $\frac{1}{2}\theta = 14\,\text{Gr}\ 39\,\text{M}\ 54\,\text{S}.$

Die Seite $= 29\ 19\ 48$

Jeder Winkel $= 93\ 55\ 36{,}48$

36.

Sphärische Vielecke als Maasse körperlicher Winkel.

1) Linien aus dem Mittelpuncte der Kugel nach den drey Winkelpuncten eines sphärischen Dreyecks gezogen, (wie in einer Figur bey der 9. Abh. BA*; BC*; BF*) bestimmen ebene Seitenflächen einer Pyramide, deren Grundfläche, nachdem man will, das ebene oder das sphärische Dreyeck durch die genannten drey Winkelpuncte seyn kann.

Diese Linien enthalten am Mittelpuncte der Kugel einen körperlichen Winkel, für dessen Maaß man die Fläche des sphärischen Dreyecks annimmt.

2) Er verhält sich zu dem körperlichen rechten (am Anf. der 30. Abh.) wie die Fläche des Dreyecks zum achten Theile der Kugelfläche.

3) Der

3) Der achte Theil der Kugelfläche kann auch wohl in ein andres sphärisches Dreyeck eingeschlossen werden als in drey Quadranten.

4) Man suche ein rechtwinklichtes das ihn enthält.

So sind desselben schiefe Winkel $B + C = 180$ Grad; $\sin B = \sin C$; $\cos B = -\cos C$.

Auch $\frac{\sin b}{\sin a} = \sin B = \sin C = \frac{\sin c}{\sin a}$

folglich auch $\sin b = \sin c$; und entweder $b = c$ oder $b + c = 180°$.

5) Nun (32 Abh. 8) $W = 90$ Grad also 2. $(\cos \frac{1}{2} a)^2 = \sin b . \sin c$ folglich $\cos \frac{1}{2} a . \sqrt{2} = \sin b$.

6) Exempel. $a = 120$ Gr., $\cos \frac{1}{2} a = \frac{1}{2}$ also $\sin b = \frac{\sqrt{2}}{2}$; giebt $b = 45°$ folglich $c = 135°$.

Nun $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$;

$20 + \log 2 = 20,3010300$

$\log 3 = 0,4771212$

$19,8239088$

halb $= 9,9119544$

giebt $B = 54° 44' +$

also $C = 125\ \ 16\ -$

Zur Probe der Rechnung, ist aus der sphär. Trigon. allemahl $\cos a = \cot B . \cot C$ also hie $= -(\cot B)^2$.

Nun

Nun ist hie $\cot B = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ also $\cos a = -\frac{1}{2}$ wie gehörig.

7) An den Durchschnitt einer horizontalen und verticalen Ebne, setze man Winkel 135 Gr. in der horizontalen 45 in der verticalen, die beyden angesetzten Schenkel, machen einen Winkel von 120 Graden, in einer Ebene deren Neigung gegen den Horizont 54 Gr. 44 M. gegen die verticale Ebne 125 Gr. 16 M. ist.

Schwerlich würde man bey dem körperlichen Winkel den die drey geraden Linien einschliessen, an etwas wie einen rechten Winkel denken.

Wenn indessen, die Spitze dieses körperlichen Winkels, Mittelpunct einer Kugel ist, und auf den drey geraden Linien Halbmesser derselben genommen werden, so giebt sich ein sphärisches Dreyeck das der achte Theil der Kugelfläche ist.

Also hat dieser körperliche Winkel, gleiches Maaß mit dem körperlichen rechten, ob er gleich ganz anders aussieht.

8) Heissen also körperliche Winkel gleich, wenn ihre Maasse gleiche Stücken einer und derselben Kugelfläche sind:

So können körperliche Winkel gleich seyn ohne einander zu decken.

9) Zur

9) Zur Gleichheit solcher Winkel wenn sie in drey gerade Linien eingeschlossen sind, wird nur erfodert daß ihnen sphärische Dreyecke gehören die einerley Summe ihrer Winkel haben. Die Summe der Winkel aber bestimmt ein sphärisches Dreyeck nicht.

10) Begreiflich rührt dieser Unterschied zwischen dem körperlichen Winkel und dem ebenen daher, daß der letzte durch die Lage nur von zwo geraden Linien bestimmt wird, bey dem ersten mehr vorkommen. In einem gegebenen Kreise, decken alle Bogen einander die zum Ganzen einerley Verhältniß haben, Aber nicht so, Flächen auf einer gegebenen Kugel, die zur ganzen einerley Verhältniß haben.

Körperliche Winkel in mehr als drey gerade Linien eingeschlossen.

11) Wenn mehr gerade Linien in einem Puncte zusammenstossen, jedes Paar in einer andern Ebene, so nehme man von dem gemeinschaftlichen Puncte, auf allen gleiche Stücken, als Halbmesser einer Kugel: Von den ebenen Winkeln welche den körperlichen einschliessen, hat jeder zum Maasse einen Bogen eines grössten Kreises, und diese Bogen zusammen begränzen ein sphärisches Vieleck, dessen Fläche das Maaß des körperlichen Winkels ist.

12) Geometrischer Versuch körperliche Winkel zu messen von Marr. Joh. Wallenius Prof.

Prof. der Mathem. zu Åbo, findet sich in den Abhandl. der königl. schwed. Akad. der Wiss. 1763; meiner Uebers. XXV. B. 68 S. Herr Wall. ist auf diese Ausmessung und was dazu gehört durch eignes Nachdenken gekommen, und hat dann gefunden, daß sphärische Dreyecke mit der Kugelfläche schon von Andern sind verglichen worden, auch von Segner bewiesen hat daß gleiche körperliche Winkel unähnlich seyn können (hie 8). In der Géometrie Metaphysique ou Essay d'Analyse sur les Elemens de l'Etenduë bornée Par. 1758. werde L. III. c. 3. p. 358. erklärt was un angle solide droit ist, wie die Ecke eines Würfels, und hinzugesetzt: "Nach dieser Art zu schliessen, wird die Ecke spitzig seyn, wenn die ebenen Winkel die sie einschliessen weniger als drey rechte, und stumpf wenn sie mehr betragen."

13) Der französische metaphysische Geometer hätte bedenken sollen, daß an der Ecke des Würfels, nicht blos der drey ebenen Winkel Summe drey rechte ausmacht, sondern jeder von ihnen ein rechter ist, nach der Analogie müssten spitziger und stumpfer körperlicher Winkel, in spitzige und stumpfe ebene eingeschlossen seyn, und da wären noch mehr Abtheilungen nöthig, wenn spitzige, rechte, und stumpfe ebene auf mehr Arten verbunden würden. Man darf nur 270 in drey Theile theilen deren jedes Paar mehr beträgt als der dritte, so hat man unzäh-

liche körperliche Winkel bey denen die Summe der ebenen drey rechte ausmacht: An die hat der Gallier gewiß nicht gedacht, sondern seinen Begriff des körperlichen rechten Winkels nur von der Ecke des Würfels abstrahirt.

Das wäre doch ein Exempel das der leipziger Philosoph Christian August Crusius hätte brauchen können; Unter andern wichtigen Unterschieden, zwischen der philosophischen Methode, und der mathematischen wie Er sich dieselbe vorstellte gab er auch an: der Mathematiker könne von einem einzelnen Falle eine Definition abstrahiren, das thue aber der Philosoph nicht. Ich foderte ihn auf zu zeigen wo ein Mathematiker so was gethan hätte? Das war er nicht im Stande, antwortete aber: Es sey genug daß es in der Mathematik geschehen könne das können aber bewies er auch nicht, denn er kannte die mathematische Methode so wenig, daß er auch als ein Merkmahl von ihr angab: Sie brauche keine Divisionen, also nicht an die Arten von Dreyecken und Vierecken dachte, die der Anfang der Geometrie erzählt.

Indessen wenn sich Crusius auf dieses Exempel berufen hätte, wäre meine Antwort gewesen: Cicero versichert, es könne keine Ungereimtheit gesagt werden, die nicht einer der Philosophen gesagt habe: Wird man aber den Unterschied zwischen Philosophie und gemeinem Men-

Menschenverstande, in dem Vermögen suchen Ungereimtheiten zu sagen?

14) Hr. Wall. giebt den Ausdruck des Vielecks überhaupt durch die Summe der äussern Winkel (34 Abh. 10) und des gleichwinklichten durch die Ergänzung des halben Polygonwinkels (daselbst 11) Den letzten Satz lehrt er von der regulären Figur, von der er aber nicht allein gilt (34 Abh. 34) obgleich nur bey der ordentlichen Figur, Seiten und Winkel das Verhalten haben aus dem Hr. W. die Formel herleitet.

15) Man kann sich auch statt des körperlichen Winkels, am Mittelpuncte der Sphäre einen Kegel vorstellen, dessen Seite ihrem Halbmesser gleich ist, und mit seiner Axe einen Winkel $= \delta$ macht. Die Grundfläche ist ein Kreis dessen Halbmesser $= \sin \delta$; sein Mittelpunct steht vom Mittelpuncte der Kugel um $\cos \delta$ ab, und von ihrer Fläche um $1 - \cos \delta$. Diese Grundfläche schneidet von der Kugelfläche ein Stück ab $= (1 - \cos\delta) . \frac{1}{2} S$ (Geom. 64 S.) $= (\sin \frac{1}{2} \delta)^2 . S$ (Trig. 19 S. 7. Zus.) Dieses Stück kann man als das Maaß der runden Ecke um des Kegels Spitze annehmen. Das lehrt auch Wallenius.

16) Noch betrachtet Wall was entstände wenn eine Ebene durch des Kegels Spitze gelegt würde. Die Axe müsste nicht in ihr seyn da halbirte sie blos die Grundfläche. Ich ver-

spare diese Untersuchung, bis sich ein Gebrauch von ihr zeigt.

Gleichseitige Pyramiden deren Grundflächen Quadrate sind.

17) Wenn eine solche Pyramide ihre Spitze am Mittelpuncte einer Kugel hat, so gehört auf der Fläche der Sphäre, der Pyramide ebenen Grundfläche, ein sphärisches Viereck, das gleiche Seiten und gleiche Winkel hat. Jede Seite desselben misst den Winkel den jede Seitenfläche der Pyramide an der Spitze hat. Heisst dieser Winkel $= \theta$, so ist $2 . \sin \frac{1}{2}\theta$ die Seite des ebenen Quadrats, das der Pyramide Grundfläche giebt (35. Abh. 17) Weil die Kante der Pyramide, als Halbmesser der Kugel $= 1$ gesetzt wird.

18) Also bestimmt der Winkel welchen jedes der gleichen Dreyecke so die Pyramide einschliessen, an seiner Spitze hat, der Winkel der Kanten der Pyramide, das Kugelviereck, welches der Pyramide gehört, und die Verhältniß der Fläche desselben zur Kugelfläche (35. Abh. 77.)

19) Wenn der genannte Winkel ein Grad ist, so gehört der Pyramide, auf der Kugelfläche ein Viereck zu, dessen Fläche etwa 40500 mahl in der Kugelfläche enthalten ist. (35. Abh. 78)

20) Folgt daraus: Man könne solcher Pyramiden um den Mittelpunct der Kugel 40500 setzen,

setzen, daß die ihnen zugehörigen sphärischen Vierecke, die Kugelfläche ausfüllten, und die Grundflächen zusammen, einen eckichten Körper gäben, in 40500 ebene Quadrate eingeschlossen, die zusammen den Raum um den Mittelpunct umgäben?

21) Erstlich, schon deßwegen nicht, weil die Zahl 40500, nicht ganz genau angiebt wie vielmahl die Kugelfläche grösser ist, als des sphärischen Vierecks seine. Denn in (35. Abhandl. 78) ist eigentlich u etwas kleiner als 8 Secunden.

22) Nach (35. Abh. 64) kann man sphärische Vielecke bekommen, da von jedes Fläche die Kugelfläche ein Vielfaches nach einer ganzen Zahl ist; aber nur ein einziges darunter giebt ein Netz, wenn man nicht auch den grössten Kreis dazu rechnen will (35. Abh. 67; 68).

23) Folglich kann man um den Mittelpunct, Pyramiden wie (17) nicht so setzen, daß sie den körperlichen Raum ringsherum ausfüllten.

24) Auch nicht Pyramiden wo die Winkel der Kanten 1 Minute, 1 Secunde, betrügen. Von den sphärischen Vierecken die ihnen gehörten redet (35. Abh. 81; 82) Sie kämen freylich, weil ihre Seiten so klein sind ebenen immer näher, auch ihre Winkel wären sehr wenig von rechten unterschieden, und so liessen sich diese sphärischen Vierecke mit geringerer Unrich-

tigkeit an einander fügen, aber doch könnte man die Kugelfläche in geometrischer Schärfe mit ihnen nicht überziehen. Wäre z. E. der Winkel der Kanten eine Secunde, so betrügen vier Winkel des zugehörigen sphärischen Vierecks doch mehr als 48 Zehnmillionentheilchen einer Secunde über vier rechte; also liessen sich dergleichen Vierecke nicht vier um einen Punct legen; und drey um einen Punct liessen begreiflich eine grosse Lücke.

Untersuchung eines Satzes des Herrn le Sage.

25) Herr G. L. le Sage sagt in den Additions zum Essai de Chymie mechanique Ch. 2. §. 6.

Si dans le fluide qui produit les attractions, les directions voisines, forment entrè elles, les Arrêtes d'autant de pyramides quarrées indifiniment longues, dont chacun des angles plans, soit d'un degré, ou d'une minute, ou d'une seconde: Le nombre de ces Directions sera, $41252\frac{173}{180}$ ou $148510660\frac{3}{5}$, ou 534638377792, 47262464. Ce qui se deduit de ce que le nombre des points qu'on peut ranger *quarrément* sur la surface d'une sphère, à une distance mutuelle donnée, est au nombre de ceux qu'on pourroit ranger sur le quarré de la circonférence d'un de ses grands cercles, (c'est à dire au quarré de 360, ou de 21600,

ou

ou de 1296000) comme le diamètre d'un cercle eſt à ſa circonférence, c'eſt à dire comme 0, 3183098861837 9 etc. eſt à l'unité.

Die Stelle befindet ſich bey: Eſſai de Chymie méchanique, courronné en 1758 par l'Academie de Rouen, par G. L. le Sage Aſſocié étranger de la S. R. des Sc. de Montpellier, Correſp. de l'Ac. R. d. Sc. de Paris, à Genéve. Der Zuſatz gehört zu 6. §. des 2. Cap. davon die Worte folgende ſind:

La chûte des corps peſans eſt dirigée de toutes parts, vers un même lieu le Centre de la terre; Et on en peut dire autant de l'Approche de deux gouttes de liqueur; qui ſe fait également, ſoit que la ligne qui joint leurs centres ait ſa direction du Nord au Sud, ou de l'Eſt à l'Oueſt, ou de Nord-Eſt au Sud-Oueſt et. Donc, il faut que le fluide qui cauſe ces Approches, ſoit de nature à ſe mouvoir rapidement, vers un même lieu, en pluſieurs ſens à la fois ſans ſe rallentir ſenſiblement par ce croiſement de directions.

Dieſes zur Erläuterung was Herr le Sage mit der Zahl der Richtungen ſagen will. Er ſtellt ſich vor, was man Attraction nennt, alſo auch die Schwere, ſey Wirkung einer flüſſigen Materie. Die Vorſtellung hat für mich phyſikaliſche Schwierigkeiten, die gehören aber nicht hieher. Ich rede nun von der geometriſchen.

26) Herr le Sage denkt sich also gleichseitige Pyramiden, deren Grundfläche Quadrate sind. Arrêtes heissen auf deutsch Kanten. Die unbestimmte Länge gestattet ihm alle gleich lang zu nehmen, also als Halbmesser einer Kugel an deren Mittelpuncte sich die Spitzen aller dieser Pyramiden befinden. So erhellt daß er solche Pyramiden meynt wie ich (9; 24) erwähne. Nombre des directions, heisst wohl eigentlich: Zahl der Puncte, auf der Kugelfläche, nach welchen die Kanten aus dem Mittelpuncte ausgehn, oder von ihnen nach dem Mittelpuncte zu.

27) Hr. le S. nennt Quadrat des Umkreises, das von 360; oder 21600; oder 1296000, das ist von den Mengen Grade, oder Minuten, oder Secunden, die auf den ganzen Umkreis gehn.

28) Also, wenn er Grade braucht, versteht er: das Quadrat einer geraden Linie die so lang ist als 360 Grade. Dieses Quadrat hielte in der Bedeutung des Quadratgrades die ich (21 Abh. 8) erklärt habe, 129600 Quadratgrade, Und die Fläche eines Kreises der zum Halbmesser 1 hätte, und von dessen Umfange $\frac{1}{360}$ ein Grad hiesse, hielte dergleichen Quadratgrade $\frac{129600}{4 \cdot \pi}$, die Fläche der Kugel, viermahl soviel, welches (21 Abh. 3) angegeben ist.

Die

Die dasigen ganzen stimmen mit den ganzen in Hr. le S. ersten nombre des directions überein. Seinen Bruch bequem zu berechnen drukke ich ihn so aus: $\frac{173}{180} = 1 - \frac{7}{180}$. Es ist aber $\log \frac{7}{180} = 0,5898255 - 2$, die zugehörige Zahl $= 0,0388889$ die von 1 abgezogen läßt $0,9611110$.

Also soll Hr. le S. erster nombre des directions, gewiß meine dort gefundne Zahl seyn, und ist nur nicht so scharf wie ich dort gethan habe berechnet.

29) Wenn der Umfang einen Bogen $= \theta$; n mahl enthält, oder $360^0 = n.\theta$; so beträgt die Kugelfläche $\frac{n^2}{\pi}$ Quadrate dieses Bogens wie schon aus 21. Abh. 4. zu sehen ist. Also die Kugelfläche in Quadraten einer Minute oder Secunde zu haben, setzt man $n = 21600$ oder 1296000.

30) Nun ist beym Hr. le S. nombre de ceux qu'on pourroit ranger sur le quarré de la circonference; $= n^2$ wie aus seinem c'est à dire ... erhellt.

Heisst also N, sein nombre des points qu'on pourroit ranger quarrément sur la surface d'une sphère;
So ist nach seiner Vorschrift $N : n^2 = 1 : \pi$.

31) Also ist was Hr. le S. für die Zahl von Puncten erklärt, die man quarrément auf

einer Kugelfläche ordnen könne; die Menge von Quadraten eines Grades, einer Minute, oder Secunde, dadurch die Grösse der Kugelfläche ausgedruckt wird.

32) Auch stimmen von seinem zweyten und dritten nombre des directions die höchsten Zifern mit dem überein was ich (21 Abh. 20 und 21) finde. Woher unser Unterschied, gleich bey meinen niedrigsten Zifern herrührt? Ob ich mit den Logarithmen etwa nicht scharf genug gerechnet habe? lasse ich unentschieden, weil die Berechnung mir die Mühe nicht zu belohnen scheint.

32) Genug daß Hr. le S. so geschlossen hat: Weil die Kugelfläche soviel beträgt, als $\frac{n^2}{\pi}$ Quadrate eines Bogens der $= \frac{360^\circ}{n}$ ist, so kann man auf ihr eben soviel Puncte, in Abständen von einander die diesem Bogen gleich sind, quarrément ordnen.

33) Ranger quarrément, lässt sich doch wohl nicht anders verstehen, als: Puncte in Winkelspitzen eines Quadrats setzen, so daß jeder von seinem nächsten um die Seite des Quadrats absteht.

34) Man mache das Quadrat einer Linie von vier Zollen. Durch Parallelen mit seinen Seiten, jede Parallele von der nächsten 1 Zoll abstehend, wird es in 4. 4 Quadratzoll getheilt;

Die:

Dieser vier Quadratzolle Winkelpuncte sind doch wohl quarrément rangés? wenn man sie nachzählt wird man nicht ihrer 4. 4 sondern 5. 5 finden. Denn:

35) Wenn g eine gerade Linie bedeutet, n eine ganze Zahl, n. g = h eine gerade Linie die ein Vielfaches von jener ist, so sind ja die n Theile die auf h gehn, zwischen n + 1 Puncten enthalten, davon der erste, Anfangspunct der Linie h ist, der letzte Endpunct.

36) Macht man dieser Linie ihr Quadrat, nennt man zwo Seiten desselben horizontal, zwo vertical, und zieht Parallelen mit den horizontalen Seiten, und mit den verticalen, jede Parallele von ihrer nächsten um g entfernt, so bekömmt man n. n Quadrate jedes von der Seite = g.

37) Der horizontalen Linien, sind, die beyden Seiten mit gerechnet, n + 1; soviel als Puncte nöthig sind, auf einer geraden Linie n Theile zu begränzen.

Eben soviel sind verticale Linien, auch so gerechnet.

Jede verticale, schneidet jede horizontale, einmahl; Also giebt es (n + 1). (n + 1) Durchschnitte, und das sind soviel Winkelpuncte der Quadrate (36).

38) Allgemein also, lassen sich in einem Quadrate dessen Seite = n. g ist, $(n+1)^2$ Puncte

Puncte so stellen daß jeder von dem andern um g absteht.

38) So hat sich Hr. le S. schon bey der Menge von Puncten verzählt die man auf das Quadrat des Umfangs des Kreises ordnen kann. Ihre Zahlen wären die Quadrate von 361; oder von 21601; oder von 1296001 Er hat nicht daran gedacht, daß $n+1$ Puncte seyn müssen, auf einer geraden Linie n Theile zu begränzen.

39) Freylich im Umfange eines Kreises, braucht man nur soviel Puncte, als man Theile macht, weil der letzte Endpunct, auf den ersten Anfangspunct fällt. Aber was wäre das Quadrat des Umfangs, wenn man ihn als Umfang betrachtet? Nicht einmahl eine Figur wie ich 21 Abh. 10 angezeigt habe, denn da muß der Bogen kleiner seyn als ein ganzer Umfang.

40) Ferner: Wenn in einem Quadrate dessen Seite $= n.g$, sich auf die angezeigte Art, $(n+1)^2$ Puncte so setzen lassen, daß jeder vom nächsten um g absteht, so lassen sich in Rechtecke die gleiche Fläche haben, andere Mengen von Puncten so setzen, daß jeder vom nächsten um g absteht.

41) Hievon handelt mein Aufsatz: Ueber zweyerley Arten Körner in gleichen Weiten zu setzen, in den Vorlesungen der churpfälz. physikal. ökon. Ges. in Heildelberg IV. Band, I. Theil

Mann-

Mannheim 1789; 383 S. Die Untersuchung ist also nicht blos speculativ, auch in der Landwirthschaft brauchbar. Freylich hat ein Recensent an meiner Abhandlung ausgesetzt daß Buchstabenrechnung darinn gebraucht ist, und sie also für die Oekonomen unverständlich sey. Ich dachte aber: Weil doch jetzo die Bauern meist lesen lernen, so würden ja Oekonomen die sich besser dünken als Bauern, eine leichte Buchstabenrechnung fassen.

42) Machte man ein schiefes Viereck dem Quadrate gleich, so gäben die Winkelpuncte der kleinern Vierecke in die es sich zertheilen lässt, allenfalls Stellen in gleichen Weiten von einander ... und das nicht einmahl wenn sich nicht alle Seiten des schiefen Vierecks mit einerley Linie messen liessen, aber das wären doch schon nicht points quarrément rangés.

Und verwandelte man vollends das Quadrat in ein Dreyeck oder eine andre ebene Figur von gleicher Fläche, so fällt dergleichen Stellung von Puncten gar weg.

43) Also: das ranger quarrément einer gegebenen Menge Puncte, findet nicht einmahl bey ebenen Figuren von gleicher Fläche statt: Und Hr. le Sage schliesst von dem was seinen Gedanken nach beym Quadrate des Umkreises statt findet, aber da schon falsch ist (38) auf die Menge von Puncten die sich auf der Kugelfläche quarrément sollen rangiren lassen;

Diese

Diese Kugelfläche verhält sich zum Quadrate des Umfangs, nach Hr. le S. eigner Bemerkung wie Durchmesser zum Umfange, welche Verhältniß bekannter maassen irrational ist. Und Hr. le S. unternimmt aus der Menge von Puncten die er auf eine zu setzen gedenkt, die Menge von Puncten zu berechnen die auf der andern in eben den Entfernungen von einander Platz hätten. Daß das nicht angeht, hätten ihn schon seine Zahlen lehren sollen, wo Brüche vorkommen. Und daß man aus der Verhältniß einer ebenen Fläche zu einer krummen nicht wegen solcher Mengen von Puncten schliessen darf, hätte ihn die leichte Bemerkung belehren können, daß sich nichts der Art, aus der Gleichheit zwoer ebenen Flächen schliessen läßt. (40 . . 42)

44) Das Ende von diesem Allen ist, Herr le Sage stellt sich vor: Die Attraction bilde gleichseitige Pyramiden, welche Quadrate zur Grundfläche haben, ihre Spitzen beysammen am Mittelpuncte einer Kugel. Nun glaubt er: den Raum um diesen Mittelpunct füllen so viel Pyramiden aus, so vielmahl das Quadrat des Bogens der den Winkel der Kanten einer Pyramide misst, in der Kugelfläche enthalten ist.

45) Daß gleichseitige Pyramiden die Quadrate zu Grundflächen haben, nicht mehr, und nicht weniger, als sechs, den Raum um den Mittelpunct ausfüllen, wo sich ihre gemeinschaftliche

liche Spitze befindet, hätte ihn die Construction des Würfels in der Kugel belehren können.

46) Points quarrément rangés ist ein Ausdruck, dessen Bedeutung ich ganz wohl zu verstehen glaubte als ich ihn beym Herrn le Sage fand, ob ich ihn gleich griechisch oder lateinisch noch nie gelesen hatte. Das führt mich auf die Betrachtung, daß Hr. le Sage sich vielleicht die Mühe mit den p. q. r. und die Trugschlüsse bey Uebertragung derselben vom Quadrate des Umkreises auf die Kugelfläche erspart hätte, wenn er die Frage sogleich geometrisch nach Art der Alten betrachtet hätte: Wie muß man gleiche Quadrate, in gleicher Entfernung, um einen Mittelpunct setzen daß sie den Raum einschliessen?

47) Da dieser Gedanke Hrn. le Sage doch allerley Bemerkungen veranlasst, bin ich über ihn etwas umständlich gewesen. Kürzer, mit Gründlichkeit und vieler Einsicht, prüft ihn Hr. Heinrich David Wilkens: Aufsätze mathematischen, physikalischen, chemischen Innhalts; I. Heft Gött. 1790; II; 10 Seite.

Ueber einen Beweis der Ausrechnung des körperlichen Innhalts der Kugel.

48) Daß die Kugel einer Pyramide gleich ist, welche die Kugelfläche zur Grundfläche hat, den Halbmesser zur Höhe, beweist Wolf so: El. Geom. §. 550. Man theile die Kugelfläche

in

in unendlich kleine Quadrate, die von ebenen Quadraten nicht mehr unterschieden sind, so hat man um den Mittelpunct unzählich viel Pyramiden, deren jede zur Höhe den Halbmesser hat, denn ein Loth aus der Spitze auf die Grundfläche ist dem Halbmesser gleich wenn die Grundfläche sich in der Kugelfläche verliert. Die Summe der Grundflächen, ist die Kugelfläche ....

