Yc. 441. a
30

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-822805-p0002-1

Fortsetzung
der
Rechenkunst
in
Anwendungen
auf mancherley Geschäffte.

Von
Abraham Gotthelf Kästner.

Der mathematischen Anfangsgründe ersten Theils
zweyte Abtheilung.

Zweyte vermehrte Auflage.

Göttingen,
im Verlag bey Vandenhoeck und Ruprecht 1801.

KOEN. BIBL.
DER
UNIVERS.
HALLE.

Vorrede.

Daß die Rechenkunst fast in jedem Geschäffte des menschlichen Lebens unentbehrlich ist, wird ziemlich allgemein zugestanden: Von diesem Gebrauche lassen sich in den gewöhnlichen mathematischen Lehrstunden, wo die Arithmetik mit abgehandelt wird, nur wenig Proben geben, theils weil Zeit für die übrigen Theile der sogenannten reinen Mathematik muß gespart werden, theils weil die Gegenstände, auf welche man die Lehren anwenden will, erst Erläuterungen erfodern, auch wenn man nur für die einfachsten Exempel: Vergleichung auswärtiger Münzen mit den bekannten anstellen wollte.

In den Büchern, wo man solche Anwendungen findet: Ausführliche Anlei-

tungen zur Rechenkunst, Schriften vom Münzwesen und Probiren, u. d. g. ist doch selten Deutlichkeit und Entwickelung der Begriffe noch viel weniger Schärfe der Beweise beobachtet, Vortheile der mathematischen Rechenkunst sind gewöhnlich gar nicht gebraucht.

So schien es mir nicht unnütz, dergleichen Anwendungen zu sammeln und an ihnen zu zeigen, wie viel sicherer, bequemer und richtiger, der mathematische Rechner sie behandelt, als der blos handwerksmässige.

Hiezu dienen vornähmlich, Buchstabenrechnung und Analysis: Jene, weil sie die Beschaffenheit der Frage, die Schlüsse, durch die man ihre Antwort findet, die Antwort selbst, geschwind und deutlich übersehen lässt; Diese, weil sie gestattet, das Unbekannte mit dem Gegebenen vermengt zu betrachten, so wie die Frage es oft darstellt, und Mittel zeigt, es zu entwickeln.

Wenn Rechner sonst ihre Absichten ohne solche Hülfsmittel erreicht haben, so ist es immer mit mehr Aufwand der Zeit, Anstrengung des Geistes, selbst Unsicherheit des Erfolgs geschehen. Jezo sind

diese

diese Kunstgriffe so häufig und mannichfaltig erläutert, so gemein gemacht worden, ihre Wichtigkeit ist durch so unzählige Proben dargethan, daß, wer übernehmen will, viel und mancherley zu rechnen, ohne Schande ihrer nicht unkundig seyn kann, grosse Trägheit gesteht, wenn er sie nicht lernen will, oder grosse Schwachheit, wenn er sie nicht lernen kann.

Jemanden nach dem jezigen Zustande der Wissenschaften, zur Anwendung der Rechenkunst, oder gar noch anderer mathematischen Lehren, auf weitläuftige und verwickelte Untersuchungen, führen, und ihn doch mit Buchstabenrechnung verschonen, ist so viel, als jemanden in der Musik unterrichten, und ihm die Erlernung der Noten ersparen. Bisher sind die Musiklehrer nicht so nachgebend gewesen, sie fodern von jedem Mägdchen oder Knaben, die musikalische Schrift zu lernen, die doch mehr zusammengesetzt, mannichfaltiger, willkührlicher und schwerer ist, als die mathematische. Und die Mägdchen und Knaben lernen nun das, um sich und andern Ergötzung zu verschaffen!

Aber, die Empfehlung, die man jezo auf Büchertiteln findet: "Für künftige „Rechtsgelehrte, Aerzte, Kameralisten „und Oekonomen" heisst verdollmetscht so viel: Für Herren, die sich wichtigen Geschäfften bestimmen, wo Mathematik, und zuweilen mehr als blos elementarische, erfodert wird: Indeß, gründliche Mathematik, und was zu derselben Anwendung nöthig ist, nicht lernen wollen.

Eine beträchtliche Ausnahme von diesem Gleichnisse muß ich zugestehen: Blinde, deren Musik sich wohl hören lässt, ob sie solche gleich nicht lesen können.

Man hat eine Algebra für Blinde; so empföhlen denn erwähnte Titel ihre Bücher: Geistlich Blinden; nähmen aber doch dabey an, daß die künftigen Herren .... den Mangel des Gesichts, durch Lehrbegierde, standhafte, und ungestörte Aufmerksamkeit, natürlichen Scharfsinn, und andre Blinden nicht ungewöhnliche Vorzüge, ersetzten.

Dieses Zutrauen habe ich freylich gegen niemand, der, nur Buchstabenrechnung zu erlernen, nicht Geduld, oder nicht Fähigkeit hat. Wie sollte ich bey ihm

ihm die Arbeitsamkeit, und die Kräfte vermuthen, die zur Anwendung mathematischer Lehren erfodert werden.

Ich wiederhohle, daß die Rede von dem jezigen Zustande der Sachen ist. In allen Wissenschaften, ist ohne neuere Hülfsmittel viel geleistet worden, aber eben die Schwierigkeit, es zu leisten, veranlasste, auf Erleichterungen zu sinnen, die dann gern und mit Nutzen der Wissenschaften angenommen wurden.

Man vergaß, vielleicht nur gar zu sehr, das Rechnen auf den Linien, als das mit der Feder gemein wurde: Man führte grosse Rechnungen, ohne Logarithmen, lernte Nepers Logarithmen brauchen, und vertauschte sie willig, mit den bequemern Briggischen. Immer erfanden sich diejenigen, die in Wissenschaften arbeiteten, selbst Vortheile, oder machten sich erfundne eifrig bekannt. Wer also neuere Kunstgriffe nicht lernen wollte, weil es Zeiten gab, wo man ohne sie zurechte kam, den würde ich erinnern, daß die Römer ohne Steigbügel aufs Pferd zu kommen wusten, daß aber jezo schwerlich jemand Hoffnung giebt, ein mittelmässiger Reuter zu werden

der zu träg oder zu ohnmächtig wäre, den Fuß in den Steigbügel zu erheben.

Meine Meynung ist: Wer Anwendungen der Mathematik zu machen nöthig hat, soll mit einem seichten, unvollständigen und zur Anwendung nicht brauchbar abgefassten Unterrichte, nicht auf den Wahn gebracht werden, als könnte er was, das er nicht kann. Ist gründliche Mathematik sein Werk nicht, so wähle er andre Arten, der Welt und sich nützlich zu seyn, wo er keine Mathematik nöthig hat, eigentlich keine gelehrte, denn natürliche ist ein Theil des Menschenverstandes, und wird von Unzählichen angewandt, die niemahls mathematische Kunstwörter gehört haben.

Bey manchen Kenntnissen, die gar nicht zur Mathematik gerechnet werden, möchte doch oft, nicht eben Integriren nöthig seyn, aber immer etwas mehr als die Regel Detri in ganzen Zahlen. Eine der neuesten chemischen Untersuchungen, Vertheilung der Wärme, wenn Materien von unterschiedner Wärme vermischt werden, ward schon bey ihrem ersten einfachsten Anfange von Reichmann auf die Alligationsrechnung gegründet, (Comm. Nov.

Nov. Petrop. T. I. 1747; 1748). Bey ihrer jezigen Bearbeitung erfodert sie diese Regel noch in mannichfaltigerer Anwendung; Ob jemand, der damit ganz unbekannt ist, durch die ausführlichsten Erläuterungen mit besondern Exempeln und mehrern Zahlen sich darein finden wird, beurtheile ich nicht, weil ich mich in desselben Umstände nicht recht setzen kann, so viel habe ich wohl von Anfängern erfahren, daß viel Worte und grosse Weitläuftigkeit, eher sie ermüden und verwirren, als belehren.

Für wen Mathematik nur Nebenwerk und Hülfswissenschaft ist, der sollte doch ihre Anfangsgründe richtig, und nicht gar zu unvollständig lernen, im Stande seyn, die Anwendungen auf die leichtesten und am häufigsten vorkommenden Fälle zu machen, und bey schwerern, die Hülfe zu brauchen, die ihm Schriftsteller, oder gegenwärtige Meister, geben können.

Göttingen, im December 1785.

A. G. Kästner.

Der ehrwürdige Verfasser ward durch schnell zunehmende körperliche Schwäche verhindert, gegenwärtige neue Ausgabe seiner Fortsetzung der Rechenkunst zu vollenden. Er übergab also das, was er zu diesem Zweck ausgearbeitet hatte, dem Unterzeichneten, mit dem Auftrage, es an die gehörigen Stellen einzuschalten, und nöthigen Falls das Unvollendete zu ergänzen. Das Letzte ist nur bey ein paar Rechnungsbeyspielen nöthig gewesen; alle Zusätze des Verfassers, von denen die meisten wenige Wochen vor seinem Tode, mit gelähmter rechten Hand, die durch die linke fortgeführt wurde, geschrieben sind, konnten unverändert aus seiner eigenen Handschrift abgedruckt werden. In dem Inhaltsverzeichnisse ließen sich nur die beträchtlichsten bemerken; man wird aber bey genauerer Vergleichung mit der früheren Ausgabe an manchen Stellen Verbesserungen, weitere Auseinandersetzungen, und litterarische Nachrichten hinzugethan finden. Daß die Seitenzahl dieser zweyten Ausgabe die der ersten demungeachtet wenig übertrifft, rührt von ihrem beträchtlich engeren Druck her.

B. Thibaut.

Inhalt.

Inhalt.

	§.	S.
VII. Cap. Zusätze zum V. Cap. der Arithmet.	—	1
I. Abschn. zu V. Cap. 41. Vortheil bey der Regel Detri . . .	1	1
II. Abschn. Ueber den Gebrauch der Proportion CT : ct = E : e .	1	4
Geschwindigkeiten, Wege und Zeiten .	3	5
Grösse der Bewegung .	4	6
Fälle, in denen ähnliche Proportionen statt finden . .	9	9
Gleichungen statt Proportionen .	12	11
Gesellschaftsregel mit Betrachtung der Zeit, und ähnliche Fragen .	35	20
Ungewöhnliche Ausdrücke der Verhältnisse	41	24
III. Abschn. Kettenregel . .	1	25
Verhältnisse zwischen Gold und Silber	2	26
	15	34
	17	35
Nutzen der Stellung nach den Verhältnissen bey der Kettenregel .	5	27
Graumann als Erfinder . .	8	28
Rees . . .	9	30
Willig, Schmid, R. Levi . .	11	32
VIII. Cap. Zusätze zum VI. Cap. .	—	39
I. Abschn. Summirung arithmetischer Reihen . . .	1	39

Qua-

Inhalt.

	§.	S.
Quadrate durch Addiren zu berechnen	15	43
Rechnung für einen Brunnen zu graben oder Thurm abzutragen .	16	44
Bernds Versprechen . .	21	49
* Eine arithmetische Progression einem Kaiser zu überreichen . .	—	50
II. Abschn. Summirung geometrischer Reihen . . .	—	51
Potenzen einer gegebenen Zahl zu summiren . . .	1	51
Zahlen zu finden, die sich ohne Rest dividiren lassen . .	7	52
Potenzen von Brüchen . .	15	55
Geometrische Reihe . .	21	58
Gebrauch der Logarithmen . .	28	61
Eckenbergs Wechselbrief . .	30	63
Von starken Männern . .	33	65
Belohnung eines Lehrers des Schachspiels	34	66
Wenn die Zahl der Glieder keine ganze ist	37	68
III. Abschn. Proportionaltheile bey den Logarithmen . .	1	70
Einrichtung dazu bey den Tafeln .	14	75
IV. Abschn. Von logarithmischen Tafeln	1	79
Solche da die Zahlen über 10000 gehn	4	82
Wie die Logarithmen in grösseren Tafeln aufzusuchen sind . .	9	85
Logarithmen auf mehr Decimalstellen	13	88
Just Byrgs Logarithmen .	24	94
* Vermittelst der logarithmischen Tafeln den Logarithmen einer Zahl zu finden, die viel Zifern hat . .	70	108
V. Abschn. Gebrauch der Logarithmen, Maasse u. d. g. genau Eins durch das Andre auszudrucken . .	1	111
Gegenseitige Verwandlungen von Cassengeld und Gold . .	2	111

Pariser

Inhalt.

	§.	S.
Pariser und Rheinl. Fuß .	14	114
Grad auf der Erde . .	16	114
Durchmesser der Erde . .	23	115
Geographische Meile . .	26	117
* Rechnungen über Maasse, Gewichte und Geld der französischen Republik	27	117
VI. Abschn. Für die Logarithmen wird Manches besser in gemeinen Brüchen als in Decimalbrüchen ausgedrückt .	1	125
Hannöverischer Dragoner, und Preussischer Cüraſſier . .	4	126

IX. Cap. Zinsrechnung.

I. Abschn. Allgemeine Begriffe von Zinsen und Abtheilung derselben .	1	130
Einfache Zinsen . .	11	132
Gegenwärtiger Werth eines Capitals das man nach einigen Jahren zu fodern hat, nach einfachen Zinsen .	20	135
Hoffmannische Zinsrechnung .	29	139
Monatliche Zinsrechnung . .	30	141
Monatlicher Waarenrabat .	33	143
Rechnung zwischen Gläubiger und Schuldner . . .	45	147
Tägliche Zinsen . .	74	153
* Einige Aufgaben zur einfachen Interessenrechnung . .	—	155
II. Abschn. Zusammengesz. Zinsen. Wachsthum des Capitals, und gegenwärtiger Werth einer künftigen Schuld .	5	162
Gegenwärtiger Werth einer jährlichen Rente . . .	14	164
Exempel . .	19	166
Von Tafeln . .	36	170
Leibnitz und andre Schriftsteller von dieser Rechnung . .	41	172
Monatlich zusammengesetzte Zinsen .	55	184

. Ver-

Inhalt.

	§.	S.
Vergleichung von Geboten .	59	185
Eine Schuld in gleiche jährliche Zahlungen zu theilen . .	62	187
Abnahme eines Capitals, auf das jährlich gleichviel bezahlt wird .	76	192
Nutzung eines Unterpfandes .	99	200
Abnahme eines Capitals, wenn jährlich mehr ausbezahlt wird als die Zinsen betragen . . .	111	204
Was Leibrenten sind . .	114	205
Auszahlung am Anfange jeden Jahrs	116	206
Zur Abtheilung der Gehölze in jährliche Gehaue . . .	122	208
Allgemein über: Ursache, Wirkung und Zeit . . .	127	213

X. Cap. Kaufmännische Rechnungen.

Eine Summe, die in Gelde eines Orts ausgedruckt ist, in Gelde eines andern anzugeben . .	1	217
Kunstwörter: besser, schlechter, differiren, rendiren, Agio, Disconto, auf und in Procent . .	5	218
Von Wechselbriefen . .	11	222
Beständige und veränderliche Valute	13	224
Wie viel Stück einer Geldsorte so viel betragen als Stück der andern .	15	225
Zell, Wechselrechner . .	18	226
Höhere und niedrigere Course; welche Trassanten oder Remittenten vortheilhaft sind . . .	25	229
Vergleichung zweyerley Geldsorten, deren jede einmal nach schwerem, dann nach leichtem Fusse gerechnet wird. Gewinn und Verlust dabey .	26	231
Vergleichung von Geldsorten durch Zwischenverhältnisse . .	45	236

Tabel-

Inhalt.

	§.	S.
Tabellen vom Berliner Banco	46	236
von Clausberg Universalregeln	48	238
Raphael Levis logarithmische Tabellen	57	241
Gewinn und Verlust	76	248
Spesen nach Procent	81	250
Eine Waare wird mit Spesen nach Procent, in einer Münzsorte gekauft, in einer andern verkauft; was ist dabey Gewinnst?	87	252
Vier Fragen hierüber	148	271
Wechselarbitragen	161	275
Nelkenbrechers logarithmische Tabellen	166	277
Aaron Calman Cohen logarithmische Tabellen	172	281
Reimer Unterricht von logarithmischen Tabellen	180	284
Pflugbeil allgemeine Regeln zu Wechselarbitragen und Verhältnißtabellen	181	284
Wechselcommissionen	204	291
Eine Commission ist nach gewissen Coursen gegeben; wie fern darf sie nach veränderten Coursen befolgt werden?	211	294
Einen Cours zu finden, der mit einem veränderten Course den beyden vorgeschriebenen gleichgültig ist	217	300
Wenn statt der vorgeschriebenen Course, andre müssen genommen werden, ob dabey Vortheil oder Schaden ist?	234	307
Aus zween Wegen mit unterschiednen Coursen zu wählen	243	311
Rechnungen, wo Waare und Geld vermischt vorkommen	256	316
Der Preis einer Waare ist in Maasse und Gelde eines Orts gegeben, man sucht ihn in Maasse und Gelde eines andern	261	317
Gebrauch beständiger Logarithmen	264	318

Wie

Inhalt.

	§.	S.
Wie man verfährt, wenn die Geldsorten durch Zwischenverhältnisse müssen verglichen werden	273	321
Hermanns Specialregeln	281	324
Sein Divisor	283	324
Bequemer wäre ein beständiger Factor, oder Logarithmen für die, die damit umzugehen wissen	289	326
Thara	303	331
Fusti	320	335
Tauschrechnung	331	338
Wenn von der zweyten Waare nicht genug gegen die erste vorhanden ist	336	340
Wenn ein Theil vertauscht, ein Theil baar bezahlt wird	341	343
Hiebey Gewinnst zu erlangen	357	348

XI. Cap. Vermischungsrechnungen.

I. Aufg. Wie sich eine Mischung von Wasser und Wein ändert, wenn das Weggenommene immer mit Weine wiederum ersetzt wird	1	353
Physiologische Anwendung	30	361
Wie zu rechnen wäre, wenn solche Aenderung unablässig vorginge	33	362
Fontanas Untersuchung	63	371
* Zusatz zur ersten Aufgabe	1	374
II. Aufg. Aus drey Mischungen, deren jede drey Materien in gegebenen Verhältnissen enthält, wird eine vierte Mischung gemacht	1	376
Von jeder der drey Mischungen gleiche Gewichte gegeben, die vierte auch von eben dem Gewichte zu machen	27	380

Aus

Inhalt.

	§.	S.
Aus zwo Mischungen eine dritte	51	384
Exempel . . .	69 u. f.	386
Wie fern man eine Grösse nach Gefallen annehmen darf . .	78	396
Alligationsregel . .	95	399
Bey Silber . . .	99	400
Für drey Silbervorschriften der Rechenmeister . . .	108	403
Eben die für mehr Silber .	122	406
Bemerkungen über dieses Verfahren	124	411
Analytische Beantwortung solcher Fragen . . .	126	412
Gränzen der anzunehmenden Werthe	139	413
Von den bessern so viel als möglich in die Mischung zu bringen .	159	417
Von drey gegebenen Silbern lassen sich die Verhältnisse annehmen, und daraus des vierten seine bestimmen	166	420
Bey vielen gegebenen Silbern, kann man aus einigen ein mittleres zusammensetzen, aus diesem, mit den andern das Gesuchte u. d. g. .	168	420
Scheinbare Schwierigkeit bey Anwendung einer allgemeinen Formel .	180	423
Ueber den Namen der Alligationsregel	188	425

Inhalt.

	§.	S.
Leichners Anzeige von Schriftstellern, die bey ihr gefehlt haben .	193	427
Rechnungen über Salzwasser .	198	429
Wie viel Salz sich im Wasser auflöset	201	430
	256	
	262	
Aus einer Auflösung, durch Zusatz einer andern, stärkere oder schwächere zu machen . . .	203	430
Was man löthig nennt .	205	431
Eine stärkere zurch Zugiessung des Wassers, auf eine gegebene Löthigkeit zu bringen . .	209	432
Ersparung des Salzes .	223	434
Verstärkung einer Auflösung durch Zusatz von Salze . .	227	435
Verstärkung durch Ausdünsten .	242	439
Diese wächst nicht in der Verhältniß, in welcher der Raum abnimmt	245	440
Verhältniß der eignen Schweren von Salz und Wasser . .	253	442
Gewicht eines rheinl. Cubikfusses Salz, und wie viel sich im Wasser auflöst	254	443
Ueber Lambert, von eignen Schweren der Auflösungen . .	259	445
Wie er seine Formel für Vergleichung zwischen Gewicht und Salzgehalt gefunden . .	264	447

Und

Inhalt.

	§.	S.
Und für seine Tafel eingerichtet hat	276	449
Von Watsons Tafel, und der Brauchbarkeit solcher Bemühungen .	283	452
Wie viel ein Bushel Salz in England wiegen soll . .	284	453

XII. Cap. Rechnungen zum Münzwesen.

Gewichte . .	2	455
Schrot und Korn . .	11; 12	461
Abweichungen vom Gesetzmässigen dabey	13	461
Wenn Münzfuß, Schrot und Korn eines Stücks gegeben sind, desselben Werth zu finden . .	16	462
Beschickung . .	23	464
Valvation . . .	30	466
Alter Reichsfuß . .	37	468
Uncialis . . .	38	468
Zinnischer Fuß . .	40	469
Leipziger Fuß . . .	45	471
Werth des Gräns an Korn und des Pfennigs an Schrote, nach diesem Fusse . . .	48	471
Preussischer Fuß . .	52	472
Remedium . . .	54	473
Bey Schildlouisd'or und Laubthalern	72	476

Inhalt.

	§.	S.
Wie auf dem Harze Schrot und Korn zum Silbergelde berichtiget wird	91	482
Wie viel man von gegebenem Silber nehmen muß, eine gegebene Menge fein zu haben . .	93	484
Werth eines Stücks Geld, in dem drey Metalle beysammen sind .	94	485
Vergleichung zweyerley Münzen nach Gehalt und Gewicht .	101	488
Wie viel Goldmünzen gegen eine gegebene Menge zu geben sind, daß in beyden gleich viel Gold ist .	108	489
Des Silbers kann nicht in beyden Mengen gleich viel seyn . .	118	493
Verhältniß zwischen Silber und Gold aus Peter Apians Rechenkunst .	120	493
Tolletrechnung . .	121	494
Tafeln zu Gold- und Silber-Rechnungen . .	124	496

XIII. Cap. Einzelne arithmetische Untersuchungen und Nachrichten.

1. Abschn. Die Regel Falsi .	1	499
Mit zween Sätzen . . .	7	502
Der analytischen Rechnung ähnlich	21	505
Etwas von ihrem Verfahren, noch in der Analysis gebräuchlich .	25	506

Inhalt.

	§.	S.
Ob aus falschen Voraussetzungen Wahrheit könne hergeleitet werden? .	26	507
2. Abschn. Unbestimmte Fragen, welche durch beygefügte Umstände bestimmt werden . . .	1	509
Bestimmt, in der Algebra .	4	509
Zahlen, von denen Summe, Product, Quotient, oder Unterschied, P. Q. paarweise gleich sind .	6	511
Zwo Zahlen, von denen Summe, und Reste bey gegebenen Divisoren, gegeben sind	8	515
Solche Fragen in Erzählungen .	9	517
Von Eulers unbestimmter Analytik	11	517
Quotienten, die ganze Zahlen sind .	12	518
Summen von Producten, die eine gegebene Zahl ausmachen .	14	519
Zahlen, die von gegebenen Divisoren, gegebene Reste lassen und gegebene Summen machen . .	17	519
Eine Zahl, die mit einem Divisor aufgeht, mit einem andern einen gegebenen Rest läßt, oder mit jedem Divisor einen gegebenen Rest .	20	521
Das gröste gemeinschaftliche Maaß	26	524
Regel Cöci . .	43	530
Exempel, wo sich mehr Bestimmungen auf mehr als eine Art annehmen lassen . . .	50	533

Inhalt.

	§.	S.
Frage mit 7351 Antworten .	68	537
Wildpret kaufen . . .	85	541
* Wenn a gegeben ist b so zu nehmen, daß $\frac{a}{a-b}$ eine ganze Zahl ist .	86	545
* Wolfs Vorschrift vollkommne Zahlen zu finden, erläutert .	87	546
* Eine Zahl zu finden, deren Würfel, zu ihrem Quadrate addirt, ein Quadrat giebt . . .	88	548
* Eine gegebene Quadratzahl in so viel Quadratzahlen, als man will, zu zerlegen . . .	89	549
3. Abschn. Ueber Factoren, Zerfällungen, Primzahlen, u. a. m. Nutzen solcher Untersuchungen . .	1	553
Gerade und Ungerade .	3	554
Division mit 3 . .	10	555
— mit 4 . . .	16	556
— mit 5 . .	23	557
— mit 6 . . .	25	558
— mit 7 . .	28	559
— mit 8 . .	29	560
— mit 9 . .	30	560
— mit einer Potenz von 2 oder 5	33	561
Nachrichten von Untersuchungen über Factoren und Primzahlen .	38	563
Formeln, unter denen Primzahlen enthalten sind . . .	40	564

Un-

Inhalt.

	§.	S.
Unvollkommenheit der Theorie von Prim-Zahlen	47	566
Tafel von Schwenter	48	566
v. Schooten	49	566
Pell	50	567
Poetius und im mathematischen Lexicon	56	570
Jäger	57	572
Anjema	58	572
Lambert	59	573
Neumann	65	576
Nutzen davon, daß einerley Tafeln mehrmal berechnet worden	66	577
Rosenthal	68	578

Methoden, Factoren zu finden.

Felkel	69	579
Hindenburg	70	581
Etwas von Rechenmaschinen	71	582
Die Leibnitzische	79	585
Poleni, Hahn und Müller	80	585
Ueber ihren Nutzen	81	586
Nepers Rechenstäbe	85	589
Rechenkasten mit Cylindern, Rechenscheibe u. d. g.	86	590

Zu-

Inhalt.

	§.	S.
Zusammensetzung von Zahlen aus Gliedern geometrischer Reihen .	87	591
Jede ganze Zahl lässt sich aus Gliedern der Reihe 1 : 2 : 4 : 8 .... nur durch Addiren zusammensetzen .	95	593
Jede ganze Zahl lässt sich aus Gliedern der Reihe 1 : 3 : 9 : 27 .... durch Addiren und Subtrahiren zusammensetzen	96	595
Gebrauch hievon bey Gewichten .	99	597
Vorschlag, mit einem kleinen Gewichte viel grössere anzugeben .	106	600
Haasens Vorschrift . .	109	602
Kleine Probiergewichte zu verfertigen	112	603

Fort=

Fortsetzung der Rechenkunst.

VII. Capitel.
Zusätze zum V. Cap. der Arithmetik.

I. Abschnitt zu V. Cap. 41.
Ein Vortheil bey der Regel Detri.

I. Ein brauchbarer Vortheil ist, wenn man nur sucht, was zum dritten Gliede addirt, oder davon abgezogen werden muß, das vierte zu erhalten; dadurch erspart man bey grossen Zahlen eine mühsamere Rechnung.

II. Allgemein lässt sich das so vorstellen
$a : a + e = b : b + f$;
wo f gesucht wird
Also $a.b + a.f = a.b + b.e$ und

$$f = \frac{b.e}{a};$$

bejaht oder verneint, nachdem e es ist; Oder: man addirt diesen Quotienten zum dritten Gliede oder zieht ihn ab, nachdem das zweyte Glied grösser oder kleiner ist, als das erste.

III. Weil verstattet ist, die mittlern Glieder zu verwechseln (Ar. V. C. 37;), so kann man, wenn es die Rechnung erleichtert, diejenige Zahl $= a + e$ setzen, die von der ersten am wenigsten unterschieden ist, wenn sie auch gleich,

bey einem Exempel in genannten Zahlen nicht einerley Einheiten mit ihr hätte.

IV. Exempel. 7892 Pfund kosten 7901 Thaler, was kosten 174 Pf.?
Muß eigentlich so stehen

$$7892 : 174 = 7901 : x$$
$$a : a+e = b : b+f$$

Da ist $e = -7718$; also

$$f = -\frac{7718 \cdot 7901}{7892} = -\frac{3859 \cdot 7901}{3946}$$

Ich finde $f = -772\,6,8$
Nun ist $b = 7901$
also $x = 174,2$

V. Ordnet man aber die Proportion so:

$$7892 : 7901 = 174 : x$$
$$a : a+e = b : b+f$$

so ist $e = +9$; $f = +\frac{174 \cdot 9}{7892} = \frac{87 \cdot 9}{3946}$

Wo der Dividend $= 783$, der Quotient $= 0,19842$ also $x = 174,19842$ etwas kleiner als in IV; weil dort nach 0,8 noch Ziffern gefolgt hätten, die ich nicht berechnet habe.

VI. Begreiflich findet man leichter in V; die kleine Zahl, die zu 174 muß addirt werden, als die grosse, die in IV; von 7901 abzuziehen ist.

VII. Das Exempel steht in Schmids Rechenkunst Leipz. 1774; I. Th. 201. §. nach V. berechnet, als ein Beyspiel, wie man bey der Regel Detri, oder Kettenregel, auf die Hr. Schm.

alles

alles bringt, Subtraction vortheilhaft braucht. Er ist durch eignes Nachdenken auf diese Abkürzung gekommen. In analytischen Rechnungen ist es sehr gewöhnlich, eine Grösse durch ihren kleinen Unterschied von einer gegebenen auszudrucken, den man leichter und schärfer berechnet, als das Ganze, in welchem die gegebene mit enthalten wäre. Dadurch bin ich auf einen ähnlichen Vortheil für den Gebrauch der Logarithmen gekommen, der weiter unten (VIII. Cap. V. Abschn.) gezeigt wird. Bey gegenwärtigen Vorschriften, scheint es mir nützlich, die Sache so allgemein, wie in II; darzustellen, und die Bemerkung III; beyzubringen, die Rechenschaft giebt, warum Schm. das Exempel so, und nicht nach IV; berechnet hat.

VIII. Uebrigens habe ich bey diesem Exempel beydemahl f zu finden, mich der Logarithmen bedient, und will die Rechnung damit herseßen. Wem dieselben noch nicht bekannt wären, der könnte das Folgende verschieben, bis er sich dieselben aus dem VI. Cap. der Arithm. bekannt gemacht hat.

Für IV.

log 3859 = 3, 5864748
log 7901 = 3, 8976821

7, 4841569
log 3946 = 3, 5961571

log f = 3, 8879998
giebt f = — 7726, 8

Für V.

log 783 = 2, 8937618
log 3946 = 3, 5961571

log f = 0, 2976047 — 1
giebt f = + 0, 19842

Der Vortheil, den das letzte Verfahren vor dem ersten, auch bey dem Gebrauche der Logarithmen hat, kömmt darauf an: In IV ist f eine ziemlich grosse Zahl, die man aus ihrem Logarithmen nur bis auf Zehntheile findet; aber in V ist f ein eigentlicher Bruch, den die Logarithmen so gleich bis auf Hunderttausendtheile geben.

II. Abschnitt zum V. Cap. der Arithmetik 53. §.

Ueber den Gebrauch der Proportion C.T : c.t = E : e

1. Diese Proportion sagt also: daß Effecte, sich wie die Producte aus den Zeiten in die Ursachen verhalten.

2. Und ein Paar andre, davon eine V. Cap. 35. §. steht

$$C : c = \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$$

$$T : t = \frac{E}{C} : \frac{e}{c}$$

Daß sich die Ursachen verhalten, wie die Effecte mit den Zeiten dividirt; Und die Zeiten, wie die Effecte mit den Ursachen dividirt.

3.

3. Wenn mit der Geschwindigkeit C, der Weg E in der Zeit T zurückgelegt wird, und c, e, t, eben so was bedeuten: So setze man, mit der Geschwindigkeit C werde in der Zeit t, der Weg v zurückgelegt. Offenbahr verhalten sich die Wege, bey einerley Geschwindigkeit, wie die Zeiten, bey einerley Zeit, wie die Geschwindigkeiten. Das Verfahren V. C. 53. §. giebt also eben die Proportion für Vergleichung von Geschwindigkeiten, Zeiten und Wegen.

Und so hie (2) daß sich die Geschwindigkeiten verhalten, wie die Wege mit den Zeiten dividirt, und die Zeiten, wie die Wege mit den Geschwindigkeiten dividirt.

Wenn ich eine Geschwindigkeit C, eine andere c, nenne, so denke ich dabey, daß sich die Geschwindigkeiten wie C : c verhalten; das ist, so beschaffen sind, daß mit ihnen in gleicher Zeit, ein Paar Wege zurückgelegt würden, die sich so verhielten.

Z. E. Wenn eine Kugel in einer Secunde durch 3 Fuß liefe, eine andre durch 4 Fuß, so verhielten sich ihre Geschwindigkeiten wie 3:4; und man setzte, der ersten ihre C=3; der andern ihre c=4.

Wenn sich nun die erste 7 Secunden lang bewegte, die zweyte 9 Secunden lang, so hätte die erste 3. 7; die zweyte 4. 9 Fuß zurückgelegt.

Nun wäre T=7; t=9; E der ersten Weg, e der zweyten ihrer, also

C. T : c. t = E : e

Gegentheils, wenn eine Kugel durch 12 Fuß = E in 5 Secunden = T, gienge, eine andere durch 7 Fuß = e in 3 Secunden = t, so verhielten sich ihre Geschwindigkeiten

$$C : c = \frac{12}{5} : \frac{7}{3}$$

Die erste nähmlich ginge in einer Secunde durch $\frac{12}{5}$ Fuß, die zweyte in eben der Zeit durch $\frac{7}{3}$, und offenbahr verhalten sich ihre Geschwindigkeiten wie diese Wege.

In dem besondern Exempel würde man freylich die Verhältniß der Geschwindigkeiten, um sie leichter zu übersehen, durch 12. 3 : 5. 7 ausdrucken, welches zeigte, daß sie beynahe gleich wären.

Wenn ein Bote, in einem Tage 3 Meilen ginge, ein andrer in einem Tage 4 Meilen: Also C = 3 : c = 4. Der erste sollte 17 Meilen, = E, der andre 23 = e zurücklegen; So verhielten sich die Zeiten, die sie dazu brauchten,

$$T : t = \frac{17}{3} : \frac{23}{4}$$

Ueber Grösse der Bewegung.

4. Wenn von zween Körpern, die gleichviel Materie haben, einer schneller bewegt wird, als der andre, so wird man dem ersten mehr Bewegung zuschreiben, in der Verhältniß, in welcher er mehr Geschwindigkeit hat.

Bey gleichviel Materie also verhält sich die Grösse der Bewegung wie die Geschwindigkeit.

Hat ein Körper mehr Materie als der andere, und beyde gehen gleich geschwinde, so

wird

wird der mehr Bewegung haben, in welchem mehr Materie bewegt wird.

Oder: bey gleicher Geschwindigkeit verhält sich die Grösse der Bewegung wie die Menge der Materie.

Es verhalten sich also bey zween Körpern, die Mengen der Materien = P : p; die Geschwindigkeiten = C : c; die Bewegungen = M : m

Man stelle sich einen Körper vor, der mit dem ersten, gleichviel Materie = P, mit dem andern gleichviel Geschwindigkeit = c habe, seine Bewegung heisse = v; So ist

C : c = M : v

P : p = v : m

C. P : c.p = M : m

So verhalten sich auch Grössen der Bewegung, wie Producte aus den Geschwindigkeiten in die Massen.

5. Bey Körpern, die durch Stossen in einander wirken, betrachtet man keine andere Materie, als die schwer ist, unentschieden, ob der Körper etwa auch Theilchen enthalte, die, wenn man ihn wiegt, sein Gewicht nicht vergrössern.

Daher setzt man die Massen zweener Körper in der Verhältniß ihrer Gewichte. Wenn eine Kugel 3 Pf., eine andere 4 Pf. wiegt, so setzt man für sie M = 3; m = 4.

Dieß ist deßwegen zu erläutern nöthig, Körper, die stossen, oft nicht als Gewicht nur als Mengen von Materie, als Massen wir-

wirken, und so das Verfahren, ihre Massen durch ihre Gewichte anzugeben, eine falsche Vorstellung veranlassen könnte.

Man setze, jede der erwähnten Kugeln, laufe auf einer horizontalen Ebene, ihre Geschwindigkeiten verhalten sich wie 7:8; also C = 7; c = 8.

Wenn jede an eine Hinderniß, die ihr im Wege steht, anstösst, so schätzt man die Stärke des Stosses, den sie ausübt, aus der Grösse ihrer Bewegung. Die Stösse verhalten sich also = 3. 7 : 4. 8.

Da auf der horizontalen Ebene die Kugeln so getragen werden, daß keine auf den Gegenstand, an den sie stösst, durch ihr Gewicht wirkt, weil die Ebene solches trägt, sondern nur als Masse, nach der Menge ihrer Theile, keine die Hinderniß, die man ihr entgegensetzt, drucken würde, wenn man sie blos in Berührung daran legte, ohne sie dagegen laufen zu lassen; So geben die Zahlen 3 : 4 jezo nur die Verhältniß der Massen an, die mit der Gewichte ihrer einerley ist, obgleich die Kugeln jezo blos als Massen wirken, nicht als Gewichte.

6. Ist C. P = c. p so ist M = m; Alsdann aber C : c = p : P oder, bey gleichen Bewegungen, verhalten sich die Geschwindigkeiten verkehrt wie die Massen.

7. Sind also ein paar Körper in die Umstände gesetzt, daß die Bewegung, die der eine machen will, der entgegengesetzt ist, welche der

andere zu machen strebt, und daß doch beyde Bewegungen gleich sind, so halten sie einander auf, wofern nicht etwas auser dem bisher Betrachteten vorhanden ist, welches Bewegungen bey ihnen verursachen kann.

8. Auf diese Betrachtung hat Cartesius das Gesetz des Gleichgewichts beym Hebel gegründet (Stat. 54). Stossen zweene Körper mit Geschwindigkeiten, die sich verkehrt wie ihre Massen verhalten, gerade an einander, so hält ebenfalls jeder den andern auf, wenn nicht in einem oder in beyden Federkraft vorhanden ist, die so wirkt, als wenn etwas zwischen ihnen zusammengepresst wäre, das sich, nachdem die Zusammenpressung durch den Stoß vollendet ist, wiederum ausbreitete, und so Bewegung wiederherstellte.

Fälle, in denen Proportionen, wie die angeführten, statt finden.

9. Wirkungen, verhalten sich bey gleichen Zeiten, wie die Ursachen, bey gleichen Ursachen, wie die Zeiten: darauf gründet sich die Proportion, welche diese Dinge enthält.

Auch so: Räume, bey gleichen Zeiten, wie die Geschwindigkeiten, bey gleichen Geschwindigkeiten wie die Zeiten.

Grössen der Bewegung, bey gleichen Massen, wie die Geschwindigkeiten, bey gleichen Geschwindigkeiten wie die Massen.

Allgemein also: Ein Ding; K, wird durch ein paar andere Dinge G, H; bestimmt.

Ein Ding; k, durch ein paar andere g, h;

Grosse und kleine Buchstaben, von einer Bedeutung gehören gleichartigen Dingen zu, z. E. K, k, Grössen der Bewegung.

Nun setze man, ein Paar Dinge von der Art wie K und k, verhalten sich wie G : g; wenn h = H

und wie H : h wenn g = G

So ist allemahl

G . H : g . h = K : k

Ob diese Voraussetzung statt findet, und ob sich also durch diese Proportion aus fünf Dingen das sechste finden lässt, das entscheidet die Rechenkunst nicht, es muß aus Käuntniß der Sachen, die man berechnet, beurtheilt werden.

10. Wenn z. E. eine gewisse Last von einem Fuhrmanne, einen gewissen Weg, für einen gewissen Preiß geführt wird, und die Beschaffenheit des Weges, oder andere Umstände, keinen Unterschied machen, so darf man wohl annehmen; die Preise verhalten sich, bey gleicher Last, wie die Länge des Weges, und bey gleichem Wege, wie die Last. Also wenn Last und Weg beyde ungleich sind, wie die Producte aus jeder Last in ihren Weg.

11. Man pflegt zuweilen den Satz: Ein Paar Grössen verhalten sich, wie ein Paar Producte, so auszudrucken: Eine von ihnen sey dem ihr zugehörigen Producte gleich; e = c. f; Raum, sey Product aus Zeit in Geschwin-

schwindigkeit. Wer so redet, setzt natürlich zum voraus: Man habe einen Raum E = C. T durch ein Product aus seiner Zeit in seine Geschwindigkeit angegeben, und vergleiche damit den andern.

Gebrauch von Gleichungen statt Proportionen.

12. Die hie zum Grunde liegende Proportion, giebt jedes der sechs Dinge, die in ihr vorkommen, aus den übrigen fünfen, man müsste sie aber jedesmahl so ordnen, daß das Gesuchte zuletzt zu stehen käme.

13. So könnte man die Frage, die im Exempel des V. Cap. 53. §. beantwortet ist, so abfassen: 13000 Thl. geben in 9 Jahren 5571¾ Thl. Interesse; Wie groß ist das Capital, das in 12 Jahren 4000 giebt? Da suchte man C aus den übrigen; und könnte die Proportion brauchen, die hie (2) die erste ist, nur rückwärts gelesen; nähmlich

$$\frac{5571\frac{3}{4}}{9} : \frac{4000}{12} = 13000; \text{ C}$$

14. Diese Bemühung vermeidet man völlig, wenn man aus der Proportion, die Gleichung C. T. e = c. t. E macht. In derselben setze man nur die fünf gegebenen Zahlen statt der Buchstaben, durch die sie angedeutet werden: Noch bleibt ein Buchstabe, den man also, sogleich aus den gegebenen Zahlen berechnet.

15. Er-

15. Exempel. Eine Festung, in der 1000 Soldaten sind, ist für sie mit 200 Fässern Mehl auf 6 Monate versorgt. Es werden noch 80 Fässer geschickt, und soll so viel Besatzung eingenommen werden als mit dem Vorrathe 7 Monate auskommen kann.

Das giebt

C	c	E	e	T	t
1000	unbek.	200	280	6	7

Also 1000. 6. 280 = c. 7. 200

Folglich c = 5. 6. 40 = 1200

16. Ex. 40 Centner werden für 105 Thl. 21 Meilen weit geführt, wie weit 20 Centner für 155 Thl. Also nach (10)

C	c	T	t	E	e
40	20	21	unbek.	105	155

40. 21. 155 = 20. t. 105

wo 105 = 21. 5; also

2. 31 = t

17. Manchmahl sind die Grössen so ausgedruckt, daß eine Entwickelung nöthig ist, deutlich zu sehen, was gesucht wird.

Z. E. an einem Baue, müssen 20 Arbeiter, täglich 6 Stunden, 15 Wochen arbeiten; Wie viel Wochen brauchten zu eben desselben Vollendung 36 Arbeiter, die täglich 8 Stunden arbeiten?

Begreiflich wird hie die Gleichung C. T = c. t gebraucht.

Nun aber ist der Ausdruck der Zeit aus einander zu setzen. Die Woche wird ohne Zweifel zu 6 Tagen gerechnet.

Also

Also täglich 6 Stunden, 15 Wochen lang, giebt T = 6. 6. 15 Stunden.

Täglich 8 Stunden, eine unbekannte Zahl von x Wochen lang, giebt t = 6. 8. x Stunden. Aber C = 20; c = 36; Also

$$20.\ 6.\ 6.\ 15 = 36.\ 6.\ 8.\ x$$

$$\frac{5.\ c}{4} = x = 6\tfrac{1}{4}\ \text{Woche}.$$

Noch müsste man aber wohl bestimmen, was hie $\frac{1}{4}$ Woche bedeutet?

Für jeden der 36 Arbeiter hat jede Woche 48 Arbeitsstunden, also $\frac{1}{4}$ Woche = 12 Stunden = $1\frac{1}{2}$ Tag.

18. Die Exempel 15; 16; 17; sind aus: Haupt; Anleitung zu den arithmetischen Wissenschaften Leipz. 1740; welches Buch besonders wegen Exempel, aus Geschichte, gemeinem Leben, allerley Wisserschaften, zu empfehlen ist. Sie stehen da 189; 190; §. unter den Nahmen: regula detri directo reciproca und reciproco reciproca. Diese Nahmen zeigen schon, daß für sie eigne Vorschriften gegeben werden, die bey (14) ganz entbehrlich sind.

19. Man seße, ein Himten Rocken koste H; gebe D Pfund Brot.

20. Ein Mensch verzehre täglich M Pfund Brot, also $\frac{M}{D}$ eines Himtens, das beträgt $\frac{M.\ H}{D}$ an Gelde; nur den Kaufpreiß des

Him-

Himtens in Betrachtung gezogen, was Mahlen und Backen kostet, müsste besonders berechnet werden.

21. So verzehren C Menschen, täglich $\frac{M.H.C}{D}$ an Gelde.

22. Und wenn die kleinen Buchstaben ähnliche Grössen bedeuten, aber D einerley bleibt, c Menschen, deren jeder täglich m Pfund bekömmt, wenn der Himten h kostet, täglich $\frac{m.h.c}{D}$ an Gelde.