49) In 35 Abh. 77. kömmt $\sin \frac{1}{2}\varphi$ immer näher an $\sin 45^\circ$; je kleiner $\frac{1}{2}\theta$ ist. Kann man also die Seite eines Kugelvierecks so weit abnehmen lassen als man will, so kömmt die Secante ihrer Hälfte so nah als man will an 1; und des Vierecks Winkel so nah als man will an einen rechten. Also nimmt die Hinderniß vier Vierecke um einen Punct zu legen, so weit man will ab, und so bringt man die Vorstellung daß diese Kugelvierecke ein Netz geben welches die Kugelfläche bedeckt, der Wahrheit so nah als man will. Das Uebrige sieht man dann leicht ein.

Man muß dabey überlegen daß allsdann im angeführten 77 Artikel der 35 Abh. u gegen 90 Grad verschwindet, also auch eines dieser Vierecke gegen die Kugelfläche. Da ihrer aber unzählich viel werden, so kann man sich vorstellen ein sehr kleiner Bruch wie $\frac{u}{90^\circ}$ mit einer sehr grossen Zahl multiplicirt, gebe was beträchtliches.

ches. Daß das Product = 1 ist müsste umständlicher dargethan werden, ist aber nicht nöthig, wenn man die Kugelfläche als Grundfläche einer Pyramide annimmt.

37.

Ueber die Summe, der ebenen Winkel die einen körperlichen einschliessen.

1) Eine ebene Figur sey in einen Kreis beschrieben . . . bekanntermassen ist sie deßwegen nicht allemahl ordentlich . . .

Durch des Kreises Mittelpunct sey auf seine Ebene ein Loth gesetzt, und in demselben willkührlich ein Punct genommen.

Von diesem Puncte sind gerade Linien nach jedem Winkelpuncte des Vielecks gezogen.

So entsteht eine Pyramide, deren Grundfläche eine unordentliche Figur seyn kann; Die Seitenflächen alle gleichschenklichte Dreyecke sind, auch aller Schenkel gleich; Nur müssen deßwegen nicht die Dreyecke selbst alle gleich seyn; Das findet nur statt wenn die Grundfläche eine ordentliche Figur ist.

Ich erwähne solche Pyramiden, Anfangsgr. der Geom. 60 Satz. Man kann sie gleichseitig nennen.

2) Von jeder Seite der Grundfläche gehen ein Paar gerade Linien nach des Kreises Mittelpuncte, auch ein Paar nach der Pyramide Spitze. Jenes Paar macht einen grössern Winkel als dieses.

Denn die Seite der Grundfläche, ist Sehne jedes dieser Winkel, bey jenem für einen kleinern Halbmesser als bey diesem.

3) Den körperlichen Winkel an der Spitze der Pyramide schliessen soviel ebne Winkel ein, soviel die Pyramide Seitenflächen hat. Jedem dieser ebenen Winkel an der Spitze, gehört für die Seite der Grundfläche die der Seitenfläche Grundlinie ist, ein Winkel am Mittelpuncte des Kreises in den die Grundfläche beschrieben ist; und dieser ist grösser als jener (2) Alle Winkel aber am Mittelpuncte des Kreises, ringsherum betragen 360 Grad; Also betragen alle Winkel an der Spitze ringsherum weniger als 360 Grad.

4) Der gleichseitigen Pyramide Spitze ist zugleich Spitze eines gleichseitigen Kegels, der den Kreis zur Grundfläche hätte.

Wird eine Seite in der Pyramide Grundfläche kleiner, so nähert sich die Grösse dieser Seite dem Bogen dessen Sehne sie ist, so weit man will.

5) Der Grundfläche Halbmesser sey = r; der Pyramide, auch des Kegels Seite = k;

Einer

Einer Seite der Grundfläche gehöre am Mittelpuncte der Winkel $= \varkappa$, an der Spitze $= \theta$; so ist diese Seite $= 2.r. \sin \frac{1}{2}\varkappa = 2.k. \sin \frac{1}{2}\theta$ also $\sin \frac{1}{2}\theta = \frac{k}{r}. \sin \frac{1}{2}\varkappa$. | $\frac{r}{k}$

6) Beyde Winkel am Mittelpuncte und Spitze nehmen zugleich ab, und so kommen die Sinus ihrer Hälften, den Hälften selbst so nah als man will. Die Gränze dieser Näherungen ist $\frac{1}{2}\theta = \frac{k}{r}. \frac{1}{2}\varkappa$. | $\frac{r}{k}$

Stellt man sich diese Näherung bey allen zusammengehörigen Paaren dieser Winkel vor, das ist: läßt man die Grundfläche sich nach und nach in den Kreis verwandeln ... dazu braucht sie nicht eine ordentliche Figur zu seyn, weil der Kreis auch aus ungleichen Bogen bestehen kann ... so ist die Summe aller θ so groß als $\frac{k}{r}$ der Summe aller $\varkappa$. | $\frac{r}{k}$

7) Die Gränze also, welcher die Summe aller ebenen Winkel die der Pyramide körperlichen einschliessen sich nähert ist $= \frac{k}{r}. 360°$. | $\frac{r}{k}$

Je mehr Seiten die Grundfläche hat, desto näher kömmt die erwähnte Summe dieser Gränze, erreicht sie, wenn die Pyramide zum Kegel wird.

8) Exempel hiezu, giebt die 4. Abh. wo 10; u. f. §. ähnliche Bemerkungen darstellen, nur nahm ich der dortigen Absicht gemäß die Grundfläche für eine ordentliche Figur an.

9) Wenn $k = \frac{6}{7} r$ (dorten 31) ist die Gränze 300 Grad; Mehr kann die Summe der ebenen Winkel bey dieser Verhältniß von Seite und Halbmesser nicht betragen.

10) Mir ist nicht bekannt daß jemand darauf gefallen wäre, dergleichen Gränze anzugeben.

Ungleichseitige Pyramide.

11) Bleibt die Grundfläche noch eine Figur im Kreise, aber die Spitze steht nicht mehr lothrecht über dem Mittelpuncte, so macht die Seite der Grundfläche, mit den beyden Seiten der Pyramide zwischen welche sie fällt ungleiche Winkel; Daß sie einem kleinern Winkel an der Spitze gegenüber stünde als an der Grundfläche Mittelpuncte, lässt sich nicht allgemein behaupten, die Spitze könnte ihr sehr nah seyn.

12) Ist die Grundfläche nicht einmahl eine Figur im Kreise, so lässt sich noch weniger auf die Art wie in (6) etwas allgemeines angeben. Da hätte man in der Ebene der Grundfläche keinen Mittelpunct, nachdem man Linien von jeder Seite Enden zöge. Natürlich wäre, ein Loth von der Spitze auf die Ebene der Grundfläche zu fällen, und von dem Puncte wo es auf-

auftrifft, nach den Enden jeder Seite der Grundfläche gerade Linien zu ziehen: Aber, ob jeder Seite, an diesem Puncte ein grösserer Winkel gehört als an der Spitze müsste erst untersucht werden, etwa auf die Art, wie man Winkel mit schiefen Schenkeln auf horizontale bringt. (Meiner astronomisch. Abhandlung. I. Samml. 1. Abh. 168 u. f.) Und wenn es dargethan wäre, so kann man noch von der Summe der Winkel in der Ebene der Grundfläche um den genannten Punct nichts sagen, weil dieser Punct, auser der Figur fallen kann, da die Winkel welche die Seiten der Figur an ihm machen, nicht rings um ihn liegen. Uebrigens sehe man was sich hievon allgemein behaupten lässt unten (46).

13) Unter die Figuren die sich nicht in den Kreis beschreiben lassen, gehören auch die welche einwärts gehende Winkel haben. Nimmt man eine solche Figur für Grundfläche an, und einen Punct in der Höhe wie man will, so giebt sich eine Pyramide, von deren Seitenflächen manche einwärts gelegt sind, gleichsam eine Aushöhlung in dem Körper der Pyramide machen.

14) Bey soviel Mannichfaltigkeit der Lage ebener Winkel um die Spitze einer Pyramide, ist wohl nichts Allgemeines von ihrer Summe fest zu setzen. Nur von der gleichseitigen darf ich hie (3) als ausgemacht annehmen.

15) Setzt man dieser ihre Spitze an den Mittelpunct einer Kugel, so schneidet die Ebene der Grundfläche, in der Sphäre den Kreis ab, in welchem der Grundfläche Winkelpuncte liegen, und Bogen grösster Kreise, Maasse der ebenen Winkel um die Spitze, geben ein sphärisches Vieleck.

16) Auch kann der Pyramide Spitze in eine Kugelfläche gestellt werden, da ist sie Pol der Grundfläche.

17) Gehn von einem Puncte gerade Linien aus, jedes Paar in einer andern Ebene, und schliessen um ihn einen körperlichen Winkel ein; So nehme man auf allen gleiche Stücken von dem Puncte aus, der solchergestalt Mittelpunct einer Kugel wird, Bogen grösster Kreise auf ihr, sind Maasse der ebenen Winkel.

18) Dieses führt auf Methoden, ebne Winkel zu finden, die einen körperlichen einschliessen und Summen grösser oder so groß als vier rechte haben. Nächstfolgendes ist ein Exempel.

19) Ein Kugeldreyeck zu machen von dem zwo Seiten zusammen um einen gegebenen Bogen $= u$; mehr betragen als der Halbkreis.

I) Man nehme einen Bogen PB $=$ 90 Grad $+ u$. An ihn lege man einen andern in einem willkührlichen spitzigen Winkel BPA $= \gamma$.

Durch dieses Bogens Pol und durch B kann man einen grösten Kreis legen.

Dessen

Dessen Bogen BA macht bey A einen rechten Winkel.

Aus sphär. Trigonom. 1. Satz V Prop. ist $\cot PA = \frac{\cot BP}{\cos \gamma} = \frac{-\tang u}{\cos \gamma}$ auch $\tang PA = -\cos \gamma . \cot u$ also PA grösser als ein Quadrant.

II) Man nehme AQ = 90 Grad. So ist Q des Bogens AB Pol (Geom. 52 S. 7. Zus.) Folglich BQ = 90 Grad.

Also PB + BQ = 180 Grad + u welches verlangt ward.

III) Macht man auf des Bogens PQ andrer Seite $QPB^* = \gamma$; so sind des sphärischen Vierecks BPB^*Q vier Seiten zusammen = 360 Grad + 2. u.

IV) Jeder dieser vier Seiten gehört am Mittelpuncte der Kugel ein ebener Winkel, dessen Maaß sie ist.

Von diesen vier ebenen Winkeln, sind zween rechte, zween stumpfe.

Alle vier zusammen schliessen sie einen körperlichen Winkel ein.

Wenn der Mittelpunct K heisst, so sind diese vier ebenen Winkel

$PKB = PKB^* = 90^\circ + u$
$QKB = QKB^* = 90^\circ$

V) Man könnte wohl auch verlangen einen körperlichen Winkel in vier ebene einzuschliessen die zusammen genau 4 rechte betrügen.

Wollte man zu dieser Absicht im vorhergehenden Verfahren $u = o$ setzen, so fiele Q auf P; welcher letztre Punct dann des Bogens BAB* Pol wäre, und man hätte am Mittelpuncte der Kugel nicht mehr als zweene ebne rechte Winkel.

VI) Man behalte also $BP = 90° + u$. Weil $\sin BA = \sin BP . \sin\gamma = \cos u . \sin\gamma$ folglich kleiner als $\cos u$; So ist BA kleiner als $90° - u$. Folglich $\cos BA$ grösser als $\sin u$.

Man suche AR so daß BR = 90 Grad — u.

Weil $\cos BR = \cos AR . \cos AB$ (sphär. Trigonom. 1. Satz; III Proport.) so ist $\cos AR = \frac{\sin u}{\cos BA}$; In dem Bruche ist erwiesener maassen der Zähler kleiner als der Nenner, also ist der gesuchte Cosinus möglich.

Man hat also nun die beyden Bogen $PB + BR = 90°$ Und den Punct B* dazu genommen, vier Bogen die zusammen 360 Grad machen. Sie sind Maasse vier ebener Winkel am Mittelpuncte, die einen körperlichen einschliessen.

VII) Der sphärische Winkel BQA hat zum Maasse den Bogen BA; (II) dessen Grösse (VI) gegeben ist.

Und,

Und, da man PQ = PA — 90° weiß, ferner im Dreyecke PBQ; die Seite BQ = 90 Grad ist, so hat man (sphär. Trig. 8 S. 15.)

$$\cos PBQ = \frac{\cos PQ}{\sin BP} = \frac{\sin PA}{\cos u}.$$

VIII) Die Ebenen der beyden stumpfen ebenen Winkel (IV) machen mit einander den Winkel = 2. γ;

Der beyden rechten ihre, den Winkel = 2. BQA.

Jedes stumpfen Winkels Ebene mit der Ebene des an ihm liegenden rechten den Winkel = PBQ.

IX) Im Dreyecke BPR; ist der genannte Winkel = γ; die Seiten, ihm gegenüber BR = 90° — u; um ihn PB = 90° + u; PR = PA — AR aus I; VI; gegeben.

$$\text{Daher } \sin BRP = \frac{\sin\gamma.\ \sin BP}{\sin BR} = \sin\gamma;$$

Folglich BRP = 180° — γ weil das Dreyeck nicht gleichschenklicht ist.

$$\text{Auch } \sin PBR = \frac{\sin\gamma.\ \sin PR}{\sin BR} = \frac{\sin\gamma.\ \sin PR}{\cos u}.$$

X) Von den vier ebenen Winkeln (VI) machen der beyden stumpfen Ebenen, wie vorhin den Winkel = 2. γ.

Der beyden spitzigen ihre den gleichen = BRB*.

Jedes spitzigen mit des anliegenden stumpfen seiner den = BPR.

Exempel

XI) Zu I; II;

Es sey $u = 45°$; $\gamma = 60°$; Also tang PA $= -\frac{1}{2}$ daraus sin PA $= \sqrt{0,2}$

$10 + \log 0,5 = 9,6989700$

gehört zu 26 Gr. 33 M. 54 S.

PA = 153 26 6

PQ = 63 26 6

Für BA (VI) und PBQ (VII)

$\log \cos u = 9,8494850$

$\log \sin \gamma = 9,9375306$

$\log \sin BA = 9,7870156$

$20 + \log 0,2 = 19,3010300$

$10 + \log \sin PA = 19,6505150$

$\log \cos u = 9,8494850$

$\log \cos PBQ = 9,8010300$

BA = BQA = 37° 45′ 40″

PBQ = 50 46 7

Exempel zu VI.

XII) Ich behalte u; γ; wie in XI; so bleibt auch BA wie daselbst

10 +

10 + log sin u = 19,8494850
log cos BA = 9,8979245
log cos AR = 9,9515605
giebt AR = 26 Gr. 30 M. 40 S.
Es war PA = 153 26 6
Also PR = 126 55 26
log sin PR = 9,9027827
log sin γ = 9,9375306
19,8403133
log cos u = 9,8494850
log sin PBR = 9,9908283
PBR = 78 Gr. 15 M. 59 S.

XIII) Eine Ebene in welcher P, B, B* sind, scheidet einen Kreis im Umfange der Kugel; In ihr sind Q, R, nicht, aber Halbmesser der Kugel nach Q, R, gezogen, treffen sie in Puncten, die ich q, r, nennen will. Also hat man ebene Figuren, BPP*q für IV; BPB*r für VI; Jede derselben hat einen einwärts gehenden Winkel eine bey q; die andre bey r; wie Bertins vierseitiges Dreyeck (Dieser Abhandlungen I. Samml. 4 Abh. 12) Jede ist Grundfläche einer ungleichseitigen Pyramide (13) deren Spitze am Mittelpuncte des Kreises von den gefundenen ebenen Winkeln eingeschlossen wird.

20) Einen körperlichen Winkel in fünf ebene einzuschliessen deren Summe = 360° + u + w.

I) In

I) In voriger Aufgabe, hatte man QB + BP + PB* + B*Q = 360° + u.

II) Nun stelle man sich ein sphärisches Dreyeck QB* D vor dessen Seiten QD + DB* = 90° + w.

III) Setzt man dieses mit der Seite QB* an voriges Viereck; so wird aus dem Vierecke ein Fünfeck das die ersten drey Seiten in (I) hat, statt der dasigen vierten aber, die beyden in (II) genannten, aller fünfe Summe ist = 270 Grad + u + 90 Grad + w.

IV) Man nehme das Dreyeck (II) gleichschenklicht, jeden Schenkel = 45° + $\frac{1}{2}$ w.

V) Aus sphär. Trigon. 8 Satz 15; ist hie
cos D = — cot $(45 + \frac{1}{2}w)^2$
cos DQB* = cos DB* Q = + cot $(45° + \frac{1}{2}w)$.

VI) Es sey w = 10 Grad; 45 Gr. + $\frac{1}{2}$ w = 50 Grad

log cot 50° = 9,9238135 = log cos 32° 58′
2. log cot 50° = 9,8476270 = log sin 44° 55′
— 10

Also D = 90° + 44° 55′
= 134° 55′

In 19; XI; hatte man 180° — BA
oder PQB* = 142° 14′ 20″
dazu DQB* = 32 58
PQD = 175 12

Weil

Weil dieser Winkel kleiner als 180 Grad so ist auch PD kleiner, wie auch daraus erhellt daß PQ = 63° 26′ (19; VI) und QD = 50° (hie VI) zusammen weniger als 180 Grad machen.

Doch PD zu berechnen sey in II. astronom. Abh. II. Cap. 102.

A = 175° 12′ = 180° — (4° 48′)
b = 63 26
c = 50

log cos A = 9,9984742
log tang b = 10,3009994
log tang u = 10,2994736

gehört zu tang 63° 21′; weil aber A grösser als ein Quadrant und so die Tangente verneint ist, so kömmt u = 116 Gr. 39 M. also c — u = — (66° 39′) welcher verneinte Bogen mit dem entgegengesetzten bejahten, einerley Cosinus hat. Nun

log cos b = 9,6505395
log cos (c — u) = 9,5980754
19,2486149
log cos u = 9,6518004
9,5968145

Ist der Logarithme des Cosinus der gesuchten Seite. Der Cosinus ist verneint, weil u grösser als ein Quadrant ist. Solchergestalt ist die gesuchte Seite = 180 Gr. — (66 Gr. 44 M.)

= 113

= 113 Gr. 16 M.; nur wenig kleiner als die Summe der beyden gegebenen, weil der Winkel ihr gegenüber so stumpf ist.

VII) Wenn man sich, wie in 19; XIII vorstellt, die daselbst bestimmte Ebene werde von einer Linie aus der Kugel Mittelpuncte nach D, in d getroffen, so hat man ein ebenes Fünfeck PBqdB* das bey q einen einwärts gehenden Winkel hat. Es ist die Grundfläche der Pyramide, deren Spitze die fünf ebenen Winkel einschliessen.

21) An einen Punct sechs gleiche ebene Winkel zu legen, deren Summe vier rechte um einen gegebenen Winkel übertrifft.

I) Man mache ein sphärisches gleichseitiges Dreyeck ABC, jede Seite = 120° — 2. t = 2. q also q = 60° — t.

II) An jede Seite desselben setze man ein gleichschenklichtes sphärisches Dreyeck, wo die Schenkel AD = DC = CE = EB = BF = FA jeder = 60° + u.

III) Nennt man der Kugel Mittelpunct, den ich nicht darstelle K, und zieht man von ihm nach allen genannten Puncten gerade Linien, so hat man erstlich am Mittelpuncte einen körperlichen Winkel in drey ebene jeden = 2 q eingeschlossen.

IV) Aber jeden dieser drey ebenen, deckt der gleiche ebene Winkel eines andern körperlichen Win-

Winkels den auser diesem ebenen = 2. q noch zweene andre ebene jeder = 60 + u einschliessen.

V) Das giebt einen körperlichen Winkel in folgende sechs gleiche ebene eingeschlossen: AKD; DKC; CKE; EKB; DKF; FKA, jeder = 60° + u. Diese Winkel schliessen den Raum um den körperlichen Winkel (III) ein, und ihre Summe ist = 360° + 6. u.

VI) Ich setze t kleiner als 60 Gr. und u kleiner als 30 Gr. Daß das erste seyn muß zeigt (I), das andre ist wenigstens als eine willkührliche Einschränkung verstattet.

VII) Man nenne des gleichseitigen Dreyecks Winkel = α, der gleichschenklichten Winkel an der Spitze F = E = D = δ, jeden an der Grundlinie DAC = DCA = ECB = EBC = FBA = FAB = φ So giebt die sphärische Trigonometrie folgendes:

VIII) $\sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2.\cos(60° - t)}$

$= \frac{1}{2.\sin(30° + t)}$

wie schon in 32 Abh. gebraucht ist.

IX) P sey der Pol eines kleinern Kreises durch A, B, C. Durch ihn und A, B, C, Bogen grösster Kreise gelegt, machen gleiche Winkel mit einander, weil das gleichseitige Dreyeck eine

ordent-

ordentliche Figur ist; Da nun aller Winkel um den Pol, zusammen 360 Grad betragen, so beträgt jeder der drey, dem eine der Seiten des Dreyecks gegenüber steht 120 Grad.

X) Man lege durch diesen Pol einen Bogen eines grössten Kreises senkrecht auf AC; so halbirt er diese Seite in O, und man hat den Winkel CPO = 60 Grad; Dergleichen Winkel liegen sechs um den Pol, zwischen Bogen grösster Kreise durch ihn, deren immer einer durch einen Winkel des Dreyecks geht, der nächste eine Seite des Dreyecks halbirt.

XI) Man nenne PO = μ; so hat man im Dreyecke COP, aus dem rechten Winkel bey O; dem CPO = 60° und der Seite CO = q; nach meiner sphär. Trigon. 1. Satze

$$\sin \mu = \text{tang } q \cdot \cot 60^\circ \quad \text{(II. Prop.)}$$

$$\sin CP = \frac{\sin q}{\sin 60^\circ} \quad \text{(I. Prop.)}$$

Die Proportion sin CP : sin μ = 1 : sin $\frac{1}{2}\alpha$ giebt das vierte Glied wie solches schon gefunden worden (IIX).

XII) Ein Bogen eines grössten Kreises durch des gleichschenklichten Dreyecks ADC Spitze, senkrecht auf seine Grundlinie, halbirt sie, geht also durch O; und POD ist ein zusammenhängender Bogen, Abstand des Punctes D vom Pole; Gleichen Abstand haben E, F.

XIII)

XIII) Im rechtwinklichten Dreyecke DOC; finden sich aus der Grundlinie CO = q; und der Hypotenuse CD = 60° + u

$$\sin \tfrac{1}{2}\delta = \frac{\sin q}{\sin (60° + u)} \text{ (I. Prop.)}$$

$$\cos \varphi = \frac{\cot (60° + u)}{\cot q} \text{ (V. Prop.)}$$

$$\cos DO = \frac{\cos (60° + u)}{\cos q} \text{ (III. Prop.)}$$

XIV) Der kleinere Kreis durch A, B, C (IX) hat zweene Pole; begreiflich versteht man hie unter P, den der ihm am nächsten ist, und nimmt also μ (XI) kleiner als einen Quadranten. Es könnte aber auch einen Bogen bedeuten welcher vom entgegengesetzten Pole durch D ginge, des dargestellten Ergänzung zum Halbkreise wäre. Der gefundne Sinus gehörte zu beyden.

XV) Da cos DO bejaht ist, (XIII) So ist dieser Bogen kleiner als ein Quadrant.

XVI) Aber zu μ gesetzt, könnte er wohl PD kleiner als einen Quadranten geben, oder genau so groß, oder grösser.

XVII) Man setze die Summe soll ein Quadrant seyn, und schreibe für diesen bestimmten Fall v statt u; Also weil $\mu = 90° - DO$

$\sin \mu = \frac{\cos (60° + v)}{\cos q}$. Folglich

$\sin q . \cot 60° = \cos (60° + v)$.

XVIII) Nimmt man nun einen Bogen u kleiner als v; so ist cos (60° + u) grösser als sin q. cot 60°, folglich $\frac{\cos(60° + u)}{\cos q}$ grösser als μ (XI) also cos DO grösser als μ oder 90° — DO grösser als μ; oder 90° grösser als μ + DO.

XIX) Gegentheils, nimmt man u grösser als v; so ist cos (60° + u) kleiner als sin q. cot 60°, und das giebt eben so 90° kleiner als μ + DO.

XX) Auf den Halbmesser der Kugel welcher durch P geht, setze man eine Ebene senkrecht, auf eben der Seite des Mittelpuncts auf welcher P liegt, sie mag nun vom Mittelpuncte weiter abstehen als der Halbmesser, oder die Kugel berühren, oder zwischen Mittelpuncte und P durchgehen.

XXI) In (XVIII) liegen die sechs Halbmesser der Kugel welche nach A, B, C, D, E, F, gehen so, daß sie alle, durch die genannte Ebene gehn, wo nöthig verlängert, wenn die Ebene vom Mittelpuncte weiter weg ist als des Bogens PD Cosinus; ist sie gleich so weit weg, so befinden sich die Puncte D, E, F, in ihr, ist sie weiter weg, so muß man die drey Halbmesser nach diesen drey Puncten verlängern bis sie die Ebene erreichen; Ist ihr Abstand vom Mittelpuncte so groß als des Bogens PC Cosinus, so

liegen

liegen die drey Puncte A, B, C, in ihr; Und ist er noch grösser, so muß man die Halbmesser alle verlängern.

Allemahl aber treffen Linien aus dem Mittelpuncte, nach den genannten sechs Puncten in eine solche Ebene, wo sie durch die Ebene gehen, finden sich Winkelpuncte eines ebenen Sechsecks das an den Stellen wo die Linien nach A, B, C, eintreffen, einwärts gehende Winkel hat, wie ich was ähnliches in 19; 20; gewiesen habe.

Also ist in der Kugel Mittelpuncte die Spitze einer Pyramide, um welche die sechs ebenen Winkel liegen, deren Maasse die Schenkel der gleichschenklichten Dreyecke sind. (II) Diese sechs Winkel betragen also zusammen $360° + 6.u.$

XXII) Für (XVII) liegen D, E, F, in der Ebene des grössten Kreises dessen Pol P. Also giebt es keine Ebene, die alle sechs Linien aus dem Mittelpuncte schnitte. Denn daß man das nicht von dem erwähnten grössten Kreise sagen kann, in dessen Ebene sie freylich alle den Mittelpunct gemein haben, braucht wohl nur erinnert zu werden.

XXIII) Für (XIX) liegen in Absicht auf den Pol, A, B, C, diesseits der Ebene des grössten Kreises, D, E, F, jenseits. Also läßt sich da keine Ebene denken, die alle sechs Linien, so schnitte, wie sie vom Mittelpuncte ausgehen; Eine Ebene die die Linien nach A, B, C, so

schnitte, schnitte deren nach D, E, F, Verlängerungen rückwärts.

XXIV) Exempel. Es sey in (I) $t = 30$ Gr. $= q$; jede Seite des Dreyecks ABC $= 60$ Gr.

So misst jede dieser Seiten, den Winkel eines ebenen gleichseitigen Dreyecks, das der Kugel Halbmesser zur Seite hat. Der Bogen Sehnen sind auch Halbmesser der Kugel, geben also auch ein solches ebenes Dreyeck.

Diese vier ebenen Dreyecke schliessen ein Tetraeder ein dessen einer körperlicher Winkel sich am Mittelpuncte der Kugel befindet

Da ist $\sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2.\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} 10 + \log 0{,}5 &= 19{,}6989700 \\ \log \cos 30^\circ &= 9{,}9375306 \\ & \quad 9{,}7614394 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\alpha &= 35^\circ\ 15'\ 51'',8 \\ \alpha &= 70\ \ 31\ \ 43\ ,6. \end{aligned}$$

XXV) Aus (XI) kömmt hie

$$\begin{aligned} \sin \mu &= (\tan 30^\circ)^2 \\ \sin CP &= \tan 30^\circ \end{aligned}$$

Es ist 2. log tang $30^\circ - 10 = 9{,}7614394$; Hieraus, und tang 30° unter den Sinussen aufgesucht findet sich

$$\begin{aligned} \mu &= 19^\circ\ 28' \\ CP &= 35\ \ 15 \end{aligned}$$

XXV)

XXV) Aus XVII

$\log \sin q = 9{,}6989700$

$\log \cot 60° = 9{,}7614394$

$\log \cos (60° + v) = 9{,}4604094$

giebt $60° + v = 73°\ 13'\ 16'',8$

XXVI) Nun für XVIII; sey $u = 10°$

$10 + \log \cos (60° + u) = 19{,}3340517$

$\log \cos q = 9{,}9375306$

$\log \cos DO = 9{,}5965211$

giebt DO = 66° 45′ —

aber PO = 19 29 —

also PD = 86 14 —

Nach (XIII)

$10 + \log \cot (60° + u) = 19{,}5610658$

$\log \cot q = 10{,}2385606$

$\log \cos \varphi = 9{,}3225052$

$10 + \log \sin q = 19{,}6989700$

$\log \sin (60° + u) = 9{,}9729858$

$\log \sin \frac{1}{2}\delta = 9{,}7259842$

$\varphi = 77°\ 52'$

$\frac{1}{2}\delta = 32\ \ 9$

XXVII) Man nehme für (XIX); $u = 15°$; so hat man

10 + log cos (60° + u)	=	19,4129962
log cos q	=	9,9375306
log cos DO	=	9,4754656
10 + log cot 60° + u	=	19,4280525
log cot q	=	10,2385606
log cos φ	=	9,1894919
10 + log sin q	=	19,6989700
log sin (60° + u)	=	9,9849438
log sin ½ δ	=	9,7140262

Also	½ δ	=	31° 10′
	φ	=	81 6
	DO	=	72 37
Es ist	μ	=	19 28
also	PD	=	92 5

Da gehen aus dem Mittelpuncte der Kugel, in Absicht auf die Ebene des grössten Kreises dessen Pol P, die drey Halbmesser nach A, B, C, auf eben die Seite auf welcher der genannte Pol liegt, die drey nach D, E, F, auf die entgegengesetzte.

XXVIII) Man kann also bey einem gegebenen Dreyecke ABC, von den drey Fällen XVII; XVIII; XIX; welchen man will darstellen.

22) Diese Beyspiele zeigen, daß sich körperliche Winkel in ebene einschliessen lassen, deren Summe mehr als vier rechte beträgt. Eine grössere Menge darzustellen wäre wenigstens zu der Absicht unnütz, den nur ausgedruckten Satz,

Satz, darzuthun. Man kam selbst dabey auf ebene Winkel an einem Puncte die in unterschiedenen Ebenen liegen, und sich nicht an der Spitze einer Pyramide befinden, . . .

23) I) Von dergleichen, noch ein leichtes Beyspiel. ZRNH sey der Meridian, Z, N, Zenith, Nadir H, R, Süden, Westen. ZCND ein andrer Scheitelkreis. Man nehme Bogen, jeden kleiner als ein Quadrant, im Meridiane ZA, ZB, im Scheitelkreise NC, ND; jene auf entgegengesetzten Seiten des Zenith, diese auf entgegengesetzten Seiten des Nadir.

II) So liegen um der Kugel Mittelpunct, vier ebene Winkel AKB, BKD, DKC, CKA, denen zusammen, das Kugelviereck ABCD gehört, von dem zwo Seiten AB, CD; in Meridian und Scheitelkreise liegen; aber keine Ebene kann zugleich die Schenkel aller dieser vier Winkel auf einer Seite ihrer gemeinschaftlichen Spitze schneiden.

III) Wenn D auf der östlichen Seite des Meridians liegt, so liegt C auf der westlichen; von einem grössten Kreise durch A und C, fällt also der Bogen welcher grösser als der Halbkreis ist auf die östliche Seite; Und auch so von einem grössten Kreise durch B und D der Bogen welcher grösser als der Halbkreis ist, auf die Westseite.

IV) Der Weg um das Viereck zu gehen wäre folgender; Im Meridiane von A durch

das Zenith nach B; auf der Westseite von B nach C; von C durch das Nadir auf die Ostseite nach D; von D auf der Ostseite nach A. Jeder der vier Bogen welche zusammen diesen Weg ausmachen ist kleiner als der Halbkreis, und misst einen der vier ebenen Winkel am Mittelpuncte. Jeder dieser vier Winkel ist also kleiner als zween rechte, daher ihre Summe kleiner als vier rechte. Will man also, was diese vier Winkel zusammen geben einen körperlichen nennen so wiederspricht gegenwärtiges Beyspiel dem euklidischen Satze nicht den ich sogleich (24) erwähne.

V) Ein ganz leicht Exempel zu haben, nehme man $ZA = ZB = NC = ND = \lambda$ und die Winkel an Z und N, rechte, daß der Scheitelkreis verticalis primarius ist. So ist $ZD = ZC = 180° - \lambda$; also $\cos AD = \cos ZA . \cos ZD = -(\cos \lambda)^2$ welches auch $= \cos BC$.

VI) Wenn $\lambda = 60°$, so ist $\cos AD = -\frac{1}{4}$; Es ist aber $+ 0,25 = \cos 35° 32'$ also $AD = BC = 104° 28'$, und die Summe aller vier Winkel oder Bogen (IV) $= 328° 56'$.

Veranlassung der bisherigen Untersuchungen.

24) **Euklid** lehret XI. B. 21. Satz jeder körperliche Winkel werde in ebene eingeschlossen, deren Summe weniger als vier rechte beträgt.

25)

25) Herr le Sage Bürger zu Genf, hat 1756, der pariser Akad. der Wiss. die Entdeckung mitgetheilt, daß dieser Satz nicht allgemein sey. Die Nachricht findet sich in Mem. de l'Ac. des Sc. 1756. in der Histoire p. 77 der Quartausgabe; 118 des holl. Nachdrucks.

Hr. le Sage gesteht den Satz zu, wenn sich der körperliche Winkel an der Spitze einer Pyramide befindet, deren Grundfläche lauter auswärts gehende Winkel hat; ist sie aber eine Art Stern, mit auswärts und einwärts gehenden Winkeln, so können sich die Dreyecke so vervielfältigen, daß die Summe ihrer Winkel an den Spitzen die den körperlichen einschliessen, mehr als vier rechte beträgt.

Herr le Sage behauptet, Euklids Erklärungen des körperlichen Winkels im XI. Buche, schlössen solche nicht aus bey denen der Satz nicht gilt. Gleichwohl will er den Geometer nicht gern eines solchen Versehens beschuldigen, glaubt also es sey was verlohren gegangen, und die welche den Verlust ersetzen wollen, hätten von der Pyramide deren Grundfläche ein Dreyeck ist, wo der Satz gilt, übereilt allgemein geschlossen.

Er hat seinen Bemerkungen ein Mittel beygefügt, einen körperlichen Winkel zu machen da die Summe der ebenen die ihn einschliessen, vier rechte um soviel Grad übertrifft als man will.

Zu bewundern ist, daß keiner der Commentatoren dieses bemerkt hat. Die Akademie findet bey dem bestrittenen Satze vielmehr den Ausdruck allzugemein, als einen Fehler im Schlusse. Es setze doch beym Hrn. le Sage bien de la précision et bien de la justesse de l'esprit zum voraus, einen Irrthum bemerkt zu haben, der so lange Zeit, so allgemein ist verkannt worden.

26) I) Ordinis Philos. in Ac. Witteb. h. t. Decanus Georgius Fridericus Bermannus Math. Sup. P. P. O. solennia Doctorum Philos. et Magistror. Art. pridie calendas Maias creandorum indicit, praemissa breui *de angulis solidis* commentatione. Wittenb. 1764; 29 Quartseiten 1 Kupfertafel.

Ich habe den Titel ganz hergeschrieben weil jemand der die Schrift suchte, sie schwerlich unter der Anzeige: de angulis solidis, erfragen würde.

II) B. fängt mit der Erzählung von le Sage Entdeckung an; das Jahr 1756 der Hist. meldet er sey kurz vor dem Anfange des vergangenen Jahres aus der königl. Druckerey zum Vorscheine gekommen.

III) Er theilt die körperlichen Winkel in gibbos und non gibbos ein; bey den ersten kommen ebene Winkel vor, die mehr als zween rechte betragen, die man ebenfalls gibbos nennt.

IV)

IV) Von den non gibbis, seyen einige pyramidales, andre nicht. Bey jenen, könne man durch die Spitze eine Ebene so legen, daß alle Schenkel der ebenen Winkel welche den körperlichen einschliessen auf einer Seite dieser Ebene liegen; Wo das Kennzeichen mangelt, findet die andre Benennung statt. Als ein Exempel giebt er die Winkel in zwo Verticalflächen, von denen ich (23) rede. Ich habe seine blos geometrischen Ausdrücke in astronomische verwandelt, und die Figur gegeben die bey ihm fehlt.

V) Er giebt auch an, einen angulum solidum non gibbum non pyramidalem zu machen, wo die Summe der ebenen die ihn einschliessen mehr als vier rechte beträgt. Sein Verfahren, wo ebenfalls keine Figur ist, zu entwickeln, hatte ich keine Lust.

VI) Er macht sich die Einwendung: Euklid habe ja wohl nur von Pyramidalwinkeln geredet. Und darauf antwortet er: Auch von denen gelte der Satz nicht, wenn die Grundflächen der Pyramiden einwärts gehende Winkel haben.

VII) Nun giebt er als einen Lehnsatz: In drey ebene Winkel, deren Summe kleiner ist als vier rechte, und bey denen jedes Paar, zusammen mehr beträgt als der dritte, einen körperlichen Winkel einzuschliessen und die Neigungen der Ebenen gegen einander zu finden. Der

letzten

letzten Absicht wegen, trägt er diesen Satz nach seiner Art vor, den freylich sonst schon Euklid lehrt.

VIII) Der Satz liesse sich so ausdrucken: Aus drey Seiten eines Kugeldreyecks die Winkel zu finden.

Aber B. wollte hie keine sphärische Trigonometrie brauchen, sondern alles nach Art der euklidischen Geometrie vortragen.

IX) Nun folgen vier Aufgaben: 1) Angulum solidum pyramidalem construere, quatuor angulis planis comprehensum, qui simul sumti excedant quatuor rectos dato angulo. 2) Ang. sol. pyr. c. quat. ang. pl. c. qu. s. s. adaequent quatuor rectos. 3) A. s. p. c. c. quinque a. pl. quorum summa quatuor rectos superet dato angulo. 4) Ex planis angulis sex aequalibus quorum summa excedat quatuor rectos, angulum pyramidalem construere.

X) Das sind die Aufgaben die ich 19; III und VI; 20; 21; aufgelöst habe. Kreise auf der Sphäre wie ich, braucht B. nicht (VIII) sondern die ebenen Winkel an einem Puncte, welcher bey mir der Kugel Mittelpunct ist, und ihrer Ebenen gegenseitige Lagen. Das erfodert vielmehr Anstrengung der Aufmerksamkeit, und beynahe Modelle, die für Vorstellungen vom Körperlichen, das sind, was Zeichnungen auf einer Tafel für die ebene Geometrie. Ich bekenne, daß es mich manchmahl Mühe gekostet hat

ihn

ihn zu verstehen; füge aber zu seiner Rechtfertigung bey, daß er an diese Vorstellungsart vielleicht mehr gewöhnt war als ich. Wenn ich das Hauptsächliche seines Gedankens gefasst hatte, führte ich solchen nach meiner Art aus.

XI) Hiedurch habe ich den Vortheil erhalten, genaue Bestimmungen der Grössen, leichter darzustellen, bestimmte Exempel zu geben wie 20; XI; XII; 21; XXIV. darauf er sich gar nicht einließ, freylich weil Euklid nicht gerechnet, nur construirt hat.

XII) Auch war Ihm der Gebrauch der trigonometrischen Tafeln nicht verstattet, wenn Er alles euklidisch behandeln wollte, da die Vollständigkeit dieser Tafeln nur bis auf einzelne Minuten, erst durch Verfahren das die euklidische Geometrie übersteigt ist erhalten worden. (29 Abh.) So erwähnt Er selbst in s. 13. §. 21 Seite, man könne seine 4. Aufgabe, auflösen, wenn man einen gegebenen ebenen Winkel in drey gleiche Theile theile, das übersteige aber die Elementargeometrie.

XIII) Bermann verspricht in seiner vierten Aufgabe (IX) Pyramidenwinkel; beweist auch daß seine Construction dergleichen gebe; Erinnert aber selbst in seinem 13. §. 21 Seite, wenn man den Cosinus von 30 Graden mit 3 dividire, erhalte man etwas das Cosinus des spitzigen Winkels 73 Gr. 13 M. 16,81 S. ist,

und

und dieses gebe von den sechs Schenkeln der sechs ebenen Winkel die den körperlichen einschliessen, drey in eine und dieselbe Ebene fallend, drey auf eine und dieselbe Seite dieser Ebene.

XIV) Also erkennt er selbst, seine Construction gebe auch einen Winkel der kein Pyramidenwinkel ist, sagt sogar, dieser Fall bestimme sich facili calculo, cuius ratio ex praecedenti demonstratione sit perspicua.

XV) Hörte seine Construction hiemit auf; gäbe sie keine Linien, die jenseits der Ebene fallen, wenn andre diesseits liegen, so liesse sich sein Versprechen des Pyramidenwinkels noch rechtfertigen. Man könnte sich vorstellen, die Grundfläche der Pyramide sey einer Ebene durch die Spitze parallel, und nähere sich dieser Ebene, immer ihr parallel bleibend, bis sie endlich auf selbige fällt. Da wäre für die 73 Gr..... der Pyramidenwinkel unter allen der letzte.

XVI) Da aber im Exempel 21; XIV; von den sechs Schenkeln drey auf einer Seite der Ebene liegen, drey auf der andern, so gäben diese Schenkel, Pyramidenwinkel nach dem letzten (XIV) Und dergleichen würde Bermann wohl nicht anerkennen; Sein Versprechen war also eine kleine Uebereilung, die Er selbst würde bemerkt haben, wenn er über das was ich aus ihm (XIV) gesagt habe, einen Augenblick länger gedacht hätte.

XVII)

XVII) Die sphärische Rechnung entdeckt so was bald, das sich an der geometrischen Construction erst länger anhaltender Aufmerksamkeit zeigt.

XVIII) Bermann gesteht also; der 21 Satz des XI Buchs sey bisher irrig für allgemein gehalten worden. Ob der Fehler vom Euklid selbst begangen worden? das lasse sich nur muthmaßlich beantworten. Doch meynt er, mit aller Ehrfurcht, gegen den besten Lehrer der Geometrie, könne man denselben nicht frey sprechen.

XIX) Wäre gewiß, fährt B. fort, daß das Scholium am Ende des XIII. Buches welches überhaupt Euklids Werk endigt von Euklid selbst sey, so könnte man nicht zweifeln daß Euklid im Beweise des 21 S. des XI. B. gefehlt habe. Denn der Beweis in diesem Scholium wiederhohlt erwähnten Satz wörtlich, und hat keine Kraft, wenn man den Satz nicht allgemein annimmt.

Aber es sey nicht unwahrscheinlich, daß dieses Scholium von einem alten Mathematiker angehenkt sey, sowohl als was nächst vorher geht von den Worten an: ἄλλως ὅτι μείζον u. s. w.

XX) Dieses zuletzt angezeigte, findet sich in Gregoris Ausgabe Euklids, nach dem Ende des Beweises vom 18 Satze des 13 Buchs. Es soll auf andre Art, als in diesem Beweise

gesche-

geschehen ist darthun, daß in einerley Kugel, des Icosaeders Seite grösser ist als des Dodecaeders seine.

Diesem andern Beweise, folgt ein Lemma: Drey Quadrate jedes von der Seite des Würfels betragen mehr als sechs, von der Seite des Dodecaeders; Und dann das erwähnte Scholium.

Den andern Beweis, und das Lemma, hat Bermann, in seiner Ausgabe weggelassen. (Elementorum Euclidis Libri XV. ... Lipsi. 1743; auch 1769.) Das Scholium hat er mitgetheilt. Lorenz Euklids Elemente funfzehn Bücher ... Halle 1781. giebt auch den andern Beweis und die Anmerkung.

XXI) Dieses angehenkte, meynt Bermann, könne wohl vom alexandrinischen Theon herrühren, der eine neue Ausgabe der Elemente besorgt hat, wie er selbst erwähnt, (Θεωνος Ἀλεξανδρεος εἰς την τϑ Πτολεμαιϑ μεγαλην συνταξιν ὑπομνηματων βιβλ. ιᾱ Bas. ap. Io. Walder 1538. p. 50.) Was Theon da anführt hat er dem Ende des sechsten Buches beygefügt. Seit Erfindung der Druckerey hat man viel Ausgaben der ersten sechs Bücher allein: Wie sie aber das allemahl auf dem Titel anzeigen, so hätte Theon es wohl auch gemeldet wenn die Ausgabe die er veranstaltet hat, nicht alle Bücher enthielte.

XXII)

XXII) Daß aber das Versehen Euklids selbst sey, schliesst B. daraus, weil Euklid wohl nicht an die unterschiednen Arten körperlicher Winkel gedacht habe, da er im 20 Satze des XI. B. allgemein behauptet wenn ein körperlicher Winkel in drey ebene eingeschlossen ist, so seyen allemahl zween derselben grösser als der dritte. Denn das ist nicht allgemein wahr wenn unter diesen dreyen, einer mehr als zween rechte beträgt, nach B. Benennung gibbus ist. Auch findet sich in Euklids ganzem Werke keine Spur von einem angulo gibbo, obgleich solchem sagt B. die achte Erklärung des I. B. so gut zukömmt als den übrigen Winkeln. Und so hat Euklid behauptet, was von solchen körperlichen Winkeln galt wie er sich vorstellte; magnum nobis documentum, schliesst er, quam sit ingenium omnium hominum ad errorem procliue, quantoque cauendum sit opere ne de quaque re ante aliquid pro certo statuamus quam notio eius plane distincta informata fuerit animo atque in omnes eius partes versata, et vndique inspecta. Ich gebe die Stelle mit diplomatischer Genauigkeit. Im Drucke steht qua re, aber B. hat in dem Exemplare das er mir schickte, zwischen diese beyden Wörter que geschrieben.

27) I) Von Herrn le Sage Bemerkung ist mir nichts mehr bekannt als das (25) angeführte. Ich erwartete etwas davon in folgen-

dem Buche zu finden: Developpement nouveau de la Partie élementaire des Mathematiques dans toute son étenduë par *Louis Bertrand* Prof. des Math. à Genéve et Membre de l'Ac. R. des Sc. et des B. L. de Berlin Geneve 1778. 2 starke Quartbände. Der zweyte Band enthält die Geometrie, und da Hr. B. sehr ausführlich ist, vermuthete ich er würde die Erinnerung seines Mitbürgers nicht vergessen haben. Sie ist aber gar nicht erwähnt. Vielmehr beweist Hr. B. im 324. §. des II. Th. daß bey einem körperlichen Winkel den drey ebene einschliessen, zween derselben zusammen allemahl mehr betragen als der dritte, und folgert daraus: la somme des angles plans, qui ferment un angle solide quelconque est moindre que quatre angles droits.

II) So bleibt es glaube ich Bermannen eigen, etwas umständliches hierüber bekannt gemacht zu haben, nach Art der Alten gezeigt zu haben, wie sich unter der Voraussetzung daß man angulos gibbos brauchen darf körperliche Winkel bilden lassen, die Euklids Satz wiederlegen, selbst, was ich vom Hrn. le Sage nicht bemerkt finde, gelehrt zu haben, daß man etwas körperliche Winkel nennen könnte das doch in einer Pyramidenspitze nicht Platz fände. Diese Bemühungen, verdienten wohl erhalten zu werden, um desto mehr da dieses Verhalten Bermanns gegen den Euklid, gar nicht die Partheylichkeit

für

für seinen Autor zeigt, die man sonst bey Herausgebern alter Schriftsteller gewohnt ist.

III) Bermann war zu Leipzig 12. Oct. 1717 gebohren, starb zu Wittenberg 6. Febr. 1769. Hr. Prof. Titius giebt Nachrichten von seinem Leben im wittenbergischen Wochenblatte 1769; 290 u. f. S. Seine und meine Aeltern hatten viel Umgang mit einander, das veranlasste zwischen uns als Kindern eine Verbindung, die späterhin, durch gemeinschaftliche Denkungsart über Philosophie und Mathematik verstärkt ward.

Was sich für den Euklid sagen liesse?

28) Wenn man Figuren mit einwärts gehenden Winkeln, für Grundflächen von Pyramiden annimmt, so ist Euklids Satz (24) nicht allgemein. Gegen Herrn le Sage, lässt sich also Euklid wohl nicht anders vertheidigen als mit der Bemerkung, daß E. solche Figuren in seinen Büchern nirgends erwähnt, sein Satz also von allen den Gegenständen gilt, die er betrachtet. Daß drey ebene Winkel die einen körperlichen einschliessen, zusammen weniger betragen als vier rechte, folgt, wenn jedes Paar von ihnen zusammen mehr beträgt als der dritte: Und das ist wahr, wenn keiner von ihnen mehr als zween rechte beträgt.

29) Aber, sagt Bermann: Euklids Erklärung des ebenen Winkels, enthält auch solche die mehr als zweene rechte betragen.

30) Ebener Winkel heisst, in Bermanns Ausgabe L. I. def. 8. duarum linearum, in plano sese tangentium et non in directum iacentium, mutua inclinatio. Das letzte Wort, ist auch im griechischen das letzte: κλισις; der Deutsche kann es wohl nicht anders übersetzen als: Neigung.

31) Daß der Grieche bey seinem Worte eben das gedacht hat was der Lateiner bey dem seinigen, schliesse ich daraus weil das griechische von κλινω herkömmt, das man mit lateinischen Buchstaben in inclino findet. Uebersetzt nun der Deutsche richtig, so fragt sich ob Er, Neigung seinem gemeinen Sprachgebrauche gemäß, für das nimmt: Wenn man einen Winkel, kleiner als zween rechte gezeichnet hat, und dann ausen um diesen Winkel herum geht.

Die Neigung von den beyden Seiten eines Daches, heisst das der Weg den eine Katze nimmt, die von einer Seite des Daches über den Forst, auf die andre klettert?

Wenn eine Linie Gesicht und Rücken hat, und von ein paar Linien die Gesichter auf den Seiten sind wo sie einen Winkel kleiner als zweene rechte machen, so sehen sie einander an. Oeffnete sich dieser Winkel nach und nach von o

bis

bis an zween rechte, so hätten die Linien einander anfangs geküsst, ... man nennt in der höhern Geometrie circulos osculatores, so wird man ja so was auch in der euklidischen sagen dürfen ... nun entfernten sich die Gesichter von einander, bis zuletzt jedes gerade vor sich weg sähe, ohne auf das andre zu sehen. Oeffnet sich der Winkel noch weiter über zween rechte, so kehren die Linien einander die Rücken zu, und stossen zuletzt mit den Theilen die den Gesichtern entgegen gesetzt sind zusammen, wie die beyden Hälften des Reichsadlers.

Wenn so was bey ein Paar Verliebten nach und nach vorgeht, so sagt man: Ihre vorige Neigung verwandele sich in Abneigung Warum soll es denn bey den Linien immer Neigung bleiben? Auf Latein heisst es gewiß nicht mehr inclinatio sondern reclinatio.

Um recht gewiß zu seyn ob es auf griechisch noch κλισις heissen könne, schlug ich den Scapula nach. Ich fand das Wort bey der Sonne gesetzt, da hoffentlich Neigung der Sonne keinen Winkel über zweene rechte bedeuten kann; Dann als ein Kriegswort beym Polybius. Neigung nach dem Spiesse; heisst: sich nach der rechten Seite wenden wo der Spieß gehalten ward; Polyb. de militia Romana, opera Poeschelii Norib. 1731; pag. 302; Endlich eine grammatische Figur μεταϰλισις. Das mag nun ausgelegt werden wie man will so steht

beym Euklid kein μετα, und jemand der Physik zu lehren verspricht, wird nicht getadelt daß er nicht auch Metaphysik lehrt.

Man lasse also Eukliden reden in welcher Sprache man will, so redet, dem gemeinen Sprachgebrauche gemäß, seine Erklärung, nie von einem angulo gibbo.

In den kann man nicht kriechen oder sich darinn verstecken, und verstünde man ihn bey: Baculus stat in angulo, ergo cras pluet, so wäre nicht nur der Schluß unrichtig, sondern auch diese Prämisse ungereimt, da doch alle Logiker, bey diesem hypothetischen Schlusse, nicht Antecedens, sondern Consequentiam läugnen.

32) Euklid, giebt keine andre Arten der Winkel an, als rechte, spitzige, stumpfe. Der welcher grösser ist als zweene rechte, gehörte also unter die stumpfen. Müsste vielleicht Metastumpf heissen oder Hyperstumpf.

Man setze durch eine Messerklinge, senkrecht auf ihre Länge eine Ebene; Sie hat mit den beyden Flächen die in der Schneide zusammengehen zwo gerade Linien gemein; von dieser Linien Winkeln, bekömmt man den welcher mehr als zweene rechte beträgt, in den Finger, wenn man sich mit dem Messer in den Finger schneidet. Und nun fühle man, ob der Winkel stumpf ist? Jeder Deutscher, nennt das Messer desto stumpfer je weniger dieser Winkel über

über zweene rechte beträgt: Bezieht also das stumpfe auf den Winkel welcher dem genannten zu vier rechten fehlt.

33) I) Die Summe aller Winkel in einem ebenen Vielecke, lässt sich bekanntermaassen leicht aus der Summe der Winkel in einem Dreyecke herleiten. Die Regel dazu steht auch in Bermanns Euklid, in Anmerkungen beym 32 Satze des I. B. wo die Summe der Winkel im Dreyecke vorkömmt. Aber Gregors Ausgabe, hat das nicht. Es ist also eine Vermehrung späterer Zeiten.

Wenn die Zahl der Seiten = n; so ist die Summe = (n - 2). 180 Gr. und das bleibt wahr auch wenn die Figur einwärts gehende Winkel hat, da muß man den Winkel in der Figur so verstehen daß er 360 Grad weniger des Winkels beträgt, welcher eben die Spitze hat, ausen an der Figur liegt und kleiner als zweene rechte ist.

Der Winkel grösser als zweene rechte in der Figur, lässt sich allsdann durch eine gerade Linie in zween theilen jeder kleiner als zweene rechte, und diese beyden zusammengerechnet, geben mit den übrigen Winkeln des Vielecks die gehörige Summe.

So gilt einerley Gesetz für die Summe der innern Winkel des Vielecks, es mögen lauter auswärts gehende seyn, oder auch einwärts gehende unter ihnen.