23. Begreiflich kann man hie, aus Vergleichungen zwischen den gleichartigen Grössen, auch zwischen dem täglichen Aufwande 21; 22; unbekannte Grössen bestimmen.

24. In Schmids Rechenkunst I. Th. 9. Cap. 42. Exempel 203 S. wird folgendes gefragt.

I) Ein Fabricant hat 3751 Arbeiter.

II) Braucht jährlich 597 Thl. 5 Gr. 9 Pf. Cassengeld für Brot, wenn er jedem täglich $\frac{1}{2}$ Pf. Brot giebt, und der Himten Rocken 27 Gr. 4 Pf. gilt.

III) Die Casse des Fabricanten will, daß er nur $\frac{3}{4}$ des Geldes an Golde an Brot verwenden dürfe.

IV) Er schafft daher die Hälfte der Arbeiter ab.

V) Der Kornpreis ist um $\frac{1}{4}$ gestiegen.

VI)

VI) Wie viel Pfund Brot kann er bey solchen Umständen täglich einem geben?

24. Diese Frage ist, wie von den Rechenmeistern mehrmahl zu geschehen pflegt, durch überflüssige Umstände verwickelter gemacht.

Die Geldsumme in II erregt Furcht vor einer weitläuftigen Rechnung, und ist noch dazu in der Zahl der Pfennige wahrscheinlich unrichtig angegeben, weil man bey Mariengroschen nicht 9 ₰. anzusetzen pflegt.

Die eigentliche Grösse dieser Summe hat aber in die Rechnung gar keinen Einfluß, es kömmt nur auf ihre Verhältniß zu dem verminderten Aufwande in (III) an.

Statt beyder Grössen des jährlichen Aufwandes, kann man die täglichen nehmen, weil die zweyte Menge von Leuten in einem Jahre eben so viel Tage isst, als die erste.

Die eigentliche Zahl der ersten Menge von Leuten kömmt auch nicht in Betrachtung, weil genug ist, daß die andre halb so groß seyn soll.

25. Diese Ueberflüssigkeiten abgesondert, wird sich die Frage, auf die nur gefundene Formel folgendergestalt bringen lassen.

Die Buchstaben (21) gehören zu I; II; die (22) zu den eingeschränkten Umständen des Fabricanten.

Also m. h. c $= \frac{3}{4} \cdot \frac{14}{15}$. M. H. C

wegen III; wäre der neue tägliche Aufwand $\frac{3}{4}$ des vorigen, wenn beyde nach Cassengeld gerechnet

net würden, da aber der letzte nach Golde gerechnet wird, beträgt er nur $\frac{14}{15}$ von diesen $\frac{3}{4}$.

26. Nun $M = \frac{1}{2}$ (II); $c = \frac{1}{2} C$ (IV); $h = \frac{5}{4} H$ (V). Also m. $\frac{5}{4}$. H. $\frac{1}{2}$. $C = \frac{3}{4}$. $\frac{14}{15}$. $\frac{1}{2}$. H. C. giebt $m = \frac{3}{5}$. $\frac{14}{15} = \frac{14}{25}$, wie Schm. auch durch die Kettenregel findet.

27. Man nehme in (23) III; V; an, also in der Gleichung (25) $h = \frac{5}{4} H$, daß sie m. $c = \frac{14}{25}$. M. C wird. Nun setze man, der Fabricant vermindert die Zahl seiner Arbeiter, giebt aber jedem, den er behält, so viel Brot, als vorhin, also $m = M$, so ist die Zahl, die er behalten kann, $c = \frac{14}{25}$. $C = 2100 + \frac{14}{25}$ (34; I).

28. Ein Fleischer verdingt 20 Ochsen 12 Monate lang zu ernähren.

Nachdem so viel Ochsen 2 Monate gezehrt haben, schickt er noch 5 dazu.

Nachdem diese 25 zusammen 6, 6 Monate gezehrt haben, schickt er noch 10 dazu.

Wie lange müssen noch diese 35 Ochsen zusammen ernährt werden, damit endlich so viel aufgezehrt ist, als für 20 Ochsen in 12 Monaten zulänglich gewesen wäre?

Dieses, was für 20 Ochsen in 12 Monaten gehört, ist als eine Wirkung anzusehen, deren Ursache = 20; Zeit = 12; Also ist es 20. 12

Man setze, vom ersten Anfange der Fütterung, bis zum Ende verstreichen q Monate.

Die ersten 20, werden völlig so lang unterhalten, was sie verzehren, ist = 20. q

Die

Die zweyten 5 werden $q-2$ Monate unterhalten, verzehren $5.(q-2)$

Die letzten 10 werden $q-8,6$ Monate ernährt, verzehren $10.(q-8,6)$

Was also die Ochsen verzehren, ist

$$20.q+5.(q-2)+10.(q-8,6)=20.12$$

also

$$\begin{array}{r} 20q-10 \\ +\ 5q-86 = 20.12 \\ +10q \end{array}$$

Und

$$35q = 240+96 = 336.$$

Folglich

$$q = \frac{336}{35} = 9\tfrac{3}{5}$$

Daher werden die letzten 10 Ochsen, oder, welches eben die Zeit ist, alle 35 zusammen, 1 Monat unterhalten.

Die Frage steht in Wingates Arithmetik, by Kersey; Lond. 1678. Appendix Ch. 10. quest. 30.

29. Allgemein lässt sich die Frage so abfassen. Drey Ursachen, K, L, M, wirken, während der Zeiten q, $q-a$; $q-b$; und thun zusammen die Wirkung, welche K allein in der Zeit r thäte. So ist.

$$K.q+L.(q-a)+M.(q-b)=K.r$$

30. Wenn nun alles gegeben ist bis auf q; so findet sich

$$(K + L + M).\ q = K.\ r + L.\ a + M.\ b$$

$$\text{und } q = \frac{K.\ r + L.\ a + M.\ b}{K + L + M}$$

31. Exempel. 6 Arbeiter = K würden eine Arbeit in 50 Tagen = r fertig machen. Nachdem sie 13 Tage = a gearbeitet haben, kommen noch 8 Arbeiter = L zu ihnen; Diese 14 Arbeiter, arbeiten mit einander 5 Tage; Dann kommen noch 9 = M zu ihnen, und alle 23 arbeiten nun noch mit einander $q - 13 - 5 = q - 18$ Tage; daß $b = 18$. Dann sind sie mit der Arbeit fertig, zu welcher die ersten 6 allein; 50 Tage gebraucht hätten. So ist

$$q = \frac{6.\ 50 + 8.\ 13 + 9.\ 18}{23} = 24 + \tfrac{14}{23}$$

32. In der Gleichung (30) kann man von den sieben Grössen sechs, welche man will, als gegeben annehmen und die siebente finden; also mehrerley Fragen beantworten. So ist

$$M = \frac{K.\ (r - q) - L.\ (q - a)}{q - b}$$

33. Ex. 6 Leute = K würden eine Arbeit in 50 Tagen = r fertig machen. Man verlangt diese Arbeit in 30 Tagen = q fertig.

Nachdem die 6 Leute 8 Tage = a allein gearbeitet haben, werden ihnen noch 4 = L zugesellt, und nun arbeiten die 10 mit einander; 3 Tage; Wie viel Leute = M muß man dann noch beyfügen, damit die Arbeit am Ende des 30 Tages fertig ist?

Es

Es ist also $q - a = 30 - 8 = 22$; und $b = 8 + 3$; also $q - b = 19$; und $M = \frac{6.20 - 4.22}{19} = 1 + \frac{13}{19}$, daß man also 2 Leute beyfügen müsste, weil man begreiflich statt des Bruches eins mehr nimmt.

34. Hätten die ersten 6 Leute 8 Tage allein gearbeitet, und dann liesse man 7 Leute noch mit ihnen 3 Tage arbeiten, so blieben alle gegebene Grössen wie vorhin, nur $L = 7$; da käme $M = \frac{6.20 - 7.22}{19}$ verneint $= -\frac{34}{19}$.

Das erklärt sich so: Die Leute K und L machen in der Zeit, die ihnen gegeben wird, mehr Arbeit, als verlangt wird. Es ward so viel verlangt, als 6 in 50 Tagen machen können, also 300 Tagewerke eines Arbeiters. Nun sind die Tagewerke folgende:

der 6 in 30 Tagen $= 180$
7 22 $= 154$
334

Wenn also die gesuchten M bewerkstelligen sollen, daß 300 Tagewerke herauskommen, so müssen sie 34 Tagewerke zerstören. Die Zahl $-\frac{34}{19}$ zeigt also an, daß so viel Arbeiter das Gegentheil von dem thun sollen, was die andern thaten, und da sie 19 Tage Zeit haben, so beträgt diese ihre Verrichtung -34, wie gehörig.

Gesellschaftsregel mit Betrachtung der Zeit.

35. Wenn der Gewinnst einer Gesellschaft unter Mitglieder zu theilen ist, die alle gleich lang in ihr gewesen sind, so richtet sich die Theilung offenbahr nach dem, was jedes beygetragen hat. Das ist die gewöhnliche Gesellschaftsrechnung.

Der Beytrag wird ohnstreitig als wirkende Ursache des Gewinnstes angesehn, und bey einerley Zeit verhält sich die Wirkung wie die Ursache.

Hätte aber ein Beytrag der Gesellschaft mehr Zeit gedient als der andre, so verhielten sich beyder Wirkungen, die Gewinnste, wie die Producte aus den Ursachen in die Zeiten.

36. Man setze also, ein Kaufmann handelt mit einem Capitale = K, die Zeit a über allein.

Nach Ablauf dieser Zeit, tritt einer mit ihm in Gesellschaft, der das Capital L beyträgt. Mit dem Capitale, das nun K + L ist, wird die Zeit b — a über gehandelt. Diese Zeit, wäre b, vom Anfange der an gerechnet, da der erste Kaufmann allein zu handeln anfing.

Am Ende dieser Zeit b, von erwähntem Anfange an gerechnet, kömmt der dritte mit dem Capitale M dazu. Nun ist das Capital K + L + M in der Handlung, bis vom Anfange der Handlung des ersten Kaufmanns, die Zeit q verflossen ist.

Am

Am Ende dieser Zeit, beträgt der Gewinnst G. Der soll getheilt werden. Der erste bekomme x; der zweyte y; der dritte z.

Des ersten Capital ist die Zeit q über in der Handlung gewesen, des zweyten q − a; des dritten q − b. Also (35) x : y = K. q : L. (q − a) und (Ar. V. 33) x + y : y = K. q + L. (q − a) : L. (q − a)

Ferner

y : z = L. (q − a) : M. (q − b) und (Ar. V. 51) x + y : z = K. q + L. (q − a) : M. (q − b) x + y + z : z = K. q + L. (q − a) + M. (q − b) : M. (q − b)

Man setze

K. q + L. (q − a) + M. (q − b) = S

Auch ist x + y − z = G; Also

$$z = \frac{M.\,(q-b).\,G}{S}$$

Daher $\frac{z.\,L.\,(q-a)}{M.\,(q-b)} = y = \frac{L.\,(q-a).\,G}{S}$

$$\frac{y.\,K.\,q}{L.\,(q-a)} = x = \frac{K.\,q.\,G}{S}$$

37. Man multiplicire jedes Capital mit der Zeit, da es in der Handlung gewesen ist;

Mit der Summe dieser Producte (= S) dividire man den ganzen Gewinnst (= G)

Den Quotienten multiplicire man mit dem Producte aus jedem Capitale in seine Zeit.

Das giebt den Gewinnst dieses Capitals.

Offenbahr ist die Regel allgemein, der Gesellschafter mögen mehr oder weniger als drey seyn.

Man theilt den ganzen Gewinnst, nach den Verhältnissen der Producte aus den Capitalen in die Zeiten, (Arithm. V. 42). So trägt Stevin die Regel vor. La Pratique d'Arithmetique seconde Partie . . Oeuvres de Stevin par Girard T. I. p. 183.

38. Es giebt mehr Fälle, wo sich eben das Verfahren anbringen lässt, ein Ganzes in seine Theile zu theilen, die in gegebenen zusammengesetzten Verhältnissen stehen. Folgendes ist aus Clausberg Rechenkunst III. Th. 926. §.

39. Einem Fuhrmanne werden 24 Centner Waaren übergeben, sie 60 Meilen weit zu führen, 4 Centner um $8\frac{1}{2}$ Thl.

Als er 15 Meilen gefahren, muß er um schlimmen Weges und Wetters willen 4 Centner ablegen, fährt mit den übrigen 20 Centnern 8 Meilen.

Am Ende dieser 8 Meilen, ladet er wiederum zu den behaltenen 20; noch 5 auf, und führt diese 5 die noch übrigen 37 Meilen. Wie viel bekömmt er Fuhrlohn? Der Grund der Rechnung ist in (10) angegeben.

Der Fuhrmann führt		bekömmt dafür
20 Centner	60 Meilen	x
4	15	y
5	37	z

4.

4. 60 : 20. 60 = 8,5 Thl. : x
4. 60 : 4. 15 = 8,5 : y
4. 60 : 5. 37 = 8,5 : z

Also $x = 8{,}5 \cdot 5 = 42{,}5$
$y = 8{,}5 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}125$
$z = \frac{8{,}5 \cdot 37}{4 \cdot 12} = 6 + \frac{26{,}5}{48}$

Der Bruch bey z ist $13\frac{1}{4}$ gr. = 19 Mgr. 7 ₰. wie ihn auch Clausb. angiebt, und so druckt man auch die übrigen Brüche nach der gewöhnlichen Eintheilung des Thalers aus, findet so das ganze Fuhrlohn, und was dazu die Eigner der 20; der 4; der 5 Centner beytragen.

40. Wenn die drey Proportionen hingesetzt sind, sieht man leicht, wie sich die Rechnung bey jeder durch Aufheben abkürzt. Daher erinnert v. Cl. Man brauche die Regel de Quinque nur für den letzten Werth, für die übrigen die blosse Regel Detri, weil für den ersten 60; für den zweyten 4 aus den ersten Verhältnissen weggeht. Das findet aber nur bey den Zahlen dieses Exempels statt, bey andern ginge es nicht so an. Der Ansatz muß also allemahl bey jedem Exempel nach der Regel de Quinque geschehen, und ob die sich in eine Regel de Tri verwandelt, ist zufällig. Der Tadel, den v. Cl. gegen ein andres Rechenbuch äußert, daß da die Regel de Quinque dreymahl ohne Noth ist angebracht worden, heißt also nur: daß etwa da nicht alle Vortheile sind gebraucht

worden, die sich bey dem Exempel anbringen liessen.

41. Die Bemerkung, daß bey der Gesellschaftsrechnung nur ein Ganzes nach gegebenen Verhältnissen soll getheilt werden, zeigt allemahl, wie die Rechnung zu führen ist, wenn auch die Verhältnisse etwa auf eine ungewöhnliche Art ausgedruckt sind.

42. Eine bekannte Art solcher Ausdrückungen ist: Wenn die Theile durch Brüche angegeben sind, die zusammen mehr als das Ganze zu betragen scheinen.

43. Z. E. Es sollte von einer Sache einer die Hälfte bekommen, der andre zwey Drittheile. Ist die Verordnung sonst gültig; Wenn es z. E. ein Testament wäre, — diese Frage gehört nicht für den Rechner, — so kann sie nur dergestalt erfüllt werden, daß beyde Theile $= \frac{3}{6} : \frac{4}{6} = 3 : 4$; Man dividirt also das Ganze durch 7; und giebt dem ersten $\frac{3}{7}$; dem andern $\frac{4}{7}$.

44. Mehr dergleichen Exempel, die man in Rechenbüchern, auch beym von Clausberg 1307. §. findet, beyzubringen, ist wohl der Mühe nicht werth. Ich seße nur noch eins her, weil es einige Vorbereitung erfodert. Es findet sich in den Rheinischen Beyträgen, Brachmond 1778.

45. Von 29 Fl; soll A; $\frac{1}{2}$ bekommen, B; $\frac{1}{3}$; und wenn B; $\frac{2}{7}$ bekömmt, soll C; $\frac{5}{7}$ haben.

Das

Das heisst, die Theile sollen sich so verhalten
Theil von A: Theile von $B = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2$
Theil von B: Theile von $C = \frac{2}{5} : \frac{5}{7} = 14 : 25$

Man drucke $14 : 25$ so aus, daß das vorhergehende Glied 2 ist,

$$14 : 25 = 2 : \frac{25}{7}$$

Also sind die Verhältnisse, nach denen das Ganze soll getheilt werden.

$$A : B : C = 3 : 2 : \frac{25}{7} = 21 : 14 : 25$$

Nun ist $21 + 14 + 25 = 60$

Also bekömmt

$$A; \frac{29.21}{60} = \frac{29.7}{20} = 1,45.7 = 10,15 = 10\frac{3}{20}$$

$$B; \frac{29.14}{60} = \frac{29.7}{30} = \frac{203}{30} = 6\frac{23}{30}$$

$$C; \frac{29.25}{60} = \frac{29.5}{12} = \frac{145}{12} = 12\frac{1}{12}$$

Wie a. a. O. angegeben wird.

III. Abschnitt.

Ueber die Kettenregel.

Arithm. V. Cap. 56. §.

1. Bey den gewöhnlichen Anwendungen der Kettenregel, findet man die Verhältniß zwischen ein Paar Grössen aus der Verhältniß, welche die erste, zu einer andern, diese andere zu einer dritten, diese dritte zu einer vierten hat, u. s. w. bis man endlich auf eine Verhältniß zwischen

einer Grösse, und der letzten im vorerwähnten Paare kömmt.

Man muß da die Grössen so ordnen, daß immer eine in der obern Reihe folgendes Glied, und in der nächsten darunter vorhergehendes ist, damit man so was, wie Ar. V. Cap. 51; wenigstens zum Theil anbringen kann.

2. Exempel. Man fragt, was für eine Verhältniß zwischen der Mark fein Gold, und der Mark fein Silber, bey dem Leipziger Fusse (jezigem Reichsfusse,) ist angenommen worden. Die Angaben dazu sind folgende:

I) Die Mark hält 288 Grän.

II) In der Mark Ducatengold sollen 23 Karat 8 Grän = 284 Grän fein Gold seyn, die übrigen 4 Grän Zusatz.

III) Aus einer Mark Ducatengold werden 67 Ducaten geprägt.

IV) Ein Ducaten gilt 4 Gulden.

V) In 18 Gulden ist eine Mark fein Silber.

Das giebt also folgende Verhältnisse von Werthen:

Mk fein G: Mk Ducateng	=	288 :	284
Mk DucG: 1 Ducaten	=	67 :	1
1 Ducaten : 1 Gulden	=	4 :	1
1 Gulden : Mk fein Silber	=	1 :	18

Mk fein G : Mk fein S = 288. 67. 4 : 284. 18
= 288. 67 : 71. 18
= 16. 67 : 71

Weil $16.67 = 1072$ und $\frac{1072}{71} = 15 + \frac{7}{71}$

So

So verhalten sich die Werthe. Das Gold : Silber $= 15 + \frac{7}{71} : 1$ beynahe $= 15,1 : 1$

3. Das Exempel steht in: Graumanns gesammlete Briefe, von dem Gelde, von dem Wechsel und dessen Cours . . . . Zum Druck befördert von J. P. S. Berl. 1762; 39 Seite. Man wird dorten die beyden Columnen Zahlen finden, durch die ich hie die Verhältnisse ausgedruckt habe, nur die Zahlen jeder Columne nicht genau in eben der Ordnung; Warum aber die Zahlen so unter einander stehen, wird man dort nicht so offenbahr sehen, weil die Rechner nach der Kettenregel nicht gewohnt sind, die Verhältnisse durch die Nahmen der Grössen so deutlich anzugeben.

4. Wenn man sich nicht damit aufhalten wollte, die Verhältnisse alle so deutlich auszudrucken und unter einander zu schreiben, könnte man wohl auch so verfahren:

67 Ducaten halten $\frac{284}{288}$ Mark fein Gold. Folglich gilt die Mark fein Gold; $\frac{288}{284}$. 67 Ducaten $= \frac{288}{284}$. 67. 4 Gulden $= \frac{288 \cdot 67}{284} \cdot \frac{4}{16}$ Mk fein Silber.

5. Die Kettenregel, wie in (2) angebracht, stellt deutlich vor Augen, wie man die Verhältniß von ein Paar Grössen, die nicht unmittelbahr gegeben ist, durch Zwischenverhältnisse findet. Weil sie auf diese Art dem Verstande

sehr

sehr einleuchtend ist, verdient sie empfohlen zu werden, wird auch in der Geometrie und übrigen Mathematik häufig gebraucht. Es ist nähmlich eigentlich Zusammensetzung von Verhältnissen. In Hugens Dioptrik, sind eine Menge Beweise in dieser Gestalt vorgetragen.

6. Es ist auch keine Schwierigkeit, sie gehörig anzubringen, wenn man die Verhältnisse, die bey ihr gebraucht werden deutlich kennt, und nur daran denket, daß die genannten Grössen nach der (1) gegebenen Vorschrift müssen geordnet werden, damit aus den beyden Columnen, in denen denen die Nahmen der Grössen stehen, alle Zwischengrössen weggehn, und nur die äusern, deren Verhältniß man wissen will, bleiben.

7. In den Columnen, welche die Zahlen enthalten, dadurch die Verhältnisse ausgedruckt werden, wird auch häufig 1 vorkommen, und Zahlen der einen Columne werden oft gemeinschaftliche Factoren mit Zahlen der andern haben. Ich rathe, die beyden Producte, welche die Zahlen jeder Columne geben, durch ihre Factoren auszudrucken, und dann zu sehen, womit sich beyde Producte dividiren lassen. Will man etwa in den Columnen selbst, Zahlen, die in einer und in der andern gemeinschaftliche Factoren haben, damit dividiren, so möchte man sich leichter irren. Eine Verhältniß sogleich in kleinern Zahlen auszudrucken, könnte dienlich seyn.

8. Wer den Kaufleuten zuerst ein Verfahren bekannt gemacht hat, das die Mathematiker

ker vorlängst brauchten, habe ich nicht so genau untersucht. Wenn ich mich recht erinnere, wird in dieser Bedeutung Graumann für den Erfinder der Kettenregel angegeben.

Europäischer Arbitrage Tractat, oder: Neublühender Kaufmannswechsel . . . durch J. P. Graumann. Hamb. u. Leipz. 1731; 4. enthält die Nachrichten, von Münzen, Maassen u. s. w. die beym Handel bekannt seyn müssen, und zeigt, wie diesem gemäß Kaufmannsrechnungen geführt werden, da, wie er sagt: Universalregeln weit leichter durch die Conjointe als de Tri Regul gefunden werden, dabey die Hauptsache nur ist, wie man die ungeheuren Zahlen, so in der Kettenrechnung zusammenkommen, in andere und kleinere verwandelt. . .

Ist doch wohl nichts weiter, als was in (7) erwähnt ist: Und die Kettenregel giebt das Gesuchte leichter, als man es durch wiederholte Regeln Detri fände. So könnte man statt der Regel de Quinque V. Cap. 53, wirklich v aus der ersten Proportion berechnen, und aus diesem berechneten Werthe, e in der zweyten finden. Die Regel de Quinque zieht zwo Regeln Detri in eine zusammen, und erspart eine Zwischenrechnung. Es zeigt nicht viel Scharfsinnigkeit an, wenn die Rechenmeister, daß das mit mehr Proportionen anginge, nicht eher bemerkt haben, bis Graumann es ihnen entdeckte. Denn a. a. O. im Vorberichte sagt er ausdrücklich: "Diese Rechnungsmethode sey in so

weit

weit neu und er der Erfinder davon, weil dieselbe zu Hamburg nie docirt worden, und noch viel weniger ein Autor von der Invention Meldung gethan, wie man bey dergleichen Wechsel- und Geldarbitragen zwo Wahlen, so täglich auf der Börse vorfallen, in einen Satz stellen könnte. . .“ Er nennt sie auch la Règle conjointe oder die Ketten-Rechnung, und erinnert, ihr Grund sey die Addirung vieler Rationen, nicht Proportionen, wie ein Mitglied der Hamb. löbl. Kunstrechnersocietät zu sagen beliebt hat.... Bey ältern Geometern, heisst proportio, was wir ratio nennen, und unsre Proportion; Proportionalitas. Clauius ad Eucl. El. V. def. 4. Ob aber das Mitglied dieses gewusst hat, kann ich nicht sagen.

9. Wie man die Zahlen beym Gebrauche der Ketteuregel stellen soll, ist als eine grosse Schwierigkeit angesehn worden, zu deren Hebung sehr viel Vorschriften sind angegeben worden. Ein berühmtes Buch hierüber, war zu seiner Zeit: Allgemeine Regel der Rechenkunst oder: Neueste Art, alle Aufgaben, in welchen etwas eine Verhältniß zu andern Dingen hat, kurz und leicht aufzulösen, in Holl. Sprache von K. F. de Rees, verfertigt, und nunmehro übersetzt von einem Liebhaber Mathematischer Künste (Ludwig Martin Kahle, damahls Prof. zu Göttingen). Die 3. Aufl. Gött. 1751.

Was dieser Schriftsteller für Einsichten in die Gründe der Regel gehabt habe, ist sogleich

aus

aus der Vorbereitung zu sehen, wo er denen, die weder in der Rechenkunst noch Feldmeßkunst geübt sind, einen klaren Begriff geben will: was eine Verhältniß sey, ohne sich bey mathematischen Kleinigkeiten aufzuhalten. Dergleichen habe nun statt: Wenn eine Zahl aus der andern entsteht, sich der einen Grösse nach der andern richtet, u. d. g. m. Nun: Potenz entsteht aus der Wurzel; die Höhe des Falles eines schweren Körpers richtet sich nach der Zeit; Freylich giebt es in diesen beyden Exempeln auch Verhältnisse, aber gewiß keine solche, wie Rees erklären wollte.

10. Solche ganz unbrauchbare Erläuterungen, was Verhältniß sey, findet man in mehrern Rechenbüchern, da doch die richtigen Erklärungen von Verhältniß und Proportion so leicht und deutlich sind.

Wer nun die Kettenregel von solchen Lehrern lernt, der soll Zahlen nach Verhältnissen und Proportionen stellen, und weiß nicht recht, was Verhältniß und Proportion ist. Begreiflich ist also das für ihn eine schwere Kunst, was sich dem mathematischen Rechner von sich selbst giebt, wenn er die genannten Grössen kennt, mit denen er rechnen soll. Von der Kettenregel, auf diese Art mit Vorschriften gelehrt, die weitläuftig und schwer scheinen, weil sie ohne Verstand der Verhältniß und Proportion abgefasst sind, gilt, was vorlängst Wolf; Ausz.

Nr. 91. von der verkehrten Regel Detri gesagt hat: Man hat sie nicht nöthig, wenn man die Zahlen dergestalt neben einander setzt, wie es die Proportion erfodert.

11. Mich. Lor. Willigs (er ist als Bürgermeister zu Göttingen gestorben) gründliche Vorstellung der Reesischen Regel; Bremen und Göttingen 1759; ist eigentlich ein gutes Rechenbuch, wegen seiner Deutlichkeit, und ausführlichen Anwendung auf allerley im gemeinen Leben vorkommende Rechnungen, brauchbar. Die Achtung, in der eine für den Mathematiker so elende Kunst, als die Reesische, muß gestanden haben, vielleicht bey Ignoranten noch steht, lässt sich daraus beurtheilen, daß sie auf dem Titel dieses Buchs, ohne Zweifel es verkäuflicher zu machen, erwähnt ward.

13. Die Rechenkunst, in zweenen Theilen von N. (Nicolaus) Schmid. Leipz. 1774; zeigt ausführlich den weitläuftigen Gebrauch der Kettenregel, aber nach vorausgegangenen gehörigen Erklärungen von Verhältniß und Proportion. Hr Schm. besitzt in der Mathematik überhaupt, gründliche Einsichten *). Mir haben sich freylich

*) Ich schrieb das noch bey seinem Leben, er ist den 6. Febr. 1785. morgens, nach einer anderthalbjährigen Auszehrung im 68. Jahre seines Alters, zu Hannover gestorben, wo er Vorsteher des Gold- und Silberarbeiter-Amts war, und dabey durch Verbreitung mathematischer

lich von mehrern seiner Exempel Auflösungen ohne die Kettenregel dargeboten, die mir einfacher und bequemer schienen: Indessen ist es gut, Anfängern, besonders der Jugend, eine Regel zu geben, nach der sich Alles behandeln lässt. Was sich etwa auch anders, und vielleicht bequemer behandeln lässt, das lernen sie bey mehr Fertigkeit selbst kennen, wenn ihnen nur die Gründe der allgemeinen Regel deutlich sind vorgetragen worden, und sie nachdenken wollen, wie sich nach eben den Gründen ein Verfahren brauchen lässt, das eine andere Gestalt hat.

14. Räphael Levi Rechnungsmethode, von Meyer Aaron herausgegeben, Hannover 1783; ent-

tischer Kenntnisse viel Nutzen stiftete. Auser der Rechenkunst, wird auch sein Buch: Von den Weltkörpern, sein Andenken erhalten, die zweyte verbesserte und mit Kupfern vermehrte Auflage Leipz. 1772. Seine Einsichten, besonders in Mathematik, Naturkunde, und Philosophie überhaupt, machten ihm destomehr Ehre, da er sie vorerwähntermaassen sich nicht erworben hatte, Unterhalt davon zu haben, ob er sich wohl nachdem aus Neigung mehr damit beschäfftigte, als mit seiner Profession. Ich kannt ihn noch von Leipzig her, wo er, nebst seinem Bruder, Hrn. Conr. Arnold Schmidt, jezigem Professor zu Braunschweig, unter meine vertrautesten Freunde gehörte. Beyde empfahlen sich auser den Eigenschaften des Geistes, durch vorzügliche Güte des Herzens.

enthält Vorschriften, wie die Glieder bey der Kettenregel zu stellen sind, die R. L. nur seinen vertrautesten Schülern mitgetheilt hatte, und M. Aa. zum gemeinen Besten bekannt macht. R. L. war in Hannover noch als ein Mann berühmt, dessen Geschicklichkeiten Leibniz gebraucht, zum Theil gebildet hatte. Diese Schrift, und andre, die ich bey den Logarithmen erwähnen werde, zeigen ihn als einen guten Rechner, und sein Büchervorrath, aus dem ich unterschiedliches bekommen habe, enthielt viel gute philosophische und mathematische Werke. Freylich sind mir wenigstens, keine gedruckten Arbeiten von ihm bekannt, zu denen es nöthig gewesen wäre, mit einem Erfinder der Rechnung des Unendlichen in Verbindung zu stehen. Er starb zu Hannover 1779 d. 17. May im 94. Jahre seines Alters, mit dem Nachruhme eines rechtschaffnen, uneigennützigen, Jedem, ohne Absicht auf Religion, gefälligen Mannes.

14. Die Rechnung in (2) gründet sich auf Verhältnisse, die als Erfahrungen müssen angenommen werden. Begreiflich gäben also andre Erfahrungen einen andern Erfolg. Dergleichen wäre nachstehender:

15. Graumann a. a. O. 40 S. setzt

Man nehme Ducaten für vollwichtig, deren 68 Stück auf die Mark gehn.

Man nehme einen solchen Ducaten für $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$ Thl. auch höher.

Die-

Diese meist aus Holland kommenden Ducaten halten die Mark 23 Karat 6 Grän = 282 Gr. fein.

Die Mark fein Silber koste nach dem Kaufpreisse 13 Thl.

Diesem gemäß berechnet man die Verhältniß zwischen Gold und Silber folgendergestalt:

Mk fein G : Mk Duc Gold	=	288 : 282
Mk Duc G : 1 Duc	=	68 : 1
1 Duc : 1 Thaler	=	11 : 4
Thaler : Mk fein Silb.	=	1 : 13

Mk f G : Mk f S = 144. 68. 11 : 141. 4. 13

Die Verhältniß ist 36. 68. 11 : 141. 13

$= 26928 : 1833 = 14 + \frac{423}{611} : 1 = 14{,}6906 : 1$

16. Gr. hat a. a. O. mehr solche Berechnungen angestellt, die immer die Verhältniß des Goldes zum Silber wie 14, und mehr als $\frac{1}{2}$ darüber : 1 geben.

17. Ich will als ein ander Beyspiel der Kettenregel folgende Frage beantworten:

Wie viel Gulden muß man aus der Mark fein Silber münzen, wenn nachstehendes angenommen wird?

Der Preiß 1 Mk fein Gold soll sich zum Preisse 1 Mk fein Silber verhalten $= 14 + \frac{1}{72} : 1$ $= 1019 : 72$

Auf die rauhe Mark gehn 35 Stück alte Louisd'or, jeder gilt 5 Thl. $= \frac{1}{2}^5$ Gulden, das Louisd'orgold ist zu 21 Karat 8 Grän = 260 Gr. fein.

Hie muß, in den Verhältnissen, welche die Nahmen der Grössen enthalten, der Gulden das vorhergehende Glied der obersten Reihe seyn, die Mark fein Silber, das folgende der untersten. Also:

Gulden :	Louisd'or	=	2 : 15
Louisd' :	Mk Louisd'or G	=	1 : 35
Mk LG :	Mk fein Gold	=	260 : 288
Mk f G :	Mk fein Silber	=	1019 : 72

Guld : Mk f S = 2. 260. 1019 : 15. 35. 288. 72

Die Verhältnisse sind eigentlich zwischen Preisen, nicht zwischen Gewichten. Sonst könnte man nicht von einer zur andern übergehn.

Die Verhältniß auf die kleinsten Zahlen gebracht ist = 26. 1019 : 105. 5184 = 1 : 20,545, wie ich durch die Logarithmen gefunden habe. Nähmlich

log (105. 5184) = 5,7358543
log (26. 1019) = 4,4231475
1,3127068

18. Die Feine des Louisd'orgoldes, habe ich von Graumann Br. 41 S. Er sagt, man habe es zu Braunschweig 21 Karat, 6; 7; 8 Grän fein befunden, obgleich sonst auch angegeben werde, daß man es zu Regenspurg 21 Kar. 10 Gr. fein gefunden.

19. Die Verhältniß des Goldes zum Silber nahm ich aus des Hrn. Geh. Justizr. Pütter Schrift: Ueber den Werth der heutigen sogenannten Conventionsmünze (Gött. 1784) 6.

Sei

Seite, in der Absicht, durch umständlichere Rechnung zu erläutern, was da von der Veranlassung gesagt wird, die Graumann gehabt, den Zwanzigguldenfuß vorzuschlagen.

21. Weil immer das folgende Glied einer Verhältniß, das vorhergehende der zunächst darunter befindlichen ist, so müssen alle Grössen gleichartig seyn, und man kann also in einen und denselben Ansatz zur Kettenregel, nicht zwo Proportionen bringen, da z. E. eine Verhältnisse vom Gewichte, die andre Verhältnisse von Geldsorten enthielte.

Imgleichen lässt sich die Kettenregel nicht anbringen, wo nebst den geometrischen Verhältnissen, auch abzuziehen oder zu addiren vorkömmt, z. E. wenn bey einem Handel Unkosten vorfallen, die nicht nach Verhältniß der Waaren gerechnet werden. Aus solchen Bemerkungen zeigt Schmidt Rechenk. I. Th. 195. §. in was für Fällen die Kettenregel nicht anzubringen ist.

21. Exempel dieser Art sind bey ihm folgende:

Wenn 1000 Pfund 60 Thl. gelten, und von 100 Pfunden die Fracht 18 Mgl. beträgt, wie hoch kömmt ein Pfund?

Eine Elle Leinewand wird für 10 Mgl. verkauft, und an 64 Ellen 4 Thl. verlohren; wie theuer war 1 Elle eingekauft?

Da läßt sich keine Verhältniß zwischen 100 Pf. und 18 Mgl. oder 64 Ellen und dem daran verlohrnen Gelde setzen.

22. Freylich würde einem mässigen Rechner wohl hie nicht einmahl einfallen, die Kettenregel anzubringen.

Begreiflich macht im ersten Exempel für 1000 Pf. die Fracht 5 Thl. Und so kosten sie mit der Fracht 65 Th. also 1 Pfund?

Im zweyten, löste man 64. 10 Mgl. Die verkauften 64 Ellen aber hatten 64. 10 + 4. 36 Mgl. gekostet; also eine $10 + \frac{4.36}{64}$ Mgl. $= 12 + \frac{1}{4}$

23. Wäre statt des zweyten Exempels die Frage: Eine Elle für 10 Mgl. verkauft, und an 64 Thl; 4 Thl. verlohren, so findet Schm. den Einkaufspreiß einer Elle nach der Kettenregel, weil 64 Thl. zu 4 Thl. eine Verhältniß haben.

Diese Frage könnte man, glaube ich, auf zweyerley Art verstehen:

Sind 64 Thl. gelöst worden, und daran 4 Thl. verlohren, daß also die verkauften Ellen 68 Thl. gekostet hätten? Oder:

Kosteten die verkauften Ellen 64 Thl. beym Einkaufe, man löste dafür nur 60 Thl, und verlohr also 4 Thl. am Einkaufspreisse?

Schm. sagt in seinem Ansatze zur Kettenregel, 60 gehaben, 64 ausgelegt, nimmt also die letzte Bedeutung an.

Da,

Da, dächte ich, wäre nun, ohne daß man an die Kettenregel denkt, folgendes klar:

Weil für eine Elle 10 Mgl. sind gelöst worden, und für alle verkauften 60. 36; so sind $\frac{60.36}{10}$ Ellen verkauft. Die kosteten aber 64. 36 Mgl. Also eine $\frac{64.36.10}{60.36} = \frac{64}{6}$ $= 10\frac{2}{3}$ Mgl.

VIII. Capitel.

Zusätze zum VI. Capitel.

I. Abschnitt zu VI. Cap. 10.

Summirung arithmetischer Reihen.

1. Da ich im VI. Cap. 10. §. geometrische Reihen erklärt habe, so ist leicht einzusehen, daß man sich eben so arithmetische vorstellen kann, wenn nach V. Cap. 7. Zahlen immer in einer arithmetischen Verhältniß, oder in gleichen Unterschieden fortgehen. Das einfachste Beyspiel ist die Reihe der ganzen natürlichen bejahten Zahlen, deren erstes Glied = 1 der Unterschied auch = 1 ist. Ein andres gäbe die Reihe der ganzen bejahten ungeraden Zah-

len, wo bey eben dem ersten Gliede der Unterschied = 2 ist.

Wolf (Auszug Trigonom. 13 §.) sagt, wenn eine Reihe Zahlen in geometrischer Proportion, eine andre in arithmetischer, fortgehn, seyen die letzten, Logarithmen der ersten. Mir schien es unnütz, Logarithmen so allgemein zu erklären, da man für sie nur die Reihe der natürlichen Zahlen nöthig hat. Das hat veranlasst, daß arithmetische Reihen, von mir gar nicht sind genannt worden. Da indessen ihre Kenntniß so leicht, und in unterschiednen Fällen nützlich ist, die in der gemeinen Rechenkunst vorkommen, bringe ich hie etwas von ihnen bey.

Von arithmetischen und geometrischen habe ich in der Analysis endlicher Gröſſen umständlicher gehandelt. Hie trage ich Lehren von ihnen einfacher und leichter vor, ohne der Gründlichkeit etwas zu vergeben. Dorten durfte ich geübtere Rechner voraussetzen, und hatte auch mehr Anwendungen von ihnen zu machen.

Daß nicht alle Reihen arithmetisch oder geometrisch sind, daß man z. E. Reihe der Quadrate, der Würfel u. s. w. sagt, daß also überall eine Reihe vorkömmt, wo Zahlen nach einem gewissen Gesetze fortgehn, erinnere ich nur, weil Anfänger manchmahl die Bedeutung eines Wortes sich zu sehr nach den ersten Exempeln, die ihnen davon bekannt werden, einschränken.

2. Die

2. Die Summe der ersten n — 1 natürlichen Zahlen zu finden, also
$1+2+3+4\ldots+n-4+n-3+n-2+n-1$

3. Die letzte und erste, geben zusammen $n-1+1=n$; Eben soviel die zweyte vom Ende und die zweyte vom Anfange $n-2+2$; die dritte vom Ende und die dritte vom Anfange $n-3+3$, u. s. w. jedes Paar Zahlen, davon die eine so weit vom Ende steht als die andre vom Anfange.

4. Wenn man nähmlich um eine Stelle weiter vom Ende zurückgeht, kömmt eine Zahl, die um 1 kleiner ist, und wenn man eine Stelle vom Anfange vorwärts geht, kömmt eine um 1 grössere; die also gewonnen hat, was jene verlohren hat, und so geben beyde zusammen immer einerley Summe.

5. Wenn man vom Anfange zählt, und 1 als die erste Zahl ansieht, so ist r, die rte; zählt man vom Ende und sieht da n — 1 als die erste Zahl an, so ist n — 2 die zweite und überhaupt n — r die rte; Also machen die rte vom Anfange und die rte vom Ende zusammen n.

6. Ist die Menge der Zahlen gerade, so ist n ungerade, und umgekehrt, gerade, wenn der Zahlen Menge ungerade ist.

7. Im ersten Falle giebt es $\frac{n-1}{2}$ Paare von Zahlen, da in jedem Paare die eine so weit vom Anfange steht, als die andre vom Ende.

Im andern Falle giebt es $\frac{n-2}{2}$ solche Paare, und eine Zahl steht in der Mitte, gleich weit vom Anfange und vom Ende; Für sie nähmlich ist $r = \frac{1}{2} n$ (5).

8. Im ersten Falle kömmt die Summe aller Zahlen heraus, wenn man die Grösse eines Paares mit der Zahl der Paare multiplicirt. Ist also $= n. \frac{n-1}{2}$

Im andern Falle erhält man diese Summe, wenn man die Grösse eines Paares mit der Zahl der Paare multiplicirt, und dazu die mittlere addirt, die nur einmahl vorhanden ist. Also $n. \frac{n-2}{2} + \frac{1}{2} n = n. \frac{n-2+1}{2} = \frac{n.(n-1)}{2}$ wie vorhin.

Exempel. Für die Summe aller ganzen Zahlen von 1 .... bis 1000000 ist $n - 1 = 1000000$ also die Summe $100000. 500000 = 500000\ 500000$

9. Es sey eine arithmetische Reihe

$a; \overset{a}{+d}; \overset{a}{+2d}; \overset{a}{+3d}; \ldots \overset{a}{+(n-2).d}; \overset{a}{+(n-1)d}$

Die Zahl der Glieder ist n; und das nte ist $a + (n-1).d = u$

10. Man sucht die Summe dieser Reihe $= s$

11.

11. So wie ich die Reihe in zwo Zeilen geschrieben habe, ist offenbar die Summe der obersten Zeile $= n.a$; und der untersten $= (1+2+3\ldots+n-1).d = \frac{n(n-1)}{2}.d$

(8) Also $s = n.\left(a+\frac{n-1}{2}.d\right)$

12. Aber $\frac{1}{2}u = \frac{1}{2}a+\frac{n-1}{2}.d$ (9)

13. Also $s = \frac{n.(a+u)}{2}$

14. In den beyden Gleichungen 8; 12; kommen fünf Grössen vor, a, u, n, d s, da man allemahl aus drey gegebenen die übrigen beyden finden kann. Hievon handle ich umständlicher in meiner Analysis endlicher Grössen; 80 . . . 93.

15. Man suche die Summe, der ersten m ungeraden Zahlen, 1 für die erste genommen; diese Reihe der ungeraden Zahlen ist also

1; 3; 5; 7; . . . . $2m-1$

So kömmt statt	a	u	n	d
hie	1	$2m-1$	m	2

und $s = \frac{2m.m}{2} = m^2$

Oder: die Summen, der ersten zwo, drey, vier, fünf u. s. f. ungeraden Zahlen, sind die Quadrate von 2, 3, 4, 5, u. s. w.

Dieses zeigt, wie man die Quadrate durch fortgesetzte Addition der ungeraden Zahlen findet.

Auch

Auch wie man aus einem Quadrat das folgende findet. Hat man m^2, so ist $(m+1)^2 = m^2+2m+1$, oder man addirt zum Quadrate die $(m+1)$te ungerade Zahl.

Wenn $m = 1000$, so ist das Quadrat davon 1000000 die Summe der ersten 1000 ungeraden Zahlen, davon die letzte $2000-1$ ist. Die nächstfolgende also ist $2000+1$ und von 1001 ist das Quadrat 1002001; dazu 2003 addirt, giebt 1004004 das Quadrat von 1002 u. s. w.

16. Man setze die Differenz dem ersten Gliede gleich; So ist in (9) $u = na$; und in (13) $s = \frac{n(n+1).a}{2}$

17. Hieraus berechnet man folgendes Exempel in Polaks Mathesis forensis (vierte Aufl. Leipz. 1770) I. Abth. 1. Cap. 14. §.

Man hat einen Brunnen bis auf eine gewisse Tiefe zu graben für eine gewisse Summe bedungen.

Der Brunnengräber muß mit seiner Arbeit aufhören, als er nur auf einen Theil dieser Tiefe gekommen ist, und das Uebrige muß von einem andern verfertigt werden.

Wie viel bekömmt der erste Brunnengräber? und wie viel der andere?