II) Aber etwas anders bleibt für beyde Fälle nicht einerley. Auch in B. Euklid steht a. a. O. Theorema: Omnes simul externi anguli cuiuscunque figurae rectilineae conficiunt quatuor rectos, mit dem Beweise. Clavius im Commentar beym 32 S. druckt es etwas deutlicher aus: Si singula latera ... producantur *ordinatim versus eamdem partem*. ... Also: die Verlängerung der ersten Seite macht einen äusern Winkel mit der zweyten Seite, der zweyten Seite Verlängerung einen äusern mit der dritten ..... der letzten Seite Verlängerung einen äusern mit der ersten Seite. Jeder äusere macht mit seinem Nebenwinkel zween rechte. So hat man n Paare von Winkeln, jedes Paar zusammen 180 Grad: Die innern Winkel dieser Paare zusammen, betragen (n — 2). 180 Gr. Folglich die äusern alle zusammen zweene rechte.

Hat die Figur einwärts gehende Winkel so gilt dieser Beweis nicht.

Es sey ABCD, ein Viereck mit einem einwärts gehenden Winkel bey C. Ich will durch γ den Winkel daselbst verstehen der weniger als zweene rechte beträgt so ist der in der Figur $= 360° - \gamma$. und $DAB + ABC + 360° - \gamma + CDA = 2.180°$.

Folglich $DAB + ABC + CDA = \gamma$.

Verlängert man nun die Seiten ordentlich; so ist

EBC

$$EBC = 180^\circ - ABC$$
$$FCD = 180 - \gamma$$
$$GDA = 180 - CDA$$
$$HAB = 180 - DAB$$

giebt die Summe der vier Winkel linker Hand $= 4.180^\circ - 2.\gamma$; gröſſer als vier rechte, weil $2.\gamma$ kleiner als vier rechte ist.

34) Nicht alle Geometern haben bey Figuren wo einwärts gehende Winkel vorkommen, gröſſere als zween rechte gedacht. Clavius Geom. Pr. L. IV. c. 4. sagt von dergleichen Winkel: Indagandus non est, quod sit *extra* figuram. Pitiscus Trigonometria Probl. Geom. Lib. vnus probl. 2. zeigt wie man sich verhalten soll, si latera aliqua versus centrum sint inflexa, et angulum faciant externum. Er schliesst diesen Winkel mit einer geraden Linie, und bekömmt so, ein Dreyeck auser der Figur.

35) Wenn sich eine Linie, aus ihrer ersten Lage im Kreise herumdreht, so macht sie mit dieser ersten Lage nach und nach Winkel, nicht nur über 180 Grad sondern über 360 Grad und mehrere Vielfache des Umkreises. So was ist bey der Quadratrix des Dinostratus 23 Abh. vorgekommen. Und, daß man nicht etwa glaubt, es sey blos eine solche mathematische Speculation so stelle man sich durch den Mittelpunct des verticalen Wasserrads einer Mühle, eine Verticallinie aufwärts vor, und betrachte die Win-

kel, welche mit ihr ein bestimmter Halbmesser des Rades macht, der mit ihm umgeht.

Hätte Euklid nicht auch an alle diese Winkel denken sollen? Und an alle die Winkel welche der Radius Vector der Erde, mit der Linie aus der Sonne nach dem Aphelium gemacht, seitdem die Erde um die Sonne geht?

36) Kurz der Ausdruck: Winkel grösser als zweene rechte, nimmt das Wort Winkel in einer Bedeutung in welcher Euklid es nicht nahm, und (31) nicht verbunden war es zu nehmen. So hat man in neuern Zeiten vielen Wörtern allgemeinere Bedeutungen gegeben als sie sonst hatten, aber niemand rechnet es den Alten als einen Fehler an, daß sie Sätze lehrten die in der Bedeutung gültig waren die sie den Wörtern gaben. Man gestattet sich + 12 — 8 als ein Ganzes anzusehen, das aus einem bejahten und einem verneinten Theile besteht. Bestreitet man damit den Grundsatz? das Ganze ist grösser als jeder seiner Theile.

37) Machen zwo gegebene gerade Linien, zugleich, einen Winkel kleiner als zween rechte, und auch einen grösser als zween rechte, so lässt sich der Winkel den sie machen nicht wie allgemein gewöhnlich gewesen ist, durch drey Buchstaben angeben. Man müsste dazu sagen ob die drey Buchstaben den Winkel zwischen den Linien, oder aufen um sie herum andeuten.

Das

Das läßt sich so bewerkstelligen, wenn man um die Spitze des Winkels einen Kreis beschreibt, und von desselben beyden Bogen den nennt, welcher kleiner als der Halbkreis ist, oder den welcher grösser ist.

Auf die Art lassen sich selbst Winkel angeben, die von einem Schenkel den sie alle an ihrem Anfange gemeinschaftlich haben, vier rechte und Theile davon, so vielmahl man will enthalten, wie unter andern in der 24 u. f. Abh. geschehen ist.

Eigentlich aber, sind das nicht **Winkel** sondern **Bogen** auch habe ich das letzte Wort in den Aufschriften erwähnter Abhandlungen gebraucht. Man sehe hierüber was ich 27 Abh. 24; 25; gesagt habe.

38) So bedeutet der Ausdruck: **Winkel grösser als zweene rechte**, eigentlich: **Bogen grösser als der Halbkreis**; und ist vermuthlich erst aufgekommen, da man angefangen hat Winkel mit Bogen zu messen. Euklid thut das nicht, obgleich im 33 Satze seines VI Buches, der Grund dieses Verfahrens enthalten ist. Er druckt allemahl die Winkel durch rechte und Theile des rechten aus. Selbst bey Beschreibung von Vielecken, wo Winkel am Mittelpuncte und Theilungen des Kreises vorkommen, wie in den letzten Sätzen des 4 Buches, bezieht sich sein Vortrag nie ausdrücklich auf die Vergleis

gleichung solcher Winkel mit den Bogen. Hätte man vor ihn, drey rechte Winkel in einer Ebene an einander um einen Punct gelegt, so hätte er allerdings die Summe dreyer rechter gesehen, aber die Lage des ersten Schenkels vom ersten rechten Winkel, gegen die Lage des letzten Schenkels vom dritten, hätte er wohl nur durch einen rechten angegeben.

39) Nennt man einen Winkel, kleiner als zweene Rechte = m; so besteht der ihm zugehörige Winkel über zweene Rechte, aus dem Scheitelwinkel = m und zween Nebenwinkeln, jeder = 2 Rechte — m, das giebt zusammen 4 Rechte — m.

Wer von den beyden Linien die den Winkel m enthalten, nur die Theile denkt, die als Schenkel dieses Winkels von seiner Spitze ausgehn; der denkt keine dieser Linien vollständig. Jede geht über den gemeinschaftlichen Durchschnitt verlängert hinaus, so entstehen die genannten Nebenwinkel und Scheitelwinkel.

40) Herr Bertrand in dem (27 I) angeführten Buche T. 2. §. 4. sagt: "Wenn ein Paar gerade Linien einander schneiden, so theilen sie die Ebene in welcher sie sich befinden in vier Theile jeder heisst ein Winkel. Der Winkel ist also ein Theil der Ebene zwischen zwo geraden Linien die am Puncte ihres Durchschnitts begränzt sind."

Wenn

Wenn man die vier Winkel die er angiebt betrachtet, eben die welche (39) erwähnt, so ist ein Winkel grösser als zweene rechte ausgeschlossen. Aber Herr B. Erklärung des Winkels überhaupt, schliesst denselben nicht aus, wofern etwas zwischen den Schenkeln des Winkels seyn kann, der mehr als zweene rechte betragen soll.

41) Das liesse sich in der That bestreiten. Wenn man innerhalb eines Winkels der kleiner als zweene rechte ist, einen Punct nimmt, so schneidet jede gerade Linie durch diesen Punct wenigstens einen Schenkel dieses Winkels, auf eben der Seite der Spitze nach welcher der Schenkel ausgeht. Betrachtet man aber eben diese Schenkel als einem Winkel über zweene rechte, gehörig, so kann man auf der Seite der Spitze, wo dieser Winkel befindlich ist, unzählige gerade Linien ziehen, welche diese Schenkel als Schenkel, nicht schneiden, nur ihren Verlängerungen begegnen.

Ob ich nun zwischen ein Paar Wänden bin, wenn ich von jeder Stelle des Platzes auf dem ich mich befinde, nach beyden Seiten, gerade fort in unzählichen Richtungen so weit ich will gehen kann ohne an eine von beyden Wänden zu kommen, darüber befrage man die Wörterbücher und Grammatiken bey den adverbiis: zwischen, inter, entre.

42)

42) Meines Erachtens schliesst also in Hrn. B. Erklärung das zwischen, Winkel grösser als zween rechte aus, und vielleicht hat er deßwegen Hrn. le Sage Erinnerung nicht erwähnt. (27) Theil der Ebene hätte ich freylich in die Erklärung des Winkels nicht gebracht, aber hie ist der Ort nicht, Hr. B. geometrische Vorstellungen weiter zu untersuchen. Er macht von dieser seiner Verbindung: Theil der Ebene, und Winkel, einen Gebrauch bey der Theorie der Parallelen, darüber meine Gedanken vom Hrn. Prof. Hindenburg in das leipziger mathematische Magazin für reine und angewandte Mathematik aufgenommen sind 1786; III. Stück 397 S.

43) Den Winkel unter zween rechten, kann man mit einer geraden Linie schliessen, und bekömmt ein Dreyeck. Das geht mit dem Winkel über zween rechte nicht an. Die geradelinichte Figur wo er innerer Winkel seyn soll, muß wenigstens ein Viereck seyn.

44) Euklids 20 S. des XI. Buchs heisst: Wenn drey ebene Winkel einen körperlichen einschliessen, so beträgt jedes Paar von ihnen zusammen mehr als der dritte.

Sein Beweis erfodert, durch einen Punct innerhalb des grösten, eine gerade Linie zu ziehen die beyde Schenkel schneidet. Also muß der grösste kleiner seyn als zweene rechte (43) wie schon Bermann bemerkt hat (26; XXII.)

Und

Und so ist der Satz richtig wenn keiner von den drey Winkeln mehr als zween rechte beträgt.

45) Drey solche Winkel heissen, F, G, H, der letzte sey grösser als jeder der beyden andern. So ist F + G grösser als H folglich F grösser als H — G.

Oder jeder der beyden kleinen Winkel allein grösser als der grösste um den andern vermindert. Daß der grösste mehr beträgt als der kleinern Unterschied, versteht sich so.

Jeder Winkel ist also grösser als der beyden andern Unterschied.

46) Wenn eine Pyramide, gleichseitig oder ungleichseitig, eine ebene geradelinichte Figur zur Grundfläche hat, an der sich lauter auswärts gehende Winkel befinden, die Figur mag sonst ordentlich oder unordentlich seyn, nur ohne einwärts gehende Winkel.

So betragen die ebenen Winkel welche den körperlichen an der Spitze der Pyramide einschliessen, zusammen allemahl weniger als vier rechte.

Beweis. I) Die Grundfläche habe m Seiten, so ist die Summe ihrer Winkel = (m — 2). 180 Grad.

II) Die Pyramide hat zu Seitenflächen m ebene Dreyecke, jedes derselben hat seine eignen Winkel, keines, einen Winkel oder einen Theil eines

eines Winkels mit einem andern Dreyecke gemein.

III) Also machen die 3. m Winkel dieser Dreyecke zusammen 3. m. 180 Grad.

IV) In jedem Dreyecke liegt ein Winkel an der Spitze der Pyramide, zweene liegen an des Dreyecks Grundlinie, welches zugleich eine Seite der Grundfläche ist.

V) Jeder Winkel an einer Grundlinie, hat zum Nachbar, eines andern Dreyecks Winkel, an dieses Dreyecks Grundlinie, beyde Dreyecke haben zur gemeinschaftlichen Seite, eine Linie von der Spitze der Pyramide, an den Scheitel des Winkels den der beyden Dreyecke Grundlinien machen.

VI) Dieser Winkel, ist einer von den Winkeln der Grundfläche, Er und der beyden Dreyecke (V) Winkel, schliessen zusammen einen körperlichen an der Pyramide Grundfläche ein.

VII) Dergleichen körperliche (VI) sind an der Zahl m; jeden enthalten, ein ebener der Grundfläche, und zweene der Seitendreyecke.

VIII) Der ebene der Grundfläche ist kleiner als die Summe der beyden der Dreyecke (44)

IX) Also betragen die m der Grundfläche, zusammen nicht soviel als die 2. m der Dreyecke; Oder

X) Die Winkel der Dreyecke an ihren Grundlinien, betragen zusammen mehr als die

Win-

Winkel der Grundfläche, mehr als (m—2). 180 Grad (I).

XI) Die Summe der Winkel an der Spitze (IV) findet sich, wenn man die Summe der Winkel an den Grundlinien, von m. 180 Grad abzieht (III; IV).

XII) Das heisst: Wenn man von m. 180 Grad etwas grösseres abzieht als (m—2). 180 Grad (X).

XIII) Folglich ist die Summe (XI) kleiner als 2. 180 Grad.

XIV) Man sieht zugleich warum dieser Beweis nicht statt findet, wenn die Figur einwärts gehende Winkel hat.

In der Figur zu 19; XIII; bedeute μ den Winkel B*qB der kleiner als zweene rechte ist. Die Summe der Winkel des Vierecks ist = BPB* + PB*q + 360 Grad — μ + qBP.

Nun ist

KPB	+ KPB*	grösser als BPB*
KB*P	+ KB*q	..... PB*q
KqB*	+ KqB	..... μ
KBq	+ KBP	..... qBP

also die sechs Winkel linker Hand, zusammen grösser als die vier rechter Hand zusammen.

Die Summe der ebenen Winkel um K ist = 4. 180 Grad — den sechs Winkeln linker Hand.

Wäre nun die Summe der vier Winkel rechter Hand, die Summe der Winkel des Vierecks = 2. 180 Grad;

So wäre die Summe der ebenen Winkel um K; = 4. 180 Graden — etwas das mehr beträgt als 2. 180 Gr., folglich kleiner als 2. 180 Grad.

Aber die Summe der vier Winkel rechter Hand ist kleiner als die Summe der vier Winkel des Vierecks; Statt μ müsste in ihr $360° - \mu$ stehn, was grössers als μ, wenn sie die Summe der Winkel des Vierecks ausmachen sollte.

Wer also nur weiß daß die sechs Winkel linker Hand zusammen mehr betragen als die vier rechter Hand, der weiß noch nicht ob sie mehr betragen als 2. 180 Grad; denn die vier rechter Hand betragen weniger.

Und so weiß er auch nicht, daß die Summe der sechs Winkel rechter Hand, von 4. 180 Graden abgezogen, weniger übrig läßt als 2. 180 Grad.

Er weiß allerdings auch nicht ob sie mehr, oder genau soviel übrig läßt.

Nähmlich er kann von der Summe der Winkel um K, blos aus der allgemeinen Betrachtung daß das Viereck einen einwärts gehenden Winkel nichts behaupten. Wie er etwas behaupten kann lehrt die Aufgabe auf welche ich mich beziehe.

47) Beym Euklid 21 S. des XI. B. wird im Ausdrucke des Satzes Απασα στερεα γωνια, Omnis angulus solidus genannt, und doch der Beweis nur von dem körperlichen Winkel geführt der in drey ebene eingeschlossen ist. Clavius sagt: Quoniam haec demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido quem tres plani anguli constituunt, idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus .... Die Interpretes konnten als blosse Dollmetscher wenigstens, nichts mehr sagen als was der Grundtext sagt. In (46) habe ich des Clavius Beweis entwickelt, und durch den Gebrauch des Buchstabens, den Gang der Schlüsse besser vor Augen gestellt. Tacquet giebt eben den Beweis; Elem. Geometriae Lib. 7. Pr. 21. Ich hätte das gegenwärtige freylich schon bey (12) anbringen können, ich versparte es aber bis hieher, um vorher zu zeigen warum einwärts gehende Winkel ausgeschlossen werden.

48) Wenn man statt der ebenen Winkel, die einen körperlichen einschliessen, ihre Maasse auf der Kugel betrachtet, so gehört einem körperlichen Winkel in drey ebene eingeschlossen, ein sphärisches Dreyeck, da jede Seite kleiner ist als der Halbkreis.

49) Daß dieses so seyn solle nehmen die Schriftsteller stillschweigend an. Rheticus in seinen Büchern de triangulis globi, im Opere Palatino (dieser Abh. I. Samml. 60 Abh. 149)

nennt bey der umständlichen Durchzählung aller Fälle, nur Seiten grösser oder kleiner als Quadranten. Auch erwähnt *Pitiscus* in seiner Trigonometria keine andere. Gellibrand sagt; Trigon. Britann. L. II. Part. II. cap. I. p. 77. Trianguli sphaerici latera simul sumta sunt minora duobus semicirculis; Er trägt aber an diesem Orte nur Sätze vor, ohne ihre Beweise. Wolf will es beweisen Elementa Sphaericor. et Trigon. Sphaer. §. 63. im T. III. El. Mathes. Sein Beweis fängt an: Man verlängere zwo Seiten bis sie einander wiederum schneiden. Er nimmt also schon, daß beyde Seiten Theile von Halbkreisen sind.

50) Man lege durch einen Punct als Pol, zweene Quadranten, in einen Winkel = z der kleiner ist als zweene rechte. Auf dem Aequator fällt zwischen sie ein Bogen auch = z. Dieses Bogens Ergänzung zum ganzen Kreise, ist grösser als ein Halbkreis, und macht mit vorigen beyden Quadranten ein sphärisches Dreyeck; dessen Seiten also zweene Quadranten sind, und ein Bogen grösser als der Halbkreis, einen Winkel gegenüber grösser als zweene rechte. Dieses Kugeldreyeck misst einen körperlichen Winkel den zweene ebene rechte einschliessen und ein dritter grösser als zweene rechte, in so fern dieser einschliessen kann. (41)

Dieses sphärische Dreyeck ist aber ein ganz gewöhnliches nur von hinten betrachtet, und die

Lehrer

Lehrer der sphärischen Trigonometrie haben nicht für nöthig befunden dergleichen Dreyecke aufzunehmen.

51) Da Euklid nie Figuren mit einwärts gehenden Winkeln erwähnt, so kommen ihm auch keine Pyramiden vor, die solche Figuren zu Grundflächen haben, und er hatte keinen Anlaß an dergleichen Einwendung zu denken. Vielleicht hätte er sich bey einem solchen Vorfalle verhalten wie Pitiscus (34) die Grundfläche zu einer Figur ergänzt die lauter auswärts gehende Winkel hat, die Höhlungen der ihm vorgestellten Pyramide, (13) ausgefüllt, und eine bekommen, bey deren Spitze sein Satz statt fände.

Oder wenn er die Pyramide nicht ergänzt hätte, wäre von ihm die Einschränkung wahrgenommen worden die sein Satz bedarf.

Ein Satz der zu allgemein ausgedruckt ist, verführt nie in Irrthum, wenn man ihn nie auf Fälle anwendet wo er nicht gilt.

Und das wird man nicht thun, wenn man den Beweis des Satzes kennt. Denn da wird man bemerken ob der Beweis auch auf diesen Satz passt.

Nur wer Sätze nachschreibt oder nachsagt, ohne ihre Gründe untersucht zu haben, ist in Gefahr sie anzubringen, wo diese Gründe sie nicht unterstützen.

Wenn die Analysten den binomischen Lehrsatz auf Potenzen mit gebrochnen Exponenten anwandten, so musste ihnen freylich einfallen daß er nur für ganze, bejahte, erwiesen war.

Indessen, war es doch eine Muthmassung was von allen ganzen bejahten Zahlen gilt, werde auch von Zahlen gelten die dazwischen fallen. Und diese Muthmassung ward bestätiget, wenn man durch andre Methoden für Wurzeln eben das fand was der binomische Lehrsatz gab.

Allemahl blieb denen die vollkommne Schärfe verlangten, noch übrig einen allgemeinen Beweis zu suchen.

52) Ueberhaupt denke ich über die Erklärung des körperlichen Winkels beym Euklid so: Ist ein Körper von Ebenen begränzt, so stossen die Gränzen dieser Gränzen, die geraden Linien deren jede einem Paare Ebenen gemein ist, in Puncten zusammen. Man kann solche Linien **Kanten** nennen (Geom. 33 Satz) Was sie nun an einem solchen Puncte machen, heisst die **Ecke des Körpers** angulus solidus. Daß da mehr als zwo gerade Linien jedes Paar in einer andern Ebene zusammen kommen ist sichtlich. Diesen klaren Begriff von der körperlichen Ecke, suchte Euklid, durch Auseinandersetzung einiger Merkmahle, der Deutlichkeit näher zu bringen, eben wie er bey der geraden Linie thut, selbst bey dem ebenen Winkel, da er annimmt, man wisse aus dem Sprachgebrauche was **Neigung** heisst.

heisst. So wäre noch die Frage, ob die Erklärungen des körperlichen Winkels, in strenger logischer Richtigkeit, Definitionen sind, deutliche und vollständige Begriffe?

53) Ich sage Erklärungen denn man findet ihrer zwo. Die erste: der körperliche Winkel ist, mehr als zweyer geraden Linien die einander schneiden, und nicht in einer und derselben Ebene sind, Neigung gegen alle diese Linien ... προς πασαις ταις γραμμαις κλισις; ad omnes lineas inclinatio, beym Vermann; Neigung wenigstens dreyer Linien gegen einander, beym Lorenz. Was das Deutsche sagt ist doch schon etwas dunkel, denn man versteht wohl: Neigung einer Linie gegen die andre, aber nicht so gut: dreyer gegen einander; indessen ist das hell gegen das Griechische und Lateinische, denn das redet von Neigung gegen alle Linien, und das Ding das diese Neigung hat, oder: diese Neigung gegen alle Linien selbst, soll körperlicher Winkel seyn.

54) Ohne Zweifel hat dieses schon einem der ältern Herausgeber der Elemente, nicht recht verständlich geschienen, der eine andere Erklärung beygefügt hat: Der körperliche Winkel ist, der unter mehr als zween ebenen enthalten ist, die nicht in einer Ebene liegen, und an einem Puncte stehen.

55) Wenn aus einem Puncte drey gerade Linien ausgehn, jedes Paar in einer andern

Ebene, so geben sie nicht mehr als drey Winkel und die Erklärung hat keine Schwürigkeit.

Gehn aber eben so vier Linien aus, 1, 2, 3; 4; so lassen sich nach der Menge von Paaren die sie geben, sechs Winkel aus ihnen bilden, 1 u. 2; 1 u. 3; 1 u. 4; 2 u. 3; 2 u. 4; 3 u. 4. Welche vier aus diesen sechsen bestimmen eigentlich den körperlichen? Freylich die vier von denen er begränzt wird, wie Lorenz περιεχομενη übersetzt hat, und dieses begränzen oder einschliessen comprehendi, wie es in Bermanns Ausgabe heisst, müsste doch nur durch Anschauen oder Befühlen erkannt werden.

Bey mehr geraden Linien, wäre noch eine grössere Mannichfaltigkeit von Paaren, und ebenen Winkeln.

56) Ich denke also, den Begriff eines körperlichen Winkels bekömmt man am besten, wenn man die Ecke eines Körpers vor sich stellt, und wahrnimmt, wie die Kanten desselben, die geraden Linien in denen jede der Ebenen die ihn begränzen, ihre benachbarte schneidet, nach einem Puncte zu, oder von demselben aus, gehn. Das nenne man nun wie man will: Neigung gegen alle diese Linien, Oder: zwischen ihnen enthalten seyn, so hat man ein paar Definitionen, die niemand versteht, der nicht das Ding schon kennt, das sie erklären sollen.

Clavius, nachdem er die erste Definition zu erläutern gesucht hat, sagt von der zweiten:

faci-

facilis est, praecedenti recte intellecta. Der alte Geometer welcher die zweyte beyfügte, wollte vermuthlich nicht sie aus der ersten verstanden haben, sondern die erste aus ihr.

57) Durch den Punct welcher des Körpers letzte Gränze ist (52) lässt sich gewiß eine Ebene legen, auf deren einer Seite sich der ganze Körper befindet, nichts von ihm auf der andern. Folglich gehn seine Kanten, welche diesen Punct gemein haben, alle aus demselben nach einer Seite der Ebene.

58) Bermanns anguli non pyramidales, (22; 23; 26; IV.) sind keine körperlichen Winkel. Nähmlich B. bleibt bey den Worten stehen: Linien aus einem Puncte in unterschiednen Ebenen. Aber die Absicht dieser Worte ist ja: Etwas anzugeben, das sich am geometrischen Körper befindet. Der Absicht gemäß müssen sie ausgelegt werden.

B. hat also diese Definitionen in einem Buche von dem er eine so gute Ausgabe besorgte, misverstanden. Ein Erfahrungsbeweis dessen was ich über diese Definitionen gesagt habe (52).

59) Was B. angiebt, sind nicht nur keine körperlichen Winkel, sein angulus non pyramidalis, ist nicht einmahl ein Winkel. Er hätte zu Darstellung seiner Gedanken nicht nöthig gehabt neue Exempel zu erfinden, bekannte Sätze hätten ihm dergleichen dargeboten.

Man stelle sich einen regulären Körper in die Kugel beschrieben vor, z. E. einen Würfel. Aus der Kugel Mittelpuncte ziehe man Linien nach des Würfels acht Ecken. Das sind ja Linien aus einem Puncte in unterschiednen Ebenen ... freylich immer zwo in einer geraden Linie die zusammen eine Diagonale des Würfels ausmachen das hindert aber hie nichts .... offenbahr hat keine Ebene durch den Mittelpunct der Kugel alle diese Linien auf einer Seite: Also wären diese acht Linien zusammen ein angulus non pyramidalis. Wird man aber wohl sagen? sie gäben zusammen einen Winkel, oder gar einen körperlichen.

60) Wo ein körperlicher Winkel ist da gehn aus einem Puncte Linien in mehrern Ebenen: Aber umgekehrt gilt nicht: Wo aus einem Puncte Linien in mehr Ebenen gehen, da ist ein körperlicher Winkel. Es kann die Neigung gegen alle diese Linien fehlen, oder das Enthaltenseyn (53; 54) Diese Merkmahle des körperlichen Winkels, lassen sich nicht von neuem definiren, man hat davon nur klare Begriffe. Deßwegen sagte ich (52) in der Wolfischen Kunstsprache: Die der angedeuteten Erklärungen geben keinen vollständigen Begriff.

61) Wenn man die Spitze eines körperlichen Winkels in den Mittelpunct einer Kugel setzt, so giebt die Ebene, welche alle Linien die von seiner Spitze ausgehen auf einer Seite hat

(57) auf der Kugelfläche einen grösten Kreis, die Linien gehen alle auf einer Seite dieses grösten Kreises durch die Kugelfläche, die Bogen auf der Kugelfläche, welche ihre Winkel messen, sind alle auch auf derselben Seite begränzt, und geben ein sphärisches Vieleck das ganz in einer Hälfte der Kugelfläche liegt, folglich nicht grösser ist als diese Hälfte.

62) I) Ein sphärisches Vieleck also, welches das Maaß eines körperlichen Winkels ist (36. Abh.) kann nicht grösser seyn als die Hälfte der Kugelfläche.

II) Ist es ihr gleich (35. Abh. 10; V) so fallen alle ebenen Winkel die den körperlichen einschlossen in die Ebene des grösten Kreises.

III) Ist es grösser; so heisst das: Man versteht von den beyden Theilen der sphärischen Fläche welche eine und dieselbe Zusammenfügung von Bogen grösster Kreise begränzt, den grössern. (35. Abh. 10; IX u. f.) Und dieser grössere Theil kann keinem körperlichen Winkel gehören. Die geraden Linien welche den körperlichen Winkel einschliessen, treffen nicht in diesen Theil, sondern in den kleinern.

IV) Wenn man den körperlichen rechten wie am Anfange der 30 Abh. versteht, so kann kein körperlicher Winkel, bis auf vier dergleichen rechte anwachsen, da fallen seine Linien alle in eine Ebene (IV) noch weniger kann er mehr als vier dergleichen betragen (III) und 36. Abh.

38.

Litterarische Nachrichten vom sogenannten Nonius oder Vernier.

1) Die Theorie dieses Werkzeuges habe ich in meinen astronom. Abhandlung. II. Samml. (Götting. 1774) V. Abh. 13; auf 142 ... Seite, Auch daselbst; 17; 161 S. Nachrichten von allerley Methoden zu seinen Theilungen gegeben, und besonders 180... S. vom Vernier. Drey Bücher in denen dieses Werkzeug beschrieben wird und zwar in jedem so als würde es darinn zum erstem mahle beschrieben, kannte ich damahls nur aus Robins u. a. Anführung. Sie sind mir nachdem selbst in die Hände gekommen, und verdienen als Seltenheiten daß ihr Andenken erneuet wird.

2) Nonius beschrieb auf der Ebene eines Quadranten 45 concentrische Bogen; den äusersten in 90 Theile getheilt, dann die folgenden in 89; 88 ... 46 Theile.

3) Also maaß ein Theil des zweyten Bogens einen Winkel = 1 Grad + $\frac{1}{89}$ Grad, wo der Bruch 40″ (26 + $\frac{86}{89}$) Tertien beträgt. So liesse sich eine Tafel machen wieviel jede Menge von 89 Theilen, eben soviel Grade überträffe.

Auch

Auch Curtius (angef. astr. Abh. 163 S.) theilt in dem zweyten Quadranten den Bogen der einen Winkel von 61 Grad misst, in 60 Theile ein.

4) Dieses Verfahren, braucht also concentrische ähnliche Bogen, die Menge der Theile in einem, um Eins grösser als in dem andern. So wird es durch mehr concentrische Bogen fortgesetzt.

5) Sind diese Bogen unbeweglich, so gehört eine Tafel dazu des einen Theile in des andern Theile zu verwandeln; auch sind alsdann eine Menge solcher Bogen nöthig.

6) Aber mit zween, und ohne Tafel kömmt man aus, wenn man einen beweglichen, an dem unbeweglichen verschieben kann.

7) Das ist nun der Vernier; ohne Zweifel hat das Verfahren des Nonius darauf geleitet, und vermuthlich ist dieser Erfindung auch deßwegen der Nahme gegeben worden. Nur hätte man sie einen beweglichen Nonius nennen sollen.

Vernier.

8) Das älteste Buch das soviel ich weiß diese Theilung lehrt, hat folgenden Titel:

La construction, l'vsage, et les proprietez du quadrant nouveau de mathematique. Comme aussi la construction de la table des sinus, de minute en minutes successivement par vn seul

seul maxime. De plus, vng Abregé desdicts tables, en vne petite demye page auec son vsage. Et finalement, la methode de treuuer les angles d'vn triangle par la cognoissance des costez, et les costez par les angles, sans l'ayde d'aucune table *Composé par* Pierre Vernier, *Capitaine et Chastellain pour sa Majesté au Chasteau Dornans, Conseillier et General de ses Monnoyes, au Comté de Bourgogne.* A Brusselles, chez Francois Vivien derriere l'Hostel de Ville, au bon Pasteur 1631. 122 Octavseiten ein Kupfer das den Quadranten mit dem beweglichen Bogen abbildet. Zuletzt steht: Imprimatur Zegerus van Hontsum, Poenitentiarius Antuerpiens. Librorum Censor.

9) Gleich nach den Titel folgt die Dedication: A la Sereniſſime Princeſſe Iſabelle Clere Eugenie, Infante d'Eſpagne. Er hat einige Zeit zuvor der Prinzeſſinn den Entwurf des Werkzeugs auf Papier vorgelegt, der gefiel Ihr und Sie befahl ihn auf Metall (ſur du cuiure) auszuführen, und die Erklärung aufzuſetzen. Das Werkzeug sagt er sey von seiner Erfindung. Der Vorzug beſtehe nicht darinn, daß es ein Quadrant in 90 Theile getheilt ſey, auch nicht daß die Theile des zweyten Stücks (de la ſeconde planche) an der Zahl 30 ſind, jeder $1\frac{1}{30}$ Grad, denn jeder Mathematiker wiſſe, daß 31 mit 30 dividirt, $1\frac{1}{30}$ giebt. Die Theilungen, da man eine Oeffnung des Zirkels oft wieder-

hohlt

hohlt forttragen muß, da man viel Kreise ziehen muß, wie Clavius und Nonius lehren, verursachen Unsicherheit und Verwirrung. Die Vollkommenheit seines Werkzeuges setzt er in den Abtheilungen die sich fortschieben lassen (divisions courantes) welche den Gesichtsstrahl beständig begleiten. Deßwegen nennt er sein Werkzeug neu, und von seiner Erfindung. Er hat, wie sein verstorbener Vater, von Jugend an, sich besonders befleissigt, alle Arten von Werkzeugen, nicht nur theoretisch zu untersuchen sondern auch in der Ausübung zu prüfen. Dazu gaben ihm unterschiedne wichtige Aufträge Gelegenheit, bey denen er zum Dienste des Königs, in diesem Lande, und in Burgund gebraucht ward.

10) Nach der Vorrede, welche den Gegenstand kurz darstellt, fängt das Buch selbst damit an: Man könne das Werkzeug von unterschiedner Grösse machen, nachdem man es nur auf der Erde, oder am Himmel brauchen wolle. Zum letzten Gebrauche sey zweene Fuß Halbmesser zulänglich, da könne man bis auf Viertheile der Minute angeben, mit vier Fuß Halbmesser komme man bis auf Achttheile der Minute aber da müsse man Brüche brauchen. Ein Halbmesser von sechs Zoll, gebe Grade und Minuten, anderthalber Zoll die Minuten von fünf zu fünfen.

11) Das

11) Das Werkzeug von 1 Fuß im Durchmesser, besteht aus zween Theilen. Der erste: die Platte des Quadranten in Grade und halbe Grade getheilt; *base fixe* zwischen zween Halbmessern eingeschlossen die Zahlen der Grade von fünf zu fünf angegeben, vom linken Halbmesser nach dem rechten.

12) Der zweyte eine Platte wie der Sector eines Kreises, der Bogen misst genau einen Winkel von 31 halben Graden, ist aber nur in 30 Theile getheilt; zwischen zwo Linien aus dem Mittelpuncte eingeschlossen, der Basis (11) concentrisch daß beyde Kreisbogen genau an einander passen, der äusere Umfang der beweglichen Platte, an den innern der Basis. Die Theile auf der beweglichen, von fünf zu fünfen gezählt, von der rechten gegen die linke; jeder Theil gilt eine Minute.

13) Diese bewegliche Platte, nennt er secteur mobile de l'instrument, die beyden Linien aus dem Mittelpuncte, lignes de foy, an jeder sind zwey gespaltne und durchbohrte Plättchen, für die Absehenslinien.

14) Fuß des Werkzeuges, Perpendikel u. d. gl. beschreibt er nicht, weil sie sonst zulänglich bekannt sind.

15) Prüfung: Wo man auch die bewegliche Platte, am unbeweglichen Rande hinführt, müssen die beyden Absehenslinien überall 31 halbe

be Grade einschliessen, so daß kein andrer Minutenstrich des Sectors (13) auf einen halben Gradstrich des Randes fällt. Mehr solche Prüfungen mit Aufeinanderpassen der Minutenstriche des Sectors und der Theile des Randes, die man sonst bey keinem andern Werkzeuge so anstellen kann.

16) Hat der Quadrant zweene Fuß im Halbmesser, so theilt man ihn in Viertheilsgrade; der bewegliche Ausschnitt hält $7 + \frac{3}{4}$ Grad $= \frac{31}{4}$ Grad, und wird in 30 Theile getheilt, deren jeder eine halbe Minute beträgt.

17) Den Quadranten von vier Fuß im Halbmesser, theilt man in Achttheile vom Grade, der Sector misst einen Winkel von $3 + \frac{7}{8} = \frac{31}{8}$ Graden, in 30 Theile getheilt giebt einen Theil $= \frac{1}{4}$ Minute.

18) Den Quadranten (17) richtig in 720 Theile zu theilen ist schwer, und bey dem Gebrauche des beschriebenen Sectors, kommen Brüche von Achttheilen des Grades vor, die beschwerlich sind. V. lehrt also hie eine andre Vorrichtung.

19) Sie hat an dem unbeweglichen Rande, zweene concentrische bewegliche Ausschnitte.

Der Rand ist nur in sechs Theile getheilt, jeder Theil beträgt 15 Grad.

20) Der erste bewegliche Ausschnitt, misst einen Winkel von 15 Grad; ist in dieser Ganzen

15 Grade getheilt, und jeder in Zehntheile also von 6 zu 6 Minuten.

21) Begreiflich kann man also diesen beweglichen Ausschnitt an dem Rande so verschieben, daß er mit der Abtheilung auf dem Rande, jede Menge ganzer Grade angiebt, und was keinen ganzen beträgt, innerhalb Zehntheilen des Grades, oder 6 Minuten.

20) Dieser Ausschnitt giebt also schon soviel als wenn man den Rand von 6 zu 6 Minuten oder in 900 Theile getheilt hätte.

21) Wie der erste bewegliche Ausschnitt, an den Rand passt, so passt an den ersten Ausschnitt der zweyte. Er misst einen Winkel von $3 + \frac{1}{10} = \frac{31}{10}$ Graden, oder 31. 6 Minuten, ist in dreyssig Theile getheilt, deren jeder also $\frac{1}{5}$ einer Minute oder zwölf Secunden beträgt.

22) Beyde Ausschnitte zusammen, mit dem Rande, geben Zehntheile der Minute, oder die Winkel bis auf sechs Secunden.

23) Ist der Halbmesser nur sechs Zoll, so theilt man den Quadranten in 90 Grad. Der bewegliche Ausschnitt misst einen Winkel von 31 Grad, ist in 30 Theile getheilt jeder giebt beym Gebrauche 2 Minuten.

24) Soll der Halbmesser nur drey Zoll seyn, so mache man einen Halbkreis in 180 Grade getheilt, der bewegliche Ausschnitt 16 Grad, in 15 Theile getheilt, deren jeder beym Gebrau-

che

che 4 Minuten gilt. Finden sich auf dem beweglichen Ausschnitte zweene Puncte des Zusammentreffens, so hat man bis auf 2 Minuten.

25) Endlich, kann man auch für den Liebhaber ein Werkzeug machen das anderthalben Zoll im Halbmesser hält. Ein ganzer Kreis, dessen Durchmesser also drey Zoll ist, in 180 Theile getheilt, jeder zween Grad. Der bewegliche Ausschnitt, besteht aus zween Kreisbogen, einander entgegengesetzt, jeder in zwo Absehenslinien (lignes de foy) enthalten, die einander in des Werkzeuges Mittelpuncte schneiden, und wie in der Folge soll gesagt werden, transversal sind. Jeder Bogen misst 26 Grad, also 13 Theile des Randes, ist in 12 Theile getheilt, deren jeder beym Gebrauche 10 Minuten giebt, sechs solcher Theile betragen einen Theil des Randes, sie werden mit Zifern von 10 zu 10 Minuten bezeichnet, beym sechsten Theile, bezeichnet man einen Grad, den man zu den Graden setzen muß die auf dem Rande genommen sind.

26) Transversal nennt er die Absehenslinien in der Bedeutung: Beyde sind Durchmesser die einander im Mittelpuncte kreuzen, und haben die gespaltenen und durchbohrten Bleche an ihren Enden. Diese Vorrichtung ist bey einem so kleinem Werkzeuge nöthig, damit erwähnte Dioptern nicht zu nah an einander kommen.

27) Nun lehrt er den Gebrauch des Werkzeuges. Erst: wenn es sechs Zoll Halbmesser hat, damit einen Winkel der grösser als 30 Grad ist und kleiner als 59; in Graden, und einer geraden Zahl von Minuten zu machen; Dann auch von einer ungeraden Zahl Minuten. Umgekehrt, die Grösse eines Winkels dadurch zu finden. Auch so Gebrauch der übrigen Werkzeuge von andern Halbmessern. Selbst Messung aus einem Stande die er aber nicht für gar zu sicher erkennt.

28) Gar zu deutlich ist sein Vortrag nicht, der Weitläuftigkeit ohngeachtet, zumahl da er, auser der Abbildung des ganzen Werkzeuges, nur eine einzige Figur darstellt, eine Operation zu erklären.

29) Dieses umständlicher zu erzählen halte ich nicht für nöthig, weil jetzo der bequeme Gebrauch von V. Erfindung bekannt genug ist.

30) Seine Abbildung, stellt einen Quadranten vor dessen Halbmesser etwas über $6\frac{1}{2}$ pariser Zoll ist, in ganze Grade getheilt, die Grade von der Linken gegen die Rechte dessen gezählt, der das Auge am Rande hat, auch die Zifern so geschrieben, wie dieses Auge sie bequem liest, von 5 zu 5 Graden. Der bewegliche Ausschnitt stehet zwischen Enden, des 12 und des 43 Grades beträgt also 31 Grad, ist in 30 Theile getheilt an denen sich Zifern, 10; 20; ... 60 befinden, von der rechten des Auges das erwähn-

wähnte Stellung hat, gegen die linke; so geschrieben, daß sie die Köpfe den Köpfen derer auf dem Rande, zukehren, also das Auge sie verkehrt muß lesen können.

31) Jeder der beyden Halbmesser die den beweglichen Ausschnitt begränzen, hat zwo Platten zum Absehen, (Dioptern) eine nah am Rande, die andre nah am Mittelpuncte. Auf jedem dieser Halbmesser ist also sein Paar Dioptern fest, und dreht sich mit ihm um den Mittelpunct, wenn der Ausschnitt am unbeweglichen Rande verschoben wird. Sonst sind keine Dioptern am Werkzeuge.

32) Führt man die Stelle des beweglichen Ausschnittes wo 60 steht an 0 des Randes, so kömmt die Stelle wo 0 steht, an 31° des Randes (30) daraus wird man verstehn, warum V. bey dem Gebrauche dieses Werkzeuges einen Winkel grösser als 30 Grad nennt (27).

33) Man wird ihm indessen die Ungereimtheit nicht schuld geben daß es sich nicht für kleinere Winkel brauchen liesse, und sich leicht ausdenken wie man es da machen müsse welches ich aus der (29) gegebenen Ursache nicht ausführe.

34) Das Bild stellt also einen Quadranten von sechs Zoll vor. (23) Ist es in Lebensgrösse gezeichnet, so hat Vernier grössere Zoll gebraucht als pariser.

35) Weil man zum Gebrauche dieses Werkzeugs, die Sinus nöthig hat, giebt er auf einer einzigen Octavseite, einen: Abregé des sinus pour les Operations communes.

Für den Sinustotus zehn Millionen, die Sinus der ersten ganzen 30 Grade. Daneben, der Quotient der herauskömmt, wenn man den Unterschied zweener nächsten dieser Sinus mit 60 dividirt, diese Columne hat zu oberst 2909 als den Sinus einer Minute. Begreiflich findet man so wie durch Proportionaltheile den Sinus jedes Bogens bis auf 30 Grad der in Graden und Minuten gegeben ist. Weil aber die Bogen durch ganze Grade wachsen, so giebt dieses Verfahren die Sinus für Grade und Minuten nicht genauer als bis auf Hunderttausendtheile des Halbmessers (nicht allemahl so genau) Das aber ist wie V. richtig erinnert, für die gewöhnlichen Arbeiten zulänglich.

36) Wenn der Bogen über 30 Gr. 41 M. noch nicht aber 60 Grad ist, wird auch eine Regel geben den Sinus aus dieser abgekürzten Tafel zu finden; Ueber 60 Grad aber berechnet man den Sinus aus seinem Cosinus, den die Abkürzung darstellt.

37) Methode die Sinustafel durch den Quadranten von Minute zu Minute zu berechnen.

Man

Man muß zuerst den Sinus einer Minute genau haben. Aus ihm findet man den Sinus seiner Ergänzung.

Nun, das Doppelte des Sinus durch den Cosinus multiplicirt, und mit dem Sinustotus dividirt, giebt den Sinus von 2 Minuten.

38) Seine fernern Vorschriften, will ich in den jetzt gewöhnlichen Ausdrückungen für den Sinustotus = 1 angeben.

$$\sin 3' = \sin 1' + 2.\sin 1'.\cos 2'$$
$$\sin 4' = \sin 2' + 2.\sin 1'.\cos 3'$$
$$\sin 5' = \sin 3' + 2.\sin 1'.\cos 4'$$
$$\sin 6' = \sin 4' + 2.\sin 1'.\cos 5'$$

Nun ferner

$$\sin 7' = \sin 3' + 2.\sin 2'.\cos 5'$$
$$\sin 8' = \sin 2' + 2.\sin 3'.\cos 5'$$

39) So könne man fortfahren bis auf 10 Minuten. Dann finde man auf eben die Art die Sinus bis auf 20 M. wenn man sich des Cosinus von 10 M. bediene, dann von 20 zu 40; dann von 40 zu 80, bis durch den Quadranten, verfertige also die Sinustafel nach einer einzigen Regel, welches bisher noch nicht geschehen sey.

40) Nun fragt sich wie man den Sinus einer Minute finde? Dazu giebt V. folgende Vorschrift, die ich nach jetzt gewöhnlicher Art,

für den Sinustotus = 1 ausdrucke; Die Buchstaben, a, b, c, d, brauchte er selbst, das übrige druckt er mit Worten aus.

41) Zuerst sagt er müsse man wissen daß, den Sinustotus = zehntausend Millionen gesetzt, die Länge des Bogens von einer Minute = 2908882 sey.

Das ist richtig. V. konnte es aus Ludolphs Kreisrechnung haben.

Ich nenne die Länge des Bogens einer Minute = α, versteht sich für Halbmesser = 1.

42) Nun sind V. Vorschriften folgende: Man mache

I) $\sqrt{(3 + \alpha^2)} = a$

II) $\frac{2.\alpha}{a} = b$

III) $\sqrt{(1 - b^2)} = c$

IV) $c + 4 - b^2 = d$

V) $\frac{\alpha . d}{a} = \sin 1'$

Beweis giebt V. nicht. Auch nicht einmahl den Sinus selbst dessen Berechnung er lehrt, und den Gebrauch voraussetzt.

43) Nach dieser Regel sagt er, könne man den Sinus jeden Winkels bis an 15 Grad finden.

Wenn

Wird z. E. der von 12 Grad 31 Minuten verlangt, so drucke man den Winkel in Minuten aus. Er hält 751 Minuten. Das multiplicire man durch die Länge einer Minute (41). Das Product dient statt des Bogens einer Minute damit zu verfahren wie vorhin.

44) Den Sinus von 30 Graden zu finden, suche man erst den von 15, aus ihm findet man den Sinus von 30 wie vorhin den Sinus von 2 Minuten aus dem von einer.

45) Ist der Winkel über 30 Grad so nehme man erst seinen vierten Theil und suche desselben Sinus, dann den Sinus der Hälfte, und endlich des ganzen seinen. So findet man ohne Tafel, den Sinus welches Bogens man will, wenn der Bogen in Graden und Minuten gegeben ist.

46) Verhältnisse der Seiten eines Dreyecks zu finden, wenn man die Winkel weiß. Begreiflich sind es die Verhältnisse der Sinus. V. zeigt das zuerst am rechtwinklichten. Das schiefwinklichte zerlegt er in rechtwinklichte.

Aus einer Seite und zween Winkeln die übrigen Seiten zu finden.

47) Aus zwo Seiten, und dem Winkel den sie einschliessen, die dritte zu finden.

Wenn ich die gegebenen Seiten b, c, nenne, die gesuchte a; den eingeschlossenen Winkel A; giebt mir seine Vorschrift die bekannte Formel $a^2 = b^2 + c^2 - 2.\,b.\,c.\,\cos A$. Er unterschei-

scheidet ob der gegebene Winkel spitzig oder stumpf ist, so wie die Formel das durch Abziehen oder Addiren unterscheidet.

48) Der stumpfe Winkel heisst bey ihm optu, welches ich mehrmahl las bis ich mich besann daß es obtus bedeutet.

49) Die drey Winkel eines Dreyecks aus seinen Seiten zu finden.

Seine Vorschrift für das rechtwinklichte, giebt mir folgende Formel; Die Hypotenuse heisse = h; die kleinste Seite um den rechten Winkel, = p: die grössere = b; der Sinus totus = 1; so soll man $\frac{3 \cdot p}{2 \cdot h + b}$ mit der Länge des Bogens einer Minute dividiren, das giebt den kleinern Winkel in Minuten.

Also die Regel die ich in dieser geom. Abh. I. Samml. 20 Abhandl. 18 entwickelt habe; nur dividirt man dort mit der Länge eines Grades, und bekömmt den Winkel in Graden.

Das schiefwinklichte Dreyeck zertheilt V. in rechtwinklichte.

Gränzen innerhalb welcher diese Vorschrift, nur erträglich fehlt, erwähnt er gar nicht.

50) So könne man sagt er, vermöge dessen was er gelehrt hat, die Winkel eines gegebenen Dreyecks finden, und aus den Winkeln die Seiten, ohne daß man dazu Tafeln nöthig habe.

51)

51) Da sein Werkzeug, sowohl zu Beobachtungen am Himmel dient, als zu Messungen auf der Erde; und zu den ersten nöthig ist die Zeit zu wissen, so lehrt er noch wie es auch zu dieser Absicht anzuwenden ist.

52) Also zuerst bey einer Aequinoctialsonnenuhr. Sie soll gehörige Grösse haben, wenigstens einen Fuß im Halbmesser. Da kann man auf dem Rande, jede 15 Grad, die eine Stunde geben, in 30 Theile theilen, also halbe Grade, deren jeder zwo Zeitminuten giebt.

Nun macht man einen beweglichen Sector der 31 halbe Grade misst, und theilt ihn in 30 Theile, jeder Theil giebt 4 Zeitsecunden. Zählt man diese Theile von der Linken nach der Rechten der Uhr, so kann man bis auf 2 Zeitsecunden angeben. Auf den beyden Absehenslinien des Sectors, werden Stifte senkrecht aufgerichtet jeder 2 Zoll vom Mittelpuncte.

Unterricht wie diese Zusammenfügung zu brauchen ist.

Eine Aequinoctialuhr mit einem Vernier beschreibe ich in der (1) angeführten astron. Abh. 153 Seite.

53) Wie V. Erfindung bey einer mechanischen Uhr angebracht wird.

Will man sich einer mechanischen Uhr in seinem Zimmer oder sonst zu Beobachtungen am Himmel bedienen, so muß das Ziferblatt einen Fuß Grösse haben; daran die Zeitsecunden zu

erken-

erkennen, und nur zwölf Stunden darstellen, damit man jede Stunde in 60 Theile für die Zeitminuten theilen kann. Der bewegliche Sector hält zwischen seinen beyden Absehenslinien, 31 Minuten der Uhr, Alles wie vorhin bey der Sonnenuhr, moyennant quoi, ce sera vn prodigue de veoir continuellement le changement des poincts de rencontre, à proportion que les secondes passeront.

54) Ich stelle mir V. Gedanken so vor: Ein Theil des beweglichen Sectors beträgt 1 Minute 2 Secunden Zeit. Er wird so angebracht, daß er zugleich mit dem Minutenweiser herumgeht, um eben die Axe um welche sich der Minutenweiser dreht. So rückt er immer an dem Umfange fort an dem die Minuten abgetheilt sind, und es kommen von seinen Theilungsstrichen immer andre und andre an die Striche die die Minuten angeben. Das mag freylich jemanden der noch nicht viel Uhrwerke gesehen hat, ein Wunder zu sehen seyn, es wird aber bey diesem stetigen Fortrücken ziemlich viel Fertigkeit erfodert werden, zu bemerken welcher Theilungsstrich, und welcher Minutenstrich jeden Augenblick an einander passen, und daraus die Zeit dieses Augenblicks auf ein Paar Secunden zu wissen.

54) Wo ich Ziferblatt geschrieben habe, steht im Grundtexte: monstre. Man wird aus dem Zusammenhange sehen daß das Wort hie nichts

nichts anders heissen konnte, und es leicht von monstrer, wie damahls geschrieben ward, herleiten. Wenn also im jetzigen Französischen, montre eine Taschenuhr heisst, so hat man die ganze Maschine nach dem benennt was an ihr die meisten Herren, die Taschenuhren, auch paarweise bey sich tragen, allein verstehn.

55) Vernier schliesst nach vorerwähnter Anbringung seines Sectors an Uhren: "Ich will über diesen Gegenstand nicht weitläuftiger seyn, denn jeder der unser Werkzeug, seine Verfertigung und seine Eigenschaften begriffen hat, wird es leicht bey allen mathematischen Instrumenten anbringen können, deren Grund der Kreis ist, auch sonst wo er es brauchbar findet. Auch habe ich für unnütz gehalten die Erfindung unsers Werkzeuges auf gerade Linien anzuwenden, als: auf die grosse Regel des Ptolemäus, das geometrische Quadrat, u. a. Instrumente die aus geraden Linien bestehn, und dieses aus den angezeigten Ursachen. Wird dieser kleine Tractat von den Liebhabern der Wissenschaft wohl aufgenommen, so wird man sich bald bestreben noch etwas erhabners an Tag zu geben."

56) Ob V. Etwas von diesem Versprechen erfüllt hat, ist mir unbekannt. Gegenwärtiger Auszug, zeigt daß er viel geometrische Einsicht besessen hat. Seinen Vorschlag die Sinus von einer Minute an aufwärts steigend zu berechnen,

mag

mag er wohl nicht weit versucht haben, sonst hätte er gesehen zu was für Rechnungen das führt, und wie weit der Sinus von einer Minute in Zehntausendmilliontheilen des Halbmessers, bey so vielen folgenden Wurzelausziehungen erträgliche Richtigkeit gewähren würde. Die Vorschrift (38) den Sinus von 3 Minuten zu finden, kömmt auf die Formel hinaus aus des einfachen Bogens Sinus, des dreyfachen seinen zu finden. Ich vermuthe also die folgenden werden auch richtig seyn, die ich nicht weiter untersucht habe.

57) Den Sinus einer Minute, möchte ich zwar nach (42) nicht berechnen, aber doch wäre es der Mühe nicht ganz unwehrt, aufzusuchen, wie man auf die Reihe dieser Formeln gekommen ist, zumahl da V. wie es scheint sie auch auf die Sinus grösserer Bogen anwendet, (43) wo freylich die Näherung immer geringer werden wird. In Snellii Buche de circuli dimensione habe ich nichts gefunden das etwa auf diese Regel führte. Warum ich dieses Buch deswegen nachschlug sehe man in dieser geometrischen Abhandlungen I. Samml. 20. Abhandl. Im Vorbeygehen erinnere ich daß daselbst 158 Seite des Titels allererstes Wort nicht angeführt ist: Cyclometricus. Freylich sagt das vom Titel angeführte dieses auf Latein; aber diese Uebersetzung müsste man sich doch erst machen,

chen, wenn man das Buch unter dem ersten Worte allein angeführt fände.