Polak nimmt an: Für den zweyten Fuß müsse noch einmahl so viel gegeben werden, als für den ersten, für den dritten dreymahl so viel,

u.

u. s. f. für jeden Fuß das, was der erste kostet, mehr, als für den nächst vorhergehenden.

Dieses gründet sich darauf, daß die Arbeit immer beschwerlicher wird, je weiter sie in die Tiefe kömmt.

Wird also für den ersten Fuß a gegeben, so ist s (16) was die Tiefe von n Fuß kostet.

Jezo nun soll aus dem geschloßnen Vergleiche bekannt seyn, wie groß s und n sind, wie viel nähmlich für n Fuß ist versprochen worden.

Also berechnet man $a = \frac{2.s}{n.(n+1)}$

Hat also der erste Brunnengräber m Fuß tief gegraben; So beträgt sein Verdienst

$$\frac{m.(m+1).a}{2}$$

Und das von s abgezogen, läßt, was der andre bekömmt.

Polak setzt, für 12 Fuß = n wären 13 Thl. = s versprochen worden, der erste hätte aber nur 8 Fuß = m verfertigt.

So ist $a = \frac{2.13.2.12}{12.13}$ gl. $= 4$ gl.

Der erste bekömmt $\frac{8.9.4}{2}$ gl. $= 4.9.$ $\frac{1}{2}$ Thl $= 6$ Thl; also der zweyte 7 Thl.

18. Penther, Bauanschlag I. Cap. 2. Sect. 27 S. setzt auch Brunnengräberlohn, zu mauern und für Steine nach der Tiefe wachsend an;

bey

bey 5 Fuß im Lichten 4 Thl. 12 gl. und für jede 5 Fuß tiefer etwa 3 Thl. mehr, manchmahl einige Groschen mehr oder weniger. Warum die Kosten jedesmahl so oder so viel wachsen, davon giebt er keinen Grund an, und ich glaube allerdings mit Polaken, daß die Zunahme der Kosten zu gering angesetzt ist.

Setzt man mit Penthern für 5 Fuß tief $4\frac{1}{2}$ Thl. und nimmt mit Polaks Voraussetzung an, daß die Kosten für jeden Fuß mehr um so viel wachsen, als sie bey dem ersten betragen, so hätte man $n = 5$; $f = 4$, 5 Thl., also die Kosten des ersten Fusses $= a = \frac{9}{5.6}$ Thl. $= \frac{3}{10}$ Thl. $= 7,2$ gl.

Dieses angenommen, berechnet man leicht, wie viel jede Tiefe kommen würde.

Die grösste bey Penthern ist 40 Fuß. Für sie also betrügen die Kosten,

$\frac{40.41}{2}.7,2\,\text{gl.} = 41.144\,\text{gl.} = 41.6\,\text{Thl.}$
$= 246$ Thl.

Ungeheuer, von 27 Thl. 18 gl. unterschieden, die Penther für diese Tiefe angiebt.

Diese Rechnung führt Polak so: Aus $7\frac{1}{5}$ gl. für den ersten Fuß, und dem gleichen Wachsthume für jeden Fuß, berechnet er, was jeder Fuß kostet, begreiflich immer mit Brüchen von gl. und addirt alle 40 Posten zusammen.

men. Was nützte ihm, daß er zuvor arithmetische Reihen zu summiren gelehrt hatte?

19. An eben der Stelle giebt Penther auch die Kosten für einen Brunnen, der vier Fuß im Lichten wäre: Setzt sie 4 Thl. bey 5 Fuß Tiefe. Nun aber ist deutlich, daß die Oberfläche der beyden Brunnen, 5 und 4 Fuß im Lichten sich wie die Quadrate, 25 : 16 verhalten. So müssen sich doch also auch die Kosten bey einerley Tiefe verhalten. Betragen sie also bey 5 Fuß Tiefe für den ersten Brunnen 4, 5 Thl., so betrügen sie bey dem andern $\frac{16}{25}$. 4, 5 $= \frac{16.\ 0{,}9}{5}$

$= \frac{32.\ 0{,}9}{10} = 32.\ 0{,}09 = 2{,}88$ Thl.

Sollten sich die Kosten nur wie die Weiten im Lichten verhalten, so käme 5 : 4 = 4,5 : 3,6

Penthers Angaben, daß der Brunnen 4 Fuß weit nur 4 Thl. kosten soll, wenn der 5 Fuß weit 4, 5 Thl. kostet, stimmen also weder mit der Verhältniß der Flächen noch der Linien überein, und so hat er bey dieser Sache nirgends mathematisch gedacht.

20. Daß man völlig genau schätzen könne, wie die Arbeit mit der Tiefe wächst, glaube ich freylich nicht. Wenn der Brunnen durchaus einerley Weite behält, so bleibt der Theil der Arbeit einerley, der auf Ausgraben der Erde ankömmt, vorausgesetzt, daß einerley Materie durchaus zu bearbeiten ist, welches freylich bey

gros-

grosser Tiefe nicht statt finden möchte, aber auch nach keiner vorauszusehenden Ordnung zu bestimmen wäre. Herausschaffen des Ausgegrabenen, Befestigung gegen Einfallen u. d. g. wird immer beschwerlicher, je mehr die Tiefe zunimmt. Der Gebrauch der arithmetischen Progression würde also wohl dienen, ohngefähr einen Ueberschlag machen, es könnte aber vielleicht kommen, daß sich die Kosten noch höher beliefen. Der Nutzen dieser Rechnung wäre alsdann wenigstens, daß man darauf einigermaassen vorbereitet wäre, mehr als wenn man einen Anschlag, ohne alle mathematische Ueberlegung, wie Penthers seiner ist, gemacht hätte.

Sollte ein Thurm abgetragen werden, im eigentlichen Verstande, daß Steine, und was abgebrochen wird, es so viel als möglich ganz zu erhalten, herunter getragen, nicht geworfen wird, so machen ebenfalls die höhern Stellen des Thurms mehr Mühe, als niedrigere. Wäre also ein Vergleich über Abtragung des ganzen Thurmes geschlossen, und die Arbeit müsste aufhören, nachdem nur ein oberer Theil, z. E. der dritte, abgebrochen wäre; so dürfte man dafür nicht verhältnißmässig den dritten Theil der Zahlung für das Ganze rechnen, sondern würde, wenigstens der Wahrheit näher annehmen, daß für jeden Fuß von unten hinauf etwas mehr in arithmetischer Reihe zu geben wäre.

Dieses, nebst einem Bilde, wie der Thurm ganz aussah, und wie ein Drittheil weg ist,

für

findet sich als das 33. Exempel in: Nova Arithmetica Iuridica, darinnen in funfzig, meist Streitfragen gewiesen wird, daß die Rechenkunst auch den Studiosis Iuris, Schreibern, und allen denjenigen, welche ins künftige Gerichts-Städte-Advocaturen-Notariats-Secretariats- und Schreiberey-Verwaltungen zu besitzen oder zu bedienen gedenken, zu wissen hochnöthig sey; Von Johann-Henrich Voigt, Königlicher Majestät in Schweden bestelltem Mathematico und Arithmetico zu Staaden. Hamburg 1667.

21. Einen wirklichen Vorfall, wo sich Summirung einer arithmetischen Reihe anwenden läßt, findet man in M. Adam Bernds eigner Lebensbeschreibung (Leipz. 1738. 8) 482 S. In 1709. bildete sich Bernd seiner Kränklichkeit wegen ein, daß er das Jahr nicht überleben würde. Die Magd, die ihm aufwartete, sagte ihm in Gegenwart andrer: Er würde noch nicht sterben, was sie haben sollte, wenn er über das Jahr noch lebte? Seine Antwort war: Jetzt gebe ich ihr einen Gulden für die Aufwartung, lebe ich über das Jahr noch, so soll sie 2 Fl. haben und so viel Jahr ich lebe, allemahl in Weyhnachten einen Gulden mehr.

Sie nahm dieses Versprechen an, und er meldet: Er habe es 22 Jahr gehalten, ihr 1731. wirklich 23 Gulden ausgezahlt, vor 7 Jahren habe sie ihn davon aus eignem guten Willen bey seinen sehr veränderten Umständen befreyet.

Die Zeit der Ausgabe des Buchs zeigt, daß diese Befreyung 1731. geschehen.

Von den 22 Jahren, die B. nennt, ist das erste, 1710, da sie 2 Gulden bekam.

Man kann also diese 2 Gulden als das erste Glied einer arithmetischen Reihe ansehn, deren letztes 23 ist, die Zahl der Glieder 22, der Unterschied 1; so kömmt für die Summe 25. 11 = 275 Gulden.

Darunter sind Gulden, welche die Magd wegen der Aufwartung bekommen hätte, aber B. giebt nicht an, wie lange sie ihm noch aufgewartet hat, wahrscheinlich nicht völlig diese 22 Jahr. Und wenn man das annähme, hätte er sich doch die übrige Ausgabe von 253 Gulden, durch sein Versprechen zugezogen.

Ob B. gleich kein Mathematicus war, so hatte er doch gewiß von arithmetischer Progression gehört, nur glaubte er als Hypochondrist, sicher zu seyn, daß er die Zeit, da sein Versprechen ihn zu vielen Gulden verbände, nicht erleben würde.

Eine arithmetische Progression einem Kaiser zu überreichen.

Wagenseil, de S. R. I. libera civitate Noribergensi (Altdorf 1697) L. I. cap. XI. p. 83. führt aus einer geschriebenen nürnbergischen Chronik Folgendes an, das bey Carl V. Gegenwart zu Nürnberg 1541 geschehen:

Am

"Am 17 Februar schenkte man der Röm. Kayf. May. ein guldne Scheuren, darinnen hundert Stuck Goldes waren, also, daß das erste ein Goldgulden, das andre zween, das dritte drey, und also fort hinaus bis auf das hundertte, welches hundert Goldgulden galt. Thun diese Stuck zusammen fünftausend und funfzig Goldgulden"

Nähmlich $(1+100).\frac{100}{2} =$

$\frac{10100}{2} = 5050$

II. Abschnitt.

Summirung geometrischer Reihen.

1. Eine Reihe der Potenzen einer gegebenen Zahl zu summiren.

2. Man verlangt also die Summe

$+1+e+e^2+e^3 \ldots +e^{n-2}+e^{n-1}+e^n = S$

Wo die Exponenten lauter ganze bejahte Zahlen sind, e jede gegebne ganze oder gebrochne, bejahte oder verneinte Zahl seyn mag. Ich nehme $+1$ als das erste Glied der Reihe an, weil es die Potenz jeder Zahl vom Exponenten 0 ist. Das gründet sich darauf, daß $+1$ herauskömmt, wenn man jede Zahl mit sich selbst dividirt, also gilt es nicht von -1, denn das kömmt heraus, wenn man eine Zahl mit ihrer entgegengesetzten dividirt.

3. Also, alles mit e multiplicirt:
$e + e^2 + e^3 \ldots + e^{n-1} + e^n + e^{n+1} = e.S$
$1 + e + e^2 \ldots\ldots + e^n + e^{n+1} = e.S + 1$

4. Folglich aus 3; 2;
$e.S + 1 = S + e^{n+1}$ Daher
$eS - S = e^{n+1} - 1$ oder, weil
$eS - S = (e - 1).S$;
$(e-1).S = e^{n+1} - 1$; und folglich

5. $$S = \frac{e^{n+1} - 1}{e - 1}$$

6. **Exempel.** Es sey $e = 2$ also allgemein $S = 2^{n+1} - 1$ man suche die Summe der Reihe 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512; 1024
So ist $S = 2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047$
Wenn $e = 5$; $n = 6$, so sind die Potenzen der 5 bis mit auf die siebente
1; 5; 25; 125; 625; 3125; 15625; 78125;
Die Summe der ersten sieben Glieder dieser Reihe ist $= \frac{78124}{4} = 19531$;

7. Wenn e eine ganze Zahl ist, so ist ohne Zweifel die Summe der Reihe ihrer Potenzen auch eine ganze Zahl; Da nun diese Summe $= S$ (5) so hat man folgenden Satz: Jede Potenz einer ganzen Zahl um 1 vermindert, giebt einen Rest, der sich durch eben die Zahl um 1 vermindert, dividiren lässt. Der Quotient ist 1 + der Summe aller Potenzen dieser Zahl, welche vor der angenommenen vorhergehn.

So

So ist $\frac{729 - 1}{8} = 91 = 1 + 9 + 81$

Dieses kann dienen, Zahlen zu finden, die sich mit andern Zahlen ohne Rest dividiren lassen u. s. w.

Ueber die Voraussetzung, daß e verneint ist.

8. Alsdann sind die 1, 3, 5, 7, u. s. f. alle Potenzen, deren Exponenten ungerade sind, verneint, die Potenzen aber, deren Exponenten gerade sind, wie 0, 2, 4, 6, ... bleiben bejaht.

Welches aus I. Cap. 108; leicht einzusehen.

9. Die Reihe (1) besteht also aus abwechselnden bejahten und verneinten Gliedern, das erste, allemahl bejaht, das letzte, bejaht oder verneint, nachdem die Potenz in ihm, einen geraden oder ungeraden Exponenten hat.

So sind die Potenzen von -5 (6) $+1$; -5; $+25$; -125; $+625$; -3125; $+15625$; -78125

10. S also bedeutet hie, was herauskömmt, wenn man die bejahten und verneinten Glieder, gehörig zusammen rechnet. (I. Cap. 97). Ist daher bejaht oder verneint, nachdem die bejahten oder die verneinten mehr betragen.

Nimmt man in (9) die Potenzen der -5 bis mit auf die sechste, so ist die Summe der Reihe

$$= 1 + 25 + 625 + 15625$$
$$- (5 + 125 + 3125)$$
$$= 16276 - 3255 = 13021$$

11. Wenn man nun hie die Formel (5) anwendet, und e nicht ein eigentlicher Bruch ist, so erhellt folgendes:

Der Divisor $e - 1$ ist allemahl verneint, auch wenn e ein eigentlicher Bruch wäre.

Der Dividendus, ist bejaht oder verneint, nachdem $n + 1$ gerade oder ungerade ist.

Also ist S, verneint oder bejaht, nachdem $n + 1$ gerade oder ungerade ist.

Das ist, verneint, oder bejaht, nachdem die höchste Potenz derer, die man zusammenrechnet, einen ungeraden, oder einen geraden Exponenten hat.

So, für die Reihe, die in (9) als Exempel gebraucht ist, wäre $n = 6$; und

$$S = \frac{-78125 - 1}{-5 - 1}$$
$$= \frac{-78126}{-6} = +13021 \text{ wie in (10)}$$

12. Man setze, e sey eine verneinte ganze Zahl $= -f$; und n gerade, daher $n + 1$ ungerade, so ist $(-f)^{n+1} = -f^{n+1}$

Z. E. $e = -11$ also $f = +11$; $n = 8$; also $n + 1 = 9$; so ist

$$(-11)^9 = -11^9 \quad (8)$$

13. Unter dieser Voraussetzung ist in (5)

S=

$$S = \frac{-f^{n+1}-1}{-f-1} = \frac{+f^{n+1}+1}{f+1} \text{ (I. C. III.)}$$

Nun ist $+f$ eine ganze Zahl, und S eine ganze Zahl (wie in 7.) bejaht (11); das giebt folgenden Satz:

Von einer ganzen Zahl eine Potenz gemacht, deren Exponent ungerade ist, und dazu 1 addirt, giebt eine Summe, die sich durch die angenommene ganze Zahl um 1 vermehrt, ohne Rest dividiren läßt.

So ist von $f = 11$ die 9 Potenz $n = 8$) $= 235794691$ (Vega Tafeln 359. Seite). Diese um 1 vermehrt, giebt

$$\frac{235794692}{12} = 19649641$$

14. Dieser Satz kann eben dergleichen Gebrauch haben, wie (7), und so wird man einsehn, wie sich mehr Vorschriften entdecken lassen, ganze Zahlen zu finden, die mit ganzen Zahlen dividirt, ganze Zahlen geben. Ich handele davon in der Analysis endlicher Grössen 243. . . 249. §.

Gebrauch der Formel (5) wenn e ein eigentlicher Bruch, und bejaht ist.

15. Da ist im dortigen Ausdrucke sowohl Zähler als Nenner verneint, und der Quotient bejaht. Man erhält also vollkommen eben den Quotienten, wenn man statt jedes der beyden

verneinten Werthe den entgegengesetzten bejahten nimmt. Also hat man hie

$$S = \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e}$$

$$= \frac{1}{1 - e} - \frac{e^{n+1}}{1 - e}$$

16. Im letzten Ausdrucke, verhält sich der zweyte Theil zum ersten $= e^{n+1} : 1$; ist also gegen den ersten immer kleiner, je grösser n ist (I. Cap. 76). Befriedigt man sich also, S nur beynahe zu haben, so kann man für seinen ganzen Werth, den ersten Theil allein annehmen, welches der Wahrheit desto näher kömmt, je grösser der Exponent ist, das ist: je mehr Potenzen eines eigentlichen Bruches man summiren soll.

17. **Exempel.** Es sey $e = \frac{1}{2}$; so ist $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots + \frac{1}{2^n}$ oder

$$S = 2 - \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Die Summe dieser Reihe, so weit als man will, fortgesetzt, ist allemahl 2 — dem letzten Gliede; z. E. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{23}{8} = 2 - \frac{1}{8}$

18. Die Potenzen der 2 wachsen bis ins Unendliche, oder man kann allemahl eine Potenz der 2 angeben, die grösser ist, als jede gegebene Zahl.

Wäre die gegebene Zahl zum Exempel $= 1000000000000$; so lässt sich durch Fortsetzung

seßung der Potenzen der 2 gewiß auf eine kommen, die mehr beträgt, nicht auf eine, die eben so viel beträgt, weil eine Billion, keine Potenz der 2 seyn kann.

Seßt man also die Reihe (17) so weit fort, bis 2^n grösser ist als eine Billion, so ist die Summe dieser Reihe, zwar kleiner als 2, aber ihr fehlt zu 2 nur das leßte Glied, das nun, ist kleiner als ein Billiontheilchen, also fehlt der Summe zu 2 noch nicht ein Billiontheilchen.

Da man nun statt der Billion, die ich als Exempel genannt habe, jede andre noch grössere Zahl annehmen kann, so folgt, man könne die Reihe (17) allemahl so weit fortseßen, daß ihrer Summe zu 2 weniger fehlt, als jeder Bruch, den man angiebt, so klein auch derselbe angegeben wird.

19. Dieses läßt sich so ausdrücken: Die Reihe, (17) ins Unendliche fortgeseßt, hat zur Summe 2.

Weil jedes Glied der Reihe von neuem kann halbirt werden, und diese Hälfte eine Grösse hat, wenn das, was halbirt ward, eine Grösse hatte, so folgt, daß man nie auf ein Glied kömmt, wo die Reihe aufhörte, und in der Bedeutung sagt man, die Reihe lasse sich ins Unendliche fortseßen.

Wer nun läugnete, daß dieser Reihe Summe $= 2$ ist, der müßte behaupten, die Summe bleibe immer um etwas, das sich angeben läßt, von 2 unterschieden, so weit man auch die Reihe

fortsetzte. Er mag aber diesen Unterschied so klein, als er will, angeben, so lässt sich die Reihe so weit fortsetzen, daß ihre Summe der 2 näher kömmt (18). Also ist so viel deutlich:

Wenn man die Reihe so weit, als man will, fortsetzen darf, so lässt sich keine Grösse angeben, um welche ihre Summe kleiner bliebe als 2.

Und das ist die Bedeutung des im Anfange dieses Absatzes gebrauchten Ausdrucks.

20. Ich habe an diesem Exempel zeigen wollen, was man **Summe einer unendlichen Reihe von Brüchen** nennt. Es heisst eine Grösse, der diese Reihe, ins Unendliche fortgesetzt, so nahe kommen kann, als man will, dergestalt, daß sich kein Unterschied zwischen dieser Grösse und der Summe der Reihe angeben lässt.

In dem hie gebrauchten Beyspiele, lässt man gewöhnlich 1, das erste Glied weg, und sagt: Die Summe der unendlichen Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ldots$ sey $= 1$.

Umständlicher handele ich von solchen Summen unendlicher Reihen Anal. endl. Grössen; 10 .. 16 u. 90 ... 112.

Allgemeine Summirung einer Geometrischen Reihe.

21. Ihr erstes Glied sey $= a$; das zweyte $= b = c.\ a$ so ist c der Exponent der Verhältniß

niß (V. Cap. 26); die Reihe kann so ausgedruckt werden (VI. Cap. 11; 12)

$$a : b : \frac{b^2}{a} : \frac{b^3}{a^2} : \frac{b^4}{a^3} \ldots \frac{b^n}{a^{n-1}}$$

oder auch

$$a : e\,a : e^2\,a : e^3\,a : e^4\,a \ldots e^n.\,a$$

Die Menge ihrer Glieder ist $= n + 1$, weil sich des Exponenten erste Potenz im zweyten befindet.

22. Nach dem letzten Ausdrucke, ist ihre Summe $= a.\,S$ (2).

23. Aus (21) ist in (5) $S = \dfrac{\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} - 1}{\frac{b}{a} - 1}$

der Zähler hievon $= \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{a^{n+1}}$

und der Nenner $= \dfrac{b - a}{a}$

Also $S = \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{a^n.\,(b - a)}$

Welches, mit a multiplicirt, die Summe der Progression (21) giebt.

23. Ist das zweyte Glied kleiner als das erste, so braucht man für S die Ausdrücke (15) und erhält $S = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n.\,(a - b)}$

24. Es sey das letzte Glied $e^n\,a = u$; also

e^n

$e^n = \frac{u}{a}$; so kömmt in (5); $S = \frac{\frac{u.e-1}{a}}{\frac{e-1}{}}$

$= \frac{u.e-a}{a.(e-1)}$

25. Wenn man also mit a multiplicirt (22) so kömmt die Summe (21) $= \frac{u.e-a}{e-1}$ oder $\frac{a-u.e}{1-e}$; nachdem das letzte Glied oder das erste grösser ist (15).

Für die Reihe

7 : 21 : 63 : 189 : 567

ist $a = 7$; $e = 3$; $u = 567$;

die Summe $= \frac{567.3-7}{2} = \frac{1701-7}{2}$

$= 847$.

26. Wenn in (25) $a = 1$ gesetzt wird, hat man S.

27. Das mühsamste beym Gebrauche dieser Formeln, ist u zu berechnen, wenn die Glieder vom ersten an, wachsen, und ihre Zahl groß ist.

Von Joh. Wilh. Theod. Leichner, sind einige Vortheile angegeben worden, bey geometrischen Progressionen, sonderlich der, wo die Verhältniß 1 : 2 ist, weit hinaus gelegene Glieder zu finden.

Man s. Büchners Miscellanea Phys. Med. Mathemat. oder Nachrichten von Physicalischen

...

. . . Geschichten (Erfurt 1734; 4.) 1730. Mart. Cl. V. art. 1.

28. Wenn man Logarithmen zu brauchen versteht, hat man (24) $\log u = \log a + n . \log e$; Aber man bekömmt schon das Vielfache eines Logarithmen durch eine grosse Zahl nicht ganz richtig, wenn man die Logarithmen, nur bis auf Zehnmilliontheile angegeben, aus den gewöhnlichen Tafeln nimmt; Wer in dieser Absicht mehr Schärfe verlangt, muß Logarithmen besitzen, die auf mehr Decimalstellen angegeben sind. Ferner übersteigt u gar bald auch die grössern logarithmischen Tafeln, und man muß sich alsdann befriedigen, von dieser Zahl nur die höchsten Ziffern zu finden.

29. Ist u so groß, so giebt es freylich eben keinen beträchtlichen Fehler, wenn man die Summe (25) $= \frac{u\,e}{e-1}$ mit Weglassung des ersten Gliedes seßt.

Einige Exempel.

30. Es hat sich jemand anheischig gemacht, 24 Stunden nach einander, die erste 1 Pfennig, die zweyte 2; die dritte 4; die vierte 8 u. s. f. jede Stunde das Doppelte der vorhergehenden zu zahlen: Wie viel beträgt das zusammen?

31. In (2) ist $e = 2$; $n = 23$. Also (5) $S = 2^{24} - 1$

Es ist aber $2^{12} = 4096$;

Das

Das Quadrat davon aus Ludolfs Tetragonometria = 16777216.

Diese Zahl um 1 vermindert, giebt die gesuchte Menge von Pfennigen.

32. Weil sie mit 288 dividirt, zu Thalern gemacht würden, so will ich diese Menge Thaler vermittelst der Logarithmen suchen, und mich dazu der Logarithmen, auf mehr Decimalstellen angegeben, bedienen, die sich in Shervins Tafeln finden, dabey ich log 288 = log 72 + log 4 berechnet habe.

log 2 = 0, 30102999566

24

1, 20411998264

6, 0205999132

24. log 2 = 7, 2247198958

log 288 = 2, 4593924877

4, 7653274081

log 58254 = 4, 7653257

17

Dieß giebt die gesuchte Summe = 58254,2 Thl. = 58254 Thl. 5 gl. 9,6 ₰. wovon 1 ₰. (nach 5) muß abgezogen werden.

Wollte man die Rechnung mit den Zahlen selbst führen, so dient zur Abkürzung, daß 288 = 9. 32 also ist $S = \frac{2^{19}}{9}$ Thl. — 1 ₰, wo der Dividendus = 40962. 128.

33. Um 1717, zog in Deutschland Joh. Carl v. Eckenberg herum, der Proben auserordentlicher Stärke abzulegen vorgab, sich daher den starken Mann, auch einen Simson nennen ließ, übrigens eine Gauklergesellschaft mit führte, und mit Arzneyen handelte. Dieser ließ sich verleiten, in Leipzig an einen Lieutenant Beyer einen Wechselbrief auszustellen, in dem er sich gegen ein erkauftes Pferd, zu der in (30) beschriebenen Zahlung verbindlich machte. Die Geschichte, und mehr, Eckenbergen betreffend, erzählen die Curiosa Saxonica, Dreyssigste Probe, Dresd. 1731; 178 S. Es kam zur Klage, der Wechselbrief ward aber für ungültig erklärt. Der verpflichtete Rechenmeister in Leipzig, Gottlieb John, hatte die Summe 5825 4 Thl. 5 gl. 3 ₰ ausgerechnet. Ob der Unterschied unsrer beyden Rechnungen in den wenigen Pfennigen von den Logarithmen herrühre, mag ich nicht untersuchen. Man sieht wenigstens, daß die Logarithmen zulänglich sind, diese Frage so scharf zu beantworten, als man verlangen kann, da es bey einer solchen Summe auf Pfennige nicht ankömmt. Begreiflich hatte Beyer diese Progressionsrechnung von einem Rechenmeister gelernt, und E. war, wenigstens in Räzeln, kein Simson.

1) Wenn man grössere Mengen von Pfennigen durch Groschen und Pfennige, und noch grössere durch Thl. gl. ₰ ausdruckt, so kömmt man leicht von jedem Gliede der Reihe auf das nächstfolgende, und alle unter einander gesetzt

nehmen eine Octavseite ein da man sie leicht addirt. So hat es ohne Zweifel John gemacht. Und so ist das Exempel in Funks natürlicher Magie (Berl. 1783) 179 S. dargestellt, wo eben die von John angegebene Summe herauskömmt, nähmlich

$2^{24} - 1$ Pfennige = 58254 Thl. 5 gl. 3 ₰ = S

II) Man pflegt so ein Exempel auch von einem Pferdekaufe zu geben, da nur die Hufnägel sollen bezahlt werden, der erste mit 1 ₰, der zweyte, dritte, ... zwey und dreyssigste, mit 2; 4; .... 2^{31} Pfennigen.

Diese Summe ist also

$$2^{32} - 1 = T$$

III) Nun ist

$$T - S = 2^{32} - 2^{24} = 2^{24}. (2^8 - 1)$$
$$= (S + 1). 255$$

IV) Also $T = S + (S + 1). 255$
$= 256. S + 255$ Pfennige.

V) Aber 256. S =

256. (58254 Thl. + (5 + $\frac{1}{4}$) gl.)
256. $\frac{1}{4}$ gl. = 64 gl.
256. 5 gl. = 1280

24 | 1344 gl. (56 Thl.)
120
144
144

VI)

VI) 256. 58254 Thl = 14913024

56 (V)

255 Pfennige = 0 21 gl. 3 ₰

aus (IV) T = 14913080 Thl. 21 gl. 3 ₰

In Gottholds Zufälligen Andachten (Leipz. 1679) ist des vierten Hunderts 44ste überschrieben: der wunderliche Kauf, wo statt der Pfennige Hirsenkörner genannt sind; dabey wird aus D. Gej. Leichpredigt P. 2. p. 144. angeführt, daß die Summe der Pfennige 14913080 Thl. 21 gl. 3 ₰ beträgt.

Die Zahl der Hirsekörner, fällt vermöge des Logarithmen von 2^{32}

zwischen 4294900000 — 1
und 4295000000 — 1

oder

zwischen . . 4294899999
und . . 4294999999

Mechanische Vortheile, auf denen angebliche Proben ausserordentlich scheinender Stärke beruhn, erklärt Desaguliers, Course of Experimental Philosophy T. I. (Lond. 1734) p. 255. Eckenbergs Künste wurden in den Breslauischen Sammlungen von Natur- und Kunstgeschichten 1717; 82 S. 1718; Mart. 822 S. 1719; Sommerquart. Vorrede, 1723; Sept. 331 S. 1728; Sept. 319 S. erklärt und ihm zugleich sein Arzneykram verwiesen. Er verantwortete sich dagegen mit Grobheiten und Lästerungen, wie mehr Gaukler, auch wohl die Gelehrte

heissen, thun, wenn ihr Unfug von Verständigen, und ihren gehörigen Richtern, gemisbilliget wird.

34. Ein ander Exempel giebt die Erzählung, daß ein sinnreicher Morgenländer, der, ich weiß nicht was für einem Könige das Schachspiel bekannt machte, zur Belohnung so viel Getreidekörner verlangte, als den 64 Feldern des Schachbretes zukämen, wenn das erste Feld 1, das zweyte 2, das dritte 4, u. s. f. erhielte. Die Summe ist also $= 2^{64} - 1$, weil $c = 2$; $n = 63$

Im Schach- oder Königspiel von Gustavo Seleno (Leipz. 1617. fol.) 1. B. 1. Cap. 9. S. wird die Geschichte aus dem Averroes erzählt, ohne Nahmen zu nennen, die ich wohl in Rechenbüchern gelesen habe, jezo nicht aufsuchen mag.

Die Zahl ist nach der dortigen Angabe
18446744073709551615

Sie zu berechnen, gehört nichts weiter, als die ganz mässige Arbeitsamkeit, die Potenz der 2 zu finden. Schwenter findet dieselbe aus $2^{40} \cdot 2^{24} = 1099511627776 \cdot 16777216$ um 1 grösser, als die zuvor abgeschriebene, wie gehörig. Schwenter Mathem. Erquickstunden, I. Th. 67 u. 68 Aufgabe.

35. Ihre höchsten Zifern mit den Logarithmen zu finden, kann man sich so verhalten. Wie in (32) finde ich

64. log 2 = 19,2659197222

Man

Man schneide die drey letzten Zifern ab, und suche die sieben Decimalstellen, die noch bleiben, in den Tafeln, deren Zahlen bis 100000 gehen, auf, so findet man, daß er zwischen die Logarithmen von 18446 und 18447 fallen würde, wenn seine Kennzifer 4 wäre, um 15 kleiner, als sie ist. Die ihm gehörige Zahl also ist grösser als

18446000 000 000 000 000

aber kleiner als die Zahl, welche herauskäme, wenn hie 6 in 7 verwandelt würde.

Ferner übertrifft dieser Logarithme, mit der Kennzifer 4 betrachtet, den von 18446 um 0,0000175; und so geben die Proportionaltheile, daß er zu 18446,7 gehören würde, wenn seine Kennzifer 4 wäre.

Folglich gehört er mit der Kennzifer, die um 15 grösser ist, zu

18446700 000 000 000 000

So finden sich vermittelst der Logarithmen, die sechs höchsten Zifern wie vorhin.

36. In Rechenbüchern, oder Sammlungen von mathematischen Belustigungen, trifft man mehr Beyspiele solcher Progressionsrechnungen an, wie beym Schwenter a. a. O. Eines, das zugleich eine Andachtsübung seyn soll, in Gasp. Schotti Magia P. III. (Bamberg 1682; 4.) Lib. VII. Synt. 1. u. a. m.

Solcher Exempel wegen, hätte ich hie die Summirung geometrischer Reihen nicht beygebracht,

bracht, in der Folge wird sich der Gebrauch dieser Lehren wichtiger zeigen.

Wie weit sich die Formel für Summirung geom. Reihen anwenden lässt, wenn n nicht eine ganze bejahte Zahl ist.

37. Die Formel (25) beruht auf Summirung der Potenzen (22). Ich darf also nur diese nach (1) betrachten.

38. Weil e auch ein Bruch $= \frac{1}{g}$ seyn könnte, so wäre alsdann $e^n = g^{-n}$; Es ist also begreiflich, daß n auch jede ganze verneinte Zahl bedeuten kann, alsdann giebt die Formel (5) die Summe einer Reihe von Brüchen.

39. So wäre in (17) $g = 2$ und $S = 1 + 2^{-1} + 2^{-2} \ldots + 2^{-n} = \frac{2^{-n-1} - 1}{-\frac{1}{2}}$ (5) woraus eben der Ausdruck wie in (17) folgt.

40. Nun setze man statt n eine gebrochne Zahl $= m + r$ wo m eine bejahte ganze Zahl bedeutet, und r einen eigentlichen Bruch.

41. Also ist $1 + e + e^2 \ldots + e^m + e^{m+r} = V + e^{m+r} = R$

42. Da ist ohne Zweifel

$$V = \frac{e^{m+1} - 1}{e - 1} \quad (5)$$

$$R = V + e^{m+r}$$

43.

43. Gesetzt nun, man wollte in (5) $n = m + r$ setzen; So bekäme man die Summe der Reihe $S = \frac{e^{m+r+1} - 1}{e - 1}$

44. Also $R - S = V - S + e^{m+r} = \frac{e^{m+1} - e^{m+r+1} + e^{m+r+1} - e^{m+r}}{e - 1}$

$= \frac{e^m (e - e^r)}{e - 1}$

45. Sollte das $= 0$ seyn, so müsste $r = 1$ seyn.

46. In der Voraussetzung (40) ist also allemahl R grösser als S.

47. Das ist: die Formel (5) auf die Voraussetzung angewandt, daß n ein Bruch wäre, giebt für die Summe der Reihe allemahl zu wenig.

48. Ex. Es sey $e = 3$; $m = 4$; $r = \frac{1}{2}$ also in (41) die Reihe

$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 81\sqrt{3}$;

$V = \frac{243 - 1}{2} = 121$

$S = \frac{243\sqrt{3} - 1}{2} = 121,5 \cdot \sqrt{3} - 0,5$

$R = 121 + 81 \cdot \sqrt{3}$

$R - S = 121,5 - 40,5\sqrt{3}$, mit (44) übereinstimmend. Es ist $R - S = 51,3519$.

49. Da es sonst verstattet ist, für den Exponenten einer Potenz eine gebrochne Zahl zu

nehmen, (Ar. II. C. 9.) da selbst in der Analysis, bey der Reihe, die einer zweytheilichten Wurzel Potenz ausdruckt, der Exponent ein Bruch seyn darf, (Anal. des Unendl. 46.) so könnte man wohl auch hie dieses für erlaubt halten. Also war nicht überflüssig, zu zeigen, daß solches hie nicht verstattet ist.

50. Nähmlich die Schlüsse (3) nehmen an, e. S entstehe aus S durch die Multiplication mit e, und so habe e. S + 1 ein Glied mehr als S, und dieses Glied sey eine Potenz, deren Exponent um 1 grösser ist, als der grösste in S. Sie lassen sich nicht auf eine Reihe anbringen, die ein Glied mehr als S hätte, aber dieses Gliedes Exponenten nicht um eine ganze Einheit grösser als S.

Von der Vorschrift: einer geometrischen Reihe, Summe; aus: erstem Gliede, letztem Gliede, und Exponenten zu finden, sagt **Wallisius**: Er wisse nicht von wem und wie diese Regel erfunden sey, habe auch bey denen, welche sie brauchen, keinen Beweis gesehn.

Wallis. Mathesis universalis seu opus arithmeticum, philologice et mathematice traditum cap. 33. §. 68. Opera Io. Wallis (Oxon. 1699 fol.) T. I. p. 175.

III. Abschnitt.

Proportionaltheile bey den Logarithmen.

1. Man bekömmt bey der Rechnung selten einen Logarithmen, so daß er mit allen seinen

Zi-

Zifern völlig in den Tafeln stünde, gewöhnlich fällt er zwischen ein Paar nächste der Tafeln.

2. Enthalten die Tafeln, Logarithmen von grössern Kennzifern als die seinige ist, so sucht man ihn unter diesen auf, und findet so die Zahl, die ihm gehört, genauer. (Ar. VI. C. 33).

3. Enthalten aber die Tafeln keine Logarithmen mit grössern Kennzifern, und der gegebene Logarithme fällt zwischen ein Paar nächste der Tafeln, so nimmt man an: Bey kleinen Aenderungen der Zahlen verhalten sich die Aenderungen der Logarithmen, wie die Aenderungen der Zahlen.

Daß dergleichen Voraussetzung bey grossen Aenderungen der Zahlen nicht statt findet, ist offenbahr, weil z. E. bey den drey Zahlen 1; 5; 10; nicht statt findet, daß $5-1 : 10-5 = \log 5 - \log 1 : \log 10 - \log 5$

4. Höchstens also dürfte man sich verstatten, bey kleinen Unterschieden der Zahlen und der Logarithmen sie als etwas beynahe Wahres anzunehmen. Aber, selbst daß man dieses thun darf, und wie nahe es der Wahrheit ist, lässt sich nicht überzeugend darstellen, ohne mehr Theorie der Logarithmen beyzubringen, als in der gemeinen Arithmetik mit Nutzen könnte vorgetragen werden. Man kann sich also hie befriedigen, die Ausübung dieser Voraussetzung zu lernen.

5. Wenn also n irgend eine ganze Zahl, u ein eigentlicher Bruch ist, so sagt die Voraus-

seßung; log (n + 1) — log n : log (n + u) — log n = 1 : u

Da findet man aus den drey Logarithmen;

$$u = \frac{\log (n+u) - \log n}{\log (n+1) - \log n}$$

Und aus u, nebst den beyden äuserſten Logarithmen,

log (n + u) — log n = u. (log (n + 1) — log n)

Im erſten Falle alſo findet man aus einem Logarithmen, der zwiſchen ein Paar nächſte fällt, die Zahl n + u die ihm gehört.

Im andern Falle, findet man, was zu log n muß addirt werden, um log (n + u) zu bekommen.

In beyden nähmlich iſt log (n + 1) — log n aus den Tafeln gegeben.

Proportionaltheile heiſſen dieſe zuſammengehörige Unterſchiede: Einer Zahl, die zwiſchen ein Paar nächſte ganze Zahlen fällt, von der nächſt kleinern ganzen, und ihres Logarithmen, von dem Logarithmen, der nächſt kleinern ganzen, oder u; und log (n + u) — log n

6. Geſetzt, man hätte bey einer Rechnung 3,8796354 als Logarithmen gefunden. Er fällt zwiſchen

log 7579 = 3,8796119
log 7580 = 3,8796692

deren Unterſchied = 573

Uebertrifft den kleinern dieſer beyden um 235.

Die

Die Zahl, zu welcher er gehört, ist also gewiß 7579 + u so daß u kleiner als 1 ist

Man setzt also 573 : 235 = 1 : u

Wie weit man $u = \frac{235}{573}$ berechnen will, müsste nun wiederum daraus beurtheilt werden, daß die Voraussetzung, höchstens nur der Wahrheit nahe ist: Dazu noch kömmt, daß die Logarithmen in den Tafeln nur bis auf Zehnmilliontheilchen vorhanden sind, also, wenn man sie auf mehr Decimalstellen angäbe, andre Differenzen geben würden. Niemand also wird sich einfallen lassen, u bis auf Hunderttausendtheilchen, oder weiter zu berechnen; vielmehr wird man die Voraussetzung schon für sehr brauchbar halten, wenn sie Zehntheile, höchstens Hundertheile angiebt. Also setzt man u = 0,4 oder allenfalls = 0,41 und die Zahl, die dem Logarithmen gehört = 7579,41; wo die erste Decimalzifer sicherer ist als die letzte, und daher gewöhnlicher allein behalten wird.

7. In Tafeln, wo die Zahlen der Logarithmen bis 10000 gehn, fällt der Logarithme, unter der Kennzifer 4 aufgesucht, zwischen

log 75794 = 4,8796348
log 75795 = 4,8796406
Unterschied = 58

Wenn er die Kennzifer 4 hätte, also zu einer Zahl gehörte, die zehnmahl grösser ist als die, zu der er wirklich gehört, so fiele diese Zahl zwischen 75794 und 75795; Da er nun

den kleinern von beyden Logarithmen um 6 überträfe, so gäbe $\frac{6}{58} = 0,1$ daß die Zahl 75794,1 wäre. Die wirkliche Zahl, zu der er mit seiner Kennzifer 3 gehört, ist zehnmahl kleiner, also 7579,41 wie vorhin.

Weil $\frac{6}{58} = 0,10$ so zeigte dieses an, die Zahl sey 7579,410 nähmlich um kein Hundertheilchen grösser, kleinere Theilchen aber würde man nur unsicher finden.

8. Begreiflich heisst das bisherige auch so viel: Der Logarithme 5,8796354 gehört zu einer Zahl, die zwischen 757900 und 75800 fällt (6) und diese Zahl ist 757941

Oder (7) Eben der Logarithme mit der Kennzifer 6; gehört zu einer Zahl, die zwischen 7579400 und 7579500 fällt, und diese Zahl ist 7579410

So erstreckt man durch Proportionaltheile die Logarithmen auf Hundertmahl grössere Zahlen als in den Tafeln stehn.

9. Umgekehrt fände man auch so den Logarithmen einer Zahl, die grösser ist als die grösste der Tafeln.

10. Gesetzt, man wollte aus den kleinern Tafeln, da die Zahlen nur bis 10000 gehen, log 757952 finden, so schlösse man so

log 758000 — log 757900 = 573 (6)
757952 — 757900 = 52; Also
100 : 52 = 573 : 297,96

Folg-

Folglich zu log 757900 = 5,8796119
addirt 298
log 757952 = 5,8796417

11. Wollte man für 757952 den Logarithmen aus den grössern Tafeln finden, so hätte man log 757960 — log 757970 = 57
757952 — 757950 = 2
also 10 : 2 = 57 : 11,4
log 757950 = 5,8796406
11
log 757952 = 5,8796417

Einrichtungen bey den Tafeln, die Proportionaltheile bequem zu nehmen.

14. Man muß also allemahl den Unterschied zwischen ein Paar nächsten Logarithmen der Tafeln haben, deren Zahlen um 1 unterschieden sind. So ist es schon eine Bequemlichkeit, wenn man diesen Unterschied nicht allemahl selbst zu berechnen nöthig hat, sondern in den Tafeln beygedruckt findet.

15. Diese Bequemlichkeit kann ein Herausgeber von Tafeln, desto leichter gewähren, da die Unterschiede der Logarithmen sich nur langsam ändern, und immer langsamer, je grösser die Zahlen sind, denen die Logarithmen gehören, je langsamer die Logarithmen selbst, mit wachsenden grössern Zahlen wachsen.

16. Bey jemanden, der mit Logarithmen rechnen will, ist man doch berechtiget, Tafeln

zu

zu suchen, deren Zahlen wenigstens bis 10000 gehn. Und so braucht er gewiß die Proportionaltheile bey Zahlen, die unter 1000 sind, nicht. Zu dieser Absicht also ist es unnütz, diesen Zahlen die Unterschiede ihrer Logarithmen beyzufügen. Der Nutzen, den es haben kann, ist, zu sehn, ob der beygefügte Unterschied der ist, den die Logarithmen selbst geben, trifft das nicht zu, so findet sich ein Druckfehler, den man nach dieser Anleitung leicht verbessert.

Selbst dieser Logarithmen Unterschiede ändern sich nur nach und nach in den niedrigsten Ziffern; So ist log 901 — log 900 = 4823 und log 1000 — log 999 = 4341

17. Wenn die Zahlen etliche Tausende betragen, so bleibt für viel nach einander folgende Logarithmen immer einerley Unterschied, und so haben, bey grössern Zahlen wohl 30 und mehr nach einander folgende Logarithmen, einen Unterschied, den man also nur einmahl, an einer bequemen Stelle ansetzen darf.

18. Uebrigens begreift man, daß diese Unterschiede, nur von den Logarithmen zu verstehen sind, wie solche gewöhnlich bis auf Zehnmilliontheilchen angegeben werden. Wenn also bey mehreren Logarithmen einerley Unterschied steht, so heisst das nur so viel: Dieser Logarithmen Unterschiede, sind bis auf Zehnmilliontheilchen einerley, nur in kleinern Theilen selbst wieder unterschieden.