58) Da V. den Sinus einer Minute nicht angegeben hat so setze ich hieher, für den Halbmesser = 1; von einer Minute

Länge = 0,0002908882086657 21
Sinus = 0,0002908882045634 24

Ich habe den Sinus aus den beyden ersten Gliedern der Reihe Anal. Unendl. 285; berechnet. Für die letzten Zifern will ich nicht stehen, weil sie durch das folgende Glied könnten verändert werden. In Pitisci Thesauro finden sich eben die Zifern, die drey letzten ausgenommen welche über die Gränze hinaus liegen auf die Pitiscus die Sinus angiebt. Potenzen der Länge des Bogens einer Minute, die bey solchen Rechnungen gebraucht werden, finden sich in Sherwins Mathematical Tables, 101 S. der fünften Ausgabe, 1771.

59) Nun giebt V. die Länge einer Minute nur bis auf Zehntausendmilliontheile des Halbmessers an (41).

Und in diesen Theilen, ist der Sinus nicht unterschieden (58).

Also hat V. schwerlich diesen Sinus nach seinen Vorschriften (42) berechnet sonst hätte er ja gesehen, daß Sinus und Bogen in den Theilen die er angiebt einerley sind, und diese mühsame Rechnung vergebens ist.

Und

Und so ist die Frage ob er nach seinen Vorschriften (38) wirklich Sinus von mehr Minuten berechnet, oder sich nur mit Darstellung der Regeln vergnügt hat?

Wenigstens, wenn er nach (44) den Sinus von 30 Graden aus dem von 15 berechnet hätte, so hätte er stark gefühlt, was man bey geringer Aufmerksamkeit sogleich einsieht, daß das hiesse: die Pferde hinter den Wagen spannen.

60) Man muß ihn durch das Vergnügen entschuldigen, das er mag gefunden haben, eine neue Art zu Berechnung der Sinus vorzuschlagen dabey man ordentlich immer von den kleinern Bogen auf grössere ginge. Es giebt ja noch seltsamere Projecte und Systeme, die ihren, sonst vernünftigen, verehrungswerthen, Erfindern nicht so vorkommen, wie andern Leuten.

61) Was seinen Nahmen verewigt, der bewegliche Sector, ist in diesem Buche, bey aller Weitläuftigkeit so beschrieben, daß ich froh bin ihn zuvor gekannt zu haben. Die einzige Figur, bey der man den Sector nur in einer Stellung sieht, wird schwerlich jemanden verständlich seyn, der nicht so was in Händen gehabt, und was die unterschiednen Stellungen geben, überlegt hat. Das durch Exempel und Zeichnungen zu erläutern, wäre der Kenntniß und Verbreitung dieser so nützlichen Erfindung vortheilhafter gewesen, als die Beschreibung wie man sie bey allen Werkzeugen von vier Fuß

bis

bis 3 Zoll anbringen kann. Vermuthlich hat V. diesen Mangel seines Buchs, durch Vorzeigung des Werkzeugs und mündliche Erklärung ersetzt. Allemahl ist die Theorie dieses Sectors, wie man aus meiner anfangs angeführten astronom. Abhandl. sehen kann, nicht so gar leicht, daß sie nicht eine etwas ausführlichere Erklärung verdient hätte, zumahl da sie noch eine vordem unbekannte Neuigkeit war.

62) In der anfangs angeführten astronom. Abhandl. 183 Seite; habe ich gefragt zu welcher Nation Pierre Vernier gehört? Aus dem Angeführten erhellt, daß er in den Niederlanden, als Unterthan eines Königs von Spanien aus dem österreichischen Hause lebte.

Hedräus.

63) Noua et accurata *astrolabii geometrici* structura, vbi gradus horumque singula minuta prima, nec non *quadrantis astronomici azimuthalis* quo non solum prima, sed et singula minuta secunda, distincte obseruari possunt. Vna cum vtriusque vsu, claris et perspicuis exemplis illustrata, opera et studio *Benedicti Hedraei* Sueci Rae Mtis Stipend. Lugduni Batauor. ex officina Wilhelmi Christiani Boxii. Sumptibus Auctoris 1643. 8° 10 Bogen. Figuren in Holzschnitten theils eingedruckt, theils auf besondern Blättern, der Königinn Christina, und Reichsräthen zugeeignet. Nähmlich:

Christinae, D. G. Gothorum Vandalorumque designatae Reginae, et Principi hereditariae, Magnae duci Finlandiae, duci Esthoniae Careliaeque, Dominae Ingriae etc. Reginae et Dominae Clementissimae

und

S. ae R. ae Mtis Regnorumque Sueciae Gothiaeque etc. Senatoribus, Quinque-Viris Tutoribus et Administratoribus ....

Vielleicht macht über diese Titulatur der Geschichtkenner und Statistiker einige Betrachtungen. Christina stand noch unter Vormundschaft ... Sie trat die Regierung 1644 an .... wie sie Erbprinzessinn nach dem Tode dessen seyn konnte, dessen Erbin sie war? warum sie nur als Königinn designirt hieß, nicht auch als Großherzoginn u. s. w. das möchte sich nicht recht in Zusammenhang bringen lassen. Aber bey Titulaturen fodert man nicht allemahl Zusammenhang.

Uebrigens kann einem hiebey einfallen, daß Christina Königinn hieß; ehe sie regierte, als sie regierte, und als sie nicht mehr regierte.

64) In der Vorrede erinnert Hedräus die besten Künstler der Zeit theilten die Winkelmesser nicht genauer ein als auf Sechstheile des Grades. Die Transversallinien geben keine richtige Eintheilung oder man müsste Circulartransversalen brauchen. Daß nun genaue Winkel-

feldmessung nöthig ist, zeigt er mit einem Exempel: Eines rechtwinklichten Dreyecks Grundlinie sey = 100; der Winkel an ihr = 89 Gr. 13 M. so kömmt die andre Seite 7314; Hätte nun der Feldmesser statt dieses Winkels 89 Gr. 12 M. genommen, so fände er daraus die andre Seite nur 7161; um 153 zu klein. Mehr Minuten, gäben viel grössere Fehler.

Auf dem Blatte vor Anfange des Buchs wird ein Künstler zu Utrecht genannt J. Schneewins der sowohl andre Werkzeuge als auch die welche H. beschreibt sehr geschickt verfertige. (Schneewin wird noch 13 Jahre später als ein guter Arbeiter von Goldmannen gerühmt, in G. zu Leiden 1656, lateinisch und deutsch herausgekommnem Buche vom Proportionalzirkel de vsu proportionatorii ... p. 2. G. stellt einen Proportionalzirkel dar den Schn. verfertigt hat.)

65) Der erste Theil handelt vom Astrolabio. Eine ganze Scheibe. In ihren Rand ein Kreis eingesenkt, daß er mit dem Rande in einer Ebene liegt, und in demselben herumgeführt werden kann, seine Dicke etwa $\frac{2}{3}$ von des Randes Dicke.

66) Das Aeusere des Randes welches zunächst am beweglichen Kreise liegt, wird wie gewöhnlich getheilt, jeder Quadrant in 90 Grad.

67) Von einer der Absehenslinien, nimmt man auf dem Rande 61 Grad, und theilt des

beweglichen Kreises Bogen der eben den Winkel misst, in 60 Theile.

68) Nun führe man den beweglichen Kreis innerhalb des Randes herum. Wenn seiner äussersten Gränzen eine an einen Theilungsstrich des Randes passt, so muß auch die andre, an einen Theilungsstrich des Randes passen, (begreiflich stehen diese beyden Theilungsstriche des Randes allemahl 61 Grad von einander.) Alsdann darf kein Theilungsstrich des beweglichen Kreises auf einen des Randes passen. Diese Prüfung soll man oft wiederhohlen; Auch den beweglichen Kreis so stellen, daß seine Gränzen nicht an Theilungsstriche des Randes passen, da darf dann, von seinen mittlern Theilungsstrichen nicht mehr als einer an einen des Randes passen. Manchmahl passt nirgends ein Theilungsstrich des beweglichen Kreises genau an einen des Randes, aber die beyden nächsten Paare scheinen ziemlich an einander zu passen, aber nicht völlig genau. Da werden, auser den Minuten die das eine anzeigt, noch 30 Secunden vom andern angedeutet.

69) Noch zu einer Prüfung und Bequemlichkeit kann man in dem Bogen des beweglichen Kreises, welcher dem (67) gegenübersteht, auch so verfahren; den Bogen der 61 Grad misst, in 60 Theile theilen.

70) Dioptern sagt er, mache man insgemein sechs, vier am unbeweglichen Rande, und

zwo

zwo an der beweglichen Regel. Da sind dann oft bey Winkeln die rechten nahe kommen, zwo am Rande, den beyden an der Regel hinderlich, daher setzt er nur zwo Dioptern an den Rand. Er empfiehlt auch, nach Gegenständen weit unter oder über der Ebene des Werkzeugs zu visiren, besondere hohe Dioptern, die man für diese Bedürfniß auf die andern setzen kann.

71) Was er bisher gelehrt hat giebt also ganze Minuten, wenn der Rand nur ganze Grade hat. Sind darauf halbe abgetheilt, so bekömmt man auf die Art halbe Minuten. Oder: ganze wenn man auf dem beweglichen Kreise 31 halbe Grade in 30 Theile theilt. Und so andre Zahlen von Minuten durch andre Theilungen.

72) Nun muß man die Winkel so genau auftragen können, als man sie gemessen hat. Dazu dient als Transporteur ebenfalls ein ganzer Kreis, innerhalb dessen Rande sich ebenfalls ein beweglicher Kreis drehen lässt, beyde vorerwähntermassen abgetheilt. Der Raum den diese Kreise einschliessen, ist zur Hälfte ausgefüllt, halb leer. H. beschreibt das Mechanische dieser Vorrichtung deutlich, und erläutert es durch Abbildungen.

73) Membrum II. dieses ersten Theils handelt vom Gebrauche dieses Werkzeuges. Allerley Feldmesseraufgaben, die nur in so weit be-

sonders in H. Buch gehören, in so fern sie genaue Winkelmessung voraussetzen. Eine von ihnen findet sich in dieser geometrischen Abhandl. I. Samml. 52 Abhandl. Hedräus erinnert: der Gebrauch dieses Werkzeugs setze Trigonometrie zum Voraus.

74) Der zweyte Theil des Buchs betrifft einen astronomischen Quadranten. Der Körper desselben, aus Holz, 4 bis 5 Fuß im Halbmesser, mit Messing an den Fugen und der ganze Rand auf beyden Seiten bedeckt.

75) Der Quadrant soll in einem runden wo möglich steinernen Thurme stehn, weil ein hölzern Gebäude nicht Festigkeit genug hat. Von den beyden Halbmessern die den Quadranten einschliessen einer horizontal der andre vertical, der horizontale, etwas höher als des Thurms Mauerwerk, über den Thurm ein Dach aus Bretern, das man drehen kann, (wie über einer holländischen Windmühle) damit die Fenster des Dachs nach der Gegend des Himmels können gebracht werden, wo man beobachten will Der Quadrant lässt sich um eine verticale Axe drehen, innerhalb eines horizontalen Kreises der von ihm abgesondert auf Pfeilern ruht, die Azimuthe anzugeben dient. Um einen Zapfen am Mittelpuncte des Quadranten dreht sich eine Regel die am Rande wo sich des Beobachters Auge befindet eine Diopter hat. Mit dieser Diopter giebt der Zapfen die Absehenslinie.

76)

76) Das Bisherige ist nichts Neues. Hedräus Bild stimmt mit dem überein, das sich in Tychos de Brahe, Astronomiae instauratae mechanica, unter der Aufschrift: Quadrans volubilis Azimuthalis findet auf dem Blatte B 2; Nur ist der Azimuthalkreis, beym Tycho ohngefähr in einem Horizonte mit des Quadranten Mittelpuncte, beym Hedräus etwas niedriger. Beyde führen mit dem Quadranten einen Weiser herum der Azimuthe anzeigt.

77) Der Quadrant ist auf seinem Rande in 90 Grade getheilt, jeder Grad in zwölf Theile, also der Quadrant von fünf zu fünf Minuten.

78) Nun wird an die Regel mit der Diopter ein beweglicher Bogen angebracht, den sie in des Quadranten Ebene herum führt. Er misst am Mittelpuncte, einen Winkel von 61 Theilen des Quadranten, oder 61. 5 Minuten; ist selbst in 60 Theile getheilt.

79) Jeder dieser Theile beträgt also 5 Minuten + 5 Secunden, oder übertrifft einen Theil des Randes um 5 Secunden. So giebt der Quadrant die Höhen bis auf 5 Secunden.

80) Auch der Weiser der die Azimuthe angiebt (76) führt einen Bogen herum wo 60 Theile des Azimuthalkreises, in 61 getheilt sind, also die Azimuthe eben so genau angegeben werden.

81) H. beschreibt noch die Diopter, und andre Vorrichtungen.

82) Membrum II. dieses Theils, handelt vom Gebrauche des Quadranten, bey Aufgaben der praktischen Astronomie. Den Schluß machen allerley Tafeln zur sphärischen Astronomie. Der Refractionen, nach Tychos Grundsätzen, unterschieden für Sonne, Mond und Sterne, der Parallaxen; Declinationen der Ekliptik, u. s. w.

Gutschoven.

83) Vsus quadrantis geometrici, quo, ope fchalae altimetrae, ad arcum reductae variis et novis usibus destinatae, etiam area trianguli, nec non, anguli quicunque non ad gradus tantum, verum et ad minuta, etiam obtusus, una operatione mensurantur, et triangula rectilinea, absque ullo calculo expeditissime solvuntur. Auctore *Ger. a Gutschoven*, Matheseos ac Anatomiae in Vniversitate Lovaniensi Professore Regio. Bruxellae Typis Henrici Frick; 1674; 62 Duodezseiten, 3 Kupfert. geometrische Figuren und eine der Quadrant.

84) In der Vorrede zieht Gutschoven den Quadranten dem ganzen und dem halben Kreise vor, weil er leichter ist, bey eben der Grösse, grössere Grade giebt, auch zu Messung stumpfer Winkel kann gebraucht werden.

85)

85) Der Quadrant ist in 90 Grade getheilt von beyden Gränzen der Bequemlichkeit wegen gezählt.

86) Ein beweglicher concentrischer Ausschnitt, den G. cursor nennt, misst einen Winkel von 31 Graden, ist aber in 30 Theile getheilt. Ein Theil des Läufers übertrifft also einen Theil des Quadranten um 2 Minuten, so geben auf einander passende Theilungsstriche des Randes und des Läufers, den Winkel auf 2 Minuten an, wenn aber zweene Theilungsstriche des Läufers jeder nahe an einem Theilungsstriche des Randes liegt, eigentlich die Theilungsstriche des Randes zwischen des Läufers seine fallen, so bekömmt man einzelne Minuten.

87) Dieses, desgleichen auch schon Hedräus erinnert hat (68) erklärt sich aus der Theorie des Vernier (V. astr. Abh. 13; X).

88) Nur soviel gehört eigentlich hieher indessen wird es nicht unnütz seyn, die übrigen Dinge zu erklären, die auf dem Titel erwähnt werden.

89) Schala war, wie ich anderswoher weiß in dem Lande wo G. lebte die Aussprache von Scala, erinnert zugleich an *echelle*.

G. Sch. altimetra sind Seiten des geometrischen Quadrats (Trig. 7. Satz XII) in Kreisbogen gekrümmt.

90) Die innre Fläche des Quadranten überzieht ein Rete trigonometricum. Neunzig

Parallelen mit einem der Halbmesser die den Quadranten einschliessen, und eben soviel mit dem andern. Begreiflich Sinus und Cosinus aller Grade. Dieses trigonometrische Netz oder Gitter, soll dienen trigonometrische Aufgaben aufzulösen, auch wenn Winkel in Minuten vorkommen, welches Gutschoven mit Exempeln erläutert.

91) Weder Gutschoven noch Hedräus, erwähnen den Vernier. Und Gutschovens Schrift ist sogar auch zu Brüssel gedruckt!

Indessen, sagt auch keiner von beyden der bewegliche Sector sey seine Erfindung. Man kann es also für Nachlässigkeit, für Gleichgültigkeit gegen die Geschichte der Erfindung halten, daß jeder, was er davon wusste, allenfalls mit Abänderungen die ihm dienlich schienen, nur zum Nutzen anzuwenden suchte, wie sie sich dann auch beyde, mehr mit dem Gebrauche beschäfftigen, als mit der Theorie; selbst z. E. die Anwendung auf gerade Linien, die Vernier schon angedeutet hatte nicht erwähnen.

92) So gar häufig sind wohl die Lehrämter der Mathematik und der Anatomie nicht verbunden gewesen. Daß Geometrie, Mechanik, Optik, dem nöthig sind, der den Bau des Körpers erklären soll ist ausgemacht. Bey den Anmerkungen die de la Forge zu Carteseus Schrift vom Menschen gemacht hat, befindet sich eine anatomische Figur die von Gutschoven gezeichnet hat.

hat. Ren. des Cartes Tractatus de homine .... cum notis perpetuis Lud. de la Forge Part. II. art. 18. not. a.

93) Ich habe einen Quadranten bey der Hand, welcher nach Gutschovens Vorschriften gemacht ist.

Im äussersten Kreise seines Randes ist die Sehne von 60 Graden, also der Halbmesser = 5,22 pariser Zoll.

Kreise von etwas kleinern Halbmessern auf dem Rande, sind in ganze und halbe Grade getheilt.

Der bewegliche Sector misst einen Winkel von 61 halben Graden, und ist in 60 Theile getheilt. Ein solcher Theil, übertrifft also einen Theil des Randes der 30 Minuten beträgt, um eine halbe Minute, und so giebt diese Vorrichtung halbe Minuten.

94) Auch ist darauf die Schala altimetra, das trigonometrische Netz; an den beyden Halbmessern die den beweglichen Sector begränzen und mit ihm herumgeführt werden, Abtheilungen die sich auf dieses Netz beziehen.

95) Die Dioptern lassen sich vermittelst Gewinde auf die Ebene des Quadranten legen, und auch auf solche senkrecht aufrichten. Eine am Mittelpuncte hat nur ein enges Loch. Am Ende jedes der Halbmesser die den Rand des Quadranten begränzen befindet sich eine, auch eine an dem Ende jedes der Halbmesser die den

beweglichen Sector begränzen. Diese vier haben weite Oeffnungen. Zum Gebrauche müsste also wohl in jeder ein Fadenkreuz horizontale und verticale Durchmesser ihrer Oeffnung angeben. Das Auge müsste sich an dem engen Loche beym Mittelpuncte befinden.

96) Das Werkzeug wird vermittelst einer Röhre die mit einer Nuß versehen ist auf den Zapfen eines Stativs gesteckt, der immer vertical bleiben kann, wenn die Nuß jede Neigung der Ebene des Werkzeuges gestattet. Das Stativ ist nicht vorhanden.

96) Auf des Quadranten andrer Seite ist ein kleiner Kreis gezeichnet, und von dessen Umfange etwas über die Hälfte in Theile getheilt, die ich nicht untersucht habe. In seinem Raume steht: Pro Eleuatione Bombardae, über einer horizontalen Canone, an deren Mündung eine Hand den Quadranten hält, auf ihm zeigt sich erwähnter Kreis mit einem Lothe aus seinem Mittelpuncte herabhängend. Also zur Büchsenmeisterey wie sie damahls ausgeübt ward.

97) Auf der getheilten Seite des Quadranten steht noch: Iacobus Lusuerg, Mutinensis, faciebat Romae prope Collegium Romanum, anno 1687. Der Nahme klingt doch nicht italiänisch. Vielleicht war der Künstler aus einer niederländischen Familie, die sich jenseits der Alpen gesetzt, und Gutschovens Belehrung mit gebracht hatte.

98)

98) Der Quadrant befindet sich in einem Kasten mit mehrern Instrumenten, die meist zu geometrischen auch architectonischen, Zeichnungen dienen, immer auch mit dieses Künstlers Nahmen bezeichnet sind. Der Kasten gehört zum Vorrathe der hiesigen Universität.

99) Ich habe den Quadranten nie zu was andrem gebraucht, als zu Erläuterung des Kunstgriffs davon Vernier der Erfinder ist. Winkel damit bis auf halbe Minuten zu messen, würde ich deßwegen nicht wagen, weil ein Gegenstand auf der Erde nach dem man mit blossem Auge visirt, wenigstens eine halbe Minute scheinbare Grösse haben muß (Optik 380,) also nimmt man für eine gerade Absehenslinie an, was aufs geringste ein Winkel einer halben Minute ist. Marinoni, der sich beym Feldmessen, des Meßtisches und der Regel mit Dioptern für das blosse Auge bediente, sagt: in directione regulae dioptricae, attente, vtque supponitur ab exercitato peracta, vix duobus minutis errari posse. De Re ichnographica pag. 149. Also gestattet er, auch dem Geübten und Aufmerksamen, in Richtung der Regel wohl um eine Minute zu fehlen.

100) Vernier und seine Nachfolger, konnten nicht darauf fallen, daß ihre Theilungen feiner waren als das Visiren des damahligen Feldmessers, denn Versuche über die geringste scheinbare Grösse, waren ihnen noch nicht bekannt.

Aber

Aber dadurch, daß sie über die Gesichtskraft ihrer Zeiten hinaus gingen, arbeiteten sie denen vor, die nachdem Fernröhre an die Winkelmesser brachten.

101) Indessen hat doch Hevel zu Winkelmessungen am Himmel, nur Werkzeuge mit tychonischen Dioptern gebraucht, so gar, Fernröhre dabey nicht anwenden wollen; Und doch sollte man denken, da wäre wohl nöthig Winkel bis auf halbe Minuten, und noch genauer zu messen?

102) Auch hat aus dieser Ursache neben andern, Hook geglaubt, Hevel habe Tychos Richtigkeit nicht sehr übertroffen, und ohne Fernröhre sey die Feinheit welche Hevel bey Theilung der Werkzeuge suchte unnöthig.

Animadversions on the first part of the Machina Coelestis, of the honourable and deservedly Famous Astronomer, *Johannes Hevelius* ... by *Robert Hooke* Professor of Geometry in Gresham College, and Fellow of the Royal Society. Lond. 1674; p. 4.

103) Ohne jetzo zu erinnern, ob etwa Hooks Tadel zu streng gewesen, da auch Halley, Heveln gegen seinen Landsmann vertheidigt hat, darf man nur bemerken, daß die (99) angegebene, kleinste scheinbare Grösse, von irrdischen Gegenständen zu verstehen ist, wie das gewöhnliche Tageslicht sie erleuchtet, und wie das Auge

ge sie empfindet, das eben dem Tageslichte ausgesetzt ist. Daß eine Flamme unter geringerer scheinbarer Grösse bey Nacht empfunden wird nimmt man insgemein an, eigentlich weiß ich keine bestimmten Erfahrungen, wo man die wahre Grösse einer Flamme, mit der Entfernung verglichen hätte, auf welche sie noch sichtbar bleibt. Aber wenn, Merkurs scheinbare Grösse noch nicht 7 Secunden beträgt, Mars und Saturns ihre etwa 30 Sec. der grössten Fixsterne ihre nicht eine Secunde, wovon ich die Gründe Astron. 230; und 213; angeführt habe, so erhellt daß am Himmel Gegenstände unter viel geringerer scheinbarer Grösse empfindlich sind als auf der Erde, also auch da sich die Winkel mit blossem Auge schärfer messen lassen, wenn das Auge gut in die Ferne sieht, wie von Hevels Augen versichert wird. Allemahl bleibt, wie auch Hook erinnert, Undeutlichkeit die nur das Fernrohr hebt, z. E. Funkeln der Fixsterne; daß die Planeten dem blossen Auge nicht als Scheiben aussehen, der Venus Phasen von ihm nicht wahrgenommen werden.

104) Die beschriebenen drey Bücher, sind alle in den Niederlanden erschienen; die ersten beyden während des dreyssigjährigen Krieges, da auch die Niederlande immer noch eine berühmte Kriegsschule waren. Man sollte also glauben, die damaligen Ingenieurs, hätten sich

diese

diese Erfindung zu Nutze gemacht, Schwürigkeit sie zu verstehen, hat das wohl nicht gehindert, denn bekanntermaassen halten die Schriftsteller von der holländischen Fortification, ihre Lehrlinge, zu Trigonometrie, und andern Rechnungen an, die noch jetzo nicht eben aller Ingenieurs Sache sind. Doch erinnere ich mich nicht bey einem dieser Schriftsteller, etwas davon gefunden zu haben. Schildknecht Beschreibung Festungen zu bauen, (Alten Stetin 1652), zeigt unter den geometrischen Figuren, ein Halbscheibeninstrument mit Transversallinien.

105) Joh. Heinrich Behr P. Neu verschanzter Turenne, ist zum andernmahle zu Frft. und Leipzig 1690 herausgekommen. Da beschreibt er in der geometrischen Vorarbeit dritten Theile, 269. S. ein ganz neuerfundnes Instrument das er auch für ein Pantometrum erklärt, auf seiner X Tafel stellt es die 102 Fig. vor. Ein ganzer Kreis, der Rand in Grade getheilt, der bewegliche Bogen innerhalb des Randes, auf beyden Seiten eines und desselben Halbmessers, misst auf jeder 61 Grad, und ist in 60 Theile getheilt, jede dieser beyden Hälften des Bogens, giebt also Minuten.

106) Behr war 1647 zu Schleiz im Voigtlande gebohren, studirte 9 Jahr lang zu Leipzig Theologie und Mathematik welche letztere er zu seinem Hauptwerke machte. Ging 1680 in

Chur-

Churbrandenburgische Kriegsdienste, und ward 1685 nach der Zurückkunft aus Ungarn Lehrer bey den churfürstl. Cadetten, auch 1691; beym Anbaue der Friedrichsstadt gebraucht, wo die Behrenstrasse von ihm den Nahmen hat, die daher unrichtig Bärenstrasse geschrieben wird. Er verfertigte ein 1712 gedrucktes Werk über die Kriegsbaukunst, und übersetzte die Gesänge der lutherischen Kirche in gleiche Versart in griechische Verse zum Gebrauche der griechischen Kirche, sein noch ungedrucktes, eigenhändiges Manuscript besitzt Herr Friedrich Nicolai ... denn, man kann sich leicht vorstellen daß diese Nachricht aus desselben Beschreibung von Berlin und Potsdam entlehnt ist. Ich brauchte hie der Ausgabe 1779; II. B. 4. Anh. 50 S. weil ich der dritten Ausgabe 1786; ähnlichen Anhang nicht sogleich bey der Hand hatte. Behrs 1712 gedrucktes Werk, ist wohl eine neue Auflage, vom neu verschanzten Turenne. B. starb 1717.

107) Georg Conrad Martii ... deutsch nennt er sich unter der Zueignungsschrift Strahl ... neu aufgeführter Europäischer Ingenieur Nürnb. 1687. beschreibt auch dergleichen Werkzeuge in der andern Hauptabtheil. andrem Stücke V. C.

Auf der 366 S. redet er von einem Quadranten der unter seinen mit 235 bezeichneten

Figuren abgebildet ist bis auf halbe Grade getheilt. Der Quadrant hat an einem unbeweglichen Halbmesser ein Paar Dioptern. Statt des Lothes hängt vom Mittelpuncte eine Platte herab, an der sich unten am Rande des Quadranten ein concentrischer Bogen findet. Jede der beyden Hälften dieses Bogens auf beyden Seiten der Verticallinie, misst am Mittelpuncte einen Winkel von 31 halben Graden, und ist in 30 Theile getheilt, giebt also Minuten an; In der Verticallinie um welche beyde Bogen liegen, ist zu unterst eine Spitze als Weiser, die Stelle des Randes anzugeben die sich in der Verticallinie durch den Mittelpunct befindet.

108) Auf der 373 Seite beschreibt Martius Behrs Instrument (105) wie er es bey Behren selbst gesehen. Ein geschickter damaliger Leipziger Mechanicus Schober den Martius an mehr Stellen lobt hatte es verfertigt; Die 240 Figur bildet es ab.

109) Behrs und Stahls Bücher befanden sich gewiß noch vor dem Anfange des zu Ende gehenden Jahrhunderts, in den Händen der sich so nennenden Praktiker; Feldmesser, Ingenieur, Baumeister. Warum ist wohl das in diesen Büchern empfohlne Werkzeug, fast gar nicht in Gebrauch gekommen, da sich diejenigen die noch Winkel genau zu messen glaubten, mit Transversallinien, etwa für 10 oder 6 Minuten behol-

holfen? Einzelne Minuten hielten sie wohl nicht deßwegen für überflüssig weil sie sich solche nicht anzugeben getrauten. Die optische Bemerkung (99) war ihnen schwerlich bekannt.

110) Der göttingische Astronome Tobias Mayer war kein Freund vom Vernier oder wie es zu seiner Zeit noch hiesse: Nonius. Auf der hiesigen Sternwarte hat er einen Quadranten etwa 1 Fuß im Halbmesser gefunden den Kampe noch auf Veranstaltung des Hrn. v. Segner verfertiget hat. An demselben war ein solcher Vernier gewesen wie Martius erwähnt. (107) M. hat ihn abgenommen und sich nur des Fadens mit dem Gewichte, und seines Mikrometers im Fernrohre bedient. Es ist das Werkzeug davon ich VII. astron. Abh. 36. rede. Das Fernrohr ist etwas länger als des Quadranten Halbmesser.

111) Er hatte zu seinem Gebrauche ein Scheibeninstrument erfunden, und in einer noch ungedruckten Vorlesung, der Societät der Wissenschaften mitgetheilt. Ich besitze es jetzo und nach meinem Exemplare, hat sein Sohn der jetzige Hr. Hofr. Mayer in Erlangen, Nachricht davon gegeben: Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie I. Th. Götting. 1777. VII. Cap. 100 §. Der ganze Kreis, ist durch Puncte in Grade getheilt, alle kleinern Theile, giebt er durch das äusere Schrau-

benmikrometer an, dessen ich mich als eines Exempels in der V. astron. Abh. 20. V. bedient habe. An dem hiesigen Mauerquadranten hat er soviel ich weiß auch die beyden Vernier, weniger gebraucht als die Theilung auf dem Rande in Grade durch Tüpfelchen, und das äusere Schraubenmikrometer.

112) Es wäre sehr verzeihlich, wenn er sein eigen Mikrometer lieber gehabt hätte, als eines Andern Erfindung. Ich äuserte ihm einmahl: die Zwischenräume der Striche die auf seinem Mikrometer gezogen sind, ferner in Gedanken einzutheilen, erfodere ein so geübtes Augenmaaß als sich bey ihm vorzüglich fand.

Er antwortete mir darauf, das Augenmaaß sey auch beym Vernier nöthig.

Das wird allerdings erfodert, wenn nirgends Theilungsstriche des Vernier und des Randes an einander passen (V. astron. Abhandl. 13: X). Indessen beträgt da die Ungewißheit etwa nur eine, höchstens ein Paar Minuten, nachdem der Vernier kleinere oder grössere Theile angiebt. Bey Mayers Mikrometer muß man einen Zwischenraum der mehrere Minuten beträgt, nach dem Augenmaasse eintheilen; Und das bey Gegenständen am Himmel, verrichten, während daß sie durch das Mikrometer gehn, da man das Fernrohr mit dem Vernier, in der

Lage da es nach dem Gegenstande gerichtet war, befestiget, und dann Zeit und Bequemlichkeit hat, Vernier und Rand zu vergleichen.

Ich vermuthe Mayer hat den Theilungsstrichen die mit dem Reißhaken gemacht werden nicht recht getraut, und seine Tüpfelchen für zuverlässiger gehalten.

Sogenannte Regel des Clavius.

113) Vernier hatte schon erwähnt man könne seinen Kunstgriff bey geraden Linien anbringen (55). In den Büchern von denen ich bisher geredet habe ist mir keine Anwendung dieser Art vorgekommen.

Zum ersten finde ich so was bey einem Briefe von *Regnault* an Monconys. Voyages de Mr. de Monconys, Par. 1695. Partie quatrieme p. 204. beym Briefe steht kein Datum.

114) Die Ueberschrift des Aufsatzes ist: De la regle de *Clavius*, pour le toisage. Erfindung und Geheimniß der Abtheilung dieses Linials (denn die Bedeutung hat hie Règle,) gehöre dem Clavius; Hedräus habe sich derselben glücklich bedient, man finde so vermittelst eines Schiebers (Curseur) die kleinsten Theile eines Bogens oder einer geraden Linie.

115) Das Werkzeug besteht aus zwey Linialen von Messing u. d. gl. in ein- und derselben Ebene, durch einen Raum getrennt, in welchem zwischen ihnen der Schieber geht. Auf einem Liniale ist die Toise abgetheilt, auf dem andern der Fuß, und die Gränze des Schiebers, die gegen Toise oder Fuß gekehrt ist, giebt fernere Abtheilungen der Toise oder des Fusses.

116) Die Toise wird in zehn Theile, Primen getheilt, jede Prime in zehn Secunden, jede Secunde in zehn Tertien, jede Tertie in zehn Quarten, deren also 10000 die Toise ausmachen.

117) Dazu lehrt nun R. folgende Construction: Man nehme eine Toise (ou de Roi ou de Ville sagt er) und theile sie in ihre zehn Primen. Nun auf einem Liniale das zwo oder mehr solcher Primen enthält, jede Prime in zehn Secunden, jede Secunde in halbe, und Viertheile.

118) Nun, zur Theilung des Schiebers, nehme man 26 Viertheilssecunden, und theile solche in 25 Theile.

Nähmlich eine Secunde hält 100 Quarten (116) die Viertheilssecunde 25 Quarten $\frac{26}{25}$ Viertheilssecunden betragen $1 + \frac{1}{25}$ Viertheilssecunde; So übertrifft ein Theil des Schiebers einen Theil der bis auf Viertheilssecunden getheil-

theilten unbeweglichen Regel um eine Quarte.

Der kleinste Theil auf der unbeweglichen Regel ist $= \frac{1}{400}$ der Toise und wird um sein $\frac{1}{25}$ von einem Theile des Schiebers übertroffen, also um $\frac{1}{10000}$ der Toise.

119) Die Regel der Fusse theile man zuerst in ihre ganzen Fusse, jeden Fuß in 12 Zolle, und jeden Zoll in drey Theile deren jeder vier Linien beträgt. Fünf solcher Drittheilzolle werden auf dem Läufer in vier Theile getheilt, so beträgt ein Theil des Läufers $\frac{20}{4}$ Linien und übertrifft also einen Theil der Regel um eine Linie.

120) Ich dächte wenn man den Zoll in Drittheile getheilt hat, wäre es bequemer auf der unbeweglichen Regel die Theilung bis zur einzelnen Linie fortzusetzen, als dazu einen Schieber zu machen. Die Linie vermittelst einer solchen Vorrichtung in kleinere Theile zu theilen, z. E. in 16 wie Herr de Luc bey seinen Barometern thut ist eher nützlich.

121) Regnault zeigt neben dem Gebrauche dieser Instrumente, ferner allerley Rechnungen mit der Toise und ihren Theilen, die auf Decimalrechnung beruhen.

122) In der (113) angeführten Stelle sagt R. nicht wo Clavius, so was lehre. Ich fand nichts dergleichen in Cl. Geometria Practica, auch nicht in dem Buche de Astrolabio, wo es seiner Eintheilungen wegen stehen könnte, welche Bücher ich einzeln besitze, noch in der Sammlung: Christophori Clauii Opera Math. V. Tomis distributa Mog. 1612. fol.

123) In einem Briefe der sich auch in erwähntem Bande von Monconys Reisen 156 S. befindet, und 1. Dec. 1664; datirt ist, schreibt R. Er sey die Erfindung dem P. Clavius schuldig, der in seiner Praktischen Geometrie gelehrt habe eine Linie so klein sie auch sey, in so kleine Theile zu theilen als man will.

Das kann doch also nichts anders seyn als was ich in der V. astron. Abh. 17; XIII auf der 176 S. erzählt habe Clau. G. Pr. L. I. C. 2. §. 10 sequ. Man hat eine Linie in gleiche Theile getheilt, z. E. 10; deren jeder = e will wissen was ein Stückchen = x kleiner als ein solcher Theil beträgt. So fasst man es mit dem Zirkel, und trägt es zehnmahl auf die Linie; Es gebe $10.x = m.e + y$; Nun fasse y mit dem Zirkel und trage es auch 10 mahl auf die Linie. Es sey $10.y = n.e + z$; also $y = \frac{n.e}{10} + \frac{z}{10}$

So

So ist $x = e.\left(\frac{m}{10} + \frac{n}{100}\right) + \frac{1}{100} z$

wo man es mit z eben so machen, und auf Tausendtheile gehen könnte.

124) Daß dieses Verfahren so brauchbar sey wie Clavius sagt kann ich nicht glauben. Er gesteht selbst wo er es bey Kreisbogen anwendet, §. 11. des angeführten Capitels man könne leicht fehlen wenn man mit dem Zirkel ein Stückchen oft wiederhohlt auftragen wolle. Also erfodert es immer viel Mühe, Aufmerksamkeit, und Zeit. Einen Läufer erwähnt Clavius nirgends. Ein Stückchen einer Linie die in zehn Theile getheilt ist, in ihren Hunderttheilen anzugeben, ist doch wohl was ganz unterschiednes ob man das Stückchen zehnmahl auf sie trägt, oder ob man einen Läufer braucht, auf welchem 11 Theile von ihr in 10 getheilt sind, oder auch 9 Theile in 10.

125) Ist also R. durch die angezeigte Stelle des Clavius auf den Läufer gekommen, so würde Clavius sich darüber als über einen unerwarteten Gebrauch seiner Lehre freuen, die er selbst (man s. angef. astron. Abh.) dem Mordente verdankt. Hedräus sagt gar nicht, ob er sein Verfahren von jemand gelernt habe. Vernier sagt ausdrücklich der Läufer sey seine Erfindung, würde also schwerlich den Vorwurf

ihn vom Clavius gelernt zu haben, dem Regnault zugestehen. Aber Regnault kannte also nicht einmahl den Schloßhauptmann zu Dornans. So bald ist der verdiente Mann vergessen gewesen!

126) Voyages de M. de Monconys, Conseiller du Roi, et Lieutenant Criminel au Siége presidial de Lyon, divisez en V. Tomes Par. 1695. Ist eine neue Ausgabe, vom Sohne des Reisenden, nach desselben Tode besorgt. Die Reisen gehn durch Portugal, Provence, Italien, Aegypten, Syrien, Natolien, England, die Niederlande, Deutschland. Obgleich auf dem Titel V. Tomes genannt sind, erzählt der Innhalt doch nur 4; die Suite du Tome 2 ist als ein eigner angesehen worden. Sie sind zu unterschiednen Zeiten angestellt worden, 1628; 1645 . . . Im October 1663 sah er zu Leipzig die Kunstkammer des dasigen Bürgemeisters; die beyden Töchter, welche gut französisch sprachen, zeigten ihm selbige. Des Bürgemeisters Nahmen hat der Reisende nicht aufgezeichnet. Es war Christian Lorenz von Adlershelm. Seine Sammlung wird in Valentini Museo Museorum erwähnt.

Monconys hatte eine allgemeine Lehrbegierde, selbst für sogenannte geheime Wissenschaften. Daher findet man in dem Buche Nachrichten und Abbildungen, von merkwürdigen

Ge-

Gebäuden, Maschinen, Versuche, die den Grund der jetzigen Physik legten, chemische Processe, allerley richtige und unrichtige Kunststücke, Recepte, u. d. gl.

Am Ende des 4. Theils, und des ganzen Werks stehn: Erzählung vom Tode des Sultan Ibrahim 1648; Briefe an Monconys, eine Algebra von Monconys, Gedichte und prosaische Aufsätze von ihm, darinnen allerley Unterhaltendes aus den damaligen Zeiten, z. E. vom Tode des Cardinal Richelieu, auch:

Sur la mort d'un Ecuyer, tué
par le commandement de sa Maitresse.

Peuples cessez de reverer
Celle que l'on doit abhorrer
Elle n'a plus de part aux droits du diadéme
Toutes ses actions font voir
Qu'elle a perdu jusqu'au pouvoir
De se commander à soi méme.

Ganz richtig ist dieser etwas schwerfällige Witz nicht, denn Christina hatte vermuthlich das Vermögen sich selbst zu regieren schon nicht mehr gehabt als sie noch ein Volk regieren sollte. In diesen Umständen befinden sich mehr Herrscher.

Des

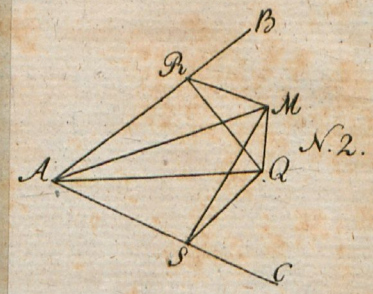
Des Herrn de Monconys ... Beschreibung ... seiner Reisen ... übersetzt von M. Christian Juncker Leipz. 1697; 4°. Die Gedichte und prosaische Aufsätze sind weggeblieben, auch dergleichen wie Regnaults seiner den ich vorhin ausgezogen habe. Die Ermordung des Sultans Ibrahim wird durch einen Druckfehler in 1684 gesetzt.

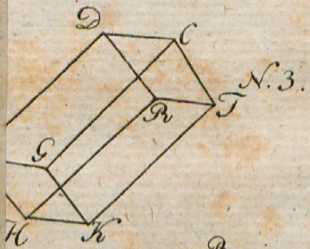
Verbesserungen.

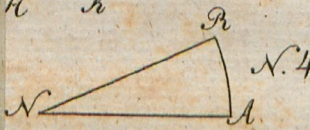
177 und 180 Seite statt Möhde lies Möhden.
190 Seite 2 Zeile v. unten 34 35
208 Seite ist in sin v + cos v aus Versehen 1 Minute statt 1 Grad gebraucht worden. Die Rechnung steht so

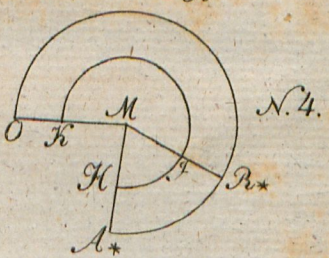
$$1 + v = 1{,}01745329$$
$$\sin v + \cos v = 1{,}0173001$$
$$0{,}0001531$$

die Figur $= 0{,}0003162$

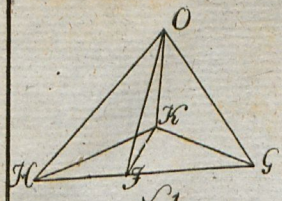




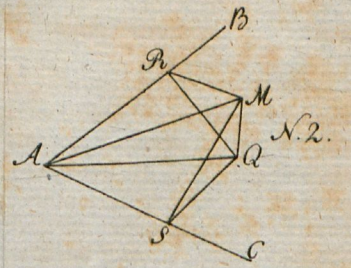




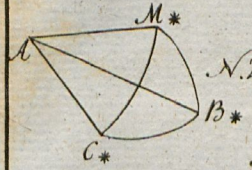
Geom. Abh. 2. Samml.
I. Taf.



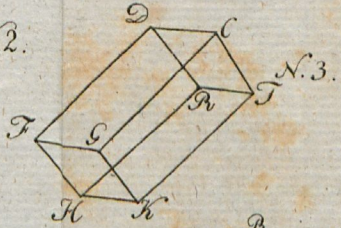
N. 1.



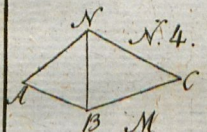
N. 2.



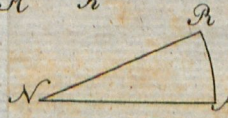
N. 2.



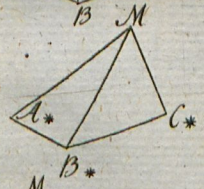
N. 3.

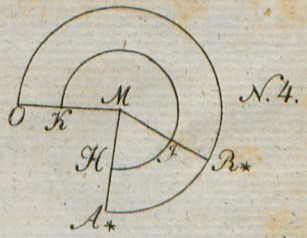


N. 4.

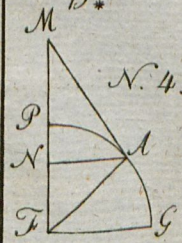


N. 4.



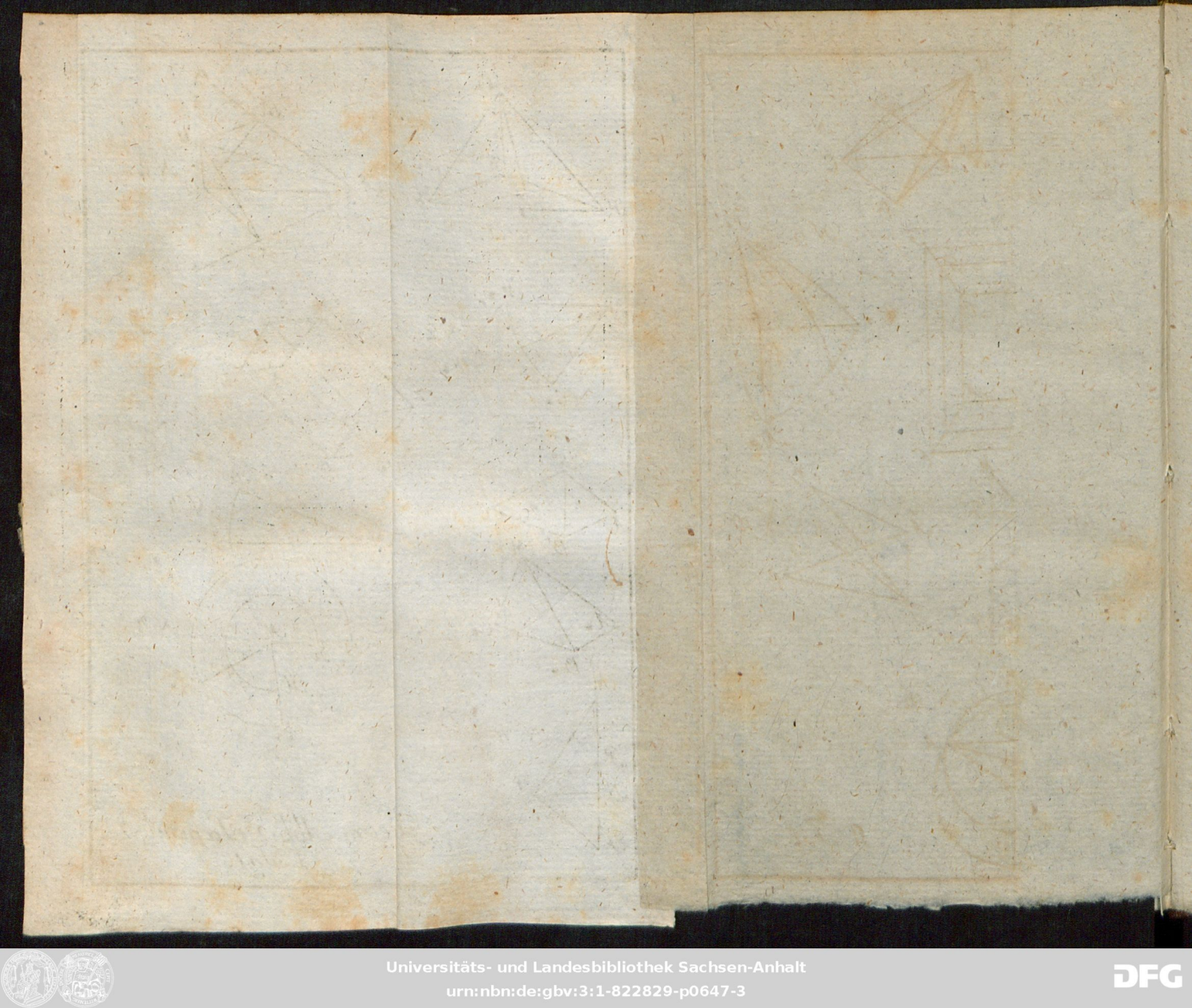


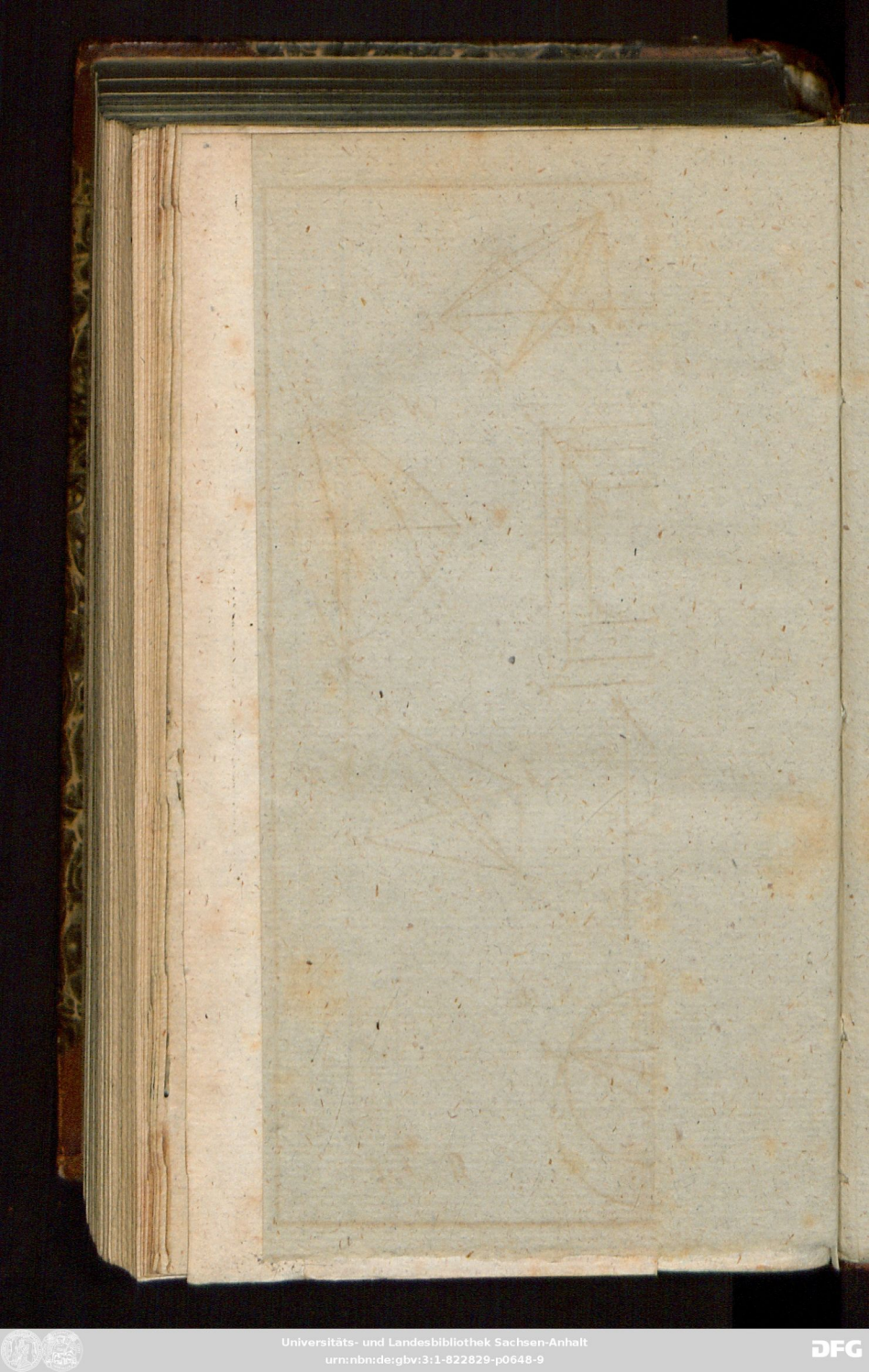
N. 4.

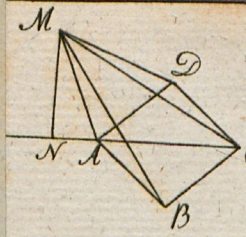


N. 4.

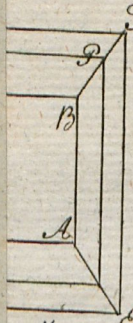
Geom. Abh. 2. Samml.
I. Taf.



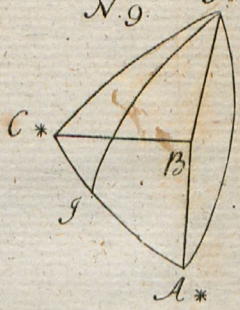


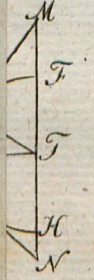


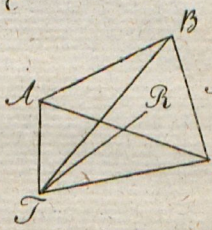
N. 5.



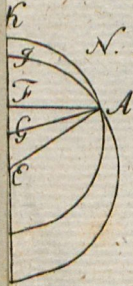
N. 9.