19.

19. So bleiben der Logarithmen erste Zifern durch viele, einerley, besonders auser der Kennzifer, die nur für jede neue Potenz der 10 anders wird, die höchsten drey Decimalzifern.

Das Gesetz, nach dem sich Unterschiede, und Logarithmen selbst ändern, gehört wiederum in die höhere Theorie der Logarithmen, von der ich hie nicht handele.

20. Wenn man u, durch alle Menge Zehntheilchen von 0,1 ... 0,9, angiebt und mit dem jedesmahligen Werthe, die Differenz von ein Paar nächsten Logarithmen, der Tafeln, oder log (n + 1) — log n multiplicirt, so bekömmt man, wie viel der kleinere von beyden Logarithmen wächst, indem n um u wächst.

21. Es sey log (n + 1) — log n = 163; Eigentlich Zehnmilliontheile, die sehe ich aber hie als Ganze an, weil alle Logarithmen in den Tafeln in solchen Theilen ausgedruckt sind. Ich suche nähmlich nun, wie viel solcher Einheiten, dergleichen 163 den Unterschied dieser beyden Logarithmen ausmachen, zum kleinern von beyden müssen addirt werden, den Logarithmen einer Zahl zu geben, die um 0,1; 0,2; ... 0,9 gröſſer ist als n.

So kömmt für

I) u	=	0,1	0,2	0,3	0,4
II) log (1 + u) — log n	=	16,3	32,6	48,9	65,2
I)		0,5	0,5	0,7	0,8	0,9
II)		81,5	97,8	114,1	130,4	146,7

Die

Die Zifern nach dem Comma in II) kann man bey den Logarithmen nicht behalten, weil keiner mehr als 7 Decimalstellen bekömmt. Man läßt sie also weg, oder vergrößert die niedrigste Zifer, die man behält, um 1; z. E. 49 und 98 für u = 0,3 und = 0,6.

22. Der Unterschied 163 (21) findet sich bey den Logarithmen für 26500 .... 26699. Man wird also das Berechnete so brauchen können.

I) Man verlange log 26594,8;

log 26594 =	4,4247837	
Prop.theil =		131
log 26594,8 =	4,4247968	

II) Man suche die Zahl zu nachstehendem Logarithmen

	4,4249357	
log 26603 =	4,4249306	
		51

In (21) gehört 49 als Unterschied der Logarithmen zu u = 0,3; Also ist die gesuchte Zahl = 26603,3

23. Wenn man in (21) u = 0,01; 0,02 .... 0,09 gesetzt hätte, so wären in der dortigen Zeile II, überall zehnmahl kleinere Zahlen gekommen, oder: eben die Zifern, nur jede eine Stelle niedriger. Also dienen die dort berechneten Zahlen, auch wenn man für eine Zahl, die noch eine Stelle niedriger als in (22) ange-

genommen ward, den Logarithmen berechnen wollte.

Man verlange log 26678495
Aus den Tafeln suche man log 26678,49
log 26678 = 4,4261533
Proptheil für 0,4 = 62
0,09 = 15
log 26678,49 = 4,4261610

Die Kennzifer in 6 verwandelt, giebt den gesuchten Logarithmen.

IV. Abschnitt.

Von einigen logarithmischen Tafeln für die gemeinen Zahlen.

1. Die Logarithmen sind wenigstens vom Neper zum Gebrauche der Trigonometrie erfunden, auch nachdem dazu am häufigsten angewandt worden, ob man gleich bald eingesehen hat, daß sie auch bey blos arithmetischen Aufgaben sehr nützlich sind. Dieses hat veranlasst, daß man sie immer als einen Theil trigonometrischer Tafeln betrachtet hat, und ich weiß hie keine etwas vollständige Sammlung von Logarithmen für die gemeinen Zahlen zu nennen, die man ohne trigonometrische Tafeln haben könnte. Einige für Kaufmannsrechnungen, davon ich anderswo reden werde, gehören nicht hieher. Selbst die Benennung: für die gemeinen Zahlen setzt sie denen entgegen, welche für die trigonometrischen gehören.

2. In

2. In meinen astronomischen Abhandlungen II. Sammlung (Gött. 1774) Vierten Abhandlung, habe ich von unterschiedenen grössern, oder sonst merkwürdigen logarithmischen Tafeln geredet, der Absicht gemäß, sowohl von dem, was die gemeinen Zahlen betrifft, als vom Trigonometrischen. Häufige Zusätze dazu, hebe ich für andere Gelegenheit auf, jezo schränke ich mich auf Tafeln für die gemeinen Zahlen ein.

3. Der Anfänger muß sich nach solchen üben, wo die Zahlen von 1 bis 10000 gehen. Von denen hat man eine sehr grosse Menge Ausgaben; Sie sind also leicht zu bekommen, nicht theuer, und ihre Einrichtung ist so einfach, daß man ohne besondern Unterricht sie gebrauchen lernt, auch ist gewöhnlich eine Anleitung vor ihnen befindlich. Sehr häufig sind bey uns Ausgaben, die Wolf besorgt hat.

Zu der Trigonometrie und Ausziehung der Wurzeln nöthige Tafeln . . . von Christian Freyherrn von Wolf, Halle 1755. 8. auch mit lateinischen, Titel und Einleitung.

Adrian Vlacq, Tafeln sind auch oft aufgelegt worden.

Adriani Vlacq Tabulae Sinuum . . . ed. emendata a Io. Iac. Hentschio. Francof. et Lipſ. 1757.

Ozanam Tables. Paris 1685.

Aegid. Strauchii Tabulae per universam matheſin apprime utiles. Viteb. 1662. Enthal-

halten auser den logarithmischen Tafeln auch viel astronomische. IV. Astr. Abh. 47.

Hievon sind wiederholte Ausgaben; Grünebergs Tafeln, die auch unter dem Titel Pandora mathematica angeführt werden, ferner: Aegid. Strauchs Tafeln, von Leonh. Chph. Sturm herausgegeben, Amst. 1700, mit lateinischen und deutschen Titel und Einleitung. Sturm hat unterschiedene, besonders architectonische Tafeln beygefügt. In der Vorrede, werden Grünebergs Ausgabe über 1000 Fehler schuld gegeben; welches ich a. a. O. mit erwähnt habe. Nachgehends habe ich erhalten: Tafeln der Sinuum und Tangentium vormahls in lateinischer Sprache beschrieben von Hrn. Christian Grünebergen, Math. P. P. O. zu Frankfurt an der Oder, Berl. 1703. Da steht eine Erklärung von Sturmen: Er habe Grünebergs Tafeln gelobt, sein Verleger aber habe als ein Falsarius statt des Lobes den Tadel, und das in barbarischem Latein, gesetzt, welches beydes Sturm sich nicht will zurechnen lassen. Der seel. Erxleben machte mir diese Ausgabe, die er besaß, eben bey Veranlassung erwähnter Stelle meiner Astron. Abh. bekannt, und ich habe sie nach seinem Tode gekauft.

In diesen Strauchischen, Grünebergischen, Sturmischen Tafeln sind zu Ersparung des Platzes die Zahlen so geordnet: Jede Duodezseite hat vier Spalten, in den Logarithmen stehen. Ueber jeder Spalte stehn die Tausende

und Hunderte einer Zahl, und in einer schmalen Spalte linker Hand gehn die Zehner und Einer herunter. Will man also z. B. den Logarithmen von 6484 suchen; so sucht man, wo oben über einer Spalte 6400 steht, und ferner in der schmalen Seitenspalte 84; Also steht der gesuchte Logarithme unter 6400 und neben 84.

Auf der Seite, wo dieser Logarithme steht, finden sich über den vier Spalten, 6400; 6500; 6600; 6700; Die schmale Seitenspalte enthält 67 . . . 100; und für jede der oben genannten vier Zahlen mit Beyfügung jeder in der Seitenspalte finden sich auf dieser Seite die Logarithmen. So fasst jede Duodezseite 34. 4 = 136 Logarithmen.

4. Etwas weiter gehn: Tables des Sinus . . . par Mr. Rivard. Par. 1743; 8. Die Logarithmen für alle Zahlen von 1. — 20000. Die Verleger dieser Ausgabe, haben für jeden Druckfehler, der ihnen in den Ziffern gezeigt würde, 3 Livres versprochen, wie die Recension davon Götting. Zeit. von gelehrten Sachen 1743; 51 St. erwähnt, denn bey dem Exemplar, das ich besitze, finde ich dieses Versprechen nicht.

Die ersten zwo oder drey Ziffern der Logarithmen, die lange Zeit einerley bleiben, befinden sich oben über schmalen Columnen, in denen die übrigen stehn; so haben auf einer Seite vier Columnen mit Logarithmen Platz, von den Zahlen, gehn auch die niedrigsten Ziffern

in

in einer Seitencolumne, neben jeder Columne der Loga ihnen herab; An den Seiten der Columnen der Logarithmen, stehn ihre Unterschiede (III. 15). So wird Papier erspart, und doch bleibt zwischen den Columnen noch weisser Raum, welches den Vortheil hat, daß das Auge nicht so sehr ermüdet wird, als wenn es auf einer Seite Ziffern an Ziffern erblickt. Ich bediene mich dieser Ausgabe gern, wenn die Zahlen nicht über 20000 gehn.

5. Oder einer nach ihr ausgefertigten: Tafel der Sinusse, Tangenten, und Secanten mit ihren Logarithmen, nebst den Logarithmen der natürlichen Zahlen, von 1 bis 20000; Wien 1777. Hr. L. Unterberger, Major von der K. K. Feldartillerie, und Hr. Joseph Pichler, Oberlieutenant des K. K. Artilleriecorps, haben diese neue Ausgabe von Rivards Tafeln besorgt.

6. Shervins Mathematical Tables ..... by W. Gardiner, Lond. 1742 fol. Tables de Logarithmes contenant les logarithmes et les nombres depuis, jusqu'à 102100 ... Avignon 1770. fol.

Sherwins Mathematical Tables mehrmahl, in Octav, die fünfte Ausgabe by Sam. Clark 1770; die gemeinen Zahlen mit ihren Logarithmen bis 101000;

Two tables of Logarithmes ... von Roe und Wingate, Lond. 1633; 8. die Logarithmen für alle Zahlen bis 100000.

Wer die Tafeln zum Gebrauche bekömmt, wird sich leicht in sie finden; Umständlich habe ich sie in vorerwähnter astronomischen Abhandlung beschrieben.

7. In Deutschland sind zwar sehr viel Ausgaben kleinerer Tafeln erschienen, wo die Logarithmen für Zahlen bis 10000 gehn, aber grössere musste man immer jenseits des Wassers verschreiben. Hr. Joh. Carl Schulz, Mitgl. der K. Preuss. Akad. der Wissensch. jeziger K. Preuss. Oberbaurath, hat endlich diesem Mangel abgeholfen: Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer u. a. zum Gebrauch der Mathematik dienlicher Tafeln, Berlin 1778. Auch mit französischem Titel: Recueil de Tables Logarithmiques Trigonometriques . . . Ich setze den Titel ausführlich her, weil jemand, der nur überhaupt von einem Buchhändler Schulzische oder Berlinische Tafeln verlangte, leicht die Sammlung astronomischer Tafeln, Berlin 1776; 3 Bände, bekommen könnte.

8. Die Tafel der Briggischen Logarithmen für die gemeinen Zahlen, ist nach Sherwins Octavtafel abgedruckt, die Zahlen gehn also auch bis 101000. Wie man sie mit den zugehörigen Logarithmen aufsucht, lehrt die Einleitung. Die drey höchsten Decimalzifern, jedes Logarithmen, stehn besonders, an der Stelle, wo sie zuerst in einem Logarithmen vorkommen: die vier niedrigsten, finden sich in schmalen Spalten, und weil bey mehr nach einander folgenden

Loga-

Logarithmen, vier andere und andere niedrigere Zifern, zu einerley drey höchsten gehören, so sind andere drey höchste, nur da angesetzt, wo mit ihnen, eine Aenderung vorgeht: Man muß also immer einerley drey höchste zu mehrern vier niedrigern nehmen.

9. Diese Vorschrift erfodert doch oft eine Ausnahme, die sich am besten durch ein Exempel erläutern läßt.

Bey 27290; sind die sieben Decimalzifern des Logarithmen: 4360035; die drey höchsten gehören zu mehrerer folgende Logarithmen vier niedrigsten. So findet man für die Zahl 27352; die vier niedrigsten: 9891 und des Logarithmen sieben Decimalzifern sind 4369891.

Nun aber stehn in eben der Zeile, darinn sich 9891 finden, gleich daran zur rechten Hand; 0050 als die vier niedrigsten Zifern von log 27353;

Es ist offenbar, daß man nicht sagen kann, dieses Logarithmen sieben niedrigste Zifern seyn 4360050; denn so wäre er kleiner, als der Logarithme der nächst vorhergehenden Zahl.

Also muß man diese Ziffern wohl so annehmen 4370050

Das zeigt, daß man zuweilen, die niedrigste der drey höchsten Zifern um 1 vergrössern muß, wenn nähmlich die höchste der vier niedrigsten, in einer Zeile, wo sie zuvor 9 war, 0 wird.

Stehn aber die drey höchsten Zifern am Anfange einer Zeile, wo die ersten vier niedrig-

sten, zur höchsten eine 0 haben, so ist keine solche Aenderung nöthig, wovon eben der gebrauchte log 27290 ein Beyspiel ist.

Man muß also bey der Zusammenfügung der drey höchsten Zifern und der vier niedrigsten eine Aufmerksamkeit anwenden, deren Vernachlässigung manchmahl sehr falsche Rechnung verursachen würde.

10. Diese Aufmerksamkeit, ist bey allen bisher genannten grössern Tafeln nöthig, nur bey nachstehenden erspart: Tables portatives des logarithmes, publiées à Londres par Gardiner, augmentées et perfectionnées dans leur disposition par Mr. Callet . . . Paris 1783; 8.

Da sind die drey höchsten Decimalzifern, so gestellt, daß allemahl, wo sie sich ändern, die drey geänderten, mit den ersten vier niedrigern, die zu ihnen gehören, in einer Zeile stehen. Etwas weniges mehr Papier, das diese Stellung erfodert, wird überflüssig durch die Bequemlichkeit und Sicherheit vor Irrthum bezahlt, die sie verschafft.

Die Zahlen gehn in diesen Tafeln bis 102960. Hr. Callet hatte die Logarithmen bis 103000 berechnet, man hat aber die letzten weggelassen, weil Raum für sie fehlte. So waren 39 Logarithmen nicht ein Blatt Papier werth.

11. Logarithmische, Trigonometrische u. a. zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln, herausgegeben von Georg Vega,

Vega, Unterlieutenant und Lehrer der Mathematik bey dem K. K. zweyten Feldartillerieregiment, Wien 1783. 8. Nach einer besonders gedruckten Nachricht ward für die erste Entdeckung eines Fehlers in diesen Tafeln, der zu falschen Rechnungen Anlaß geben könnte, ein Kaiserl. Ducaten versprochen. Die Zahlen, für welche Briggische Logarithmen hie zu finden sind, gehen bis 100499.

Bey diesen grössern logarithmischen Tafeln (6 ... 10) finden sich, auser den Unterschieden jedes Paars nächsten Logarithmen (III; 14) auch die Proportionaltheile, so angeben, wie (III; 21) ein Beyspiel darstellt und den Gebrauch zeigt.

Georg Vega logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, Leipzig 1793. 8; giebt die Logarithmen bis 100999, und zeigt durch * an, wenn die dritte Zifer um 1 zu vergrössern ist.

12. Manche der angezeigten Tafeln macht einen Theil einer Sammlung aus, welche auser den trigonometrischen Zahlen und Logarithmen, noch mehr Tafeln enthält, die auch bey Anwendung der gemeinen Rechenkunst brauchbar sind. So findet man bey Wolfs Tafeln (3) Quadrate und Würfel der ersten 1000 Zahlen, bey Schulzens (7) auser diesen Quadraten und Würfeln auch, von Hrn. Prof. Röhl in Greifswalde, bis auf Zehnmilliontheile berechnete Quadratwurzeln und Enbikwurzeln aus allen Zahlen von 1 . . . 1000; auch Tafeln von eignen

Schweren unterschiedner Materien, Vergleichungen von Gewichten und Massen. Eben dergleichen Tafeln hat Hr. Vega (11) den seinigen beygefügt.

Briggische Logarithmen in mehr Decimalstellen.

13. v. Clausberg hat dergleichen bis auf 32 Decimalstellen für die ersten 100 Zahlen mitgetheilt; Demonstrative Rechenkunst III. Th. 1474; In den zu Avignon herausgekommenen Tafeln (6) finden sich bis auf 20 Decimalstellen die Logarithmen von 1 ... 1161; und von 101000 ... 101139, über deren Gebrauch man meine IV. astron. Abh. nachlesen kann. In den Sherwinischen Tafeln nach Clarks Ausgabe (6) von Sharp auf 60 Decimalstellen berechnete Logarithmen, für 1 ... 100 und für die Zahlen, die sich nicht in Factoren zerfällen lassen bis 1097; auch für Zahlen von 99980 ... 1000019 (IV. astron. Abh. 31; XXV ...)

14. Eine Anwendung davon ist, den Logarithmen einer Potenz zu finden, die einen grossen Exponenten hat. Nähme man den Logarithmen der Wurzel aus den gewöhnlichen Tafeln, so hätte man schon deßwegen der Potenz Logarithmen nicht auf 7 Decimalstellen richtig, weil man der Wurzel ihren nur so weit hat. Zu dieser Absicht hat v. Clausberg seine Logarith-

rithmen berechnet, und ein Beyspiel dieses Gebrauchs giebt hie I. Abschn. 31.

15. Das nur angezeigte Exempel zeigt einen andern Gebrauch solcher in mehr Decimalstellen angegebenen Logarithmen, nähmlich, wie sie sind verändert worden, Logarithmen mit sieben Decimalstellen aus ihnen zu machen; davon ist der dortige log 2; ein Beyspiel.

16. Wenn ein Paar grosse Zahlen um 1 unterschieden sind, so ist der Unterschied ihrer Logarithmen viel geringer, als der zwischen den Logarithmen von ein Paar kleinern Zahlen, die auch um 1 unterschieden sind. Die Logarithmen von 100700 und 100701 sind nur um 43 unterschieden, und dieser Unterschied bleibt in Schulzens Tafeln 8) bis an das letzte Paar der daselbst befindlichen Logarithmen; In den Avignoner Tafeln sind die beyden letzten Logarithmen

log 102098 = 5,00891723
log 102099 = 5,00892149
Unterschied = 426

Welcher Unterschied also noch nicht 43 Zehnmilliontheile beträgt, da diese beyden Logarithmen bis auf acht Decimalstellen angegeben sind.

17. Man begreift also leicht, daß für ein Paar Zahlen von sehr viel Zifern, deren niedrigste Zifern um eine, ihrer Einheiten, unterschieden sind, die Logarithmen vielleicht nicht mehr in Zehnmillionstheilchen unterschieden sind,

eben wie in nur angeführten Exempeln, die nächsten Logarithmen nicht mehr in Hunderttausendtheilen unterschieden sind.

Solcher Zahlen Logarithmen müssen also in mehr als sieben Decimalstellen angegeben werden.

18. Ich habe mit Bedacht gesagt: Zahlen, die viel Zifern haben. Will man sie grosse nennen, so muß man bedenken, daß dieses nur die Bedeutung haben kann: Daß sie eine grosse Menge der Einheiten ihrer niedrigsten Zifer andeuten, diese Einheit selbst aber, könnte was sehr kleines seyn, und so die Zahl nur eine geringe Grösse ausmachen.

Für gegenwärtige Betrachtung des **Unterschiedes** der Logarithmen wäre das nun einerley, weil bey diesem Unterschiede, beyder Logarithmen Kennzifer wegfällt, und z. E. log 0,102098 und log 0,102099 eben den Unterschied geben, der vorhin zwischen den Logarithmen dieser beyden Zahlen, als ganze Zahlen betrachtet, ist gefunden worden.

19. Da man Logarithmen nicht nur für ganze Zahlen von vielen Zifern braucht, sondern häufig auch vermittelst ihrer Decimalbrüche auf viel Stellen berechnen will, so ist begreiflich, daß auch, die letzte Absicht zu erreichen, Logarithmen auf mehr als sieben Decimalstellen dienlich wären, bey denen sich auch Proportionaltheile zu schärfern Bestimmungen brauchen liessen, als man mit den gewöhnlichen Logarithmen erreicht.

20.

20. So hat Hugen die Verhältniß der Octave 2 : 1 in 31 Theile zu theilen, Logarithmen mit zehn Decimalstellen gebraucht, Novus Cyclus Harmonicus; Christiani Hugenii Opera Varia (Lugd. Bat. 1724; 4.) Tom. III. Astronomica p. 747.

21. Die in (13) angeführten Logarithmen von viel Decimalstellen haben eben die Absicht, aus ihnen, wenn es nöthig ist, andere Logarithmen auf mehr Decimalstellen als sieben zu berechnen.

22. In den Anwendungen der gemeinen Rechenkunst, kömmt auser dem Falle, wo man Logarithmen von Potenzen sucht, eben nicht häufig vor, daß man Logarithmen auf mehr Decimalstellen nöthig hätte, ich kann mich daher begnügen, dieses nur anzuzeigen.

23. Vielmehr haben einige Ausgeber logarithmischer Tafeln, selbst von den sieben Decimalstellen eine oder ein Paar für entbehrlich gehalten. Bey Archibald Patoun, compleat Treatise of Practical Navigation, Lond. 1730; finden sich die Logarithmen für 1 . . . 10000 in fünf Decimalstellen, oder: Hunderttausendtheilchen, die trigonometrischen eben so weit. Mit Logarithmen von fünf Decimalstellen, führte selbst Tobias Mayer seine Rechnungen, des Monds Bewegung um seine Axe, und die Selenographie betreffend. Kosmographische Nachrichten und Sammlungen auf 1748. (Nürnb. 1748) in der Abh. über die Umwäl-

zung

zung des Mondes um seine Axe. In Thom. Streete Astronomia Carolina, die zu Nürnb. 1704; nachgedruckt ist, finden sich die trigonometrischen Logarithmen auf 6 Decimalstellen. Allemahl wird man freylich gern die mit sieben Decimalstellen brauchen, die man so allgemein haben kann, und so desto sicherer seyn, daß sie zulänglich sind, da selbst Astronomen sich mit mehr abgekürzten befriedigt haben.

Zur Geschichte des Gebrauchs der Logarithmen.

23b. Als Henrion Prof. der Math. in Paris im Jahre 1622 sich in Holland befand, ersuchten ihn verschiedne deutsche Kaufleute, ihnen den Calcul mit Logarithmen der 14 Jahre vorher von Neper war erfunden worden, begreiflich zu machen. Erzählt Girtanner in St. Gallen, Journal für Fabrik, Manufactur, Handlung und Mode. Februar 1797; 108 Seite.

Girtanner meldet nicht, woher er diese Nachricht hat.

Neper bestimmte seine Logarithmen ursprünglich für sphärische Trigonometrie, wo Logarithmen gemeiner Zahlen gar nicht gebraucht werden. Er fügte seinen Logarithmen freylich die Sinus bey, in der Absicht, daß man solchergestalt Zahlen und ihre Logarithmen neben einander hätte, und seine Logarithmen auch als Logarithmen gemeiner Zahlen brauchen könnte. Aber die

Si-

Sinus wachsen nicht nach gleichen Unterschieden, und so würde man ihre Logarithmen als Logarithmen gemeiner Zahlen nur mit Proportionaltheilen brauchen können, welches die Rechnung sehr mühsam machen würde.

von Oppel schlug einen ähnlichen Gebrauch der Briggischen trigonometrischen Logarithmen vor. Ich habe von solchem in meinen Anmerkungen über die Markscheidekunst geredet. 9. Anm. 20 u. f. §. Bey den Neperischen würden die Zeichen + und — die Sachen noch mehr verwickeln.

Keplers Chilias logarithmorum, wo die Zahlen nach gleichen Unterschieden wachsen, mit Neperischen Logarithmen neben ihnen, erschien 1624, und Crügers Praxis Trigonometriae Logarithmicae mit Neperischen Logarithmen für die ersten 10000 Zahlen 1634; Von beyden sehe man meine geometrischen Abhandlungen 1. Sammlung, 60. Abh. 495 und 508 S.

Ich möchte also wohl sehen, wie Henrion eine Kaufmannsrechnung mit Neperischen trigometrischen Logarithmen dargestellt hätte.

Logarithmen waren im ersten Viertheile des siebenzehnten Jahrhunderts, selbst Mathematikern nicht sehr gewöhnlich. So müssten die damaligen Kaufleute nach unthematischen Vortheilen viel lehrbegieriger gewesen seyn als die jezigen.

Byr-

Byrgii Logarithmen.

24. Just Byrgius, ein Schweizer, der ohne Kenntniß der gelehrten Sprachen, in Theorie und Ausübung der Mathematik, Erfindung und Verfertigung mathematischer Werkzeuge sehr stark war, hat auch Logarithmen berechnet. Dieß war unter andern aus Keplers Nachricht, in den Praeceptis vor den Tab. Rudolphinis bekannt, die ich 4. Astron. Abh. 61. §. angeführt habe. Kepler druckt sich aber da so aus, daß man schliessen kann, B. habe so gezaudert, daß seine Erfindung nicht zum gemeinen Nutzen vollendet worden sey.

Das ist indessen nicht ganz richtig. B. hat in der That seine Erfindung so weit ausgeführt, daß sie zum gemeinen Nutzen hätte können angewandt werden, wenn sie nicht durch Briggs Logarithmen wäre verdrungen worden, die um eben die Zeit, bald allgemeiner bekannt wurden, auch allerdings noch bequemer eingerichtet sind. Die Nachricht, die ich hie von Byrgs Logarithmen geben kann, ist zwar für den Gebrauch der Logarithmen sehr entbehrlich, wird aber doch lesenswerth seyn, da alles Aufmerksamkeit verdient, was zur Geschichte einer so nützlichen Erfindung gehört, als die Logarithmen sind.

25. In Hrn. Prof. Scheibels zu Breslau, Einleitung zur mathematischen Bücherkenntniß, X. St. 444. S. fand ich folgende Stelle, die in Benjamin Bramers Beschreibung eines sehr leich-

leichten Perspectiv- und grundreissenden Instruments (Cassel 1630) in der Zuschrift an Faulhabern steht:

"Aus diesem Fundament hat mein lieber Schwager und Präceptor Jobst Burgi vor zwanzig und mehr Jahren eine schöne Progreßtabul mit ihren Differenzen von 10 zu 10 in 9 Zifern calculirt, auch zu Prag, ohne Bericht in Anno 1620 drucken lassen. Und ist also die Invention der Logarith. nicht des Neperi, sondern von gedachtem Burgi (wie solches vielen wissend, und ihm auch Herr Keplerus Zeugniß giebt) lange zuvor erfunden."

26. Diese Stelle gab mir wegen einiger gedruckter Bogen Licht, die ich nicht gar zu lange besessen hatte, ohne zu wissen, was ich aus ihnen machen sollte.

Lowizens Büchersammlung, die hie 1776 verauctionirt ward, enthielt auch viel alte merkwürdige und seltene Bücher, L. hatte Doppelmayrs Bibliothek gekauft, und in dieser waren Bücher aus Joh. Christoph Sturms seiner gewesen. Es wurden auch ungebundene oder ausgeschnittene Sachen verkauft, und ich nahm, wie hie nöthig war, unbesehens, jedes Pack, dessen Preiß ich vergessen konnte, wenn es etwa nichts für mich Brauchbares enthielt.

27. In einem dieser Packe, fanden sich $7\frac{1}{2}$ Bogen in Quart mit folgendem Titel:

Arithmetische und Geometrische Progreß Tabulen, sambt gründlichem unterricht, wie

solche

solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden sol. Gedruckt, In der Alten Stadt Prag, bey Paul Sessen, der Löblichen Universitet Buchdrucker, Im Jahr 1640.

Noch finden sich auf dem Titelblatte, vier concentrische Kreise, der beydin innern Peripherien schwarz, der beyden äusern roth. — Durch das Versehen, daß, was roth ist, nicht genau genug nach dem Abdrucke des schwarzen ist eingesetzt worden, sind die rothen Peripherien den schwarzen nicht genau concentrisch, wie sie doch der Absicht nach seyn sollen.

In dem Kreisringe zwischen den beyden schwarzen Peripherien stehen Zahlen mit schwarzen Zifern ausgedruckt, in dem zwischen beyden rothen Peripherien, Zahlen mit rothen Zifern. Jede Zahl steht so, daß ein Halbmesser durch ihre Zifern geht, die höchste Zifer steht zunächst an der äussersten Peripherie des Ringes, in dem sich die Zahl befindet. Woraus folgt, daß jemand, der die Zahlen in dem Ringe nach einander lesen will, die Kreise um ihren Mittelpunct drehen muß.

In dem leeren Raume, innerhalb des Umfangs des kleinsten schwarzen Kreises steht:

I. B.

Die ganze Rote Zahl

0

230270022

Die ganze Schwarze Zahl

1000 000 000

Die

Die drey ersten Zeilen sind roth gedruckt, die beyden letzten schwarz.

Den gründlichen Unterricht, den der Titel verspricht, kenne ich nicht. Vielleicht ist er nicht gedruckt worden, wie (25) die Worte ohne Bericht anzuzeigen scheinen.

28. Bey arithmetischen und geometrischen Progreßtafeln hätte ich freylich sogleich an Logarithmen denken können. Daß ich indessen mir nicht eher entwickelte, was diese Blätter enthielten, bis Vorerwähntes mich auf sie aufmerksam machte, deßwegen wird wohl die Entschuldigung genug seyn, wenn ja eine nöthig ist, daß von mehrern meiner Bücher den blos litterarischen Gebrauch zu machen verschoben wird, bis ich Muße und Anlaß dazu habe. Auch dachte ich bey den Buchstaben I. B. nicht an Jobst Burgen, sondern mehr an Jacob Bartschen, Keplers Schwiegersohn.

29. Die Tafeln selbst sind nun folgendergestalt beschaffen:

Jede Quartseite enthält acht breite Spalten mit schwarzen Zifern, und linker Hand, eine schmale mit rothen.

Ueber jeder der breiten Spalten, steht eine Zahl mit rothen Zifern.

Diese will ich Columnentitel nennen.

Man begreift leicht, daß ein solcher Columnentitel, mit jeder rothen Zahl in der schmalen Spalte auf der Seite, wo er steht, zusammen eine gewisse rothe Zahl ausmachen wird; und

daß zu dieser die schwarze Zahl gehören wird, die sich in der Spalte unter dem Columnentitel und in einer Zeile mit der in der schmalen Spalte, oder neben dieser, befindet.

30. Auf der ersten Seite sind die rothen Columnentitel 0; 500; 1000; 1500; 2000; 2500; 3000; 3500;

In der schmalen Spalte stehn rothe Zahlen 0; 10; 20; . . . alle Decaden, die letzte die 50ste oder die Zahl 500.

Das erste fodert also 51 = 17. 3 Zeilen, jede drey sind durch einen Strich quer über die Seite abgesondert.

Man wird leicht muthmaassen, daß diese Zahlen 0; 10; 20; . . . 500 in allen Seitenspalten einerley bleiben.

Auf der letzten Seite sind nur 4 ganze breite Columnen, mit den Titeln 228000 . . . . 229500.

Und noch ein Paar breite, eine mit rothen Zifern, die andere mit schwarzen, über jeder steht 230000, sie gehn aber nicht die ganze Seite herunter, sondern unter ihnen steht:

"Also endigen sich die zwo Summen Zalen in 9 Zyphern, und ist die rothe:

236270022 —

230270023 +

Die schwarze aber ist ganz mit 9 Nollen als 1000000000, und so dieselben ganzen Zalen nicht genug geben mögen, so mag man dieselben, 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9 zusammen addiren."

Das

Das ist aller Text, der sich bey diesen Tafeln findet.

31. Nun, die Bedeutung dieser Zahlen zu entwickeln, machte ich mir folgende

Hypothese.

32. Die rothen Zahlen sind Logarithmen der schwarzen.

33. Hiezu hatte ich folgende Gründe:

Unter den rothen Zahlen kömmt 0 vor, steht bey der schwarzen 100000000

Da nun der Logarithme von 0, verneint unendlich ist, so kann die rothe 0 nicht eine natürliche Zahl bedeuten, deren Logarithme unter den schwarzen zu finden wäre.

Gegentheils, kann einem einfallen, die rothe 0 sey der Logarithme von 1; und diese 1 sey durch 100000000 ausgedruckt, damit man die Zahlen, welche diesem Logarithmen zugehören, bis auf 9 Zifern angeben könne.

34. Was wäre alsdann die rothe Zahl 10?

Sie steht bey der schwarzen

$$100010000 = 1^{8} + 1^{4}$$

Prüfung der Hypothese.

35. Ist also die rothe 10 der schwarzen Logarithme; So ist 20 der Logarithme des Quadrats, welches = 1000 2000 100000000

Es steht aber 20 roth, bey 1000 20001 schwarz.

36. Eben so, müsste die rothe Zahl 30 als Logarithme, beym Würfel der schwarzen stehn, bey der die rothe 10 steht.

Dieser Würfel wäre $= 1^{24} + 3^{20} + 3^{16} + 1^{12}$

Es steht aber die rothe 30 bey der schwarzen 1000 30003

37. So stehen also bey den rothen 20 und 30; schwarz die höchsten Zifern des Quadrats und Würfels.

38. Eben so, wenn ich die beyden schwarzen Zahlen, die bey den rothen 3000; 2000; stehen, multiplicire, finde ich des Products höchste Zifern, schwarz, bey der rothen 5000.

39. Also ist kein Zweifel, daß die rothen Zahlen Logarithmen der schwarzen sind.

40. Die rothen gehn nach gleichen Unterschieden fort, also hat B. sie angenommen, und jeder zugehörige schwarze berechnet: Zu dem Logarithmen die Zahl berechnet, wie bey der gewöhnlichen Vorstellung, zu der Zahl der Logarithme berechnet wird.

41. So wird er auch zu dem angenommenen Logarithmen, die Zahl nicht ganz richtig angeben, sondern nur der Wahrheit so nah, als ihm zulänglich ist, eben wie in unsern Tafeln, bey der Zahl nicht der völlige Logarithme steht, sondern nur bis auf Zehnmilliontheilchen.

Das erklärt, warum in (35 . . . 38) bey den rothen Zahlen als schwarze nur die höchsten Zifern der Potenzen und des Products stehn.

42.

42. Nun fragt sich also nach dem System dieser Logarithmen: Kann man nicht eine rothe Zahl angeben, der genau eine gewisse schwarze gehört, wie bey dem Briggischen System 10 zum Logarithmen 1 gehört?

43. Um diese Logarithmen auf die Voraussetzung log 1 = 0 zu bringen, sehe man (33) die schwarze Zahl, die bey der rothen 0 steht, als 1,00000000 an.

44. Die allerletzte und grösste schwarze Zahl am Ende der Tafel, besteht aus neun Neunen. Läßt man von denselben, die höchste, Ganze bedeuten, daß die übrigen nach der Ordnung in Decimalstellen kommen, und die niedrigste, deren Ordnung — 8 ist, Hundertmillionentheile bedeuten, so ist die grösste schwarze Zahl, unmerklich von 10 unterschieden.

45. Man kann also sagen, die schwarzen Zahlen gehn von 1 (43) bis 10 (44).

46. Neben dieser grössten schwarzen Zahl, die ich also für 10 annehme, steht in der breiten Columne mit rothen Zifern (30)

230270022

Man darf aber nicht annehmen, daß dieser rothen Zahl niedrigste Zifer Ganze bedeutet.

47. Denn der rothe Columnentitel über ihr ist $\overset{0}{2}30000$, wo deutlich die 0 oben, die Stelle der Einheiten bezeichnet, völlig so wie wenn wir die Ordnung 0 andeuten.

Eben diese rothe Zahl, nur ohne o über der niedrigsten Stelle, ist auch Columnentitel über der schwarzen Columne, in der sich erwähnte grösste schwarze Zahl befindet.

48. Also muß man die rothe Zahl (46) so verstehn 230270,022

49. Und so erklärt sich auch, was auf dem Titelblatte steht, (27) die ganze rothe Zahl, völlig wie in (48) nur die Stelle der Einheiten mit o über ihr bezeichnet, und die ganze schwarze Zahl, 10 mit acht Nullen, vollkommen mit meiner Angabe (45; 43) übereinstimmend.

50. Ich will die rothe Zahl (48) = p nennen.

51. So ist log byrgian 10 = p; oder Byrg theilt die geometrische Verhältniß 1 : 10 in p Theile ein.

52. Es sey irgend eine andre Zahl $N = 10^m$.

53. So ist log byrg N = m. p

54. Aber aus der Natur der Briggischen Logarithmen, ist log briggian N = m

55. Also log byrg N = p. log brigg N

56. Exempel. Bey Byrgs rother Zahl 990 steht die schwarze 1,00994867 = N

Nähmlich die Zifern dieser Zahl, ohne Bezeichnung der Stelle der Einheiten, diese Stelle aber bezeichne ich nach (43).

Nun findet sich in Sherwins Tafeln

log brigg 1,00994 = 0,0042956. Daraus

log brigg 1,00994867 = 0,0042993

durch Proportionaltheile.

Die Rechnung aber giebt

p.

p. log brigg N = 989,999905

Das ist ohne merklichen Fehler,

990 = log byrg N.

57. Hieraus giebt sich also folgende allgemeine Vorstellung von Byrgs Tafel.

58. Sie enthält ein Logarithmisches System, wo log 1 = 0 und log 10 = 230270,022

59. Es sind aber nicht, wie in den gewöhnlichen Tafeln, die Logarithmen nach den Zahlen geordnet, sondern die Zahlen nach den Logarithmen.

60. Die Logarithmen wachsen von 0 an immer durch 10 bis an 230000, welches log 9,97303557 ist.

61. Ferner wachsen sie noch durch 10, bis 230270; darüber wachsen sie noch um 0,020; 0,021; 0,022; wo sie aufhören (48).

62. Die schwarzen Zahlen, oder die Zahlen zu diesen Logarithmen, gehen also in ungleichen Differenzen fort;

Von 1 bis 10; wenn log byrg 1 = 0 (51)

63. Oder von 100 Millionen bis 1000 Millionen, wenn man die schwarzen Zahlen alle als Ganze ansieht, und für 100 Millionen den Byrgischen Logarithmen = 0 setzt.

Da liessen sich aber die gewöhnlichen Regeln, mit Logarithmen zu rechnen, nicht wohl anbringen, weil solche log 1 = 0 setzen.

64. Ich würde also mit diesen Tafeln so rechnen.

Gesetzt, ich suchte vermittelst ihrer Logarithmen: $\frac{F \cdot G}{E} = H$

So stelle ich mir vor, jede der drey gegebenen Zahlen sey mit 100 Millionen dividirt, und nenne diese Quotienten, e, f, g;

Nun sey $\frac{f \cdot g}{e} = h$

So ist auch $h = \frac{H}{100000000}$

Nun sehe ich die schwarzen Zahlen alle als Hundertmilliontheile an (62)

Und suche unter ihnen e, f, g,

So giebt die Summe der beyden rothen zu f und g gehörigen, weniger der rothen zu e gehörigen, die rothe zu h gehörige, oder log byrg h. Finde ich also h in der Tafel, so habe ich auch H.

65. Exempel. Es sey
E = 100994867 (56)
F = 100030003 (36)
G = 939227936

Wenn ich jede dieser Zahlen mit Hundertmillionen, dividire, und sie so verändert unter den schwarzen Zahlen aufsuche, die schwarzen Zahlen aber als Hundertmilliontheile ansehe; So geben die rothen Zahlen, die den schwarzen zugehören

log

log byrg f = 30 (36)
log byrg g = 224000
Summe = 224030
log byrg e = 990 (56)
log byrg h = 223040

Diese rothe Zahl steht bey der schwarzen 930254936

So wäre H = dieser schwarzen, wenn man derselben niedrigste Zifer, Ganze gelten lässt.

Um davon leicht eine Probe zu machen, schneide ich von E, F, G, die vier niedrigsten Zifern ab, und brauche die Briggischen Logarithmen der vier höchsten

log 10003 = 4,0001303
log 93923 = 4,9727720
8,9729023
log 10099 = 4,0042784
4,9686239

gehört zu 93029

Nur in der fünften Zifer von der linken Hand her von dem unterschieden, was Byrgs Tafeln angeben.

Etwas gröſſer, weil ich des zweyten Factors fünfte Zifer von der linken Hand her 3 genommen habe, die in G nur 2 ist.

So wird also die Rechnung mit den Byrgischen Logarithmen, durch die mit den Briggischen bestätigt.

66. Byrgs Logarithmen, würden also bey grossen Zahlen nützlich seyn.

Aber nicht jede gegebene Zahl mit Hundertmillionen dividirt, würde sich selbst unter den schwarzen finden, sondern oft zwischen ein Paar nächste schwarze fallen.

Da müsste man ihren Byrgischen Logarithmen oft durch Proportionaltheile suchen.

67. Wie dieses geschähe, und alles Bisherige etwa noch bequemer einzurichten wäre, davon ist wohl hie nicht der Ort zu reden. Bey Tafeln, die vermuthlich den wenigsten meiner Leser zu Gesichte kommen, hätte ich mich viel zu lange aufgehalten, wenn mich nicht das rechtfertigte, daß doch jedem Deutschen, Logarithmen von einem Deutschen erfunden, merkwürdig seyn werden.

68. Benjamin Bramer, fürstl. Hess. Rent- und Baumeister zu Ziegenhayn, gab 1648; einen Bericht von Jobsten Burgi geometrischem Triangularinstrument heraus; einem Feldmesserwerkzeuge. Der Bericht ist auch als dritter Theil oder Anhang zu Bramers Apollonius Cattus, dritte Aufl. Cassel 1684. 4. herausgekommen. In Bramers Vorrede zu diesem Berichte, gleich im Anfange gehört folgendes hieher: Die Vorrede ist um 1648 geschrieben.

"Es hat mein lieber Präceptor und Schwager, Jobst Burgi, Kayf. Mayest. Rudolphi Matth. und Ferdinandi, bestellter Cammer-Uhrmacher zu Cassel, und ins 43 Jahr Fürstl. Hessischer Uhrmacher zu Cassel, seliger, vor ungefähr 56 Jahren, zum Bericht seines inventirten

ten Triangular-Instruments, von Anthonio Eisenhauten, Kupferstechern und Goldschmieden zu Warburg, gegenwärtige Figuren erstlich schneiden lassen, ... es ist aber kein Bericht dabey verfertiget worden, ohne was ich in Anno 1609, als ich bey demselben mich aufgehalten, über etliche Figuren zum Messen bloß entworffen, weil er aber endlich willens gewesen, diesen Bericht gänzlich verfertigen zu lassen, und denselben also auch seine schöne progres Tabulen, und die Tabulas Sinuum so er in Grad, minuten und von 2 zu 2 Secunden mit unsäglicher Arbeit calculiret, auff vieler Anhalten in Truck kommen zu lassen willens gewesen, wie dann 1619 sein des Burgi S. Bildniß von Aegidio Satlern Kayf. Mayest. Kupferstechern in den Titul gestochen worden, weil aber die in ganz Teutschland noch wehrende grosse Unruhe, sich damahls in Böhmen entsponnen, und daselbsten einen Anfang genommen, ist solches alles liegen verblieben, bis er endlich in Anno 1632 sich in hohem Alter wieder nacher Cassel begeben, und folgendes Jahr auch daselbsten verstorben, seynd mir solche Kupfer neben andern zugewachsen ....."

69. Diese Stelle schien mir werth, hie beygefügt zu werden, weil sie, auser einigen andern Umständen vom Burg, auch die Progreßtafeln erwähnt, ohne zu melden, daß sie schon gedruckt waren. War Bramern das nicht bekannt? oder bezieht es sich auf Burgs Absicht, eine neue Ausgabe zu veranstalten? Ver-

Vermittelst der logarithmischen Tafeln den Logarithmen einer Zahl zu finden, die viel Zifern hat.

70. In der Formel $1 + \frac{n}{2880}$ lasse man n von 1 bis 25919 wachsen, so hat man uneigentliche Brüche, vom gemeinschaftlichen Nenner 2880; des kleinsten Zähler ist = 288; des grössten 28799. Sie wachsen um $\frac{1}{2880}$ = 0,000347222... Druckt man ihre Werthe in Decimalzifern aus, so gehn die Zifern ohne Ende fort. Der grösste ist = 9,99965277...

Die letzten Zifern bleiben immer eben dieselben.

Man findet jeder dieser Brüche Logarithmen aus den gewöhnlichen Tafeln.

Man setze also neben einander: die Reihe dieser Brüche, jedes Ausdruck in Decimalbrüchen, jedes Logarithmen.

Man kann auch in einer solchen Tafel die Ausdrücke durch Zähler und Nenner weglassen, und nur die in Decimalzifern beyfügen. Jene findet man leicht, wenn man weiß, was n an jeder Stelle der Tafel ist.

Eine gegebene Zahl mit vielen Zifern, wird allemahl zwischen ein Paar Zahlen der Tafel fallen, nur muß man den Einheiten der Zifern den gehörigen Werth geben.

Also hat man allemahl in der Tafel Logarithmen, zwischen welche der Logarithme der gegebe-

gebenen Zahl fällt, und findet ihn durch Proportionaltheile.

Die Rechnung mit Decimalbrüchen und Logarithmen, nebst dazu gehörigen ganz neu berechneten Tafeln. Ein vollständiges Handbuch zumallgemeinen Gebrauch für Rechner aus allen Classen, von Friedr. Aug. Schröter, K. Preuss. Cassen-Rendanten. Helmst. 1799. 4. Da giebt die dritte Tafel, Logarithmen der Decimalbrüche aller Zähler zum Nenner 28800, ist so was wie ich beschrieben habe. Daß ihr Nenner zehnmahl grösser ist, hat in den Gebrauch, den ich davon machen werde, keinen Einfluß.

Folgendes Exempel habe ich darnach berechnet:

Was ist der Logarithme des Sinus von 20 Graden?

Den Sinustotus = 10 gesetzt, ist in Pitisci Thesauro dieser Sinus = 3,4202014332
der Tafel nächst kleinere Zahl = 3,4201388888

625444

Für die beyden Zahlen der Tafel zwischen welche der Sinus fällt, ist

log 3,4204861111 . . = 0,5340878
log 3,4201388888 . . = 0,5340437

441

Nun für die Proportionaltheile $\frac{1}{2880}$:

625444 = 441 : 9

log

log 0,0000625444	=	0,7961884 — 5
log 441	=	2,6444386
		0,4406270 — 2
log 2880	=	3,4593925
		1,9000195
giebt q	=	79,437
zu		0,5340437
		0,5340516

Das wäre log sin 20° für sin tot = 10; Für sintot = 10000000000 ist er also 9,5340516

So steht er auch in Vegas Thesauro, wonach der hie niedrigsten Zifer noch 846 folgen. Die sind in den kleinern Tafeln weggelassen; daher ist daselbst die niedrigste Zifer 7 statt 6.

Diese sinnreiche Erweiterung des Gebrauchs der Logarithmen verdient gekannt zu werden. Nur wären die Logarithmen der Tafel zu solchem Gebrauche sicherer, wenn man sie in zehn Decimalstellen angegeben hätte.

Schröters Werk enthält auser der Einleitung drey Tafeln. I. Logarithmen bis 10000 II. Vergleichung vieler Münzen mit dem deutschen Thaler, und Logarithmen für solche Vergleichungen. Daß hie die Eintheilung des Thalers in 288 Pfennige Bequemlichkeit giebt, führte ihn auf den Gebrauch der Zahl 28800 den die beschriebene III. Tafel liefert.

V. Abschnitt.

Gebrauch der Logarithmen, Maasse, Gewichte, Geldsorten u. d. g. von denen die Verhältniß gegeben ist, genau eines durch das Andre auszudrucken.

1. Die Absicht gegenwärtiger Vorschriften wird sich am besten anfangs durch ein Exempel erläutern lassen.

2. Bekanntermaassen sind 14 Thl. Hannoverisch Cassengeld = 15 Thl. Gold.

Also 1 Thl. Cass. geld = $(1+\frac{1}{14})$ Thl. Gold
1 Thl. Gold = $(1-\frac{1}{15})$ Thl. CG.

3. Folglich m Thl. CG. = $(m+\frac{1}{14}.m)$ Thl. G.
n Thl. Gold = $(n-\frac{1}{15}n)$ Thl. CG.

4. Man berechnet also leicht für jede vorkommende Frage $\frac{1}{14}.m$; $\frac{1}{15}n$; vermittelst der beständigen Logarithmen von $\frac{1}{14}$ und von $\frac{1}{15}$.

5. Diese beständigen Logarithmen findet man nach Arithm. 6. Cap. 33; so:

$\log\frac{1}{14} = 2 - \log 14 - 2$; also

2,
$\log 14 = 1,1461280$

$2 - \log 14 = 0,8538719$

Daher $2 - \log 14 - 2$ oder
$\log\frac{1}{14} = 0,8538719 - 2$

Eben so $2 - \log 15 - 2$ oder
$\log\frac{1}{15} = 1,8239086 - 2$

6. Es sey m = 3572; oder: Man fragt: So viel Thaler Cassengeld, wie viel sie in Golde betragen?

log

$\log m = 3,5529114$
$\log \frac{1}{14} = 0,8538719 - 2$

$\log \frac{1}{14} \cdot m = 2,4067833$
Folglich $\frac{1}{14}$ m = 255, 14
addirt m = 3572

Summe = 3827, 14

Weil 0,14. 36 = 5,05; und 0,04. 8 = 0,32 so beträgt diese Summe

3827 Thl. 5 Mgl. 0,32 L. Gold.

7. Die Logarithmen geben in diesem Exempel, wenn man keine Proportionaltheile braucht, $\frac{1}{14}$ m nur bis auf Hunderttheile des Thalers; also nicht bis auf einzelne Pfennige, sondern, weil 0,01. 288 = 2,88 etwa bis auf 3 Pfennige. Begreiflich aber ist diese Unsicherheit von 3 Pfennigen, bey Hunderten von Thalern unbeträchtlich.

8. Zur Probe dieser Rechnung verwandele man 3827, 14 = n Thaler Gold in Cassengeld.

$\log 3827,1 = 3,5828698$
Proportionaltheil
zu 4; = 45

$\log 3827,14 = 3,5828743$
$\log \frac{1}{15} = 0,8239086 - 2$

$\log \frac{1}{15} n = 2,4067829$
Nun n = 3827,14
$\frac{1}{15} \cdot n$ = 255,14

$n \cdot (1 - \frac{1}{15}) = 3572$
Völlig = m in (6)

9. All-

9. Allgemein lässt sich dieses folgendergestalt ausdrucken:

10. Ein Paar Geldsorten, Maassen, Gewichte u. d. g. verhalten sich das Grössere zum Kleinern $= a : b$

11. So ist eine Einheit des Grössern $= \frac{a}{b}$ einer Einheit des Kleinern $= \left(1 + \frac{a-b}{b}\right)$ der Einheit des Kleinern.

Eben so, eine Einheit des Kleinern $= \frac{b}{a}$ der Einheit des Grössern $= \left(1 - \frac{a-b}{a}\right)$ der Einheit des Grössern.

12. Also m Einheiten des Grössern $= m. \left(1 + \frac{a-b}{b}\right)$ Einheiten des Kleinern.

Diese Zahl der Einheiten des Kleinern heisse $= n.$

So giebt $n = m. \left(1 + \frac{a-b}{b}\right)$ auch

$$m = n. \left(1 - \frac{a-b}{a}\right)$$

wie man unmittelbar aus der Einheit des Kleinern, durch des Grössern seine ausgedruckt in (12) findet.

13. Da kann man die beständigen Logarith-

men von $\frac{a-b}{b}$; $\frac{a-b}{a}$; berechnen, und findet also, jenen zum log m; diesen zum log n addirt, und die zugehörigen Zahlen aufgesucht, wie viel zu n muß addirt werden, m zu haben, oder von m abgezogen, n zu bekommen.

14. Exempel. Beym Pariser und rheinländischen Fusse, ist Geometr. 32 S. Anm.

$a : b = 14400 : 13913;$

$a - b = 487$

$\log 487 = 2,6875290$

$\log 13913 = 4,1434208$

$\log \frac{a-b}{b} = 0,5441082 - 2$

$\log 487 = 2,6875290$

$\log 1440 = 4,1583625$

$\log \frac{a-b}{a} = 0,5291665 - 2$

15. Diese Logarithmen geben (11)

Pariser Fuß = 1,035003 rheinl.

Rheinl. Fuß = (1 − 0,033819) pariser

= 0,966180 pariser

übereinstimmend mit den Zahlen a. a. O. der Geometrie.

16. Exempel. Man nehme die Erde für eine Kugel an, auf der ein Grad m = 342645 = 68529. 5 pariser Fuß beträgt (Geograph. 20) Wie viel (n) sind das rheinländische.

log

$\log 68529 = 4{,}8358744$
$\log 5 = 0{,}6989700$

$\log m = 5{,}5348444$
$\log \frac{a-b}{b} = 0{,}5441082 - 2$

$\log \frac{m(a-b)}{b} = 4{,}0789526$

gehört der Zahl = 11993
addirt zu m = 342645

giebt n = 354638

21. Weil $\log \frac{a}{b} = 0{,}0149418$ (Geom. 32 S. 1. Anm.)

$\log m = 5{,}5348444$

Ist $\log n = 5{,}5497862$
$\log 354630 = 5{,}5497755$

107

Der Unterschied der Logarithmen giebt n = 354638 wie vorhin.

22. Das Verfahren (20) vermeidet die Proportionaltheile, ist also in dieser Absicht sicherer, und dient in Fällen, auf welche sich die Proportionaltheile nicht gut erstrecken liessen.

23. Klügel Encyklopädie II. Theil physische Geogr. I. Abschn. 421. S. nimmt die Erde für eine Kugel an, deren Durchmesser = 6772754 rheinländische Klafter zu 6 Fuß ist, also ihr Halbmesser = 3386377 Klaftern. Diese Zahl sey = n; Ich suche, wie viel Toisen = m das

beträgt. Die Toise verhält sich begreiflich zur Klafter, wie ein Fuß zum andern, also dienen hie die (14) berechneten Logarithmen.

24. Freylich muß ich hie schon Anfangs Proportionaltheile brauchen, die sich doch aber mit geringerer Unsicherheit bis auf Millionen, als bis auf zehn Millionen erstrecken lassen.

$\log 3386300 = 6{,}5297254$
Proptheil für $77 = \quad 99$

$\log m = 6{,}5297353$

$\log \frac{a-b}{a} = 0{,}5291665 - 2$

$\log \frac{n.(a-b)}{a} = 5{,}0589018$

$\log 114520 = 5{,}0588813$

205

Dieser Unterschied der Logarithmen giebt durch Proportionaltheile

$\frac{n.(a-b)}{a} = 114525$

abzuziehen von $m = 3386377$

$m = 3271852$

$2\,m = 6543704$

25. In Geom. 65. S. habe ich die Erde für eine Kugel genommen, deren Durchmesser = 6544040 Toisen, um 336 grösser als der von Kl. angenommene. Welches bey so viel Millionen nicht viel zu bedeuten hat.

26.

26. Kl. giebt a. a. O. die geographische Meile = 23641 rheinl. Fuß an. Setze ich diese Zahl = n und suche m die Zahl pariser Fuß, die eben so viel betragen, so kömmt

$$\log n = 4{,}3736658$$

$$\log \frac{a-b}{a} = 0{,}5291665 - 2$$

$$2{,}9028323$$

$$\frac{n.(a-b)}{a} = 799{,}52$$

abgezogen von n = 23641

$$m = 22841{,}48$$

$$\frac{1}{6} m = 3806{,}91$$

Die Zahl der Toisen in einer geographischen Meile wäre nach Kl. Angabe = $\frac{1}{6}$ m. In meinen Anfangsgr. der Geographie 41; II; setze ich sie = 3807,17 aus dem von mir angenommenen Halbmesser. Welches also zeigt, daß beyde Halbmesser im Gebrauche nur unbeträchtliche Unterschiede geben.

Rechnungen über Maasse, Gewichte und Geld der französischen Republik.

27. Das Längenmaaß ist der Mêtre . . . nicht das M. Die Franzosen haben kein Neutrum . . .

Nach Connoissance des Tems Ann. IX. p. 227, ist Mêtre = 3 pariser Fuß 11,44 Linien

= Fuß. 3,0794444

Zehntheil, Hundertheil, Tausendtheil davon heisst Decimêtre, Centim. Millim.

28. Logarithmen für Mêtre und Pariser Fuß.

log 443,44 = 2,6468394
log 144 = 2,1583628

log (M:P.F) = 0,4884724

Grösse von Köpfen.

29. Mémoires de l'institut national pour l'An IV. de la république. Sciences, math. et phys. T.I. Paris Themidor VI. Da steht p. 221: Recherches sur le crane humain, über Wachsthum und Abnahme des Hirnschädels.

Ein pariser Kopf à l'age fait hat im Durchmesser 1 decimêtre, 76 millimêtres, also 0,176 mêtres.

logmêtre in Linien = 2,646388
log 0,176 = 0,245127 — 1

1,8913515

giebt 78,046 Linien
= 66 Zoll 6,046 Lin.

Ein pariser Kopf à un an, hat 0,14 m.

2,6468348
log 0,14 = 0,1461280 — 1

1,7929668

giebt 62,082 L. = 5 Zoll 2,082 L.

Also, von einem Jahre bis zum âge fait, wächst des pariser Kopfs Durchmesser um 1 Zoll 13,964 Linien

1,

1,8923513
1,7929668

0,0993847

Die Durchmesser verhalten sich wie 1 : 1,2571

In der Note 221 S. wird berichtet: Der verstorbene M. Chatelain, ein berühmter Hutmacher zu Paris sandte eine Ladung Hüte nach Norden, faits sur des formes de 1 decimêtre 62 millimetres, et de 1 decimêtre 89 millimêtres de diamêtre, wie für die Einwohner von Paris auch wurden solche nach dem spanischen Amerika geschickt. Die Hüte wurden in Norden nicht verkauft, sie fanden sich alle zu klein, sie hätten sollen von 1 decimêtre 89 millimêtres bis 2 decimêtres 17 millimêtres seyn. On cite comme extraordinaires parmi nous, de têtes de cette mesure, leur terme moyen avec le compas de chapelier est de 1 decimêtre 76 millimêtres à l'age fait et de 1 decimêtre 40 millimêtres à un an.

30. In Sammlung astronomischer Abhandlungen ... von J. E. Bode, erster Supplement-Band zu dessen astronomischem Jahrbuche (Berlin 1793) finden sich 242 u. f. S. die republicanischen Maasse, Gewichte und Münzen.

31. Die Einheit des Flächenmaasses, ein Quadrat dessen Seite = 100 mêtres, heisst Are, = 94831 Quadratfuß; des Körpermaasses, Cubus von 10 mêtres, Cade.

32. Gewichte. Einheit: Gewicht des cubischen Decimeter Wasser, Grave =
2 Pf. 0 Once 5 Gros. 49 Grains Markgewicht.

33. Münzeinheit. Ein Silberstück, welches den hundertsten Theil eines grave wiegt, ist 1 franc d'argent, wiegt 188,41 Gran, gilt nach dem alten Gehalt 40 Sous, $10\frac{3}{7}$ deniers.

34. Kreistheilung. Der Quadrant in 100 Theile, die sie auch degrés nennen, ein degré in 100 minutes.

35. Benennungen der Eintheilungen in mehr Nachrichten, findet man bey Boden a. a. O. und in vielen Schriften.

36. Zeit. Der Tag in 10 Stunden, die Stunde in 100 Minuten, die Minute in 100 Secunden.

Also ist die neufranzische Zeitsecunde = 0,864 der Zeitsecunde der übrigen Welt.

37. La Place, Darstellung des Weltsystems, übers. von Hauff. Frf. 1797 2 Bände 8; behält noch den Pariser Fuß.

Er sagt I. B. 132 S., Borda habe die Länge des Secundenpendels auf der pariser Sternwarte, auf leeren Raum gebracht 2,28386 Fuß gefunden. Ich berechne daraus, wie lang das Pendel ist, das eine Secunde der uncitoyennisirten Welt schlägt. Die Vorschriften stehn in meiner höhern Mechanik: II. Abschn. 48., hie kann ich sie nicht weiter erklären.

Dortiges $f = 2,28386$; $t = 0,864$.

log

$\log t = 0{,}9365137 - 1$
verdoppelt $= 0{,}8730274 - 1$
$\log f = 0{,}3586695$

$\log \frac{f}{t^2} = 0{,}488647 = 1$

gehört zu 3,0594 $= \frac{f}{t^2} = a =$ der Länge des Secundenpendels der übrigen Welt.

So ist $a = 3f + 8{,}5536$ Linien
Beym La Lande = 440,5536 Linien,
nicht im leeren Raume
meiner höh. Mech.
II. Abschn. 12. XI. 440,67
La Lande's länger 0,11

Geschwindigkeit des Schalles. La Pl. 176 Seite.

38. Er geht durch 896 Fuß in einer neufranzischen Secunde.

$\log 8{,}938 = 2{,}9526956$
$\log 0{,}864 = 0{,}9365137 - 1$
$3{,}0161819$

gehört zu 1062,1

Man hat sonst 1097 .... 1038 Fuß gefunden, weil es, Fehler der Beobachtungen beyseite gesetzt, auf Wind, Wärme u. d. g. ankömmt. Winkler, Untersuchungen der Natur und Kunst, 238; 240 Seite.

Zeit, die das Licht braucht von der Sonne an die Erde zu kommen. La Pl. 202 Seite.

39. Ist 571 rep. Sec.

log 571 = 2,7566361
log 0,864 = 0,9369137 — 1

2,9931498

Gehört zu 493,34. Giebt diese Zeit 8′ 13″,34. Bradley (meine Astr. 221) setzt sie 8′ 13″.

Fall in einer Secunde.

40. Aus der Pendellänge (36) giebt La Pl. 289 S.; den Fall 11,2704 Fuß

log 11,2074 = 1,0519383
— 2. log t = 0,8730274 + 1

1,1789109

giebt Fall in der gewöhnlichen Secunde 15,0977 F. Uebereinstimmend mit meiner höh. Mech. II. Abschn. 45.

41. So sind La Places bisherige Lehren, bekannte, nur anders ausgedruckt.

Kugel, so groß als ein Sphäroid, das wenig von der Kugel abweicht.

42. Aus meiner weitern Ausführung der mathematischen Geographie III. Cap. II. Abschn. 12; VII, 41 Seite, läßt sich folgendes herleiten:

Der Ellipse Halbmesser für die geographische Breite, deren Sinus $= \frac{1}{\sqrt{3}}$, giebt den Halbmesser

messer einer Kugel, welche so groß ist als das Sphäroid. Die Ellipse muß wenig eccentrisch seyn, wieviel eigentlich darauf kömmt nichts an, weil hie Kleinigkeiten weggelassen werden.

Für diese Breite ist

$$\frac{10}{\frac{1}{2}\log 3 = 0{,}2385606}$$

$$9{,}7614394$$

giebt die Breite 359 Gr. 15 M. 51 S. 42. Man nimmt an, gleiche Massen ziehen gleich stark an. Also zieht die Kugel so stark an als das Sphäroid, Schwungkraft bey beyden beyseite gesetzt. Die Kugel aber zieht an allen Stellen gleich stark an. Auf dem Sphäroid, wird ein Punct in der Nähe des Aequators schwächer angezogen, weil er vom Mittelpuncte entfernter ist.

So fällt in gleicher Zeit, auf dem Sphäroid ein Körper am Aequator nicht so tief als anderswo; auf der Kugel aber, überall gleich tief, weil ihre Stellen alle gleich weit vom Mittelpuncte sind.

Der Fall auf dem Sphäroid in der genannten Breite, ist also so groß, als der Fall überall auf der Kugel.

La Place braucht eben den Halbmesser Massen der Planeten zu vergleichen. II. B. 34 S. sagt er: Um grössere Genauigkeit zu erhalten, muß man für den Halbmesser eines Planeten den nehmen, für welchen das Quadrat des Sinus der Breite $\frac{1}{3}$ ist.

44. Den Halbmesser für erwähnte Breite zu finden, muß man die Eccentricität der Ellipse wissen. Hat man diese, folglich der Ellipse beyde Axen, so ist keine Schwierigkeit, das Sphäroid aus ihnen genau zu berechnen (An. Un. 610. III.). Für die Masse sehe ich also keinen Nutzen vom Gebrauche erwähnten Halbmessers.

45. La Place, Mécanique céleste T. I. prémière partie, livre II. ch. I. p. 118 sagt: Sur le parallele dont le quarré du sinus de la latitude est $\frac{1}{3}$, l'espace que la pesanteur fait decrire dans une seconde, est, d'après les observations de la longueur du pendule égale à 3,6554 mètres.

46. Ist g der Fall in einer gewöhnlichen Secunde, so ist $(0{,}864)^2$. g der Fall in der neufranzischen.

47. Aus (30)

$$\log 3{,}65948 = \begin{array}{r} 0{,}4884724 \\ 0{,}5629444 \end{array}$$

$$-2 \log 0{,}869 = \begin{array}{r} 1{,}0541168 \\ 0{,}8730274 \end{array} + 1$$

$$\log 4 = 1{,}1783894$$

Giebt den dasigen Fall in einer Secunde 15,079 kleiner als den pariser (39), weil die Breite kleiner ist (42). Die Absicht dieser Rechnung eben daselbst.

48. In dieser Breite weiß ich keine beobachteten Pendellängen; Also ist aus anderwärts be-

beobachteten, die in dieser Breite berechnet worden, nach dem Gesetze Ausführ. der Geogr. IV. Cap. 189. §. und nun aus ihr die Höhe des Falls. Hievon unterrichtet La Place seine Leser an dieser Stelle nicht.

49. In der Monatlichen Correspondenz von v. Zach May 1800, findet sich von Hrn. Vega, französisches Maaß und Gewicht mit andern verglichen, auch Logarithmen dazu, imgleichen ein Zusatz Hrn. v. Zach. Der définitive mêtre ist 3,078444 F. Vegas Rechnungen sind nach dem provisorischen 3,079458 gemacht. In C. d. T. année 1798 steht mêtre = 3 Fuß 0 Zoll 11,296 Linien.

Dieser Band erschien an VII, 1798.

Der Citoyen Burchard hat seiner deutschen Uebersetzung von La Places himmlischer Mechanik ein Verzeichniß von solchen Verwandlungen der Maasse und Eintheilungen; nebst ihren Logarithmen vorgesetzt.

VI. Abschnitt.

Für den Gebrauch der Logarithmen werden die gegebenen Grössen zuweilen bequemer in gemeinen Brüchen, als in Decimalbrüchen ausgedruckt.

1. Viele gemeine Brüche erfodern unendliche Reihen von Decimalbrüchen, oder doch eine grosse Menge solcher Zifern; alsdann läßt sich der Logarithme, zwar für den beträchtlichsten

Theil

Theil eines solchen Bruchs aus den Tafeln nehmen, aber oft wird man ihn schärfer finden, wenn man ihn als den Logarithmen eines gemeinen Bruchs berechnet, und die kleine Mühe anwendet, ein Paar Logarithmen von einander abzuziehen.

2. Sollen Logarithmen gebraucht werden, Verhältnisse auszudrucken, so wäre es noch weniger rathsam, Brüche, die in Gliedern solcher Verhältnisse vorkommen, in Decimalbrüche zu verwandeln, weil sich vielleicht manches von Zählern und Nennern dieser Brüche, in der Verhältniß aufhebt.

3. Nachstehendes Exempels Zahlen sind aus der Neuen Kriegsbibliothek (Bresl. 1781) Neuntem Stücke 337. Seite in der Allgemeinen Deutschen Bibliothek angeführt, Anhang zum 37 . . . 52. B. 1618. S.

4. Ein Hannöverisch Dragonerpferd hat mit Reuter und Rüstung, nebst Fourage auf 4 Tage, 400 Pf. 16 Loth, 2 Quentchen zu tragen.

Ein Preussischer Curassier nebst Fourage wiegt $430\frac{1}{2}$ Pfund.

100 Hannöverische Pfunde = 121 Breslauer.

Man sucht der Gewichte Verhältniß und Unterschied.

5. Des Dragoners Gewicht ist in Hannöverischen Pfunden = $400 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64} = 400,515625$, wovon man den Logarithmen aus den Tafeln nicht hätte, ohne den Gebrauch

der

der Proportionaltheile ziemlich weit über seine Gränzen zu erstrecken.

Druckt man es so aus $400 + \frac{33}{64} = \frac{25633}{64}$ so findet man davon leicht den Logarithmen.

6. Wollte man es aber mit des Curassiers seinem vergleichen; und also die Verhältniß der Pfunde in Betrachtung ziehen, so wären $\frac{25633}{64}$ Hann. Pf.: $\frac{861}{2}$ Bresl. Pf. $= \frac{25633}{64} . 121 : \frac{861}{2} . 100.$

Das ist =

25633. 121 : 861. 3200

log	25633	= 4,4087994
log	121	= 2,0827854
log	D	= 6,4915848
log	861	= 2,9350032
log	3200	= 3,5051500
log	C	= 6,4401532
log	$\frac{D}{C}$	= 0,0514316

7. Dieser letzte Logarithme giebt das Gewicht des Dragoners = 1,1257 von des Curassierers seinem.

Oder: Das erste übertrifft das letzte, um 0,1257 des Gewichts des Curassierers; D = C. 1,1257.

8. Man drucke diesen Unterschied, erst in Breslauer, dann in Hannöverischen Pfunden aus.

log

log 0,1257 = 0,0993353 — 1
log 430,5 = 2,6339732

1,7333085
abgez. log 1,21 = 0,0827854

1,6505231

giebt den Dragoner schwerer als den Curassierer um 54,114 Breslauer Pf.

44,722 Hannöverische.

9. In der A. D. B. a. a. O. steht: "nach Vergleichung des verschiedenen Gewichts (indem 100 Hannöverische Pfunde, 121 Breslauer machen) wiege in der That der Curassierer 41 Pfunde weniger als der Dragoner."

10. Diese Pfunde, wären wohl natürlich von den zu verstehn, in denen des Curassiers Gewicht angegeben wird, und da wäre die Zahl sehr unrichtig. Etwas weniger, wenn Hannöverische Pfunde verstanden würden.

11. Ueberhaupt dient es zu Vergleichung von ein Paar Grössen wenig, ihren Unterschied anzugeben, denn es kömmt darauf an, ob er gegen jede von beyden viel oder wenig beträgt, also auf die geometrische Verhältniß, nicht auf die arithmetische. Daher muß die Vergleichung, wenn sie was lehren soll, so wie in (7) angestellt werden.

12. Eben deßwegen, läßt sich auch die Rechnung wie in (6) führen, wo D, C, sich wie die beyden Gewichte verhalten, nicht die Gewichte selbst sind.

13.

13. Aus (8) ist des Dragoners Gewicht in Breslauer Pfunden = 430, 5 + 54, 114 = 484, 614; Man verwandle das in Hannöverische Pfund

log 484,61	=	2,6853924
Prop. theil	=	36
log 484,614	=	2,6853960
abgez. log 1,21	=	0,0827854
		2,6026106
log 400,50	=	2,6026025
Unterschied	=	81

giebt vermöge der Proportionaltheile, die Zahl, welche dem gefundenen Logarithmen gehört, = 400, 508 Hannöverische Pfund.

14. Mit (5) so genau übereinstimmend, als man bey so viel Zwischenrechnungen, und dem Gebrauche der Logarithmen, erwarten darf, da wohl selbst die Verhältniß beyderley Pfunde nicht in völliger Schärfe angegeben ist.

15. Da hiedurch die Richtigkeit meiner Rechnung bestätiget wird, so darf ich wohl muthmaassen, die 41 Pfund (9) kommen von einer mehr obenhin geführten Rechnung her, die allemahl zu gegenwärtiger Absicht mehr als zulänglich ist. Ohne Logarithmen die Rechnung sehr scharf zu führen, belohnte freylich die Mühe nicht.

IX. Capitel.

Zinsrechnung.

I. Abschnitt.

1. Daß derjenige, der Geld borget, für desselben Gebrauch etwas entrichtet, das man Zinsen oder Interesse nennt, ist bekannt.

2. Insgemein bestimmt man sie so, wie viel sie jährlich von 100 betragen, oder wie viel Procent, z. E. 5 oder 6 u. s. w. Diese Verhältniß des Capitals zu den jährlichen Interessen, kann man auch so angeben: Was die Zinsen für einen Theil des Capitals ausmachen. So sind 5 Procent $= \frac{1}{20}$ des Capitals, 4 Procent $= \frac{1}{25}$; Und es ist einerley, ob man sagt, die Verhältniß des Capitals zu den jährlichen Interessen sey $= 100 : 5$ oder $= 20 : 1$

6. Die Interessen für einen Monat, bekömmt man, wenn man die jährlichen mit 12 dividirt. Sie sind also $\frac{5}{12}$; $\frac{6}{12}$ z. E. eines Thalers; nachdem die jährlichen 5 oder 6 Thaler von Hunderten sind. Die Rechtsgelehrten nennen daher z. E. jährliche 5 oder 6 Procent, vsuras quincunces oder semisses, wie vorerwähnte Brüche nach der römischen Eintheilung des As heissen. Diese Benennung zu rechtfertigen, muß man sich an die Gewohnheit der alten Römer erinnern, die Zinsen monatlich einzufodern. Fratrum Becman-

mannorum Tractatio mathematico-iuridica de interusurio, Gott. 1784. §. 11.

7. Werden die Interessen zu der Zeit, da sie gefällig sind, gezahlt, z. E. 5 Thl. von 100 am Ende des Jahres, das Capital aber bleibt länger stehen, so ist klar, daß am Ende jedes der folgenden Jahre wiederum 5 Thl. gefällig sind, und wenn diese allemahl zu gehöriger Zeit bezahlt werden, die Interessen in 2, 3, 4 u. s. w. Jahren, 2. 5; 3. 5; 4. 5; u. s. w. betragen, ihre Summe also sich wie die Zeit verhält. Dieß nennt man einfache Interessen; Sie kommen als das faßlichste Exempel bey der Regel de Quinque vor (Ar. V. Cap. 53.)

8. Gesetzt aber, von 2000 Thl. wären am Ende des Jahrs 100 Thl. Interessen gefällig. Diese würden nicht ausgezahlt, sondern der Schuldner willigte darein, sie als ein Capital anzusehen, das er am Ende dieses borgte, und so das zweyte Jahr über mit verinteressirte. Solchergestalt wäre das Capital, am Anfange des zweyten Jahres 2100 Thl., und trüge das zweyte Jahr über 105 Thl. Interessen. Würden nun diese wiederum nicht abgeführt, sondern zum Capitale geschlagen, das also am Anfange des dritten Jahres 2205 Thl. wäre, so trüge es dieses Jahr 110$\frac{1}{4}$ Thl. Interessen.

Bey diesem Verfahren werden also die jährlichen Interessen am Ende jedes Jahres zum Capitale geschlagen, das wächst dadurch, und trägt folgendes Jahr mehr Interessen. Das

heisst man zusammengesetzte Interessen, Vsurae simplices (7) und compositae (8).

Begreiflich könnte man auch so jeden Monat die Interessen zum Capitale schlagen.

9. Wie fern so was nach den römischen Rechten, unter dem Nahmen Anatocismus verboten, und wenn es verstattet ist, gehört nicht eigentlich für den Rechner. Indessen wird sich Einiges darüber weiter unten sagen lassen.

10. Wer verlangt, daß ihm Geld eher ausgezahlt wird, als er es zu fodern hätte, ist in dieser Absicht anzusehen, als borgte er es auf so viel Zeit, als er es zu früh bekömmt. Hatte er also diese Zeit über keine Interessen zu fodern, so muß er jezo gegentheils dasselbe verinteressiren. Das ist, was man eigentlich interusurium nennt.

Einfache Zinsen.

11. Man setze, die Interessen sind w Procent, oder 100 Thl. geben jährlich w Thaler Interessen.

12. Ein Capital c; ist erst am Ende eines Jahres gefällig. Es wird jezo ausgezahlt. Wie viel muß statt dessen gegeben werden? Ich nenne diese gesuchte Grösse = x.

13. Man kann dieses folgendergestalt finden: Wer jezo 100 geborgt hat, und sie am Ende des Jahres mit den Interessen wiedergiebt, der zahlt 100 + w.

In

In dieser Bedeutung ist es gleichgültig, am Ende des Jahres $100 + w$ oder jezo 100 zu zahlen.

In eben der Bedeutung, muß es auch gleichgültig seyn, am Ende des Jahres c oder jezo x zu zahlen.

Also ist $100 + w : 100 = c : x$

und $x = \frac{100 . c}{100 + w}$

14. Ich habe zeigen wollen, wie man das Gesuchte, blos durch die Regel Detri, findet. Natürlicher scheint es mir wenigstens, so zu rechnen:

Die Interessen, welche x ein Jahr über trägt, sind $\frac{w . x}{100}$

Mit diesen Interessen, soll x am Ende des Jahres c geben.

Also $x + \frac{w . x}{100} = c$ folglich

$(100 + w) . x = 100 . c$ woraus eben das vorige folgt.

15. Man hat auch $c - x$

$= \frac{(100 + w) . c - 100 . c}{100 + w} = \frac{c . w}{100 + w}$

Welches der Rabat für ein Jahr genannt wird.

16. Wenn 100 sich mit w bequem ohne Rest dividiren läßt, so bringt man mit Vortheil den Ausdruck (15) auf $c - x = \frac{c}{100 : w + 1}$

17. So ist

für w =	2	4	5	10
$\frac{100}{w}$ =	50	25	20	10

18. Exempel. Man ist über ein Jahr 1000 Thl. schuldig, ohne daß man verbunden wäre, sie zu verzinsen: Wie viel weniger als 1000 Thl. giebt man jezo? Interessen zu 5 Procent gerechnet.

Also $c = 1000$; $w = 5$; und nach (17) $c - x = \frac{1000}{21} = 47\frac{13}{21}$ daher $x = 952\frac{8}{21}$.

19. In (16) sind $c-x$ die Interessen, welche x ein Jahr über trägt, (13; 14). Wer also ein Capital c auf ein Jahr borgt, und sich gefallen läßt, daß ihm der Gläubiger die Interessen auf ein Jahr sogleich bey Vorstreckung des Capitals abzieht, der muß x bekommen.

Es ist ein nicht ganz unbekannter Betrug, dem Schuldner unter diesen Umständen

$c - \frac{c.w}{100} = \frac{c.(100-w)}{100}$ vorzustrecken,

das ist, so viel abzuziehen, als die Interessen des ganzen Capitals am Ende des Jahrs ausmachten: Er bekömmt es aber nicht ganz, soll es folglich auch nicht ganz verinteressiren.

Was er zu wenig bekömmt, ist $=$

$$x - c + \frac{cw}{100} = \frac{cw}{100} - (c-x) =$$

$$\frac{cw}{100} - \frac{cw}{100+w} (15) = \frac{cw.w}{100.(100+w)}$$

In

In den Zahlen (18) wäre das $\frac{1000.25}{100.105}$ $= \frac{10.5}{21} = 2\frac{8}{21}$ wie deutlich ist, wenn 950 statt $952\frac{8}{21}$ gegeben würden.

Gegenwärtiger Werth eines Capitals, das man nach einigen Jahren erst zahlen sollte, einfache Interessen gerechnet.

20. Man ist nach m Jahren c schuldig.
Soll dafür jezo x geben.
So muß dieses x mit seinen einfachen Interessen, nach (7) gerechnet, in m Jahren c betragen.

$$\text{Also } x + \frac{m.w.x}{100} = c$$

$$(100 + mw).x = 100.c.$$

$$x = \frac{100.c}{100 + m.w}$$

21. Auch $c - x = \frac{m.w.c}{100 + m.w}$

22. Exempel. Man wäre 10000 Thl. = c nach 4 Jahren = m schuldig, Interessen 5 Procent = w; also

$$x = \frac{1000000}{100 + 20} = 8333\frac{1}{3}$$

23. Ist x (20) so groß, daß die jährlichen Interessen davon $= \frac{c.w}{100 + mw}$ wiederum können ausgeliehen werden; So wird derje-

nige, der x bekömmt, solches wahrscheinlich thun, und so von diesen Interessen, die er am Ende des ersten Jahres bekömmt, neue Interessen m — 1 Jahr ziehen. Eben so m — 2 Jahr, von denen, die er am Ende des zweyten Jahres bekömmt; u. s. w. Selbst diese Interessen von Interessen könnten beträchtlich genug seyn, daß er sie von neuem ausleihen, und wiederum von ihnen Interessen ziehen könnte.

Diese Vortheile werden ihm bey der Auszahlung nicht angerechnet, und er kann also das, was er bekömmt x, höher nutzen, als gerechnet wird; am Ende der Zeit, da er erst c fodern könnte, viel mehr als c haben.

24. Im Exempel (22) tragen $8333\frac{1}{3}$ jedes Jahr $416\frac{2}{3}$; Es ist 4. $(416+\frac{2}{3}) = 1666\frac{2}{3}$, und das zu $8333\frac{1}{3}$ addirt, giebt 10000;

Nun aber, wer am Ende des ersten Jahres $416\frac{2}{3}$ bekäme, würde doch wenigstens 400 auszuleihen suchen, und von selbigen drey Jahr über 60 Thaler Interessen bekommen. Eben so von den 400 am Ende des zweyten Jahres, zwey Jahr über 40; Und von den 400 am Ende des dritten Jahres 20; das vierte Jahr über.

Er hätte also nur dadurch am Ende des vierten Jahres 120 Thl. mehr als 10000, die er da haben sollte.

Vielleicht könnte er auch zu nutzen suchen, was über die 400 Thl. ist.

Imgleichen die 20 Thl. die er am Ende des zweyten Jahres als Interesse der ersten 400 bekam.

25.

25. Man setze, er nutzt die 400 Thl. Interessen des ersten Jahres nicht, sondern lässt sie ungenutzt liegen.

Diese 400 Thl. sind indessen ein Theil des Capitals der 10000, das er erst nach Ablauf von 4 Jahren zu fodern hatte. Das erhellt eben daraus, weil sie mit zu dem, was er am Anfange des ersten Jahres bekömmt, gerechnet werden, endlich 10000 voll zu machen.

Diesen Theil bekömmt er also drey Jahr früher als er etwas zu fodern hatte. Soll er berechtiget seyn, ihn ungenutzt liegen zu lassen, so wäre er auch berechtiget, was er gleich anfangs bekömmt, ungenutzt liegen zu lassen. Es ist nur ein grösserer Theil, den er ein Jahr früher bekömmt. Was von dem grössten Theile, den er vier Jahr zu früh bekömmt, gilt, muß ja auch wohl von einem kleinern gelten, den er drey Jahr früher bekömmt.

Verlangt man also, er soll das, was er vier Jahr zu früh bekömmt, nutzen, so verlangt man auch, er soll das nutzen, was er drey Jahr zu früh bekömmt. Und wenn man das verlangt, so hängt damit nicht zusammen, ihm drey Jahre zu früh etwas zu geben, das diese drey Jahre über genutzt, nebst den übrigen Geldern, die er zu früh bekömmt, auch gehörig genutzt, am Ende der vier Jahre ihm mehr gewährt, als er da haben sollte.

26. Dieses Verfahren, rechnet also demjenigen, der frühzeitiger etwas bekömmt, als er

Geld zu fodern hätte, nur als Theile dessen, was er bekommen soll, die Interessen des grössten Theils an, den er gleich anfangs bekömmt, aber nicht die Interessen kleinerer Theile, welche kleinere Theile er doch auch zu früh bekömmt. So widerspricht er sich selbst. Das Einzige liesse sich dafür sagen: Diese kleinern Theile, (Interessen von Interesse,) könnten zu unbeträchtlich seyn, als daß man sie ausleihen, und wieder von ihnen Interessen ziehen könnte.

Wäre z. E. $c = 100$ Thl. also $x = 83{,}33 + \frac{1}{300}$, davon im ersten Jahre $4{,}16 + \frac{2}{300}$ Interessen kämen, so wäre es freylich künstlich, diese Interessen von neuem zu nutzen, noch vielmehr, wenn man das mit den Interessen, die sie trügen, bewerkstelligen sollte.

27. Das hiesse so viel: Weil man kleine Geldsummen nicht wohl nach eben der Verhältniß nutzen kann, wie grosse, so verlieren sich die arithmetischen Fehler dieser Rechnung, bey kleinen Summen. Man kann hinzusetzen: auch bey einer geringen Menge von Jahren, wegen dieses ökonomischen Umstandes. Also: sie allgemein anzunehmen, wäre eben so viel, als die Verhältniß des Durchmessers eines Kreises zum Umfange $= 1 : 3$ zu setzen, weil das Fehlerhafte dieser Verhältniß, bey ganz kleinen Kreisen nicht kann bemerkt werden. Es ist doch wohl vernünftig, eine Rechnung, den Gründen, die bey ihr angenommen werden, gemäß scharf zu führen; So kann man leicht beurtheilen, wie

viel

viel von dieser Schärfe abgeht, wo sich in der Anwendung nicht allemahl, den angenommenen Gründen gemäß, verfahren läßt.

Solchergestalt müßte man wohl die Frage (20) dergestalt beantworten, daß man Zinsen von Zinsen rechnete. Hievon wird in der Folge geredet. Jezo bleibe ich noch einige Zeit bey einfachen Zinsen.

28. Wäre c nach m Jahren zu bezahlen, e nach m+p, f nach m+q Jahren u. s. w. so fände man aus 20; jeder gegenwärtigen Werth, folglich auch dieser Summe.

Wäre c=e=f ... immer einerley zu bezahlen, und in gleichen Zwischenzeiten nach m+p; m+2p ... Jahren, so liesse sich der gegenwärtige Werth der jährlichen Auszahlungen, durch Summirung arithmetischer Reihen u. d. g. angeben.

Hievon handelt: Auseinandersetzung eines der schwersten Fälle aus der Interusurienrechnung von M. Joh. Nicolaus Müller, Gött. 1785.

Hofmannische Zinsrechnung.

29. Gottfried August Hofmanns, Klugheit Haus zu halten, nebst einem Anhange vom Interusurio; Dresd. u. Leipz. 1731; und Neue Auflage 1737; mit einem andern Buche vermehrt, trägt im erwähnten Anhange die bisher beschriebene Rechnung vor; Es findet sich auch da eine Tafel für $\frac{m.\ 5}{100+m.\ 5}$ (21) $= \frac{m}{20+5\,m}$

Daß

Daß diese Rechnung, welche Hofmann erfunden zu haben glaubte, nichts weiter ist, als die längst bekannte Rabatrechnung; daß sie der Leibnizischen Berechnung des Interusurii nicht vorzuziehen ist, und daß H. von einigen andern Rechnungsarten nicht ganz richtige Nachrichten ertheilt hat, erinnerte v. Clausberg in seiner Demonstrativen Rechenkunst IV. Th. 1282 §.

Dagegen hat Hofmann: Demonstrationen von richtiger Berechnung des Interusurii aufgesetzt, die man in Polaks Matheſi forensi, am Ende der I. Abth. oder der Arithmetik findet. Eigentlich seine Rechnungsart erläutert, übrigens, daß sie der Natur der Sache gemäß sey, nicht besser bewiesen, als in der Klugheit haus zu halten geschehen war.

Hofmann heisst auf der zweyten Ausgabe, Lic. Iuris. Dr. Andreas Rüdiger hat eine Vorrede zu diesem Buche gemacht. Von dem genannten Leipziger Philosophen und Arzte, waren dieser Hofmann und sein Bruder Friedrich Adolph, Schüler, der letzte ist einige Zeit in Leipzig als Philosophischer Lehrer bekannt gewesen; Crusius war sein Nachfolger.

Diese philosophische Genealogie könnte man von Christian Thomasius anfangen. Rüdiger unterrichtete dessen Kinder, und glaubte einen Beruf zur Gottesgelahrtheit zu haben, weil Andreas Rudigerus durch Buchstabenversetzung arare rus dei dignus gebe; Thomasius aber versicherte ihn, das Anagramm ziele auf einen

Arzt,

Arzt, denn rus dei heisse: der Gottesacker (Hommel, kleine Plappereyen, Leipz. 1773; N. 32). Die Spitzfindigkeit und Terminologie von Rüdiger, Hofmann, Crusius, möchte doch wohl nicht Thomasens Beyfall erhalten haben. Er, der über die alten syllogistischen Figuren spottete, hätte schwerlich Hofmanns fünfte Figur bewundert.

Monatliche Zinsrechnung.

30. Das Jahr zu 12 Monaten gerechnet, ist man e nach n Monaten schuldig; jezo sollen y dafür gegeben werden. Die jährlichen Interessen sind w Procent.

31. Also betragen in n Monaten, von 100 die einfachen Interessen $\frac{n.\ w}{12}$, oder 100 wird in der Zeit zu $100 + \frac{n.\ w}{12}$

$= \frac{1200 + n.\ w}{12}$; Da nun y in eben der Zeit zu e wird, so ist

$\frac{1200 + n.\ w}{12} : 100 = e : y$ also

$y = \frac{1200.\ e}{1200 + n.\ w}$ u. $e - y = \frac{n.\ w.\ e}{1200 + n.\ w}$

Daher $y = e - \frac{n.\ w.\ e}{1200 + n.\ w}$

32. Diese monatliche Zinsrechnung wird auch in der (6) angeführten Schrift abgehandelt, §. 21 seqq. Auch findet sich daselbst eine Tafel §. 23. p. 29; die $\frac{y}{c}$ oder $\frac{1200}{1200 + n.w}$ für alle Procente von 1 ... 12 und alle Monate von 1 ... 12 enthält.