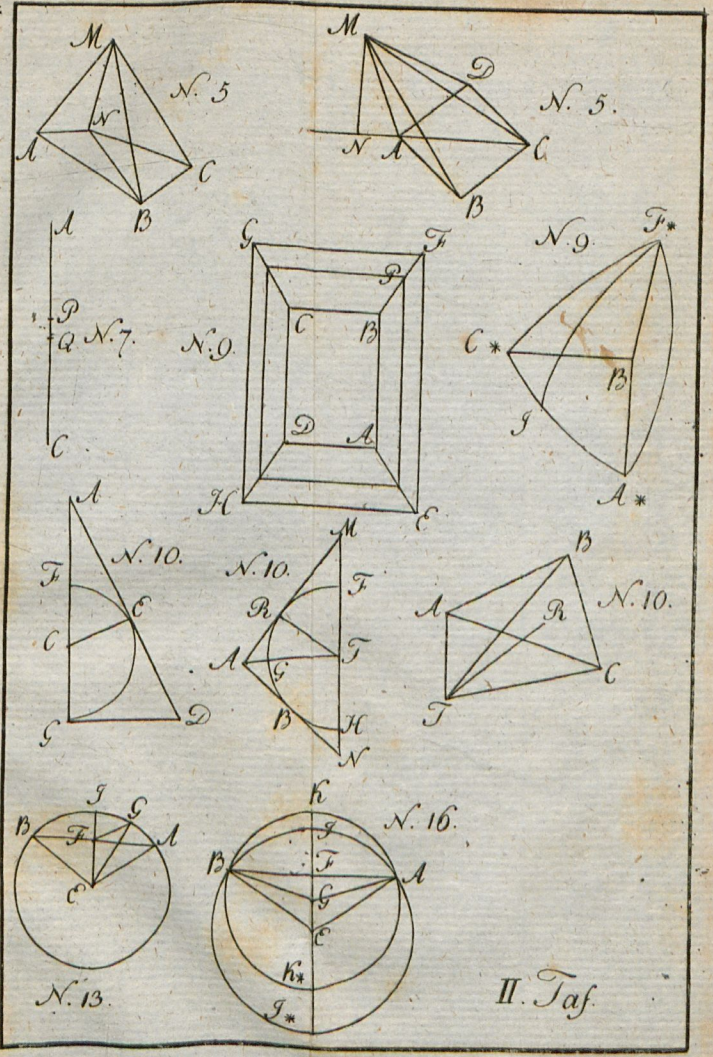


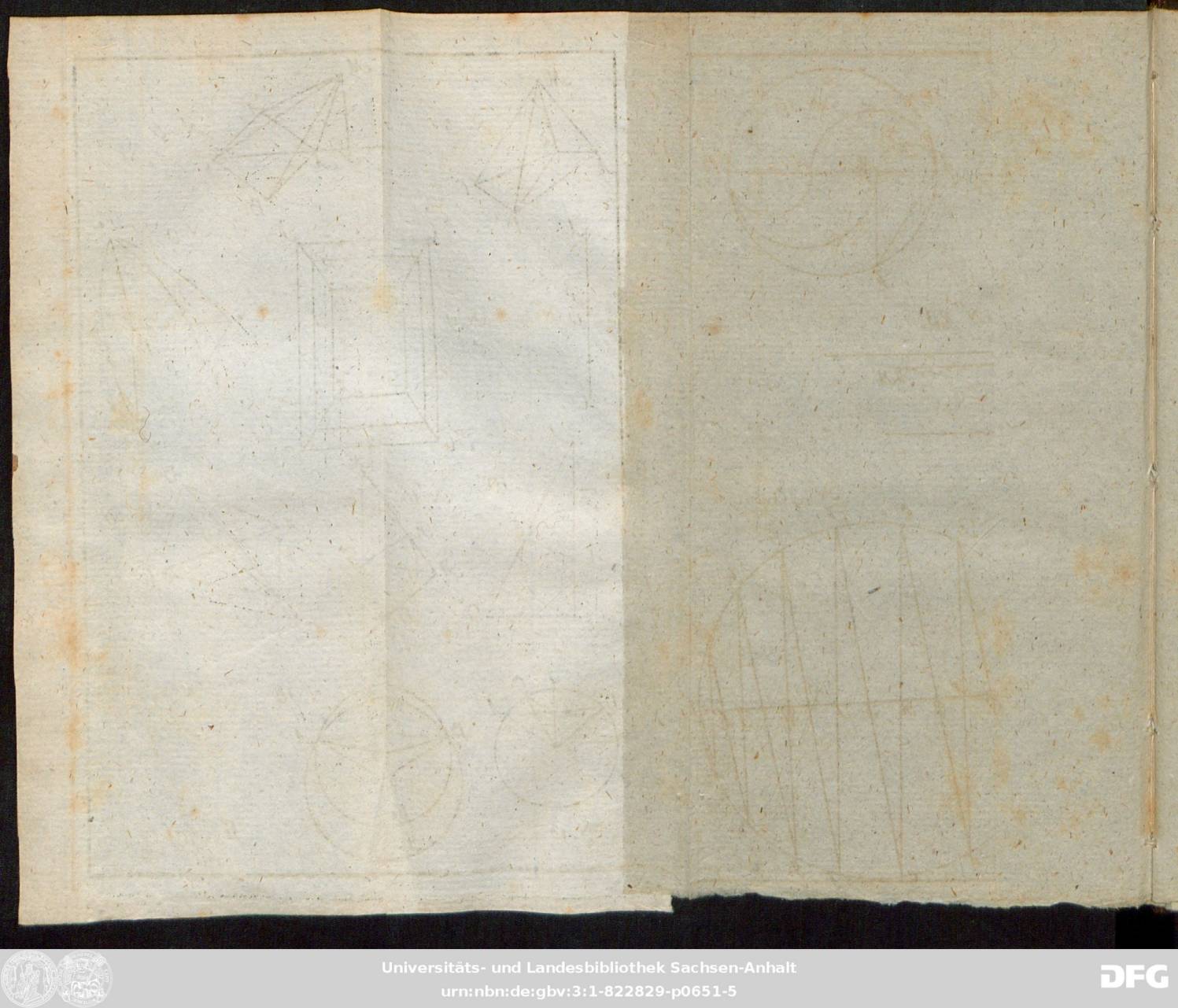
N. 10.



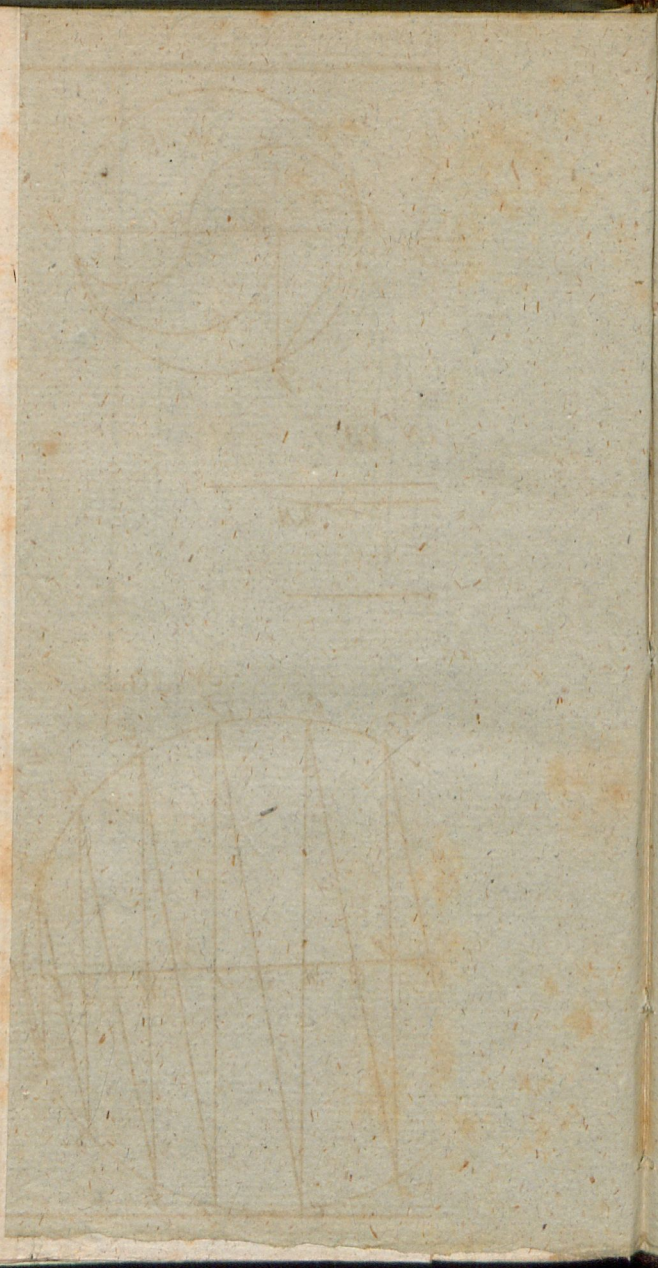
N. 16.

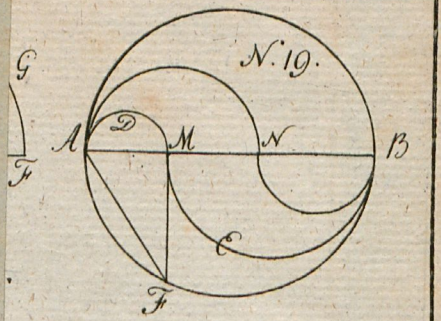
II. Taf.


M
N
A
B
C
N. 5
M
D
N
A
C
B
N. 5.
A
P
Q
C
N. 7.
G
F
P
C
B
D
A
H
E
N. 9.
N. 9
F*
C*
B
J
A*
A
F
C
C
G
D
N. 10.
M
N. 10.
F
R
A
J
G
B
H
N
B
N. 10.
A
R
C
J
J
G
B
F
C
N. 13.
K
J
N. 16.
B
F
G
A
C
K*
J*
II. Taf.

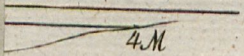


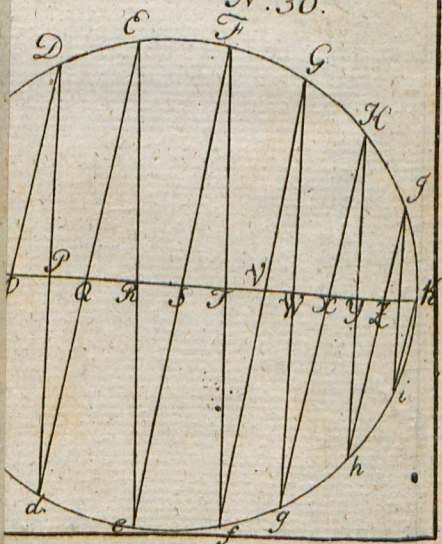
Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-822829-p0651-5

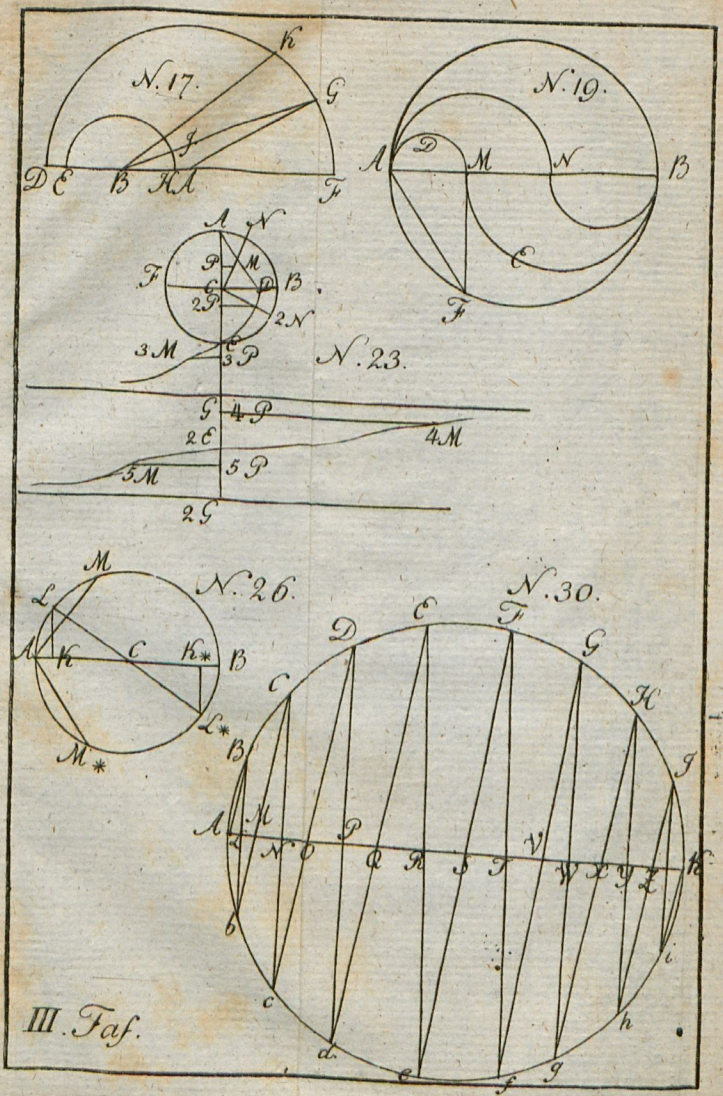


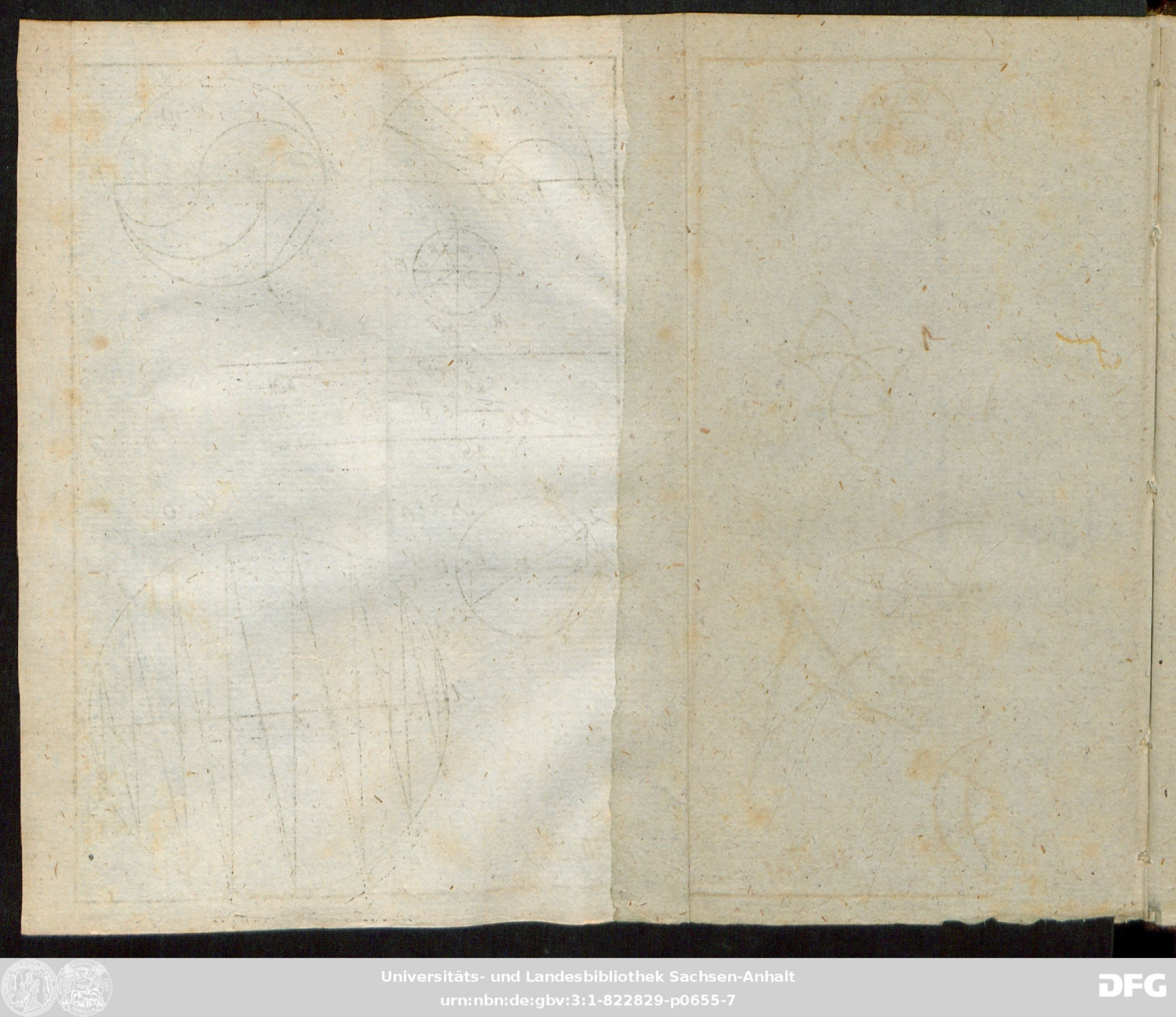


N. 23.

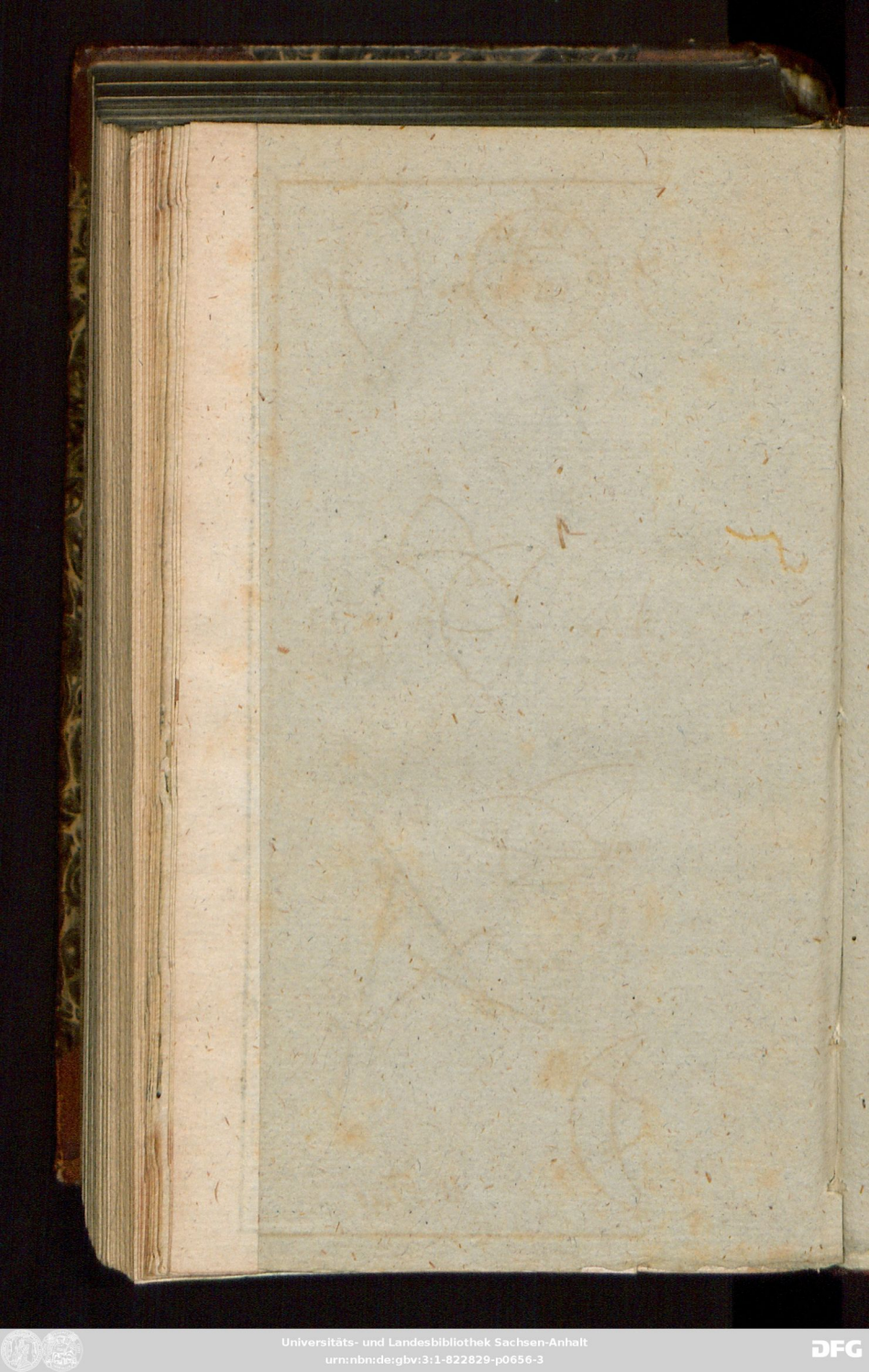


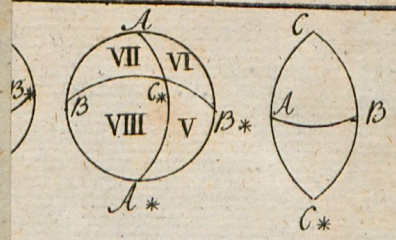


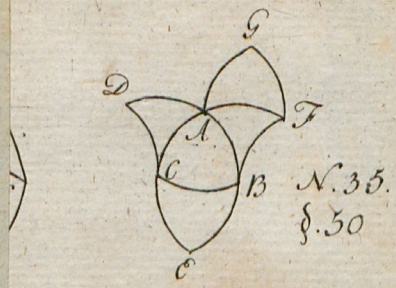

N. 17.
N. 19.
N. 23.
N. 26.
N. 30.
III. Taf.



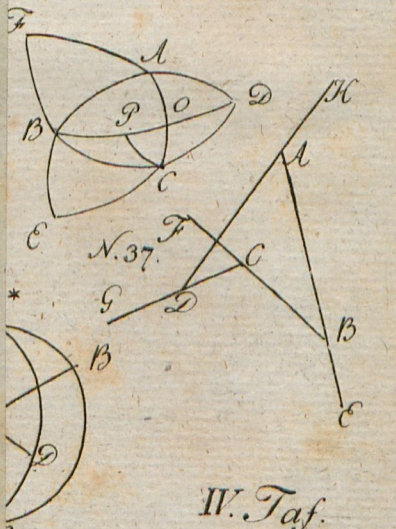
Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-822829-p0655-7



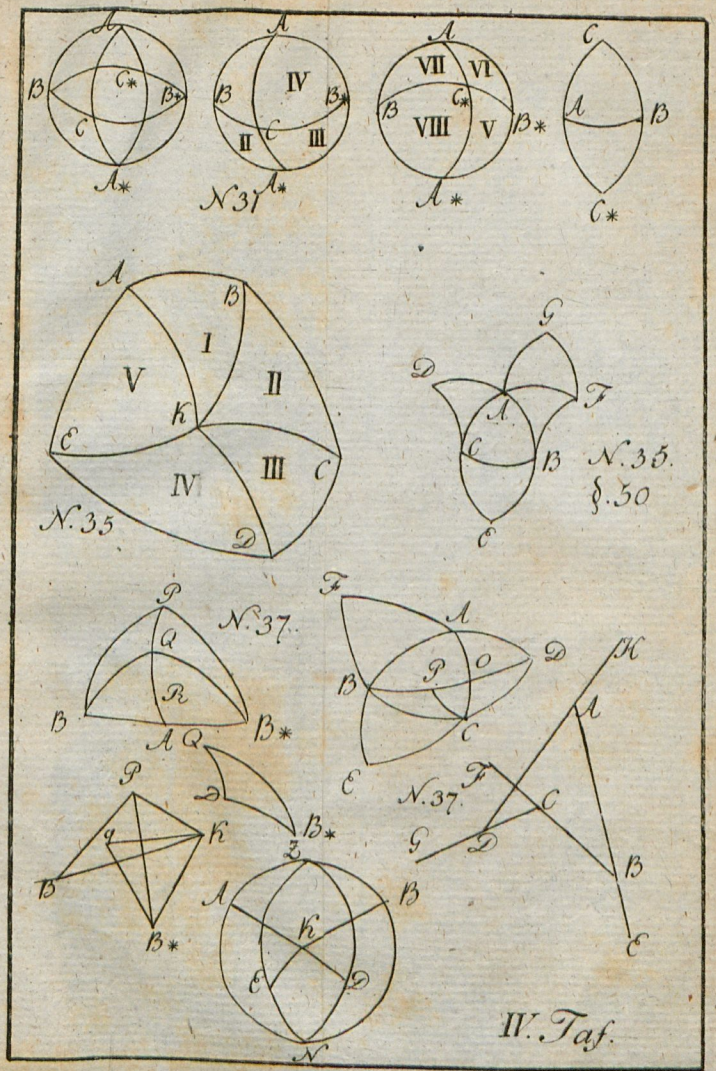




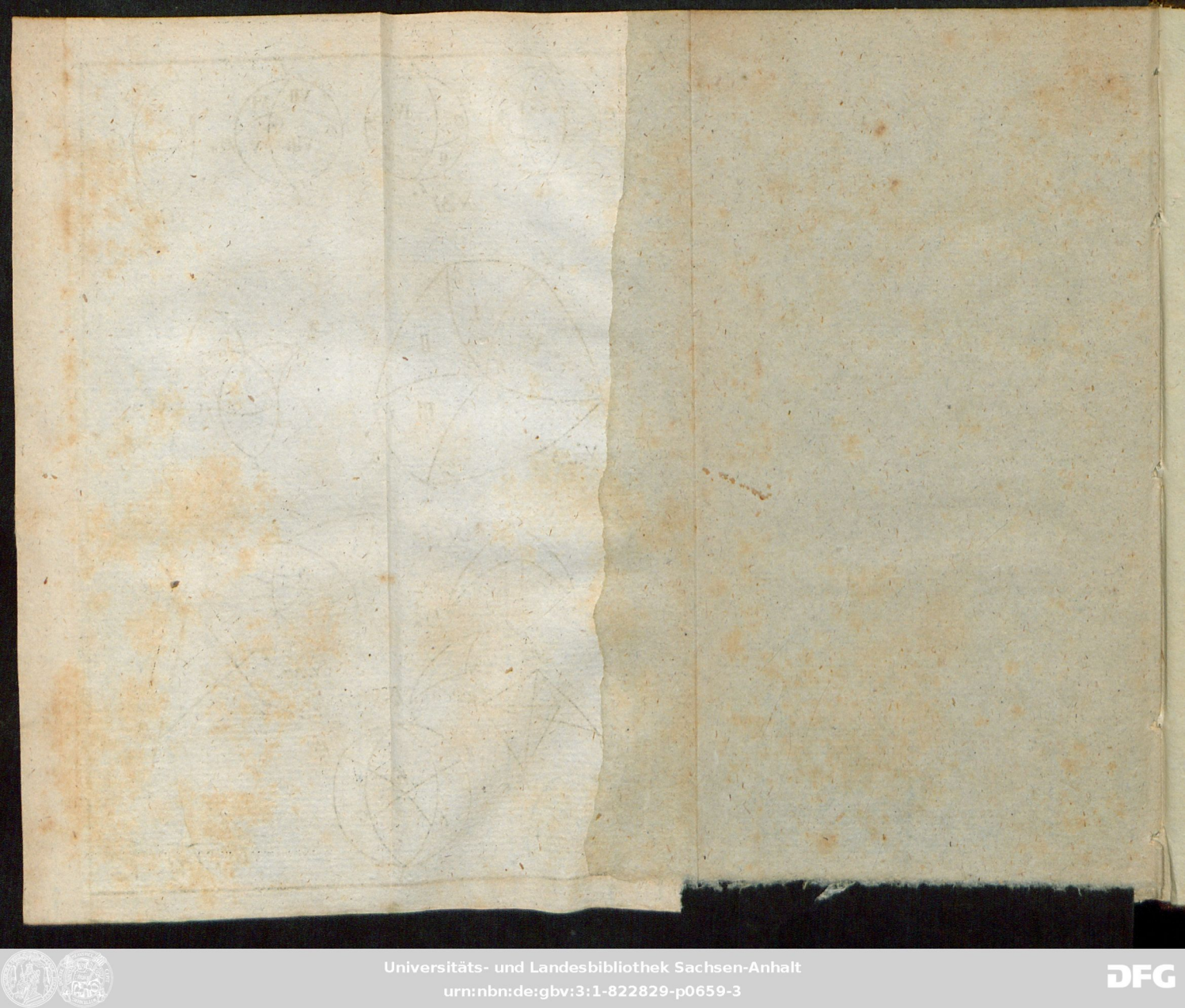
N. 35.
§. 30



IV. Taf.



Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-822829-p0658-4



Pb 1148a
(14.)
ULB Halle 3
006 857 388
W18

Geometrische Abhandlungen

Zweyte Sammlung

Anwendungen der Geometrie und Trigonometrie

von

Abraham Gotthelf Käſtner.

Der mathem. Anfangsgr. I. Theils IV. Abtheil.

Mit 4 Kupfern.

Göttingen
im Verlag bey Vandenhoek und Ruprecht
1791.

Farbkarte #13
B.I.G.
Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black
Inches Centimetres
Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-822829-p0665-3