Die Procente oder w, stehen in der obersten Zeile als Ueberschriften der Columnen, und die Monate oder n gehn in einer Seitencolumne linker Hand herab.

So, für 9 Procent = w; und 11 Monate = n steht unter 9, neben 11; $\frac{400}{433}$; Nähmlich $\frac{1200}{1200 + 11.9} = \frac{400}{400 + 11.3}$

Für $w = 7$; $n = 11$ kömmt $\frac{1200}{1277}$; In der Tafel sind die Stellen dieser beyden Zahlen verwechselt.

Nutzen sehe ich von dieser Tafel nicht. Sie dient sogleich nicht, wenn die Zahl von Monaten ein Bruch wäre. Und so ein Exempel steht selbst in diesem Buche §. 22; p. 26. Man soll 100 Thl; $9\frac{1}{2}$ Monat voraus bezahlen, die Interessen sind 3 Procent; Also $\frac{n.w}{1200 + n.w}$

$= \frac{9,5.3}{1200 + 9,5.3} = \frac{9,5}{409,5} = \frac{19}{819}$

Also $c - y = \frac{1200}{819} = 2 + \frac{362}{819}$; $y = 97 + \frac{557}{819}$

Eben

Eben so könnte die Zahl der Monate, mehr als ein Jahr betragen. Hieher gehört nachfolgendes.

Monatlicher Waaren-Rabat.

33. Ich setze, es sey gewöhnlich, jezo behandelte Waaren, erst in n Monaten zu bezahlen. Wer sie also so gleich bezahlt, giebt weniger als den behandelten Preis, nur so viel, daß was er giebt, mit dem einfachen Interesse davon am Ende der Zeit, da er erst zu bezahlen schuldig wäre, den behandelten Preis ausmacht. Also völlig nach (31); $e - y$ heißt Rabat.

34. In Crusens Contoristen unter dem Artikel: Hamburg, findet man, daß dieses in Hamburg gewöhnlich ist, auch welche Waaren erst in 7; oder in 13; oder in 16 Monaten bezahlt werden; Die jährlichen Interessen werden zu 8 Procent gerechnet.

Also ist allemahl $\frac{e-y}{e} = \frac{n.\,8}{1200+n.\,8}$

$= \frac{n}{150+n}$; und daher

für n =	7	13	16
$\frac{e-y}{e}$ =	$\frac{7}{157}$	$\frac{13}{163}$	$\frac{8}{83}$

Es kömmt also nur darauf an, jeden dieser Brüche mit dem gegebenen e zu multipliciren. So wäre für $e = 100000$ und

Zahl

Zahl der Monate	Rabat
7	44ß 8 + $\frac{24}{157}$
13	79ß 5 + $\frac{75}{163}$
16	96ß 38 + $\frac{46}{83}$

Sind die 100000; Mk so betragen die drey Brüche 9 ß $6\frac{150}{157}$ ß

7 $4\frac{56}{163}$

8 $10\frac{34}{83}$

35. Von 100 sind in n Monaten die Interessen $\frac{8\,n}{12} = \frac{2\,n}{3}$; Also

für n	7	13	16
$\frac{2\,n}{3}$	$4\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	$10\frac{2}{3}$

Daher druckt Kruse sich so aus: Der Rabat betrage $4\frac{2}{3}$; $8\frac{2}{3}$; $10\frac{2}{3}$; Procent.

36. Zuverlässige Rabattafel von Ein bis Zehntausend Mark sowohl zu $4\frac{2}{3}$ als $8\frac{2}{3}$ pro Cent, verfertiget von Jacob von Döhren Otto Sohn, Hamb. 1767; 8. enthält die Rabate für 7 und für 13 Monate, für jeden ß von 1 .. 11; jeden Schilling von 1 .. 15; jede Mark von 1 .. 10000, und dann noch für alle Myriaden von Marken bis zur Million. Was die Procente bedeuten s. (35). Die Rabate sind auf das genaueste angegeben, auch die 157 Theile oder 163 Theile des ß. Allerdings machte eine solche Tafel die Rechnung sehr bequem.

37. In ihrer Ermangelung könnte man sich der Logarithmen bedienen, und dazu beständige Loga-

Logarithmen berechnen. Ich will diese wie ich sie berechnet habe, gleich bey einem Exempel, zu Ersparung des Raums brauchen.

38. Man suche den Rabat für e=9999 Mk, und die dreyerley Zahlen der Monate.

I) log e	= 3,9999566
best. log $\frac{7}{157}$	= 0,6491984 — 2
log Rab	= 2,6491550
II) log e	= 3,9999566
best. log $\frac{13}{163}$	= 0,9017558 — 2
log Rab	= 2,9017124
III) log e	= 3,9999566
best. log $\frac{8}{83}$	= 0,9840119 — 2
log Rab	= 3,9839685

So kommen die Rabate

für I = 445,815
II = 797,466
III = 963,760

Diese Zahlen, davon man die niedrigste Ziffer leicht durch Proportionaltheile findet, gehen bis auf Tausendtheile der Mark, folglich geben sie das Gesuchte in ß sicher, da die Mark = 16. 12 = 192 ß.

Bey der ersten Zahl, ist 0,815 Mark = 13,040 ßl = 13 ß 0,64 ß. In v. D. Tafel steht dieser Rabat 445 Mk 13 ßl $\frac{84}{157}$ ß.

Bey der zweyten Zahl sind 0,466 Mark = 7,456 ßl = 7 ßl 5,472 ß; beym v. D. stehn 5 $\frac{85}{163}$ ß.

Die dritte Zahl hat v. D. nicht, seine Tafel enthält keinen Rabat für 16 Monat.

39. Die Logarithmen geben also immer das Gesuchte so genau, als v. D. Tafel, da es auf Theile eines ℔ hie nicht ankömmt. Bey kleinen Zahlen, geben ohnedem die Logarithmen noch mehr Schärfe.

40. Die geringe Mühe, Decimaltheile der Mk in ß und ℔ zu verwandeln, ersparte man sich auch durch eine Tafel, die jede Menge dieser kleinen Münzsorten von 1 ... 15 und von 1 ... 11 in Decimaltheilen der Mk ausdruckte.

Man s. von diesem Rabate Hrn. Pflugbeils Regeln, unten X. Cap. 200; 201.

41. In der Folge kann es bequem seyn, statt des bisher gebrauchten Ausdrucks w Procent, die jährlichen Interessen, durch ihre Verhältniß zu einem Capitale, das = 1 gesetzt wird, auszudrucken. Man setze also die Verhältniß $100 : w = 1 : u$ oder $u = \frac{1}{100} w$; $w = 100.u$, so sind u die jährlichen Interessen eines Capitals = 1, und vom Capitale C; die jährlichen Zinsen = C. u.

42. Für 3; 4; 5; 6 u. s. f. Procent, ist also u = 0,03; 0,04; 0,04; 0,06 u. s. f.

43. Wo man auch manchmahl u bequem durch einen Bruch ausdruckt, so ist bey 4 oder 5 Procent $u = \frac{1}{25}$ oder $\frac{1}{20}$.

44. Dieser Ausdruck durch einen Bruch, kann manchmahl die Rechnung erleichtern, wenn u als Divisor vorkömmt.

So

So wäre bey 5 Procent, $\frac{C}{u} = 20\,C$.

Ueber Rechnung zwischen Gläubiger und Schuldner.

45. Wer a schuldig ist, soll bey jährlichen Interessen u für das Capital = 1; nach Ablauf der Zeit B; a. B. u Interessen zahlen, wenn man annimmt, daß nur einfache Interessen gerechnet werden, also wenn z. E. B zwey Jahr wäre, die Interessen eines Jahres = a u, nur verdoppelt würden.

46. Gesetzt also, der Schuldner bezahlt nach Ablauf der Zeit B; die Summe = F = f + a. B. u; so bleibt seine Schuld noch a — f, denn a. B. u waren nur Interessen, die vom Capitale nicht abgehn.

47. Ist er nun a — f die Zeit C über schuldig, so beträgt das (a — f). C. u Interessen.

48. Zahlt er also am Ende der C; G = g + (a — f). C. u; so bleibt er a — f — g schuldig.

49. Davon betragen die Interessen die Zeit D über (a — f — g). D u.

50. Zahlt er am Ende der Zeit D; H = h + (a — f — g). D. u; so bleibt er a — f — g — h schuldig.

51. Kurz: Wer schuldig ist, und nach Ablauf irgend einer Zeit was auszahlt, der vermindert seine Schuld nicht um das Alles, was er auszahlt, sondern nur um so viel, als das, was er auszahlt, mehr beträgt, als die Interessen, die er von seiner Schuld zahlen muß.

52. Wer 1000 Thl. (= a) schuldig ist, und nach Ablauf $1\frac{1}{2}$ Jahres (= B), 100 Thl. auszahlt, der verwandelt dadurch seine Schuld nicht aus 1000 Thl. in 900; Er muß zu 5 Pro-

cent (= 100 u) 75 Thl. (= a. B. u) Interessen geben; also gehn von seiner Hauptschuld nur 100 − 75 = 25 (= f) ab; oder er bezahlt f + a. B. u = 25 + 75 und die Hauptschuld bleibt = a − f = 1000 − 25.

53. Die beygebrachte Art zu rechnen, will ich des Gläubigers seine nennen.

54. Eine andere Rechnung könnte der Schuldner anstellen. Sie käme kurz darauf an:

Man berechne einfache Interessen des Capitals a, die ganze Zeit B + C + D über.

Von dem, was am Ende jedes Termins ist bezahlt worden, rechne man Interessen, von der Zeit an, da es ist bezahlt worden, bis zu Ende der ganzen Zeit.

Diese Auszahlungen am Ende jedes Termins, und ihre so gerechneten Interessen addire man zusammen: Und subtrahire die Summe von dem Capitale mit seinen Interessen die Zeit über.

Der Rest giebt, was noch Schuld bleibt.

55. Diese Rechnung sähe so aus:

I. Das Capital a, trägt die Zeit (54) über a. u (B + C + D) Zinsen.

II. Am Ende der Zeit B ausgezahlt = F
trägt C + D über Interessen = F. (C + D). u

III. Am Ende der Zeit C gezahlt = G
trägt die Zeit D über Interessen = G. D. u

IV. Am Ende der Zeit D gezahlt = H.

56. Also gezahlt unmittelbar F + G + H
an Interessen F. (C + D). u + G. D. u

Folglich gezahlt
F. (1 + (C + D). u) + G. (1 + D u) + H Die

Die Schuld betrug (I) a + a. (B + C + D). u

Bleibt also noch Schuld

a. (1 + (B + C + D) u)
— F. (1 + (C + D) u)
— G. (1 + D u)
— H

57. Hiebey sind offenbar folg. Unrichtigkeiten:

I. Der Schuldner sollte nicht das ganze Capital die Zeit B + C + D verinteressiren, wenn er darauf von Zeit zu Zeit etwas abbezahlt.

Also ist 55; I falsch.

II. In 55; II; bezahlte er auf das Capital nicht F; sondern F — a. B. u = f (46)

Nun rechnet er, als hätte er F um die Zeit C + D zu früh bezahlt, da er diese Zeit über die Interessen von F zu dem rechnet, was er will ausgezahlt haben.

Er sollte aber diese Zeit über nur Interessen von f als ausgezahlt rechnen.

III. Eben so bezahlte er am Ende der Zeit C auf das Capital nicht G, sondern G — (a — f). C. u = g (48) kann also die Zeit D über seinem Gläubiger nur Interessen von g, anrechnen.

IV. Und so, am Ende der Zeit D, bezahlt auf das Capital, nicht H, sondern H — (a — f — g). D. u (50)

58. Der Schuldner giebt also was er am Ende der Zeit D schuldig wäre, nach (57) in I zu groß an, und in II; III; IV; zu klein.

So wäre seine Rechnung nur alsdann richtig, wenn sich I mit II; III; IV; aufhübe.

59. Daß aber das nicht geschieht, zeigt folgendes:

Weil $F = f + a.B.u$ (57; II)

$G = g + (a - f).C.u.$ (57; III)

$H = h + (a - f - g).D.u$ (57; IV)

So kömmt in (56)

$F + F.(C+D).u = f + a.B.u + a.B(C+D).u^2$

$+ f.C.u$

$+ f.D.u$

$G + G.D.u = g + a.C.u + (a-f).C.D.u^2$

$- f.C.u$

$+ g.D.u$

$H = h + a.D.u$

$- f.D.u$

$- g.D.u$

Summe $= f + g + h + a.(B+C+D).u$

$+ a.B(C+D)$ } u^2

$+ (a-f).C.D.$ }

60. Diese Summe (59) von $a.(1 + (B+C+D).u)$ in (55) weggenommen, läßt

$a - f - g - h - (a.B.(C+D) + (a-f).C.D)\,u^2$

So viel giebt der Schuldner für das an, was er noch rückständig wäre.

61. Der Schuldner giebt also den Rest um das zu klein, war in u^2 multiplicirt ist. (50).

62. Nähmlich, am Ende der Zeit B, rechnet er, als wäre seine Schuld um F vermindert. Sie ist aber nur um $F - a.B.u$ vermindert, (55; II) also muß er noch $a.B.u$ die Zeit $C+D$ über verinteressiren. Das giebt $a.B.(C+D).u^2$

63.

63. Am Ende der Zeit C rechnet er die Schuld um G vermindert, sie ist es aber nur um G—(a—f). C. u (55; III). Also giebt er noch die Zeit D über, von (a—f). C. u die Interessen (a—f). C. D. u^2

64. So betragen 62; 63; zusammen, um wie viel er den Rest zu klein angegeben hat (61).

65. Jac. Bernoulli; Quaestiones nonnullae de vsuris Act. Erud. Lipsi. 1690; p. 219; Op. Iac. Bern. T. I. n. 40; p. 427 trägt diese Untersuchung vor; Seine Bezeichnung ist weitläuftiger und unbequemer als nöthig ist. Sie lässt sich in meine soüberseßen

Bern.	a	m	n	p	b	c	d	f	g	h
Mir	a	1	1	u	B	C	D	f	g	h

66. Er sagt, die leßtere unrichtige Rechnung, sey, als leichter, Kaufleuten gewöhnlich.

67. Dergleichen Rechnung dient, wenn beym pacto antichretico (Man s. unt. 2. Abschn. 99) der jährliche Ertrag nicht immer gleich bleibt. Wie bey einem Exempel beym Stryck Vs. Mod. Pand. L. 13. T. 7. §. 8.

Man s. Polak Math. for. I. Abth. 2 Cap. 10 Abh. 104 §.; 139 S. der vierten Ausgabe. Polak tadelt aber Strycks richtige Rechnung ohne Grund, die Rechnungsfehler beyseite geseßt.

v. Florencourt Abhandlungen. 1. Cap. 117 §.

Exempel.

68. Die Schuld = a beträgt 10000 Thl. Die Interessen jährlich 5 Procent, $u=\frac{1}{20}=0{,}05$;

69. Nach Ablauf | Jahre | gezahlt
2 = B | 3000 = F
noch später $3\frac{1}{2}$ = C | 3500 = G
noch später 4 = D | 2000 = H

70. Also
a. u. B = 500. 2 = 1000
F − a. B. u = 2000 = f
(a − f). u. C = 8000. $\frac{1}{20}$. $\frac{7}{2}$ = 400. $\frac{7}{2}$ = 1400
G − (a − f). u. C = 2100 = g
a − f − g = 8000 − 2100 = 5900
(a − f − g). u. D = 295. 4 = 1180
H − (a − f − g). D. u = 820 = h
a − f − g − h = 5900 − 820 = 5080

Für das noch Rückständige.

71. Die Rechnung des Schuldners sähe so aus
a. u (B + C + D) = 500. (9 + $\frac{1}{2}$) = 4750
Also die Schuld am Ende von $9\frac{1}{2}$ Jahren = 14750

F = 3000
F. (C + D). u = 1125
G = 3500
G. D. u = 700
H = 2000
10325
von der Schuld 14750
Rest 4425

72. Also die Reste nach der Rechnung des
Gläubigers = 5080
Schuldners = 4425
Unterschied = 655

73. Aber der Schuldner hatte die Hauptsumme am Ende der ersten 2 Jahre = B nur vermindert um 2000 = f muß also a. B. u = 1000 noch $7\frac{1}{2}$ = C + D Jahre verintereſſiren, giebt 50. $(7+\frac{1}{2}) = 375$ = a. B. (C + D). u^2

Am Ende der zweyten $3\frac{1}{2}$ Jahre = C vermindert er die Hauptsumme nur um g = 2100 muß also G — g = (a — f). C. u = 1400 noch 4 Jahre = D verintereſſiren, giebt (a — f). C. D. $u^2 = 280$

Also a. B. (C + D). u^2 = 375
(a — f). C.D. u^2 = 280
655

giebt den Unterschied (72) wie gehörig.

Tägliche Zinsen.

74. Wenn man vorerwähntermaaſſen monatliche Zinsen, für einen Monat $\frac{1}{12}$ der jährlichen rechnet, ſo iſt dieſes nicht ganz richtig, weil nicht alle Monate gleich viel Tage haben.

75. Es wäre also genauer, die Tage zu zählen, und nach dieſen die Zinsen zu berechnen.

78. In einem gemeinen Jahre von 365 Tagen ſind vom Capitale C, in n Tagen die Zinſen = $\frac{n.C.u}{365}$, welches ſich leicht durch Logarithmen berechnen läſſt, da man bey gegebenem Zinsfuſſe, zweene beſtändige Logarithmen hat.

76. Exempel. Wie viel betragen 5 Procent in 67 Tagen?

best. $\log \frac{1}{365} = 0{,}4377070 - 3$
best. $\log 0{,}05 = 0{,}6989700 - 2$

best. $\log \frac{0{,}05}{365} = 0{,}1366770 - 4$
$\log 67 = 1{,}8260748$

$0{,}9627518 - 3$

In einem Tage betragen die Zinsen 0,00013698 des Capitals, und 0,0091780 in 67 Tagen.

77. Bey einem grossen Capitale also, wäre die Unrichtigkeit eines Tages nicht ganz unbeträchtlich, sie betrüge mehr als 1 Thl. bey einem Capitale von 10000.

78. Der richtige Capitalist, und fertige Wechseler, durch Marcum Martini, Berlin 1728; enthält 165 Tafeln, für jährliche, monatliche und tägliche Interessen nach unterschiedenem Zinsfusse, von einem Pfennig bis 100000 Thl. Capital berechnet. Die Erinnerung (77) findet sich daselbst 24 Seite. Die Tafeln sind sehr bequem zu sehr genauer Rechnung eingerichtet, lassen sich auch zu einigen andern Rechnungen, z. E. Wechselrechnungen, anwenden, und der Text enthält allerley nützliche Nachrichten. M. war damahls Rechenmeister beym K. Preuss. Cadettencorps. Man hat auch von ihm ein sehr gutes, vollständiges praktisches Rechenbuch: Der getreue arithmetische Wegweiser ... Berl. 1741; wo er sich: am K. Pr. Messingwerk bey Eberswalde stehenden Bedienten nennt. In der Allgemeinen Deutschen Bibliothek habe

ich

ich vor einigen Jahren dieses Buch als ein neues angezeigt gefunden, entweder ist das wirklich eine neue Ausgabe, ohne Anzeige, daß es die zweyte ist, oder, welches mir wahrscheinlicher ist, ein neuer Titel vor Exemplare, die liegen geblieben waren. Dem Rec. schien vom Alter des Buches nichts bekannt zu seyn.

Eine Berechnung täglicher Interessen s. man unten X. Cap. 202.

Einige Aufgaben zur einfachen Interessen-Rechnung.

Erste Aufgabe.

1. Man ist jezo mehrere Capitale schuldig, alle nach einerley Zinsfusse, jedes aber am Ende einer andern Zeit zu bezahlen. Man will alle zugleich bezahlen, und zwar so, daß man ihre jezige Summe, von der noch keine Interessen aufgelaufen sind, giebt. Wenn muß das geschehen?

2. Man sey schuldig

P	in der Zeit	p
Q		q
R		r

3. Jedes Capital, soll man seine Zeit über verinteressiren, nach einem Zinsfusse da sich Capital zu den jährlichen Zinsen = 1 : u verhält.

4. Wenn man also jedes Capital am Ende seiner Zeit auszahlt, so giebt man Zinsen

$$(P.\,p + Q.\,q + R.\,r).\,u$$

5. Nähmlich das Jahr ist hie die Einheit der Zeit.

6.

6. Nun will man P+Q+R am Ende der Zeit x auszahlen, dergestalt, daß man wegen dieser Zeit so viel Interessen zahlt als die (4) zusammen betragen.

7. Es ist klar, daß der Gläubiger am Ende der Zeit x solchergestalt so viel Capital bekömmt als die drey Capitale zusammen betragen, und auch so viel Interesse, als er von den drey Capitalen die drey Zeiten über bekommen hätte.

8. Es ist also

$$(P+Q+R).\ x.\ u = (P.p+Q.q+R.r).\ u$$

$$x = \frac{P.p+Q.q+R.r}{P+Q+R}$$

9. Exempel. Man hat zu bezahlen

1700 Mk. (P) über 4 Monat (p)
1750 (Q) 7 (q)
550 (R) 9 (r)

$$x = \frac{1700.\ 4+1750.\ 7+550.\ 9}{1700+1750+550} = 6$$

10. Das Exempel steht in Valentin Heins Tirocinium Mercatorio Arithmeticum d. i. Ordentliche Grundlegung der Kaufmännischen Rechnung (Hamb. 1694) 142 S. unter der Aufschrift: Vereinigung unterschiedner Zahlungstermine.

11. Wenn p, q, r, nach dieser Ordnung abnehmen, so ist klar, daß $x < p$; aber $> r$.

12. Man setze nun, der Gläubiger hätte die Capitale nach (2) ausgezahlt bekommen, und nutzte jedes das er bekommen, noch von neuem bis zu Ende der Zeit p;

13. So trägt ihm
R; R. (p — r). u
Q; Q. (p — q). u

14. Am Ende der Zeit p; hat er also die Zinsen 4; und 13; zusammen, das ist
(P + Q + R). p. u

15. Bekömmt er das Capital P + Q + R am Ende der Zeit x (8) und leiht es noch die Zeit p — x über aus, so hat er davon diese Zeit über Zinsen
(P + Q + R). (p — x). u

16. Und die Zinsen, die ihm am Ende der Zeit x mit dem Capitale (15) gezahlt wurden, waren (P + Q + R). x. u

17. Also hat er in 15; 16; zusammen Zinsen (P + Q + R). p. u

18. So viel als in (14): Und so ist es in Absicht auf Capital und Zinsen völlig einerley, ob die Auszahlung nach (2) oder nach (8) geschieht.

19. Daß $x < p$ (11) ist aus der Natur der Sache klar (6). Die Rechnung zeigt es so: (8)

$$p - x = \frac{(Q + R).\ p - (Q.q + R.r)}{P + Q + R}$$

Das was abgezogen wird, ist kleiner als das, wovon es abgezogen wird (11).

20. Auch ist $x - r = \frac{Pp + Qq - (P + Q)r}{P + Q + R}$

bejaht, (11) weil $x > r$.

Zweyte

Zweyte Aufgabe.

21. Man ist am Ende der Zeit T das Capital A zu bezahlen schuldig mit Zinsen nach dem Fusse 1 : u;

22. Also am Ende dieser Zeit ist man schuldig $A.(1+Tu)$

23. Man bezahle y am Ende der Zeit Z.

24. Der Gläubiger, der dieses bekömmt, kann es noch die Zeit $T-Z$ über ausleihen, und bekömmt Zinsen $(T-Z).y.u$

25. Am Ende der Zeit T also, hat er $y+(T-Z).y.u$.

26. Das muß so viel als (22) betragen, wenn 21; und 23; gleichgültig seyn soll.

27. Aus

$y+(T-Z).y.u = A.(1+Tu)$ folgt

28. $y.(1+(T-Z).u) = A.(1+Tu)$

$$y = \frac{A.(1+Tu)}{1+(T-Z).u}$$

39. $y-A.(1+Tu) = T.y.u+Z.y.u$

$$\frac{y-A.(1+Tu)-Tyu}{yu} = Z$$

30. **Exempel.** Man ist 1000 (=A) am Ende eines Jahres (T=1) mit Zinsen 5 Procent (u=0,05) schuldig. Man will die Schuld am Ende von 7 Monaten tilgen ($Z=\frac{7}{12}$. Was giebt man dafür? (y)

$$y = \frac{1000.1,05}{1+\frac{5}{12}.0,05} = \frac{1000.1,05}{12,25}12 = \frac{12000.105}{1225}$$

log

log 12000 = 4,0791812
log 105 = 2,0211893

6,1003605
log 1225 = 3,0881361

log y = 3,0122244
y = 1028,5

Die Zinsen sind y. 0,05. $\frac{5}{12}$
log y = 3,0122244
log 0,25 = 0,3979400 — 1

2,4101644
log 12 = 1,0791812

log Zinsen = 1,3309832
Zinsen = 21,428
y = 1028,5

1049,928
Sollte seyn = 1050

fehlt 0,072

Dritte Aufgabe.

31. Man ist schuldig
M in der Zeit p nach Zinsfusse 1 : v
N q 1 : w
will beydes zusammen bezahlen.
In der Zeit Z

32. Also ist

(21)	A	T	u	Z
hier	M	p	v	Z
oder	N	q	w	Z

33. Folgl. giebt man am Ende der Zeit Z (28)
M.

$$\frac{M.(1+p.v)}{1+(p-Z).v} \text{ statt } M$$

$$\frac{N.(1+q.w)}{1+(q-Z).w} \text{ statt } N$$

34. Zusammen

$$\frac{M.(1+pv)}{1+(p-Z).v} = \frac{N.(1+qw)}{1+(q-Z).w} = S$$

da man Z nach Gefallen annehmen könnte.

35. Es ist auch

$$\frac{M}{1-\frac{vZ}{1+pv}} + \frac{N}{1-\frac{wZ}{1+qw}} = S$$

46. Also

$$M - \frac{MwZ}{1+qw} + N - \frac{NvZ}{1+pv} = S - S\left\{\frac{vZ}{1+pv} + \frac{wZ}{1+qw}\right\} + \frac{S.v.wZ^2}{(1+pv).(1+qv)}$$

37. Oder

$$\frac{S.v.w.Z^2}{(1+pv).(1+qw)} + \left\{\begin{array}{l} \frac{Mw-Sw}{1+qw} \\ + \frac{Nv-Sv}{1+pv} \end{array}\right\} \begin{array}{l} Z - S = 0 \\ -M \\ -N \end{array}$$

Daraus läßt sich Z finden.

38. Für $S = M + N$ wäre

(M

$$\frac{(M+N).\ v.\ w\,Z}{(1+pv).(1+qw)} - \frac{N.w}{1+qw} = o$$
$$- \frac{M.v}{1+pv}$$

$$(M+N).\ v.\ w.\ Z - N.\ w.\ (1+pv) = o$$
$$- M.\ v.\ (1+qw)$$

$$Z = \frac{N.w\,(1+pw) + M.\ v.\ (1+qw)}{(M+N).\ v.\ w}$$

$$= \frac{N.\ (1+pv)}{(M+N).\ v} + \frac{M.\ (1+qw)}{(M+N).\ w}$$

39. Für $v = w$ kömmt

$$Z = \frac{M+N+(Mq+Np).\ v}{(M+N).\ v}$$

II. Abschnitt.

Zusammengesetzte Zinsen.

1. Die Verhältniß des Capitals zu jährlichen Zinsen sey = wie I. Abschnitt (44) $100 : w = 1 : u$

2. Ein Capital $= C$ trägt in einem Jahre

$$\text{Zinsen} = \frac{C.\ w}{100} = C.\ u$$

3. Rechnet man also jährlich die Zinsen zum Capitale, so verwandelt sich innerhalb eines Jahres, das Capital C in $C + C.\ u = C.\ (1+u)$.

4. Bey der Voraussetzung (3) muß man also das Capital am Anfange des Jahres, mit

1 + u multipliciren, um das Capital am Ende desselben zu haben:

Oder das Capital, am Ende irgend eines Jahres, muß man mit 1 + u multipliciren, um das Capital am Ende des nächstfolgenden zu haben.

5. Wenn also von einem Capitale = a; die Zinsen jährlich zum Capitale geschlagen werden, so wird es am Ende des

Jahres	1	2	3	u. s. w.
	$a.(1+u)$	$a.(1+u)^2$	$a.(1+u)^3$	

Also, wenn b bedeutet, was es am Ende des nten Jahres geworden ist, so hat man

$$a.(1+u)^n = b \text{ oder } a.\left(\frac{100+w}{100}\right)^n = b$$

6. Diese Gleichung giebt allemahl eine aus dreyen, der vier Grössen, die in ihr vorkommen, und beantwortet so vier Fragen.

7. I. Frage. Verhältniß der Zinsen, und Capital am Anfange einer gegebenen Zahl von Jahren sind gegeben, wie groß wird das Capital am Ende derselben?

Die Antwort ist: b in (5)

8. II. Fr. Wie groß muß ein Capital seyn (a) das bey gegebener Verhältniß der Zinsen (u) in einer gegebenen Zahl von Jahren (n) eine gegebene Grösse (b) erreichen soll?

$$a = \frac{b}{(1+u)^n} \text{ oder } a = b.\left(\frac{100}{100+w}\right)^n$$

9. III. Fr. Wie hoch müssen die jährlichen Zinsen (u) seyn? damit ein gegebenes Capital

(a)

(a) in einer gegebenen Zahl von Jahren (n) auf eine gegebene Gröſſe (b) anwächſt.

$$\text{Alſo } (1+u)^n = \frac{b}{a}; \quad 1+u = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

$$\text{und } u = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1$$

10. IV. Fr. Wenn die Verhältniß der Zinſen (u) gegeben iſt, wie viel Jahre? (n) muß man ein gegebenes Capital (a) ausleihen, daß es eine gegebene Gröſſe (b) erreicht.

Weil $(1+u)^n = \frac{b}{a}$ ſo iſt (Arithmet. VI. Cap. 33; III. Ex.) $n \cdot \log(1+u) = \log \frac{b}{a}$;

$$\text{und } n = \frac{\log \frac{b}{a}}{\log(1+u)}$$

11. Soll hier n eine ganze Zahl ſeyn, ſo muß $\frac{b}{a}$ eine Potenz von $1+u$ ſeyn, die einen ganzen bejahten Exponenten hat. Hätte man alſo etwa eine Tafel für Potenzen von $1+u$; ſo könnte man nachſehn, ob ein Glied dieſer Tafel $= \frac{b}{a}$ wäre, und da hätte man n als Exponenten dieſer Potenz, ohne Logarithmen.

Dieſes Verfahren wäre richtig und bequem. Es hieſſe aber nicht die Frage gerade zu (directe) beantworten, eben wie die Frage, was von

1728 die Cubikwurzel ist, nicht gerade zu beantwortet wäre, wenn man in einer Cubiktafel 12 dafür fände. So zeigt die Formel (10) vermittelst der Logarithmen, wie man diese Frage gerade zu beantwortet, ohne deßwegen Hülfsmittel zu verbieten, welche die Beantwortung erleichtern, eben wie man Cubikwurzeln ausziehen lernt, ohne sich deßwegen den Gebrauch der Cubiktafeln zu versagen.

12. Fiele $\frac{b}{a}$ zwischen ein Paar nächste Glieder der Tafel, welche die Potenzen von $1+u$ enthielte, so wäre n ein uneigentlicher Bruch.

13. Berechnet man n durch die Division der beyden Logarithmen, so muß man sich nach a. O. der Arithmetik erinnern, daß man keinen der beyden Logarithmen in den Tafeln völlig genau findet, folglich auch ihren Quotienten nicht. Der Quotient beyder Logarithmen in völliger Schärfe, könnte eine ganze Zahl seyn, wenn gleich der Quotient der beyden Stücke von ihnen, die man in den Tafeln findet, ein Bruch wäre. Da aber doch diese beyden Stücke der Logarithmen die beträchtlichsten Theile von ihnen ausmachen, so wird man aus ihren Quotienten immer leicht sehn, was der ganz richtige, seyn müsste.

V. Frage. Gegenwärtiger Werth einer jährlichen Rente.

14. Es soll n Jahr lang, am Ende jeden Jahres, c ausgezahlt werden. Was zahlt man dafür (a) am Ende des ersten Jahres?

15.

15. Man zahlt also statt c etwas n Jahre zu früh, davon ist jezo der Werth $c.\frac{1}{(1+u)^n}$

$n-1 \ldots\ldots c.\frac{1}{(1+u)^{n-1}}$

$n-2 \ldots\ldots c.\frac{1}{(1+u)^{n-2}}$

$\vdots$

$2 \ldots\ldots c.\frac{1}{(1+u)^2}$

$1 \ldots\ldots c.\frac{1}{1+u}$

16. Folglich ist der jezige Werth der jährlichen Rente $= a =$

$$c.\left(\frac{1}{(1+u)} + \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{1}{(1+u)^3} \ldots + \frac{1}{(1+u)^n}\right) = c.\,T$$

17. Man kann von der Reihe T, jedes Glied einzeln haben, aus einer Tafel, oder vermittelst Logarithmen, und sie so zusammen addiren.

18. Wer geometrische Reihen zu summiren versteht, findet es kürzer so: Es ist im VIII. Cap. 2. Abschn. 25 §.

hie $\left|\frac{a}{\frac{1}{1+u}}\right| \left|\frac{c}{\frac{1}{1+u}}\right| \left|\frac{u}{\frac{1}{(1+u)^n}}\right|$

Also $T = \dfrac{\frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^n} \cdot \frac{1}{1+u}}{1 - \frac{1}{1+u}}$

$= 1$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{(1+u)^n}}{u}$$

$$= \frac{1}{u} - \frac{1}{(1+u)^n . u}$$

Die Formel für T, verstattet nicht, n durch einen Bruch auszudrücken. (VIII. C. 2. Abschn. 47).

Exempel zu vorstehenden Fragen von der Zinsrechnung.

19. I. Fr. 7. Man hat ein Capital von 1000 Thl. (= c) es wird zu 5 Procent ausgeliehen, (u = 0,05) und die Interessen werden jährlich zum Capitale geschlagen; Wie groß wird es in 3 Jahren? (n = 3)

Also $b = 1000 . 1{,}05^3 = 1000 . 1{,}157625 = 1157{,}625$

20. II. Fr. 8. Die vorige umgekehrt. Man hat in 3 Jahren; 1157,625 Thl. zu fodern; Was kann man jezo statt deren nehmen?

$$a = \frac{1157{,}625}{1{,}05^3} = \frac{1157{,}625}{1{,}157625} = 1000$$

21. III. Fr. 9. Wie hoch müssen die jährlichen Zinsen seyn, damit 1000 Thl. (= a) in 3 Jahren (= n) auf 1157,625 (= b) anwachsen.

$$u. = \sqrt[3]{(1{,}157625)} - 1 = 1{,}05 - 1 = 0{,}05$$

22. IV. Fr. 10. Wie viel Jahre (n) muß man 1000 Thl. ausleihen, daß sie zu 5 Procent auf 1157,625 anwachsen?

Weil

Weil $\frac{b}{a} = 1,157625$ so ist

$$n = \frac{\log 1,157625}{\log 1,05}$$

23. Wer schon weiß, daß die Zahl des Zählers der Würfel der Zahl des Nenners ist, braucht freylich n nicht aus den Logarithmen zu berechnen. Wer es noch nicht wüsste, könnte doch, ehe er die Logarithmen aufsuchte, darauf fallen, beyde Zahlen mit einander zu vergleichen, besonders die im Zähler in ein Product zu zerfällen, da ein Factor 5 ist. Er fände sie so $= 0,231525 . 5 = 0,046305 . 25 = 0,009261 . 125 = 0,003087 . 3 . 125 = 0,001029 . 9 . 125 = 0,000343 . 27 . 125 = 0,7^3 . 27 . 125 = (0,7 . 3 . 5)^3 = 1,05^3$

Anwendung von (8) wenn n keine ganze Zahl ist.

24. Man ist 100 in 2 Jahren 8 Monaten schuldig, die Interessen sind 5 Procent, was giebt man jezo dafür?

Hie; $b = 100$; $u = 0,05$; $n = 2 + \frac{8}{12} = \frac{8}{3}$

$\log (1+u)$	$= 0,0211893$
$8 . \log (1+u)$	$= 0,1695144$
$\frac{8}{3} . \log (1+u)$	$= 0,0565048$
$\log b$	$= 2$
$\log a$	$= 1,9434951$
giebt a	$= 87,800$

25. Hiebey wird vorausgesetzt, das Capital das am Ende des zweyten Jahres vorhanden

ist, könne, noch acht Monate über, auf $\frac{8}{12}$ dessen genutzt werden, worauf es ein ganzes Jahr über könnte genutzt werden.

26. V. Frage. 14. Es soll jemand 10 Jahre lang, (= n) am Ende jeden Jahres 100 Thl. (= c) bekommen: Wie viel kann er statt dieser jährlichen Rente am Anfange des ersten Jahres nehmen? (a) Die Interessen sind 5 Procent $u = 0{,}05 = \frac{1}{20}$

27. In 17 kömmt $T = 20 - \frac{1}{1{,}05^{10} \cdot 0{,}05}$

10. log 1,05 = 0,2118930
log 0,05 = 0,6989700 — 2

0,9108630 — 2

Dieser Logarithme, von $0 = \log 1$ abgezogen, giebt den Logarithmen dessen, was in dem Werthe von T, von 20 abzuziehen ist.

Er ist = 1,0891370 gehört zu 12,278 +
Also T = 7,721 und a = 772,1

27. Ich habe des zehnfachen Logarithmen niedrigste Stelle mit 0 ausgefüllt. Genauer ist

10. log 1,05 = 0,211892987
log 0,5 = 0,698970004 — 2

Summe = 0,910862991 — 2

Dieses von log 1 abgezogen giebt 1,089137008

Wenn man also nicht alle Logarithmen auf mehrere Decimalstellen hat, so würde es nicht viel helfen, einen einzigen genauer zu brauchen. Will man sich der Logarithmen bedienen, so weit man sie in Tafeln hat, so muß man sich sol-

solche Unrichtigkeiten gefallen lassen, die auch oft, nicht sehr beträchtlich sind. Man s. noch ein Exempel unten (48)

28. Die ersten beyden Fragen (19; 20;) liessen sich begreiflich ebenfalls durch die Logarithmen beantworten, mit der Bemerkung, die nur jezo ist beygebracht worden.

29. Wenn aber solche Rechnungen bey wichtigen Geschäften häufig vorkommen, so wäre es schon der Mühe werth, sie durch besonders dazu verfertigte Tafeln zu erleichtern. Dergleichen wären:

30. Wenn ein Capital = 1 gegeben ist, nebst Verhältniß der Interessen, zu finden, wie groß es in einer gegebenen Zahl von Jahren wird.

Das ist weiter nichts als eine Tafel der Potenzen von $1+u$; jede Potenz mit dem gegebenen Capitale multiplicirt.

31. Das Capital, das in einigen Jahren sollte ausgezahlt werden, ist gegeben, was wird jezo statt dessen gezahlt?

Die Quotienten, die entstehn, wenn man 1 mit vorigen Potenzen (30) dividirt, jeder mit dem gegebenen Capitale multiplicirt.

32. Wenn jährlich eine gewisse Summe, sollte eine gewisse Zahl Jahre gezahlt werden, wie viel ist jezo statt dieser jährlichen Rente auf einmahl zu geben?

Ist die Summe der Reihe T (16) mit der jährlichen Rente multiplicirt.

33. Dieser drey Tafeln, allgemeine Glieder sind also

$$b = a.(1+u)^n \quad (30)$$

$$a = \frac{b}{(1+u)^n} \quad (31)$$

$$a = c.\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{(1+u)^n.u}\right) \quad (32)$$

34. Jede Tafel bekömmt so viel Columnen als man Werthe von u annimmt, und jede Columne so viel Glieder als man Zahlen von Jahren (n) annimmt.

35. Die gegebenen Capitale, a in der ersten Tafel, b in der zweyten, c in der dritten, kann man jedes $= 1$ setzen, oder durch eine Potenz der 10 angeben. Die Glieder der Tafeln, welche man so bekömmt, werden alsdann mit den jedesmahl gegebenen a, b, c, multiplicirt, und mit der Potenz der 10, die man in der Tafel angenommen hatte, dividirt.

36. Von solchen Tafeln, sind mir keine ältern bekannt, als die sich bey Stevins Arithmetik finden. Ich bediene mich der französischen Uebersetzung von St. Werken: Les Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin . . . par Albert Girard; Leid. 1634. fol. In der Practique de l'Arithmetique p. 185 . . . wird die Interesserechnung gelehrt und p. 191 . . . finden sich die Tafeln, für jede Procent Interesse von 1 bis 16 eine eigene, noch für Interessen du denier 15 . . . 22, oder wenn die Zinsen $\frac{1}{15}$; $\frac{1}{16}$ . . . $\frac{1}{22}$ des Capitals betragen. Jede Tafel hat drey Columnen, die erste: Zahlen

len der Jahre bis 30; die zweyte: gegenwärtiger Werth eines Capitals von 10000000 so viel Jahre im voraus zu zahlen, (31) die dritte: gegenwärtiger Werth einer jährlichen Rente von zehn Millionen, auf einmahl zu tilgen (32).

37. Das Exempel (20) würde aus der Tafel Stevins, in welche es gehört, folgendergestalt berechnet: Der gegenwärtige Werth eines nach drey Jahren gefälligen Capitals von zehn Millionen, ist nach der Tafel = 8638376; Also ist der gegenwärtige Werth, welcher in (20) gesucht wird $= \frac{8638376 . 1157{,}625}{10000000}$

38. Die Multiplication, wäre immer noch beschwerlich, doch nicht so sehr, als Division mit einem Divisor, der keine Potenz der 10 wäre. Und diese Multiplication könnte man sich doch, ohne Gefahr beträchtlich zu irren, durch die Logarithmen ersparen, hie folgendergestalt:

log 86383	=	4,9364283
Propth. für 0,7	=	35
0,06	=	3
log 8638376	=	6,9364321
log 1157,625	=	3,0635679
Summe	− 7 =	3,0000000

39. Für das Exempel (26) steht in St. nur gebrauchter Tafel, 77217349 als jeziger Werth einer zehnjährigen Rente von zehn Millionen. Die gesuchte Zahl des Exempels ist also 772,17349

40. Die Glieder in Stevins Tafeln sind also in vollkommen zulänglicher Schärfe angegeben, da in den meisten Rechnungen die gegebene Zahl viel kleiner als zehn Millionen seyn wird. Nur scheint es mir aus einigen Exempeln, die ich berechnet habe, daß sie von Druckfehlern oder Rechnungsfehlern nicht ganz frey sind. Wem diese Tafeln selbst auch nicht in die Hände kommen, dem wird doch, was ich hie von ihnen gesagt habe, dienen, andere zu brauchen.

41. Die Frage: was jezo statt eines Capitals gegeben, das man erstlich nach einigen Jahren schuldig wäre? ist also schon vor Stevins Zeiten, so beantwortet worden, daß man, nach Beschaffenheit der Umstände, einfache Interessen, oder zusammengesetzte gerechnet hat, St. lehrt beyde Rechnungen. Indessen ist es in Deutschland gewöhnlich geworden, daß man, die Beantwortung, die zusammengesetzte Zinsen braucht, die Leibnizische nennt, weil Leibniz sie empfohlen hat: Meditatio iuridico-mathematica de interusurio simplice Act. Erud. Lipsi. 1683; Octobr. p. 425. Er erinnert: Interusurium oder Rabat, Unterschied zwischen dem, was man erst in einer gewissen Zeit schuldig ist, und desselben gegenwärtigem Werthe, werde von den Rechtsgelehrten theils gar nicht, theils nicht richtig genug angegeben, und bestimmt es aus zwo rechtlichen Voraussetzungen: I) Wer Geld eher auszahlt als er es schuldig ist, kann die Zwischenzeit über Zinsen

fodern,

fodern, und zwar von alle dem, was er zu früh auszahlt, es mag Capital oder Zinsen heissen; II) Abrechnung (Compensatio) ist Zahlung, wer also von einer grössern Summe, die er erst in einiger Zeit bekommen sollte, sich das Gehörige abziehen lässt, der bezahlt durch Gestattung dieses Abzuges, was er zu viel bekömmt, weil er eher Geld bekömmt, als er etwas zu fodern hatte. Die erste dieser Voraussetzungen betrifft also den, der zu früh auszahlt, die zweyte den, der zu früh Geld bekömmt.

42. Wie L. diesen Grundsätzen gemäß rechnet, kann man bey ihm nachlesen, oder in Jo. Mich. Poetii Anleitung zur arithmetischen Wissenschaft, Leipz. 1728. 832 §. 470 S. wo das Wesentliche aus L. Abhandlung zu finden ist.

Er setzt, die ganze Summe, die erstlich nach Ablauf eines Jahres gefällig wäre, werde im Anfange des Jahres ausgezahlt. Das ist nun zu viel, und deßwegen werden davon die jährlichen Interessen der ganzen Summe abgezogen. Aber das ist zu viel abgezogen, und deßwegen werden die jährlichen Interessen dieser Interessen addirt, welches wiederum, zu viel addirt ist. So führt abwechselndes Abziehen und Addiren, auf eine unendliche geometrische Reihe, deren Summe giebt, wie viel statt einer Schuld, die am Ende des Jahres gefällig ist, am Anfange desselben ausgezahlt wird.

Dieses an sich richtige, und sinnreiche Verfahren, hätte ich ebenfalls nach vorhin gelehrter

Sum-

Summirung geometrischer Reihen, lehren können. L. hatte dabey ohne Zweifel mit zur Absicht, einen Gebrauch von solchen Reihen zu zeigen. Mir aber schien es hier nicht nöthig, Etwas aus dem Unendlichen zu hohlen, das sich so leicht durch eine kurze Buchstabenrechnung darthun lässt. Auch hat Leibniz selbst, die Rechnung ohne unendliche Reihen gewiesen.

43. Ohne Zweifel haben diese Reihen Manche, die diese juristischmathematische Abhandlung brauchen sollten, zurückgeschreckt. Die Leibnizische Rechnung ist so, sehr verkannt worden. So gar Polak, Professor der Mathematik zu Frankfurt, hatte in der ersten Ausgabe seiner Mathesis forensis, die 1734 in Octav erschien, die Leibnizische Rechnung so verstanden: Wenn die jährlichen Interessen 5 Procent, oder $\frac{1}{20}$ des Capitals sind, finde man den gegenwärtigen Werth eines Capitals, das nach 1; 2; 3; . . . Jahren gefällig ist, so, daß man von diesem Capitale $\frac{1}{21}$; $\frac{2}{21}$; $\frac{3}{21}$ . . . . abziehe. Die Folge hieraus: Von einem Capitale, das 21 Jahr zu früh bezahlt wird, müsse man $\frac{21}{21}$ abziehen, hatte P. selbst eingesehen, und im 40. §. erwähnter Ausgabe behauptet: Es verzehre das Interusurium das ganze Capital nach 21 Jahren.

Also: Wem man nach 21 Jahren 1000 Thl. schuldig ist, dem giebt man jezo: Nichts, so ist er bezahlt.

Das

Das ist doch gewiß, nicht wider gelehrte oder natürliche Mathematik, sondern wider gesunden Menschenverstand!

Noch vortheilhafter wäre es so, jemanden nach 22 Jahren, so viel schuldig zu seyn: Da bezahlte man ihm die Schuld mit dem, was übrig bleibt, wenn von ihr $\frac{22}{21}$ abgezogen würden, und bekäme also von ihm $\frac{1}{21}$ heraus.

Polak hat auf Bilfingers Erinnerung diesen seinen Fehler eingesehn, und mit einer lobenswürdigen Aufrichtigkeit, in den folgenden Ausgaben gestanden. Uebrigens glaubt er, die Leibnizische Rechnung sey den Rechten zuwider, die Zinsen von Zinsen (anatocismum) verbieten; folgt daher der Hofmannischen (29), hat indessen auch einen Aufsatz vom Bilfinger beygefügt, in dem die Leibnizische Rechnung gerechtfertiget und erklärt wird.

44. In einem 1739 zu Leipzig herausgegebenen Programm: Pro iustitia calculi interusurii Leibnitiani, habe ich gezeigt, daß diese Rechnung mit den Rechten vollkommen übereinstimmt, wie sie denn auch in Sachsen durch Gesetze eingeführt ist. Wie Polak ihre Richtigkeit nicht eingesehen hat, habe ich nie begreifen können, Juristen, die mit Rechnungen weniger umzugehen wissen, ist es verzeihlich, weil freylich für sie Multiplication mit Potenzen von $\frac{20}{21}$ was viel unverständlicheres war, als für einen ehrlichen Mann, der kein Jurist ist, die Stipulatio Aquiliana. Durch solche Betrachtungen

aber

aber wie I. Abschn. 25; 26; mit Exempeln erläutert, die sich leicht durch die gemeine Rechenkunst darstellen lassen, habe ich der Leibnizischen Rechnung allemahl den Beyfall von Rechtsgelehrten, die keine Mathematiker waren, erhalten, auch hie einmahl des seel. Hofr. Meisters, der mich darüber befragte.

45. Besonders ist diesem Gegenstande die Schrift der Fratrum Becmannorum I. Abschn. 6. bestimmt, man trifft in ihr auch das Juristische an, das hie keinen Platz findet. Die Formeln für die Leibnizische Rechnung, sind aus der unendlichen Reihe (42) hergeleitet und so wohl die Buchstabenrechnung als die gemeinen, mit Zahlen und Logarithmen, richtig vorgetragen, nur nicht allemahl das kürzeste und bequemste Verfahren.

46. In Joh. Friedr. Ungers Beyträgen zur Mathesi forensi Göttingen I. St. 1743; II. St. 1744, gehören unterschiedne Abhandlungen zur Zinsrechnung und damit verwandten, in der Vorrede hat Segner Erleichterungen dabey zu zeigen gesucht.

Hr. Prof. Titius giebt im Wittenbergischen Wochenblatte für 1781; 46 u. f. Stücke, Formeln zur Zinsrechnung in gemeinen Zahlen und Logarithmen, auch einige Tafeln. Sie rühren von dem vormaligen Prof. der Mathematik zu Wittenberg, Joh. Matthias Hase her.

47. Hrn. Carl Chassot de Florencourt, jezigen Herz. Braunschw. Kammer- und Bergraths,

Ab-

Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst Altenb. 1781. 4. tragen die Zinsrechnung, im I. Cap. umständlich vor. Unter den beygefügten Tafeln gehören hieher: I. Wachsthum von 100000000 mit Zinseszinsen, zu 5; 4; 3; Procent, bis auf 50 Jahr, und Decimaltheilen bis auf die Ordnung — 9 berechnet. II. Gegenwärtiger Werth von 100, das man erst in mehrern Jahren zu fodern hätte, bis 100 Jahre, nach eben den Zinsen, bis auf die Ordnung — 6 berechnet. III. Nach eben den Zinsen, gegenwärtiger Werth einer jährlichen Rente von 100 Thl., auch bis 100 Jahr, auf die Ordnung — 5 berechnet. Also drey Tafeln wie in (33) mit grösserer Genauigkeit und auf mehr Jahre berechnet, als in beyder Absicht, von bisher bekannten Tafeln kann gesagt werden. Ueberhaupt ist Hrn. v. Fl. Werk, eines der vortrefflichsten, über Gegenstände, deren Wichtigkeit allgemein erkannt ist. Die Zinsrechnung ist nur der Anfang und Grund der übrigen.

Da Hr. v. Fl. in seinen Tafeln doch viel Decimalstellen angiebt, so hätte er jede der Grössen, für die er Tafeln berechnet hat, gleich anfangs = 1 seßen können. Er hat solches vermuthlich deßwegen nicht gethan, um die Menge der Decimalstellen nicht gar zu sehr groß zu machen. Will man aber die Tafeln auf diese Art brauchen, so dividire man nur jedes Glied von ihnen, in der I. Tafel mit 100000000, in den beyden übrigen mit 100; also (33) in der

I. Tafel a; in der zweyten b; in der dritten c; = 1.

48. Ich will doch nur den Gebrauch einer von Hrn. v. Fl. Tafeln, an einem Exempel zu (14) zeigen.

In Hrn. Friedr. Nicolai Beschreibung einer Reise durch Deutschland und die Schweiz in 1781; IV. Band II. B. 12. Abschn. 827. S. wird gemeldet, daß die Bibliothek des Prinzen Eugen von Savoyen, nach seinem Tode seiner Erbin abgekauft worden, der Prinzessinn Anna Victoria von Soissons, auch Madem. de Carignan genannt, und nachherigen Wittwe des Prinzen Joseph Friedrich von Sachsen-Hildburghausen. Sie bekam nähmlich eine jährliche Pension von 10000 Fl. bis ins Jahr 1764, da sie starb. Der Kauf war 1737 geschlossen. Sie genoß die Pension doch also wenigstens 26 Jahr. Die Frage ist: Was eine jährliche Rente von 10000 Fl; 26 Jahr lang zu geniessen, am Anfange dieser Zeit werth ist? Hr. v. Fl. III. Tafel giebt für

Procent	
5	143752,193
4	159827,222
3	176769,804

Eigentlich gehörte dieses Exempel zu den Leibrenten (unten 115). Man hat aber vermuthlich bey dem Kaufe nicht so sehr auf die wahrscheinliche Lebensdauer der Erbin gesehn, als auf ihren Stand, und das Andenken des vormaligen Besitzers der Bibliothek.

Sum-

Summe einer jährlichen Rente, Zinsen von Zinsen gerechnet.

49. Man soll eine Rente = 1 am Ende jedes Jahres, n Jahr lang bekommen, hat aber nichts davon erhalten: Wie viel kann man am Ende des letzten Jahres fodern?

50. Die Rente des ersten Jahres ist n — 1 Jahre stehen geblieben, also mit Zinsen von Zinsen auf $(1+u)^{n-1}$ angewachsen, (5). Eben so, die des zweyten Jahres auf $(1+u)^{n-2}$, und so jede der folgenden Jahre auf eine Potenz, immer einen Grad niedriger. Die des letzten Jahres bleibt = 1 weil sie sogleich, da sie gefällig ist, gefodert wird. Also beträgt das Verlangte

$$(1+u)^{n-1}+(1+u)^{n-2}\ldots+(1+u)^2+(1+u)+1$$

Nimmt man hie 1 für das erste Glied an, so ist im VIII. 2. Abschn.

25 §.	a	c	u
hie	1	$(1+u)$	$(1+u)^{n-1}$

also die Summe $= \frac{(1+u)^n - 1}{u}$

Exempel. Wenn die Interessen 5 Procent sind, und die Rente drey Jahr ist stehen geblieben, so beträgt das (19) $\frac{0,157625}{0,05}$

$= 3,1525$

Man berechnet also das Gesuchte leicht, aus einer Tafel der Potenzen von $1+u$; (33)

In Wingates Arithmetick . . . by John Kersey ... Lond. 1678; 8. finden sich für

Zinsrechnungen, Tafeln wie in (33) angegeben worden, das Gegebene = 1 gesetzt, die Interessen von 4 bis 12 Procent, die Zahl der Jahre bis 30. Die Glieder der Tafeln bis auf Hundertausendtheile. Für gegenwärtige Frage, gehört die dasige Table IV; p. 398.

51. Exempel. Es hat jemand 22 Jahre lang jährlich 10 Thl. genossen, die er am Ende des 22 Jahres, mit Zinsen zu 5 Procent wiederum herausgeben soll; wie viel wird zu bezahlen seyn?

Ohne weitere Hülfsmittel als die Logarithmen, rechne ich nach (49) so:

log 1,05 = 0,0211893

22

0,0423786

0,4237860

0,4661646

log 2,9252 = 0,4661556

90

Die Proportionaltheile geben $1{,}05^{22} = 2{,}92526$

Also in (49) die Summe = 1,92526. 20 = 38,5052 folglich das hie Gesuchte = 385,052

In Wingates Tafel (52) findet sich für die Summe = 38,50521

Aus des Hrn. v. Florencourt I. Tafel hätte man

$1{,}05^{22} - 1 = 1{,}92526071992$

also die Summe = 38,5052143994

52.

52. Im Hannoverischen Magazin 1783; 26. Stück hat Hr. Cammersecretär Grote, Regeln zu Abkürzung der gedoppelten Zins- und Rabatrechnung gegeben. Sie beruhen auf der Summirung von Potenzen von Brüchen und sind mit den bisher vorgetragenen einerley, vollkommen richtig. Schlimm ist es, daß man aus Hrn. Gr. Aufsatze lernt, wie fremd solche Känntnisse, Rechnern seyn mögen, die sie doch wohl Amtswegen besitzen sollten. Hr. Gr. hatte die Erfindung seiner Regeln im 38. St. dieses Magazins 1782 angekündigt, in der Absicht zu erfahren, ob solche bereits bekannt sey? Im 46. St. ward darüber commentirt, sein Räthsel aber nicht getroffen. Dieses ließ ihn die Neuheit der Sache einigermassen vermuthen, wovon er noch mehr überzeugt ward, da er in den Abhandlungen von den Zinsenzins- und gedoppelten Rabatrechnungen in Hrn. Pr. Michelsen Anleitung zur juristischen politischen und ökonomischen Rechenkunst nichts davon antraff. Das Exempel (51) meldet er, werde nach der bisher gewöhnlichen Rechnungsmethode so behandelt, daß man von jeder der 22 Fragzahlen zu 10 Rthl. besonders ausrechne, wie groß solche in der Zeit, da sie in des Percipienten Händen gewesen, durch die Zinseszinsen geworden sey, die gefundenen Resultate werden addirt, und die Summe gebe die ganze Schuld des Percipienten. Statt dieser überaus weitläuftigen Operation, findet Hr. Gr. aus dem

ersten und letzten Gliede der geometrischen Progression, die Summe nach einer ungemein kurzen Methode .... Und das wusste also die Leute nicht, von denen Hr. Gr. zu erfragen gedachte, ob er eine neue Erfindung habe? Hr. Michelsen, wusste es ohne Zweifel, der wollte aber wohl den Juristen, Politikern und Oekonomen, für die er schrieb, keine geometrischen Progressionen zu summiren anmuthen, da er sie mit Buchstabenrechnung verschont.

§3. In Hrn. Joh. Nic. Tetens, Prof. der Philos. und Mathem. zu Kiel, Einleitung zu Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhangen, Leipz. 1785. Octav. macht im I. Cap. die Zinsrechnung natürlicher Weise den Anfang, vollkommner ausgeführt, als mir nach dem, was ich hie voraussetzen darf, verstattet ist.

Tafeln finden sich daselbst

I. Wie hoch 1 nach n Jahren durch Zinsen von Zinsen anwächst, bis n = 100; für 2; 3; 4; 5; Procent, für 2 PC. bis auf die Ordnung — 5; für 3; 4; 5; bis auf die — 10.

II. Baarer Werth nach n Jahren zahlbaren 1; auf eben so viel Jahre, für 3; 4; 5; 6; PC. für die ersten drey bis auf die Ordnung — 10; für die letzten bis — 6;

III. Baarer Werth einer Jahrrente, auch bis auf 100 Jahr. Für eben die Interessen wie II; für 6 PC; nur bis — 4

§4.

54. Im I. C. 5. §. zeigt Hr. T. wie man aus solchen Tafeln, Zahlen für einen andern Zinsfuß findet. In meinen Zeichen (5) lässt sich das so vortragen.

Man hat eine Tafel für a. $(1+u)^n = b$ und verlangt a. $(1+v)^n = x$

So ist $x = b. \left(\frac{1+v}{1+u}\right)^n$

Man darf also nur die Zahl b, mit der gegebenen Potenz von $\frac{1+v}{1+u}$ multipliciren.

Die Potenz lässt sich auch durch die Logarithmen berechnen.

Hrn. T. Exempel ist folgendes.

Ein Capital von $1556 = a$; wächst bey vier Procent; $(u = 0{,}04)$ in $35 = n$ Jahren auf 6140,11604; Wie hoch wächst es in eben der Zeit, bey $4\frac{1}{2}$ Procent? $(v = 0{,}045)$

$\log \frac{1{,}045}{1{,}04} = 0{,}0020830$; Mit 35 multiplicirt, kömmt $0{,}0729050 = \log 1{,}1828$; Folglich

$x = 6140{,}11604 . 1{,}1828 = 7262{,}5$

Wie Hr. T. erinnert, gehn die Decimalzifern nicht weiter; Schon die niedrigste Zifer der Zahl, die aus den Logarithmen angegeben ward, ist nicht völlig genau, und überhaupt der Gebrauch der Logarithmen ein Nothbehelf, bey dem man an Richtigkeit mehr verliert als durch Ersparung der Arbeit gewinnt. Dergleichen Bemerkung, habe ich auch (13; 27; u. s. w.) gemacht.

Monatlich zusammengesetzte Zinsen.

55. Wenn das Capital 1 in einem Jahre u Interessen giebt, also in einem Monate $\frac{u}{12}$, und diese Interessen monatlich zum Capitale geschlagen werden; So ist das Capital am Ende des ersten, zweyten ... nten Monats; $1+\frac{u}{12}$; $\left(1+\frac{u}{12}\right)^2 \ldots \left(1+\frac{u}{12}\right)^n$ welches völlig wie (5) erhellt.

56. Ist a was am Anfange des ersten Monats ausgeliehen ward, und b was daraus am Ende des n geworden ist, so hat man $b = a.\left(1+\frac{u}{12}\right)^n$

57. **Exempel.** Was ist der gegenwärtige Werth (a) von 100 (b) die man erst in drey Monaten haben sollte ($n = 3$) die Interessen fünf Procent ($u = 0{,}05$)

Da ist $1+\frac{u}{12} = \frac{12{,}05}{12}$ Also

$$\log 12{,}05 = 1{,}0809870$$
$$\log 12 = 1{,}0791812$$
$$\log \frac{12{,}05}{12} = 0{,}0018058$$

3.

$$3.\ \log \frac{12{,}05}{12} = 0{,}0054174$$

$$\log\ 100 = 2$$

$$\log a = 1{,}9945825$$

giebt a = 98,760

58. Das Exempel steht Fr. Becm. de interus. §. 55. mit der Erinnerung, daß termini vsurarum menstrui unsern Gewohnheiten wenig gemäß sind ... Die Meynung geht ohne Zweifel auf monatliche Zusammensetzung der Zinsen; einfache monatliche Zinsen, sind gewöhnlich. (I. Abschn. 33.)

Vergleichung von Geboten.

59. Wenn sich zu einer Sache mehr Kauflustige einfinden, einer sie etwa sogleich baar bezahlen wollte, der andre Terminweise: So ist deutlich, daß der letztere mehr Geld bieten muß. Aber ob deßwegen sein Gebot mehr beträgt, müsste daraus beurtheilt werden: Ob die geringere Summe, die der erste bietet, mit ihren zusammengesetzten Zinsen, die Zeit über bis der andre alle Termine abbezahlt hätte, nicht eben so hoch anwüchse, als das Gebot des zweyten, ebenfalls was er in Terminen vor dem letzten zahlt, mit zusammengesetzten Zinsen gerechnet.

Begreiflich liessen sich so auch mehr Gebote vergleichen, deren jedes andre Termine setzte.

60. Exempel. Auf einerley Sache, geschehen drey Gebote folgendergestalt.

I) 18200; baar.

II) 20000 so: 4000 sogleich baar, ferner jährlich 4000 am Ende des 1; 2; 3; 4; Jahres.

III) 21000 so: 3000 baar, dann jährlich 3000 am Ende des 1; 2; 3; 4; 5; 6; Jahres.

61. Man bringe jedes der Gebote II; III; auf den gegenwärtigen Werth. Es muß ausgemacht seyn, was für Interessen gerechnet werden. Ich setze 5 Procent.

Weil in beyden jährlich gleich viel bezahlt wird, so kann man (14) brauchen.

Es ist also u = 0,05;

Wie die Rechnung mit den Logarithmen könnte geführt werden, zeigt (27). Ich will mich hie des Hrn. v. Florencourt III Tafel bedienen, die Glieder mit 100 dividirt.

Für das zweyte Gebot, ist n = 4; also

T = 3,549504; c = 4000

a = 14183,8016

addirt 4000

II Gebot = 18183,8016

Für das dritte Gebot, n = 6

T = 5,0756914; c = 3000

a = 15227,0742

addirt 3000

III Gebot = 18227,0742

Das dritte Gebot ist also das höchste, das zweyte das niedrigste.

61. Sollte nicht jeden Termin so viel als den andern ausgezahlt werden, so brächte man

was

was jedesmahl ausgezahlt wird, nach (8) auf den Anfang. In Ungers Beyträgen, gehört unter andern hieher die XIII. Abh. von den bey Veränderung der Zahlungstermine nöthigen Ausrechnungen.

Eine gegenwärtige Schuld in gleiche jährliche Zahlungstermine einzutheilen.

62. Man sehe das, was jährlich soll gegeben werden, als eine Rente $= c$ an, die n Jahre lang soll gezahlt werden, deren jeziger Werth die gegenwärtige Schuld $= a$ ist, so hat man (18)

$$a = c \cdot T$$

und finde hie das Gesuchte

$$c = a \cdot \frac{(1+u)^n \cdot u}{(1+u)^n - 1}$$

Hat man also eine Tafel, welche von einer jährlichen Rente $= 1$ den gegenwärtigen Werth angiebt, wie Hr. v. Fl. III. Tafel, so dividirt man a, mit dem Gliede dieser Tafel, das zu der gegebenen Zahl von Terminen, oder Jahren gehört.

63. Exempel. Man soll $1000 = a$; in fünf jährlichen Terminen ($n = 5$) bezahlen, die Interessen sind 5 Procent;

Aus genannter Tafel, ist einer fünfjährlichen Rente c, jeziger Werth

$$= c. 4{,}3294764 = 1000$$

Die Division durch die Logarithmen zu ersparen, ist

log

log 4,3294	=	0,6364277
Proptheil für 7	=	71
6	=	6
log 4,329476	=	0,6364354
abgez. von log a	=	3,
log c	=	2,3635645
log 230,975	=	2,3635556
		99

giebt c = 230,975

64. Sollte, was jährlich bezahlt wird, eine gegebene Grösse haben, so würde gefragt: wie viel jährliche Termine zu machen sind, also wäre n unbekannt, und man hätte aus (62)

$$\frac{(1+u)^n - 1}{(1+u)^n} = \frac{a.u}{c} \text{ also}$$

$$1 - \frac{1}{(1+u)^n} = \frac{a\,u}{c};$$

$$1 - \frac{a\,u}{c} = \frac{1}{(1+u)^n}$$

65. Da das, was rechter Hand steht, bejaht ist, so muß a u kleiner als c seyn. Das heißt: Was jährlich soll ausgezahlt werden, muß mehr betragen, als die jährlichen Interessen der gegenwärtigen Schuld. Beträgt es genau so viel, so würde sie nicht vermindert, weil man annimmt, das, was nach jeder Auszahlung noch übrig ist, soll verzinset werden. Beträgt es nicht einmahl so viel, so wird der Ueberschuß der Interessen zum Capitale gerechnet,

net, und die Schuld wächst. Das giebt freylich die Natur der Sache sogleich; Die Formel (64) hat den Nutzen, daß sie daran erinnert, wenn man etwa eine widernatürliche Voraussetzung machen wollte.

66. Also ist

$$\log\left(1-\frac{au}{c}\right)=n.\log\left(\frac{1}{(1+u)}\right)$$

Beyde Logarithmen, gehören eigentlichen Brüchen zu, und sind also verneint.

Folglich ist

$$n=\frac{-\log\left(1-\frac{au}{c}\right)}{+\log(1+u)}$$

bejaht.

67. Exempel. Man soll 500 = a, in Terminen auszahlen, jedesmahl 100 = c, Interessen 5 Procent.

Also $\frac{au}{c}=\frac{500}{100.20}=\frac{1}{4}$; $1-\frac{au}{c}$ $=\frac{3}{4}=0{,}75$ davon der Logarithme $=\log 75-2$, und $-\log\left(1-\frac{au}{c}\right)=2-\log 75$

$=0{,}1249386$ und $n=\frac{0{,}1249386}{0{,}0211893}$

68. Man sieht sogleich, daß der Quotient zwischen 5 und 6 fällt. Die Mühe, ihn durch abgekürzte Division (Ar. 3 Cap. 14) zu suchen, kann man sich durch die Logarithmen ersparen.

log

log 12494 = 4,0967015
log 2119 = 3,3261310

log n = 0,7705705
giebt n = 5,896

Das hieſſe alſo: Fünfmahl am Ende jedes von 5 Jahren werden 100 bezahlt, und noch 100; wenn nach dem Ende des fünften Jahres 0,896 eines Jahres verfloſſen ſind.

69. Aus Hrn. v. Fl. III. Tafel, iſt einer fünfjährlichen Rente von 100, gegenwärtiger Werth = 432,94764
von a = 500

bleibt = 67,05235

70. Hieraus ſcheint alſo zu folgen, von 100, die nach 5,896 Jahren bezahlt werden, müſſe der gegenwärtige Werth = 67,05235 ſeyn.

71. Es iſt aber, was herauskömmt, wenn man 100 mit der Potenz von 1,05 dividirt, deren Exponent = 5,896 iſt (8)

Das findet ſich ſo

log 1,05 = 0,0211893
multipl. mit 5,896

0,1059465
1695144
1907037
1271358

0,1249321
von log 100 = 2

läſſt 1,8750679

ge-

gehört zu 75,001; welches mit (69) nicht übereinstimmt.

72. Nähmlich in der Gleichung (64) darf n kein Bruch seyn, weil in dem Falle die Summe der Reihe nicht richtig ist (18).

73. Die Rechnung lehrt doch so viel: Der gegenwärtige Werth, der fünfmahl ausgezahlten 100, läßt von der Schuld noch übrig, was (69) angiebt. So viel nun, als das beträgt, muß der gegenwärtige Werth von 100 Thl. ausmachen, die nach dem fünften Jahre ausgezahlt werden. Der Zeitraum zwischen dieser Auszahlung und dem Anfange des ersten Jahres sey $= m$; das übrige der Schuld in (69) $= r$, so ist $r.(1+u)^m = 100$ wo nichts verbietet, daß m nicht ein Bruch sey, (24) folglich $m = \frac{\log(100:r)}{\log(1+u)}$

74. Im Exempel ist

$$\log\frac{100}{r} = -\log\frac{r}{100} = -\log 0{,}6705235$$

Nun log 6705200 = 6,8264117

Propth. für 3 20

5 3

log 0,6705235 = 0,8264140 — 1

— log 0,6705235 = 0,1735859

Dieses muß mit log 1,05 = 0,0211893 dividirt werden.

Die Logarithmen der Logarithmen geben folgendes

log

log 0,1735859 = 0,2395144 — 1
log 0,0211893 = 0,3261167 — 2

log m = 0,9133977
m = 8,1921 = 8 Jahr 69,1165 Tage.

75. Von 100 in 8 Jahren gefällig, ist der gegenwärtige Werth nach Hrn. v. Fl. II. Tafel 67,683928, welches also mit (74) wohl übereinstimmt. Es sieht freylich unregelmässig aus, daß fünf Jahre nach einander jährlich 100 gezahlt werden, und noch 100 erst nach 8 Jahren und darüber. Von einer jährlichen Rente 100, 6 Jahr nach einander, wäre der gegenwärtige Werth = 507,56914; Wer also ordentlicher, 6 Jahr nach einander, jährlich 100 erwarten wollte, dürfte nur die Summe 500 um 7,56914 vergrössern. Der gegenwärtige Werth der sechsjährigen Rente ist ein wenig grösser als 500, der, der fünfjährigen, viel kleiner, aber was er, von 500 abgezogen, übrig lässt, ist doch kleiner als der gegenwärtige Werth von 100, die in 6, oder die in 7 Jahren gefällig wären, und so muß die Zahlung von 100 so weit, als (74) angiebt, verschoben werden.

Wie ein Capital abnimmt, auf das jährlich gleichviel bezahlt wird.

76. Das Capital sey = a; man bezahle am Ende jeden Jahres c.

77. Am Ende des ersten Jahres war das Capital mit seinen jährlichen Interessen = a. (1 + u); Wird davon c weggenommen, so bleibt

bleibt zu Anfange des zweyten Jahres a. (1+u) — c.

78. Dieses wächst durch seine Zinsen das zweyte Jahr über und ist am Ende des zweyten a. $(1+u)^2 - c.(1+u)$; Davon c weggenommen, lässt für den Anfang des dritten Jahres $= a.(1+u)^2 - c.(1+u) - c.$

78. Wenn man diese drey Grössen, jede mit 1+u multiplicirt, giebt das Product, was am Ende des dritten Jahres vorhanden ist, davon also wiederum c abgezogen, lässt für den Anfang des vierten Jahres

$a.(1+u)^3 - c.(1+u)^2 - c.(1+u) - c.$

79. Ueberhaupt sey am Anfang irgend eines Jahres noch x vorhanden, das wird mit seinen Interessen dieses Jahr über $= x.(1+u)$, und davon c weggenommen, lässt für den Anfang des folgenden Jahres $x.(1+u) - c$ übrig, das heisse y.

80. Also ist aus (78) für den Anfang des vierten Jahres $a.(1+u)^4 - c.((1+u)^3 + (1+u)^2 + (1+u)) - c$

oder $a.(1+u)^4 - c.((1+u)^3 + (1+u)^2 + (1+u) + 1)$

Da ist von : +u die vierte Potenz in a multiplicirt, und in −c, die Summe aller Potenzen von der dritten herunter, bis mit auf die, deren Exponent = 0.

81. Nennt man also x (79) was am Anfange des nten Jahres vorhanden ist, so hat man für den Anfang des (n+1)ten, oder für das

Ende des nten, wenn an diesem Ende c ist ausgezahlt worden

$y = a.(1+u)^n - c.((1+u)^{n-1} + (1+u)^{n-2} .. .. + 1)$.

82. Was in $-c$ multiplicirt wird, heisse V; so findet sich aus VIII Cap. 2. Abschn. 5; statt des dortigen n und c, hie $n-1$ und $1+u$ gesetzt;

$$V = \frac{(1+u)^n - 1}{u}$$

83. Daher $y = a.(1+u)^n - c.V$

Um zu finden, in wieviel Jahren Alles bezahlt ist, setze man $y = 0$

$$\text{I.} \quad \frac{c((1+u)^n - 1)}{u} = a.(1+u)^n.$$

$c.(1+u)^n - c = a.(1+u)^n.u$

$(c - au).(1+u)^n = c$;

$$(1+u)^n = \frac{c}{c-au}; \quad n = \frac{\log(c:(c-au))}{\log(1+u)}$$

II. Exempel. Aus Spittlers Geschichte des Fürstenth. Hannover I. Th. (Gött. 1786) 4. S.

Nach dem siebenjährigen Kriege, beliefen sich 1776 die Schulden der calenbergischen Landschaft auf . . 1138760 Thl.

der grubenhagenschen auf 353369

jährlich konnten zur Zahlung anwenden

calenb. . . 25520

grubenh. . . 2489

Um

Unter den Druckfehlern, werden die calenbergischen Schulden nur ohngefähr auf 9 Tonnen Goldes gesetzt.

III. Ich will die Interessen 4 proc. annehmen; also $u = 0{,}04$.

IV. Ich setze für Calenberg

$a = 1000000$; $c = 353369$

$au = 40000$

$c - au = 313369$

Also $\frac{c}{c-au} = \frac{353369}{313369}$ Dafür ohne merklichen Fehler $\frac{353370}{313370}$.

$\log 35337 = 4{,}5482297$

$\log 31370 = 4{,}4965145$

$\log \frac{c}{c-au} = 0{,}0517152$

$\log (1+u) = 0{,}0170333$

käme $n = \frac{517}{170} \frac{15}{33}$ etwas mehr als 3.

V. Ich setze in Forts. der Rechenk. a. a. O. 82; 83; $n = 3$. Es ist

$1{,}04^3 = 1{,}12486$ also

$V = 0{,}12486 \cdot \frac{100}{4} = 3{,}121$

$\log 353770 = 5{,}5482297$

$\log 3{,}121 = 0{,}4942938$

$6{,}0435235$

so fällt c. V zwischen 1102890 und 1102900

aber a. $(1+u)^3 = 1124860$

am Ende des dritten Jahres ist also y kleiner als 22060, kleiner als c; So ist die Schuld am Ende des vierten Jahres völlig getilgt.

VI. Für Grubenh. lässt sich aus (2) nicht so rechnen. Setzt man a = 353369, so ist a. u = 14134,76 grösser als c = 2489. Also hätte Grubenh. nicht genug nur die jährlichen Zinsen zu bezahlen. Ich vermuthe in der Angabe für Grubenh. ist ein Fehler.

Noch zu (5).

VII. Man setze, am Ende des dritten Jahres sey die Schuld noch 22060

Zinsen am Ende des 4 J.	882,4
Schuld am Ende d. 4 J.	22942,4
Zur Zahlung sind da	25520
Hat man Ueberschuß	2577,6

84. Die Sache lässt sich auch nach (5) so betrachten: Das ganze Capital, n Jahre genutzt, gäbe den ersten Theil des Werthes von y; Nun rechne man, was aus dem c, das am Ende des ersten Jahres gezahlt wird, würde, wenn man es n — 1 Jahre nutzte, aus dem am Ende des zweyten Jahres n — 2 Jahre genutzten, u. s. w. bis auf das c am Ende des nten Jahres, das nicht genutzt wird; So bekömmt man c in jedes Glied der Reihe V multiplicirt; Die Summe dieser Producte giebt also den Werth von n jährlichen Auszahlungen die letzte am Ende des nten Jahres: Dieser Werth von dem Werthe,

auf

auf welchen das Capital angewachsen ist, abgezogen, lässt, was vom Capitale noch übrig ist.

85. Soll das Capital vermindert werden, so muß c grösser seyn als a u wie in (65).

86. Dieses zeigt auch der Werth von y (83). Er ist

$$y = \left(a - \frac{c}{u}\right).(1+u)^n + \frac{c}{u} \quad (I)$$

Wenn a u kleiner als c ist, ist dieses Werthes erster Theil verneint, man druckt den Werth alsdann am bequemsten so aus:

$$y = \frac{c}{u} - \left(\frac{c}{u} - a\right).(1+u)^n \quad (II)$$

Für a u = c, bleibt also unveränderlich y = a.

Für a u grösser als c; wäre im Ausdrucke (I) der erste Theil bejaht, also wäre da dieser Ausdruck am bequemsten zu brauchen. Dann wächst y wenn n wächst.

87. Wenn a, c, n, u gegeben sind, und eine Tafel für die Potenzen von 1 + u vorhanden ist (33), so wird der Ausdruck (86) sehr bequem seyn, weil alles Veränderliche darinn sich aus dieser Tafel nehmen lässt.

88. Uebrigens giebt sich auch V aus eben dieser Tafel.

89. Gesetzt aber, man wollte ein gegebenes Capital, in einer gegebenen Zahl von Jahren, auf eine gegebene Grösse y vermindern; so fände man $c = \frac{a.(1+u)^n - y}{V}$

90. Wie oft muß man die jährliche Auszahlung wiederhohlen, damit das Capital bis auf eine gegebene Grösse y; abnimmt?

Da ist aus (86) $y - \frac{c}{u} = \left(a - \frac{c}{u}\right)$.

$(1+u)^n$ und $\frac{yu-c}{au-c} = (1+u)^n$ also

$$n = \frac{\log((yu-c):(au-c))}{\log(1+u)}$$

91. Wenn man, bey gegebener Verhältniß der Zinsen zum Capitale (u) jährlich c auszahlt, und in n Jahren noch y schuldig ist, wie groß war das Capital?

Aus (83) $a = \frac{y+c.V}{(1+u)^n}$

92. Wie muß die Verhältniß der Zinsen zum Capitale seyn (u), damit ein gegebenes Capital, durch gegebene jährliche Auszahlungen, bis auf eine gegebene Grösse abnimmt?

Da hat man in (86)

$yu = (au-c).(1+u)^n + c$, wo u gesucht wird.

Diese Frage zu beantworten, muß man erstlich einen allgemeinen Ausdruck für jede Potenz von $1+u$ haben, wie die gemeine Arithmetik für das Quadrat und den Würfel giebt. Aus dem angeführten Beyspiele ist leicht zu erachten, daß in diesem Ausdrucke u^n vorkommen würde.

Darnach, muß man wissen, wie u aus einer solchen Gleichung gefunden wird, darinn es auf die 2; 3; u. s. w. Potenz stiege, Alles Uebrige gegeben wäre.

Bey-

Beydes gehört nicht in die gemeine Arithmetik; sondern wird in der Analysis und Algebra abgehandelt. Das erste, der binomische Lehrsatz, findet sich in meiner Analys. endl. Gr. 116; Das andre, die Auflösung quadratischer und höherer Gleichungen, das. 78 und 219 u. f. Für den gewöhnlichen Gebrauch, ist wohl diese Aufgabe überhaupt entbehrlich, und so kann man sich leicht befriedigen, daß sie die Gränzen der gemeinen Arithmetik übersteigt.

Nur die Bedeutung der Frage zu erläutern: Gesetzt, y sollte nach der ersten Auszahlung übrbleiben, also $n = 1$;

und $yu = (au - c.)(1 + u) + c$

$= au - c + au^2 - cu + c$

Daher $y = a + au - c$ und

$$\frac{y + c}{a} - 1 = u$$

Wäre das Capital $a = 100$; nach der ersten Auszahlung $c = 50$, sollten $55 = y$ übrig bleiben, so wäre $u = 1{,}05 - 1 = 0{,}05$.

93. Soll das Capital völlig ausgezahlt seyn, so ist $y = 0$; also in (86)

$$0 = (au - c).(1 + u)^n + c$$

94. Das Capital in gegebener Zeit abzubezahlen, giebt man jährlich $c = \frac{a.(1+u)^n}{V}$ (89).

95. Für die Zahl der Jahre, in welcher es bezahlt wird, hat man (90)

$$n = \frac{\log (c : (c - a u))}{\log (1 + u)}$$

96. Das Capital, das durch eine gegebene Menge gegebener jährlicher Auszahlungen abgetragen wird, ist (91)

$$a = \frac{c. V}{(1 + u)^n}$$

97. Für die Frage (92) hätte man hie die dortige Gleichung o statt y u gesetzt.

Ein Exempel dazu findet sich in Newtoni Arithmetica universali Probl. Ar. 16.

98. Die Werthe von c in (94) und in (62) sind einerley; Begreiflich ist einerley Frage an beyden Orten, ein besondrer Fall, vnn der (76).

Nutzung eines Unterpfandes,

pactum antichreticum.

99. Wenn dem Gläubiger wegen seines Darlehns, ein Unterpfand, das Nutzungen einträgt, übergeben, und ihm gestattet wird, die Nutzungen zu behalten, so können dieselben jährlich so viel austragen, als die Zinsen des Capitals, oder mehr, oder weniger. Im ersten Falle, bekömmt er sie zur Befriedigung wegen der jährlichen Zinsen, und das Darlehn bleibt ungeändert, im zweyten wird es vermindert, im dritten, müsste ihm noch jedes Jahr gezahlt werden, was den Nutzungen zu den jährlichen Zinsen fehlt. Geschieht das nicht, so wächst die Schuld wenigstens durch den Ueberschuß der Zinsen.

160. Begreiflich ist das also die bisherige Untersuchung, wenn c die jährliche Nutzung bedeutet, y, was am Ende jedes Jahres vom Capitale übrig ist.

101. Nur in dem Falle (85) wäre die Frage, ob der Gläubiger, von dem Ueberschusse der Zinsen, derentwegen er nicht völlig ist befriedigt worden (99) wiederum Zinsen fodern darf; Ist ihm das verstattet, so gilt immer noch die Formel für y, auch wenn a u grösser ist als c. Darf er aber von dem Theile der Zinsen, der nicht abgetragen wird, keine neuen Zinsen rechnen, so müsste man diesen Theil nach der einfachen Zinsrechnung behandeln.

102. Exempel. Für 1000 = a; wird ein Unterpfand gegeben, das jährlich 80 = c einträgt. Die Interessen 5 Procent.

Also in (86) $a - \frac{c}{u} = 1000 - 1600$

$= -600$ und der jedesmahlige Rest $= 1600 - 600 . 1{,}05^n = y$

103. Nach 5 Jahren, ist von 1,05 die fünfte Potenz = 1,276281562 5

600

765,76893750

von 1600

y = 834,2310625

104. Für die Tilgung der Schuld $105^n = \frac{1600}{600} = \frac{8}{3}$ und $n = \frac{\log (8:3)}{\log 1{,}05}$

$$= \frac{0{,}42599688}{0{,}0211893} = 20{,}10\ldots$$

105. Zur Probe, ist von 1,05 die 20 Potenz
= 2,65329770515444191
multiplicirt mit 600; giebt
1591,97862308665146
von 1600

lässt 8,02137691334854 = p

So viel beträgt die Schuld noch am Ende des 20sten Jahres. Das gäbe in einem Jahre Zinsen
0,401068845667427
von 80,

lässt 79,59893115433257 3 = q

für den Ueberschuß des jährlichen Ertrags über die jährlichen Zinsen.

106. Verhält sich ein Theil des Jahres zum ganzen = z : 1; so beträgt in diesem Theile der Ueberschuß z. q; Und wenn dieser die Schuld völlig tilgen soll, ist z. q = p

log 8,021377 = 0,9042491
log 79,59893 = 1,9009074

log z = 0,0033417 − 1
z = 0,10077

In diesem Theile des Jahres also, oder in 36,78105 Tagen, würde der Ueberschuß die Schuld völlig tilgen.

107. Begreiflich kann man nicht sagen, der Gläubiger solle das Unterpfand genau diese 36... Tage besitzen und darauf räumen. Die Absicht ist also nur, zu zeigen, wie die Rechnung geführt

führt wird. Je genauer sie geführt ist, desto sicherer wird man alsdann die ökonomischen Mittel finden, den Handel zu endigen.

108. Das Exempel ist aus Ungers Beytr. zur Math. for. VI. Abh. von der Liquidationsrechnung wegen gehobener Renten eines Unterpfandes, 3. §. Die Zeit, in welcher die Schuld getilget wird, berechnet U. da nicht, aber bey einem andern Exempel 13. §. Wenn das Darlehn 2000 ist, das Pfand jährlich 300 einträgt, berechnet er diese Zeit 8 Jahr 3 Monate 21 Tage, welches mich rechtfertigen wird, wenn etwa jemand meine Rechnung 104 u. f. unnütz nennen wollte.

Eben diese Rechnung lehrt auch: v. Lüttichau, juristischmathematische Abhandlungen (Altona 1769) I. Abh. 2. Abschn.

109. Hat der Gläubiger das Unterpfand ferner genutzt, nachdem die Schuld schon getilgt war, so wird der Ausdruck, von y in (86) verneint. Nähmlich es ist nichts mehr von der Schuld übrig, sondern Gegentheils ist nun der Gläubiger Schuldner geworden. Das Verneinte so ausgelegt, giebt also bejaht, wie viel der Gläubiger nun seinem Schuldner herausgiebt. Oder, man braucht den Ausdruck (II) in (86).

110. Exempel. Wegen eines Capitals von 2000, dessen jährliche Interessen 100 wären, ist ein Pfand, das jährlich 400 einträgt, 7 Jahr lang genutzt worden.

Also

Also $y = (8000 - 2000) \cdot 1{,}05^7 + 8000$

$1{,}05^7 = 1{,}407100422656^{25}$

mit 6000 multiplicirt, giebt

8442,602535973 50

von 8000,

$y = 442{,}602535973\,50$

Abnahme eines Capitals, wenn jährlich mehr ausgegeben wird, als die Zinsen betragen.

111. Vom Capitale a, seyen die jährlichen Zinsen a. u; Man gebe aber jährlich c aus, so daß c grösser als a u ist.

Versteht sich also die Ausgabe c, am Ende jedes Jahres des 1; 2; u. s. w. so ist das völlig die Frage wie in (85) und was nach n Jahren übrig ist, wird berechnet wie in (86). Also ist die Berechnung auch mit der (99) einerley.

112. So könnte man das Exempel (102) folgendergestalt ausdrucken: Ich gebe jemanden 1000, mit der Bedingung, mir am Ende jeden Jahres 80 zu zahlen. Wie wird dadurch diese Summe, die ich anfangs gegeben habe, nach und nach vermindert? Und wie lange kann ich die jährlichen 80 von ihm erwarten?

Am Ende des 5 Jahres wäre er mir nur noch 834 . . . . schuldig, und am Ende des 20sten nur noch 8 . . .

113. Von dieser Frage redet Unger Beytr. zur Math. for. VII. Abh. Daß er die Rechnung dafür, ganz von neuem anfängt, ohne sie auf eine Frage zu bringen, die er nächst zuvor abgehan-

gehandelt hätte (108) ist leicht zu rechtfertigen, weil er kein System, sondern einzelne Abhandlungen schrieb, und erwarten konnte, daß seine Leser diese oder jene nach Gefallen vornehmen könnten, ohne alle nach der Ordnung durchzugehn. Uebrigens erinnert er selbst, daß hie die Sachen der vorigen Frage nur andre Nahmen bekommen.

114. Wer mit mir den Vergleich (112) einginge, ohne sich das auszubedingen, daß die Zahlung aufhörte, wenn die 1000 völlig verzehrt wären. Wer mir mein ganzes Leben durch jährlich 80 auszuzahlen verspräche, der müßte diese Auszahlung von dem Seinigen verrichten, wenn ich noch 21 und mehr Jahre lebte. Wäre es also für mich wahrscheinlich, noch so lange zu leben, so würde er wohl meine 1000 mit der erwähnten Verbindlichkeit nicht annehmen: Gegentheils nicht abgeneigt seyn, wofern diese Hoffnung bey mir nicht groß wäre. Da bey aller Wahrscheinlichkeit, das Künftige doch ungewiß ist, so könnte ich immer ihm zu lange leben; Aber auch sterben, ehe ich mein Capital völlig verzehrt hätte. Es ist also hie zwischen uns beyden ein Spiel, das, wenn es gerecht seyn soll, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit muß beurtheilet werden.

115. Das wird einen Begriff von **Leibrenten** geben, einer jährlichen Einnahme, die man sich auf Lebenszeit durch ein Capital erkauft. Berechnungen hierüber gründen sich also auf die wahrscheinliche Dauer des menschlichen

chen Lebens und Gesetze der Sterblichkeit. Alles hieher gehörige, auch die mehr zusammengesetzten Untersuchungen von Tontinen, Wittwencassen u. s. w. findet man vollständig und gründlich in des Hrn. v. Florencourt Abhandlungen (47), imgleichen Hrn. Tetens Schrift (53).

Abnahme des Capitals (76) wenn die Auszahlung am Anfange jeden Jahres erfolgte.

116. Wenn am Anfange des 1; 2; ... nten Jahres jedesmahl c ausgezahlt wird, so ist das eben so viel, als wäre das Capital am Anfange des ersten Jahres $= a - c$, und am Ende des 1; 2; ... $(n-1)$ten Jahres würde jedesmahl c ausgezahlt, weil Ende eines Jahres und Anfang des nächstfolgenden zusammenfallen. Man nenne z, was am Ende des $(n-1)$ten Jahres, nach der Auszahlung übrig ist, die am Ende dieses Jahres, das ist am Anfange des nten, geschieht.

117. So ist

in 81	a	c	u	n	y
hie	a—c	c	u	n—1	z

und so nach (83)

$$z = (a-c).(1+u)^{n-1} - \frac{c.((1+u)^{n-1}-1)}{u}$$

$$= a.(1+u)^{n-1} - \frac{c}{u}((1+u)^{n}-1)$$

$$= a.(1+u)^{n-1} - c.V \quad (83)$$

V bedeutet hie völlig, was es in (82) bedeutet, nicht n in $n-1$ verändert.

118.

118. Man sieht leicht, daß, wie in den vorigen Rechnungen, jede der fünf Grössen aus den übrigen kann gefunden werden.

119. So könnte man suchen, wie viel jährlich kann ausgegeben werden (c), daß nach Ablauf n — 1 Jahre von a noch z übrig ist.

$$c = \frac{(a.(1+u)^{n-1} - z).u}{(1+u)^n - 1}$$

120. Setzt man z = 0, so findet sich die jährliche Ausgabe, durch welche das Capital in n Jahren verzehrt wird.

121. Exempel. Man will mit 10400 = a; 10 Jahr = n — 1 auskommen, die Zinsen sind 4 Procent; u = 0,04;

$$\frac{c}{a} = \frac{1{,}04^9.0{,}04}{1{,}04^{10} - 1}$$

log 1,04 = 0,0170333
10. log 1,04 = 0,1703330
gehört zu 1,4802; Also der Nenner = 0,4802
9. log 1,04 = 0,1532997
log 1,04 = 0,6020000 — 2

0,7552997 — 2
log 0,4802 = 0,6814222 — 1

$$\log \frac{c}{a} = 0{,}0738775 - 1$$

log 10400 = 4,0170333

log c = 3,0909108
giebt c = 1232,8;

Sind es Thaler, so beträgt der Bruch 28, 8 mgl.

Ein

Ein Rechner, der mir dieses Exempel von Hannover geschickt hat, findet 1232 Thl. 32 mgl. $\frac{140402044427 91}{152665546709 17}$ ₰.

Dieser Bruch wird einen Begriff geben, wie weitläuftig und mühsam seine Rechnung seyn muß, die sonst freylich sehr scharf seyn mag. Er sieht c als eine unbekannte Grösse an, und weil $a - c$ das erste Jahr über $(a - c). \frac{1}{25}$ Interessen trägt, so hat er am Anfange des andern Jahres $a - 2c + (a - c. \frac{1}{25})$, davon rechnet er die Interessen das zweyte Jahr über, setzt sie zu dem, was er am Anfange des zweyten hatte, zieht von der Summe wiederum c ab, und bekömmt so das Capital für den Anfang des 3 Jahres, und so fährt er fort bis an das zehnte Jahr.

Hätte ich bey meinem Verfahren, die Potenzen von 1,04 aus Tafeln genommen, und mit ihnen selbst gerechnet, so wäre die Rechnung ein wenig mühsamer geworden, als die mit den Logarithmen, aber doch in keinem Vergleiche mit erwähnter, und sicher eben so scharf, da schon die Unrichtigkeit meiner logarithmischen Rechnung ganz unbeträchtlich ist.

122. Zweytes Exempel: In einem Walde stehen Bäume, die zusammen $40000 = a$ Klaftern Holz betragen.

Der jährliche Zuwachs ist 1,5 Klafter von 100; also $u = 0{,}015$; $1 + u = 1{,}015$. Man schlägt jährlich $700 = c$ Klaftern. Ich nehme an, daß man dieß als eine Verminderung ansieht,

sieht, die gleich am Anfange des Jahres geschieht.

Wie viel sind am Anfange des 125 Jahres noch übrig; $n = 125$.

Nach 117;

$$z = 40000.\ 1{,}015^{124} - \frac{700}{0{,}015}.\ (1{,}015^{125} - 1)$$

123. Die Rechnung mit den Logarithmen etwas genauer zu führen, suche ich log 1,015 in mehr als 7 Decimalstellen. Es ist aber $1{,}015 = 203.\ 5 = 0{,}29.\ 0{,}7.\ 5$; Dieser drey Zahlen Logarithmen nehme ich aus einer Tafel, die in der Einleitung zu Sherwins Tafeln p. 90 steht.

log 0,29 = 0,4623979978989 — 1
log 0,7 = 0,8450980400142 — 1
log 5 = 0,6989700043360

log 1,015 = 0,0064660422491

125

0,0323302112455
129320844982
6466042249 1

0,8082552811375 = 125.log 1,015
0,0064660422491

0,8017892388884 = 124.log 1,015

Nun ist $\frac{700}{0{,}015} = \frac{700000}{15}$

$\log 700000 = 5{,}8450980$

$-\log 15 = -1{,}1760913$

$4{,}6690067$

$125.\log 1{,}015 = 0{,}8082892$

Summe $5{,}4772620$

Zu diesem Logarithmen gehört vermöge der Proportionaltheile

$$\frac{700}{0{,}015}.\ 1{,}015^{125} = 300097{,}2$$

$$-\frac{700}{0{,}015} = -466666{,}6$$

bleibt $253431{,}6$

Nun war

$\log 1{,}015^{124} = 0{,}8017892$

also durch Proportionaltheile

$1{,}015^{124} = 6{,}333562$

mult. mit 40000

$4000.\ 1{,}015^{124} = 253424{,}8$

$$-\frac{70001{,}015^{125}}{0{,}015} = -253431{,}6$$

$z = -6{,}8$

Also fehlen am Ende des 124 Jahres oder am Anfange des 125 schon 6,8 Klafter. Das ist: der Wald reicht nur 124 Jahr aus.

Zu finden, wenn der Wald ausgehauen ist, sey in 119 $z = 0$

$(1+u)^n c - c = (1+u)^{n-1}.\ au$

$(1+u)^{n-1}.\ ((1+u)c - au) = c$

$(n-1)\log(1+u) = \log c - \log((1+u).\ c - au)$

$n-1$

$$n-1 = \frac{\log c - \log((1+u).c - au)}{\log(1+u)}$$

Hier $(1+u)\,c = 1{,}015 \cdot 700 = 710{,}5$

$+4 \quad -3 \quad +1$

$au = 4.\ 15 = 60 \qquad = 600$

$(1+u)\,c - au \qquad = \qquad 110{,}5$

$\log c = 2{,}8450980$

$\log((1+u)\,c - au) = 2{,}0433623$

Unterschied $0{,}8017357$

Also $n-1 = 0{,}8017357$

$0{,}0064660$

$\log 8017300 = 6{,}9090281$

Propth. für 5 $= 28$

für 7 $= 4$

$\log 8017357 = 6{,}9090313$

$\log 64660 = 4{,}8106357$

$\log n-1 = 2{,}0933956$

giebt $n-1 = 123{,}99$, also $n = 124{,}99$

124. Der vormalige Churſächſiſche Berghauptmann v. Oppel hat ohne Nennung Nahmens und Orts, folgende Schrift in 4. 1760 drucken laſſen: Die Abtheilung der Gehölze in jährliche Gehaue, eine Rechnungsaufgabe. Vorſtehendes Exempel findet ſich da 43. §. Es wird zeigen, wie man den Wald als ein Capital, und den jährlichen Zuwachs als Zinſen betrachten kann.

Forſtfragen als Entwickelungen und Beyträge zur Abtheilung der Gehölze in jährlich Gehaue, — gemeinſchaftlich bearbeitet von Carl

Friedr. Schelling, Premierlieut. im Churf. Ingenieurcorps, und öffentl. Lehrer der Math. und der Kriegswiss. an der Ingenieurak. in Dresden, und Joh. Benj. Markendorf Adjunct am Salzwerke Teuditz. Leipzig. 1799; 164 Quartf. durch v. Oppels Schrift veranlasst.

125. Da nicht alle 700 Klafter im Anfange des Jahres geschlagen werden, und von dem jährlichen Zuwachse schon etwas vor dem Ende des Jahres vorhanden ist, so könnte man jedes Jahr über für jeden Theil des Jahres Abnahme und Zuwachs nach der Zeit proportioniren. Bey dieser Untersuchung würde die Rechnung des Unendlichen Dienste leisten, durch die schon Jac. Bernoulli Act. Erud. Lipf. Mai. 1690 gewiesen hat, wie ein Capital wachsen würde, wenn man die Zinsen jeden Augenblick zum Capitale schlüge. Op. Iac. Bern. T. I. n. 40. p. 429.

126. In der Ausübung wäre das freylich nicht brauchbar. Man könnte aber sich der Wahrheit dadurch nähern, daß man nicht für den Anfang jeden Jahres, sondern für die Mitte desselben rechnete. Welches auch könnte gebraucht werden, und so viel ich weiß, gebraucht wird, wenn bey Fragen, wie 116; die jährlichen Auszahlungen nicht ganz am Anfange jeden Jahres, sondern nach und nach das Jahr über geschehen, z. E. bey Wittwencassen.

Allge-

Allgemeine Betrachtungen über Vergleichung zwischen Ursache, Wirkung und Zeit.

127. Man kann ein Capital als eine wirkende Ursache ansehen, davon die Wirkungen die jährlichen Zinsen sind (Arithm. V. Cap. 53). Zinseszinsen sind also: Wirkungen von Wirkungen, oder so zu reden: Wirkungen des zweyten Grades vom Capitale. Setzt man nach dem bisherigen Verfahren, die Rechnung weiter fort auf Zinsen von Zinseszinsen u. s. w. so kann man diese als Wirkungen des dritten u. f. Grades betrachten. Der ontologischmathematische Satz Ar. V. C. 53, redet von Wirkungen des ersten Grades. Wirkung des zweyten Grades verhält sich auch, wie die Zeit, durch die ihre Ursache die Wirkung des ersten Grades, gewirkt hat. Diese Zeit aber ist um einen bestimmten Unterschied kürzer, als die Zeit, welche die Hauptursache, von der die erste Wirkung herrührte, gewirkt hat, und kann sich also nicht wie diese verhalten. Wenn immer, in einer gegebenen Zwischenzeit aus einer Ursache, also auch aus einer Wirkung als Ursache betrachtet, eine neue Wirkung entsteht, so sind die Zeiten in einer arithmetischen Reihe. Wirkung von jedem Grade, verhält sich allemahl nach vorerwähntem Satze, wie ein Product aus ihrer Ursache, der Wirkung des nächstvorhergehenden Grades, in die Zeit, da diese Ursache gewirkt hat. Dieses Product kann sich also zu einem andern solchen Producte, nicht verhalten, wie sich die

Zeiten in beyden verhalten, weil jedes noch einen andern Factor hat, und diese beyden Factoren können, überhaupt betrachtet, nicht gleichgesetzt werden, weil jeder eine Wirkung ist, die aus der Hauptursache, mittelbar, oder unmittelbar, in einer andern Zeit entstanden war.

128. Vom Capitale 1; sind die jährlichen Zinsen u, und nach eben der Verhältniß Zinsen von Zinsen.

Hat das Capital n Jahre gestanden, so ist ohne Zweifel die Summe der ersten Zinsen $= n.u$;

Die ersten Zinsen u, welche am Ende des 1; 2; 3; . . . . . (n — 1)ten Jahres gefällig waren, trugen, in eben der Ordnung, jede u^2; während n — 1; n — 2; n — 3 . . . . 1 Jahre. Die Summe dieser zweyten Zinsen ist also (VIII. Cap. 1 Abschn. 7) $\frac{n.(n-1)}{1.2} u^2$

Vergliche man nur mit einander die Summe der ersten Zinsen, und die zweyten, welche aus den ersten entstanden sind, die am Ende des ersten Jahres gefällig waren, so wäre die Verhältniß $= n.u : (n-1).u^2$

$= n : (n-1).u$

wodurch das Ende des vorhergehenden 117 §. erläutert wird, Wirkungen von zwo unterschiedenen Ursachen, 1 und u, in zwo unterschiedenen Zeiten n und n — 1.

Aber die Summe aller zweyten Zinsen, ist Wirkung einer Ursache, so groß als die ersten

sind,

sind, nicht eine Zeit, sondern mehrere Zeiten durch, n — 1; n — 2 . . . . Jahr. Jeder einzelne Theil dieser Wirkungen, verhält sich allemahl wie das Product aus der Ursache in die Zeit, welcher dieser Wirkung zugehört: So muß sich die Summe aller dieser Theile verhalten, wie das Product aus der Summe aller Zeiten in die Ursache, dessen erster Factor also nicht etwa mit der längsten dieser Zeiten einerley seyn kann.

129. Es schien mir nicht überflüssig, zu zeigen, daß der Satz: Wirkung verhält sich wie Product aus Ursache in Zeit, auch noch statt findet, wenn von Wirkungen neue Wirkungen entstehn, nur daß er alsdann freylich auf eine mehr zusammengesetzte Rechnung führt.

130. Daraus: daß ein Capital mit Zinsen und Zinseszinsen, eine Ursache ist, deren Wirkungen immer neue hervorbringen, nur noch mit der Bestimmung, daß zwischen dem Entstehen jeder Wirkung und ihrer folgenden, immer gleichviel Zeit, (ein Jahr) verstreicht,

Und daß sich das Capital 1; auf diese Art innerhalb n Jahren in $(1 + u)^n$ verwandelt;

Fliesst also nachstehendes:

131. Man setze, eine Ursache = 1 wirkt die Zeit = n über, dergestalt, daß in gleichen Zeittheilen, der jeder = 1 heissen mag, und die Summe aller n ist, am Ende jeden solchen Zeittheils, von deren Ursache, unmittelbar die erste Wirkung u, entsteht, diese Wirkung eine zweyte hervorbringt, diese eine dritte u. s. f. jede am En-

de des ersten, zweyten . . . Zeittheils, nachdem sie entstanden ist, und jede so, daß sich ihre unmittelbare Wirkung zu ihr verhält $= u. 1$.

So ist $(1+u)^n$, die Summe, der Ursache, und aller Wirkungen von allen Graden zusammen.

132. Entwickelt man diesen Ausdruck, in eine Reihe, deren nach einander folgende Glieder immer höhere u. höhere Potenzen von u enthalten.

So giebt dieser Reihe zweytes, drittes u. s. f. Glied, die Summe, der ersten, zweyten u. s. f. Wirkungen, die entstehen, indem die Ursache die Zeit n über wirkt, und ihre Wirkungen, nach angegebenem Gesetze, von dem Augenblicke an, da jede entsteht, bis ans Ende der Zeit n, selbst wiederum fortwirken.

133. Exempel. Weil

$(1+u)^4 = 1+4u+6u^2+4u^3+u^4$

So ist, bis ans Ende der Zeit 4; die Summe der ersten Wirkungen $= 4u$; der zweyten $6u^2$; der dritten $4u^3$; der vierten u^4; Die vierte nähmlich hat weiter keine Wirkung. Sie entsteht am Ende der vierten Zeit, aus einer Wirkung u^3 die am Ende der dritten Zeit, von einer Wirkung u^2 entstand, die am Ende der zweyten von der Wirkung u entstand, die am Ende der ersten entstanden war.

134. Die Reihe (132) giebt der binomische Lehrsatz (92) aus dem man also auch Summen von Wirkungen höherer und höherer Grade findet.

X. Capitel.

Kaufmännische Rechnungen.

Rechnungen über Geldwechsel.

1. Wenn eine Summe in Gelde eines Ortes ausgedruckt ist, so verlangt man zu wissen, was sie in Gelde eines andern beträgt. Hiebey muß man die Verhältniß der Geldsorten wissen, oft auch andere Umstände, z. E. wenn die Summe durch einen Mäkler verschafft wird, was derselbe wegen seiner Bemühung als Courtagie oder Sensarie bekömmt, andern Aufwand, der unter dem Namen Spesen begriffen wird, u. s. w.

2. Solche Nachrichten hieher abzuschreiben, habe ich keine Lust, man findet sie in v. Clausberg Rechenkunst u. a. Büchern. Ich schränke mich hie auf blosse Rechnungen ein, muß aber allerdings Kunstwörter, u. a. Berichte, die, meine Exempel zu verstehen, nöthig sind, der Veranlassung gemäß beybringen.

3. Eine Verhältniß zwischen ein Paar Grössen, die nicht unmittelbar gegeben ist, durch Zwischenverhältnisse zu finden, dient die Kettenregel, oder ihr gleichgültiges Verfahren, (VII. C. 3. Abschn.) und das lässt sich offenbahr auch auf Geldsorten anbringen. Ist die Verhältniß zwischen ein Paar Geldsorten gegeben, so braucht es auch keinen weitläuftigen Unterricht, zu berechnen,

wie viel von der einen, eine gegebene Menge der andern beträgt. Und eben so, rückwärts die Verhältniß beyder Geldsorten zu finden, wenn gegeben ist, wie viel Stück von der einen, einer gegebenen Menge Stück von der andern gleich sind.

4. Diese so leichte Rechnungen auf die Geschäffte der Kaufleute anzuwenden, ist nur noch nöthig, die Sprache zu verstehn, in welcher die Angaben dazu, und der Erfolg ausgedruckt werden.

5. So heisst man Geld A, um w Procent besser als Geld B, wenn $100\,A = (100 + w).B$; Und da ist B um w Procent schlechter.

Daß A und B, einerley Nahmen sind, z. E. Thaler, Gulden u. s. w. versteht sich von selbst, weil niemanden einfallen wird, z. E. zwischen Hannöverischem Cassengelde und Golde die Verhältniß so auszudrucken, daß ein Glied von ihr eine Menge Thaler, das andre eine Menge Groschen bedeutete.

6. Weil $B = \frac{100}{100+w}.A$

$= \left(1 - \frac{w}{100+w}\right).A$, so ist

$100\,B = \left(100 - \frac{100\,w}{100+w}\right).A$

Um w Procent schlechter, heisst also nicht: 100 des schlechtern betragen so viel als $100 - w$ des bessern. Oder, wenn man aus Versehen durch B das bessere angedeutet hätte, dürfte man nicht denken, diesen Fehler so gut zu machen, daß man

w verneint setzte, wie sonst wohl bey Buchstabenformeln gewöhnlich ist. Der Sprachgebrauch der Kaufleute verstattet hie nicht, besser und schlechter durch + und − zu unterscheiden.

7. Eben das (5) wird so ausgedruckt: Beyde Münzsorten differiren um w Procent, Und das heisst auch, angeben, wie der Cours zwischen beyden rendirt.

So wäre Cassengeld um $\frac{100}{14} = 7\frac{1}{7}$ besser als Gold, oder $w = 7\frac{1}{7}$; Beyde Münzsorten differiren um $7\frac{1}{7}$ Procent.

8. Soll in schlechtem Gelde der Werth des bessern gezahlt werden, so wird auf das schlechte Geld Agio, Lagio oder Aufgeld gegeben, natürlich in Einheiten des schlechtern, weil die unmittelbare Angabe lehrt, wie viel solcher Einheiten müssen zugelegt werden, damit die Menge des schlechtern Geldes den verlangten Werth des bessern ausmacht.

Der das schlechtere ausgiebt, bekömmt dagegen eine geringere Zahl des bessern, so viel nähmlich die Zahl seines Aufgeldes beträgt, und in so fern leidet er Disconto, Rabat, Abkürzung, oder Abzug.

Dieses Aufgeld oder Disconto kann nach Stücken, oder Procent berechnet werden.

So würden auf 14 Stück Thaler in Golde, ein Thaler eben des Geldes, Agio gegeben, den Werth von 14 Thl. Cassengeld zu machen; oder für jeden Thl. Gold wäre das Aufgeld $\frac{1}{14}$ Thl.

Und

Und für 15 Thl. Gold bekäme man nur 14 Thl. C. G. litte also 1 Thl. Abzug.

9 Wenn man nach Procenten rechnet, so heisst w Procent auf 100; so viel als 100 + w einer Einheit statt 100 einer andern geben;

Aber w Procent in oder von 100; heisst 100 — w einer Einheit statt 100 einer andern geben. v. Clausb. 998.

Wer Gold gegen Cassengeld verwechselt, giebt $107\frac{1}{7}$ Gold statt 100 Cassengeld.

Das heisst $7\frac{1}{7}$ Procent auf 100.

Dieses ist Disconto (8) der also auf 100 abgekürzt wird.

Statt 100 Gold, gäbe man $100.(1-\frac{1}{15}) = 100 - 6\frac{2}{3}$ Cassengeld. Da wären die $6\frac{2}{3}$; von, oder in 100.

10. I Es ist nöthig, genau acht zu geben, was auf oder in 100 gerechnet wird. So braucht v. Clausberg die Wörter Rabat und Disconto gleichgültig, aber Joh. Reimer, Anweis. zur Rechenk. (Hamb. 1776) sagt §. 179; Disconto werde von 100; gerechnet, Rabat auf 100; Disconto heisst er Abzug für baare Bezahlung.

II Eins seiner Beyspiele ist folgendes: Eine Schuld von 1500 Mark, die erst in 59 Tagen gefällig war und noch 59 Tage zu laufen hatte, wird mit $4\frac{1}{2}$ p.c. Disconto sogleich berichtiget. Das Jahr wird zu 360 Tagen gerechnet.

Die Rechnung führe ich so: Für die 59 Tage, beträgt Disconto $\frac{59.4,5}{360}$ P.C. Wenn

also

also deßwegen x von 1500 abgehn, so ist

$$100 : 100 - \frac{45 \cdot 59}{3600} = 1500 : 1500 - x$$

giebt $100x = \frac{45 \cdot 59 \cdot 15}{36} = \frac{5 \cdot 59 \cdot 15}{4}$

$= \frac{4425}{4}$ also $x = 11{,}0625$;

Hr. R. findet den Disconto 11 Mk 1 ß

III Gleich zuvor, §. 177 berechnet er den Hamburger Waarenrabat, wie ich 9 Cap. I. Abschnitt 34; gewiesen habe. Diesen also auf 100

IV Wenn Disconto Abzug für baare Zahlung ist, so sehe ich nicht recht deutlich, wodurch es sich von so was, wie der Waarenrabat ist, unterscheidet?

V Wenn n die Zahl der Tage, w die jährlichen Interessen, c die Summe ist, von welcher der Disconto abgezogen wird, so ist die Rechnung (II)

$$100 : 100 - \frac{n\,w}{360} = c : c - x;$$

also $c - x = c \cdot \left(1 - \frac{n\,w}{36000}\right)$

Die Interessen davon in n Tagen, betragen $(c - x) \cdot \frac{n\,w}{36000}$; Also was bezahlt wird, mit seinen Interessen, $(c - x) \cdot \left(1 + \frac{n\,w}{36000}\right.$

$= c \cdot \left(1 - \frac{n\,w}{36000}\right) \cdot \left(1 + \frac{n\,w}{36000}\right) =$

$$= e.\left(1-\left(\frac{nw}{36000}\right)^2\right)$$

Beym Disconto wird also nicht so viel gezahlt, daß es mit den Interessen das betrüge, was am Ende der Zeit gefällig war. Dieß geschah beym monatlichen Rabat (IX. Cap. I. Abschn. 33) auch bey täglichen Zinsen (das. 66) und bey den, die in gegenwärtigem Capitel unten 202; berechnet werden.

In der allgemeinen deutschen Bibliothek 73 Band, II. Stück, 455 Seite, findet sich eine Recension der ersten Ausgabe, u. das. 47 S. eines Handlungsverständigen Erläuterung über Rabat und Disconto.

11. Wenn Titius eine Handschrift ausstellt, darinn er dem Sempronius aufträgt, eine gewisse Geldsumme an Cajus, oder den, welchen Cajus zur Eincassirung verordnet, auszuzahlen, so heisst diese Handschrift ein **Wechselbrief**.

Wenigstens ist diese Vorstellung zulänglich, die Rechnungen zu verstehen, die über diesen Gegenstand sollen gelehrt werden. Die Form des Wechsels, die Umstände, welche Cajus beobachten muß, wenn er das Recht seiner Foderung in Sicherheit stellen will, die Zwangsmittel, denen sich Titius und Sempronius aussetzen, wenn sie die Foderung nicht gehörig berichtigen, muß man sich anderswo bekannt machen. Da ich in einer Handelsstadt erwachsen bin, selbst als Notarius mit Präsentiren und Protestiren von Wechseln Geld erworben habe, so könnte ich allenfalls darüber nur Erinnerungen meiner Jugend beybrin-

bringen, ohne einmahl viel nachzuschlagen, als etwa mein Notariatsprotocoll, das jezo 1785 gerade ein halbes Jahrhundert alt ist. Dieses gehört aber nicht nothwendig zur Arithmetik.

Bey der gegebenen Vorstellung würde Titius wohl vom Cajus so viel an Gelde oder anderm Werthe bekommen, als die Summe beträgt, zu deren Einhebung er den Cajus berechtiget. So kann man sagen, daß Cajus den Wechsel kauft, Titius ihn verkauft. Die Auszahlung dem Sempron auftragen, heisst auf denselben ziehen oder trassiren.

So heisst Titius, der Ausstelle des Wechsels, Trassent imgleichen Nehmer, weil er, den Wechsel auszustellen, Geld nimmt.

Cajus heisst Geber, da er Geld giebt, oder auch Remittent, weil er Geld, das er giebt, vermittelst des Wechsels gewöhnlich an einen andern Ort übermacht oder remittirt.

Der Wechsel muß, natürlicher Weise, dem, der das Geld dafür wiederum auszahlen soll, vorgewiesen werden, welches präsentiren heisst, und die Erklärung, daß er auszahlen wolle, acceptiren. So erhellt, wer Präsentant und Acceptant sind. Das erste wird nicht allemahl Cajus seyn, weil dieser zur Einfoderung jemand anders berechtigen kann; Das letzte auch nicht allemahl Sempronius, weil zuweilen ein Wechsel, dessen Bezahlung Sempronius verweigert, von einem Andern acceptirt wird.

12.

12. Die Summe, zu deren Foderung der Wechselbrief berechtiget, kann vielleicht von dem Käufer desselben, in andern Münzsorten seyn ausgezahlt worden, als die sind, in denen er, oder wer sonst den Wechsel präsentirt, sie wieder bekömmt, wenn andre Münze an dem Orte gewöhnlich ist, wo der Wechsel ausgestellt, und andre da, wo er wieder eingelöset wird. Man muß also die Vergleichung beyder Münzsorten wissen, um eine Valute in die andre zu verwandeln.

13. Oefters bleibt bey dieser Vergleichung, eine Münzsorte unveränderlich, und der Werth der andern ändert sich dagegen; wie wenn z. E. was man in Hamburg einen Banco-Thaler nennt, beständig von einerley Werthe ist, was man aber anderswo Thaler heisst, bald mehr, bald weniger Werth hat, und so von dergleichen Thalern bald mehr, bald weniger den Werth von 100 Banco-Thalern haben.

Die Verhältniß beyder Valuten könnte so angegeben werden, daß ein Glied in ihr unveränderlich bleibt, das andre sich ändert, da ist dann das erste, die beständige Valuta. Sie gehört gewöhnlich dem Orte zu, nach dessen Handlung andere die ihrige richten, z. E. Amsterdam, Hamburg. Wechselcours, heisst die Verhältniß der Geldsorten zweyer Orte. Er kann noch aus mehr Ursachen veränderlich seyn, als wegen des unterschiedenen innern Werthes des Geldes, z. E. wenn eine Geldsorte zu gewissen Absichten vorzüglich gesucht wird, also,

auf

auf eben die Art im Preise steigt, wie eine Waare, nach der viel Nachfrage ist. Wie diese Verhältnisse in Courszetteln angegeben werden, gehört ebenfalls zu Känntnissen, die man aus Erfahrungen lernen muß.

14. Das erste, was die Rechenkunst hiebey thun kann, ist: Ein Paar Valuten mit einander zu vergleichen. Wenn ihre Verhältniß unmittelbar gegeben ist, hat die Vergleichung keine Schwierigkeit, allenfalls kömmt es nur darauf an, sie auf eine gewöhnliche, oder bequeme Art auszudrucken. Ist die Verhältniß nicht unmittelbar gegeben, so müssen Zwischenverhältnisse gegeben seyn, durch die man von einer Valuta auf die andre kömmt, und da dienen, die Kettenregel, oder derselben gleichgültige Verfahren, und wiederum kömmt es hauptsächlich darauf an, die Ausdrückungen recht zu verstehn, in denen diese Verhältnisse angegeben werden, manchmahl auch die Frage selbst. Das Uebrige ist gemeine Rechnung.

Fragen dieser Art wären folgende:

Die Verhältniß zwischen ein Paar Geldsorten, ist gegeben; wie viel Stücke der einen betragen so viel als eine gegebene Menge Stück der andern?

15. Die erste Geldsorte heisse A, die andre B, ihre Verhältniß sey b : a

So betragen b Stücke der zweyten so viel, als a der ersten, oder, das Pary zwischen ihnen ist

a A = b, B

16. Nun sollen m Stücke der ersten so viel betragen, als n der andern, oder

$$m.A = n.B = \frac{n.a}{b}.A \quad \text{Daher}$$

17. $mb = na$ wo sich jede der vier Grössen aus den drey übrigen findet.

18. Als ein Exempel kann die Formel dienen, nach der sich folgendes Buch berechnen lässt:

Der nach holländisch, englisch und französischen Coursen und Reductionen in 720 Tabellen verfasste fertige Wechselrechner ... von Gottfried Zell, Mühlheim am Rhein 1766; 8. Tafeln 360 Seiten, Text 103 S. Im Texte werden allerley Rechnungen gelehret.

Die Frage, welche jedes Glied der Tafel beantwortet, ist folgende:

100 holl. Thaler = b deutschen Thalern, so sind p holl. Gulden = m deutschen Thalern, und m wird gesucht.

Weil der holl. Gulden = $\frac{2}{3}$ holl. Thl. so sind p Gulden = $\frac{2}{3}$ p holl. Thl.

$$= \frac{2}{3}.p.\frac{b}{100} \text{ deutsche Thl;}$$

$$\text{Also } m = \frac{2.b.p}{300} = \frac{4.b.p}{1000}$$

Die Zahl b geht von 90 bis $179\frac{7}{8}$ durch Achttheile, und so ist vorstehende Formel zur Rechnung sehr bequem.

Die Zahl p wächst durch alle einzelne Einheiten, dann durch Zehnen bis 100, dann durch Hunderte bis 1000.

Zell

Zell berechnet m in ganzen Thalern, K enzern 90 auf einen Thl. und Pfennigen 4 auf einen Kreuzer.

Jede Seite enthält zwo Tafeln, da jeder Ueberschrift ein b ist, in einer Columne linker Hand die p stehn, und die m unter b und neben jedem p.

So pag. 11; $b = 92 + \frac{5}{8}$ also $4.b = 370,5$

Also für ein $p = 90$; $m = 33,345$.

Die Decimalbrüche betragen 31,05 Kreuzer, dafür Z. nur die Ganzen setzt.

Der Raum zwischen den Tafeln ist zu allerley Münzverwandlungen genutzt.

Die hie unmittelbar gefundene Formel liesse sich aus 16; 17; herleiten.

Dorten	A	B	a	b	m	n
hie	h Thl	o. Thl	100	b	$\frac{2}{3}$ p	n

19. Häufig wird das Pary so angegeben:

$100.A = (100 + e).B$;

20. Das hiesse wie in (5) die erste Geldsorte um e Procent besser als die zweyte.

21. Man könnte aber wohl auch sagen, 100 Stück der ersten Geldsorte, sollten so viel werth seyn, als eine geringere Menge der zweyten.

Da dürfte man nur e durch die verneinte Zahl ausdrucken, welche zu 100 gesetzt, die Menge der Stücke der zweyten Geldsorte angiebt. Ob sich gleich in der bestimmten Bedeutung nicht sagen liesse, daß die erste um e Procent schlechter als die andre sey (6).

22. Man ist in (19; 17; 15;)
a = 100; b = 100 + e also
m. (100 + e) = 100. n

Daher $m = n. \left(1 - \frac{e}{100 + e}\right)$

$n = m. \left(1 + \frac{e}{100}\right)$

Exempel. Clausb. §. 1019 No. 45. 98,5 Leipz. Thl = 100 Frankf. Wie viel Leipziger sind 763 Frankfurter?

A	B	e	m
Frf.	L	— 1,5	763

Also $n = 763. \left(1 - \frac{1,5}{100}\right)$

Aber 763. 1,5 = 763 + 381,5 = 1144,5
Also n = 763. (1 — 11,445) = 751,555

Ferner 0,5 Thl = 12 gl also 0,05 Thl = 1,2 gl = 1 gl 2,4 ₰ und 0,005 Thl = 0,12 gl = 1,44 ₰; Daher das Gesuchte 751 Leipz. Thl 13 gl 3,84 ₰

Von dieser Rechnung läßt sich Alles, was nicht hergeschrieben ist, in Gedanken machen. Cl. seine ist weitläuftiger, er giebt in circa 4 ₰ an.

23. Die Frage vor (15) läßt sich auch umkehren. Man weiß, wie viel Stück von der einen und von der andern Geldsorte gleichviel betragen; und sucht dargus die Verhältniß, oder den Cours zwischen beyden; Da sind m, n, gegeben, man sucht die Verhältniß a : b, und in (22) e.

24. Die erste Geldsorte in (13) gehöre dem Orte A; die zweyte dem Orte B. Der

Der erste Ort, habe die beständige Valute (13) der andre die veränderliche.

So kann man a = 100 oder = 1 setzen, nachdem man es bequem findet.

Z. E. wenn A Hamburg, B Danzig ist, und 1 Thl Hamburger Bco = 120 gl poln. m. o. w. zu Danzig, so könnte a = 1; b = 120 gesetzt werden.

Ist aber B Leipzig, und 100 Thl Bco = 133 Thl m. o. w. zu Leipzig, so wäre a = 100; b = 133;

Es könnte nähmlich die Verhältniß beyder Geldsorten auch so seyn, daß z. E. daß 100 Thl Bco = 133⅓ Thl zu Leipzig. Da wäre b = 133⅓, und liesse sich nicht so deutlich und bequem ausdrucken, wenn a = 1 gesetzt würde.

Auser, wenn man Decimalbrüche brauchte. Da wäre im Exempel b = 1,3325

Die gewöhnlichen Brüche bey solchen Rechnungen, Viertheile bis etwa Sechszehntheile, lassen sich alle, ganz genau in Decimalbrüchen von wenig Zifern ausdrucken. Wenn auch etwa ⅓ u. d. g. vorkäme, so sucht man bey diesen Rechnungen die Sache gar nicht so scharf, daß nicht z. E. 1,333 statt ⅓ genug wäre.

Wer also Decimalbrüche brauchen will, kann allemahl a = 1 setzen.

25. Es sey A = x. B wo x eine veränderliche Zahl bedeutet.

Wer zu A einen Wechsel nach B, auf m. B verlangt, giebt also, diesen Wechsel zu bekommen, den Werth von m. B in Gelde zu A; das

ist, er giebt $\frac{m\ A}{x}$

Je grösser also x ist, desto weniger giebt er in Gelde zu A, einerley Menge Stücke Geld zu B, zu bekommen: desto mehr aber, je kleiner x ist.

Der Cours heisst **höher** oder **niedriger**, nachdem x grösser oder kleiner ist.

Einerley Menge von Stücken des Geldes zu B zu bekommen, giebt also der **Remittent** (11) zu A weniger, wenn der Cours hoch ist. Dieses nun bekömmt der **Trassant** also in dem Falle auch weniger.

Wenn also von dem Orte, der die beständige Valute hat, nach dem gewechselt wird, der die veränderliche hat, so ist ein hoher Cours dem Remittenten vortheilhaft, dem Trassanten nachtheilich. Gegentheils, ein niedriger dem Remittenten nachtheilich, dem Trassanten vortheilhaft.

Nun verlange man von B einen Wechsel nach A, auf m. A.

Das ist: Man wechsele von dem Orte, der die veränderliche Valute hat, nach dem, welcher die beständige hat. Der Remittent, der diesen Wechsel verlangt, bezahlt also zu B, den Werth von m. A mit m. x. B; Giebt also mehr, wenn x grösser ist, und der Trassant zu B, bekömmt dieses folglich mehr, wenn x grösser ist.

So ist in diesem Falle ein hoher Cours dem Remittenten nachtheilich, und dem Trassanten vortheilhaft. Umgekehrt, der niedrige, dem Remittenten nützlich, dem Trassanten vortheilhaft.

Es

Es sey A = 1 Thl Bco zu Hamburg, B = 1 Thl Leipz. Cor.

Zuerst sey x = 1,34; darnach = 1,33 Man wechsele von H. nach L. Der Remittent giebt für jeden Leipziger Thaler das erstemahl $\frac{1}{1,34}$ das andremahl $\frac{1}{1,33}$ Thl Bco. Wechselt man aber von L nach H, so giebt der Remittent zu L für jeden Thaler Bco, das erstemahl 1,34, das andremahl 1,33 Leipz. Thaler.

Vergleichung von zweyerley Geldsorten, deren jede nach zweyerley Münzfusse, schwerem und leichtem, gerechnet wird.

26. Die Absicht hievon wird sich am besten durch ein Beyspiel erläutern lassen.

Ein Ducaten gilt nach Churf. Brschw. Lüneb.
Cassengelde $2\frac{2}{3}$ Thl = $\frac{8}{3}$ Thl
in Golde 2 Thl 20 ggl. = $\frac{17}{6}$ Thl
Ein Louisd'or nach Cassengelde $\frac{14}{3}$ Thl
in Golde 5 Thl
Also 4 Louisd'or = 7 Ducaten nach Cassengelde
17 Louisd'or = 30 Ducaten in Golde.

27. Gesetzt, ich bekomme 100 Thl in Golde in Louisd'or, so bekomme ich 20 Louisd'or.

Gegen diese wechsele ich Ducaten nach Cassengelde ein, so bekomme ich $\frac{20.7}{4}$ Ducaten = 35 Ducaten.

28. Die gebe ich nach Golde zu $\frac{17}{6}$ Thl aus, also für $\frac{35.17}{6}$ Thl $= \frac{595}{6}$ Thl $= 99,16666$ . . Thl.

29. Es geht also hie eine doppelte Geldwechselung vor: Ich bekomme für 100 leichte Thaler, Louisd'or; Für diese Louisd'or nehme ich so viel Ducaten, als sie nach einem schweren Münzfusse gelten. Und diese Ducaten verwechsele ich wieder nach dem leichten Münzfusse. Da bekomme ich aber nicht völlig 100 leichte Thl. für sie.

30. Daß ich bey diesem Wechsel Schaden habe, muß daher rühren:

Ich muß für die 20 Louisd'or nicht so viel Ducaten nach Cassengelde bekommen, als ich nach Golde dafür bekommen würde, denn bekäme ich so viel, so müsste die Menge Ducaten nach Golde verwechselt auch 100 Thl geben.

Es ist nähmlich

nach Cassengelde 1 Louisd'or $= (1 + \frac{3}{4})$ Duc.

in Golde . . . . . $= (1 + \frac{17}{17})$ Duc.

Aber $\frac{17}{17} - \frac{3}{4} = \frac{3}{68}$; Ich bekomme also für einen Louisd'or, in Golde, $\frac{3}{68}$ eines Ducaten mehr als in Cassengelde.

31. Man wird hieraus leicht urtheilen, daß ich Vortheil habe, wenn ich das Verfahren umkehre, 100 leichte Thl. in Ducaten bekomme, diese Ducaten nach Cassengelde gegen Louisd'or umsetze, und die Louisd'or, die ich so bekomme, wieder das Stück zu 5 Thl. in Gold verwechsele. Die Rechnung sähe so aus:

100 Thl. Gold in Ducaten sind $\frac{100.6}{17}$ Ducaten $= (35 + \frac{5}{17})$ Ducaten.

So viel Ducaten, betragen nach Cassengelde $\frac{600}{17} \cdot \frac{4}{7}$ Louisd'or $= (20 + \frac{20}{119})$ Louisd'or.

So viel Louisd'or nach Golde verwechselt geben $(100 + \frac{100}{119})$ Thl $= 100,84033$ Thl.

Dieß veranlasst folgende allgemeine Aufgabe:

Vergleichung von zwey Stücken Geld nach zweyerley Münzfussen.

32. Ein Stück Geld A, gilt nach dem
schweren Fusse m Thl
leichten M
B schweren n
leichten N

33. x leichte Thaler in A gerechnet, geben y leichte Thaler in B. Zwischen x und y suche ich die Gleichung.

34. 1 leichter Thaler $= \frac{A}{M}$, also x leichte Thaler in A gezahlt, erfodern $\frac{x}{M}$ Stück von A

35. So viel Stück, betragen $\frac{x.m}{M}$ schwere Thaler.

36. Nun ist ein schwerer Thaler $= \frac{B}{n}$; also

37. Die Menge der schweren Thaler (35)

in B auszuzahlen, erfodert $\frac{x.m}{M.n}$ Stück von B

38. So viel Stück von B, gelten $\frac{x.m}{M.n}$. N leichte Thaler.

39. Diese Zahl der leichten Thaler $= y = \frac{x.m.N}{M.n}$.

40. Oder $M.n.y = m.N.x$

41. Voriges Exempel. 1 Ducaten gilt Cassengeld $2\frac{2}{3}$ Thl
Gold 2 Thl 20 ggl $= 2\frac{1}{3}$ Thl
1 Louisd'or Cassengeld $4\frac{2}{3}$ Thl
Gold 5 Thl

A	m	M	B	n	N
Duc	$\frac{8}{3}$	$\frac{17}{6}$	Louisd'or	$\frac{14}{3}$	5

Also $\frac{17}{6}.\frac{14}{3}9 = \frac{8.5}{3}.x$ oder $\frac{17.7}{6}.y = 4.5.x$

$17.7.y = 20.6.x$; $119y = 120x$
$y = \frac{120}{119}x = (1 + \frac{1}{119}).x$;
$x = \frac{119}{120}.y = (1 - \frac{1}{120}).y$

42. 100 Thaler Gold in Ducaten, wie viel Thaler Gold sind es in Louisd'or? Da ist $x = 100$

$\log 119 = 2,0755470$
$\log \frac{100}{119} = 0,9244529 - 1$ | $y = 100,84033$

42. 100 Thl Gold in Louisd'or, wie viel Thaler Gold sind es in Ducaten? $y = 100$

$\log 120 = 2,0791812$
$0,9208187 - 1$ | $x = 100 - 0,83333 = 99,16666$

43.

43. Ein ander Exempel.

1 Ducaten gilt in Hamburg gewöhnlich 2 Thl Bco mehr oder weniger. Das gäbe 50 Duc. = 100 Thl Bco

Sind Ducaten um $\frac{1}{4}$ pro Cent besser als Bco so heißt das 50 Duc = $(100 + \frac{1}{4})$ Thl Bco also 200 Duc = 401 Thl Bco und Duc = 2,005 Thl Bco.

Der Louisd'or gelte 10 Mk 13,5 ß Bco = $\frac{1735}{480}$ Thl Bco.

In leichtem Gelde, sey der Werth des Ducatens = $\frac{11}{4}$ Thl, des Louisd'or = 5 Thl.

Nun bekomme ich 100 Thl in Ducaten nach leichtem Gelde; wechsele gegen diese Ducaten Louisd'or nach Bco ein, und verwechsele wieder um diese Louisd'or gegen leicht Geld. Wie viel bekomme ich leicht Geld = y

A	B	m	M	n	N	x
Duc	Louisd	2,005	2,75	$\frac{1735}{480}$	5	100

$2{,}75 \cdot \frac{1735}{480} \cdot y = 2{,}005 \cdot 5 \cdot 100 = 10{,}025 \cdot 100$

log 1735 = 3,2392995
log 480 = 2,6812412

log n = 0,5580583
log M = 0,4393327

log n. M = 0,9973910
log 1002,5 = 3,0010844

log y = 2,0036934
log 100,851 = 2,0036759

175

y = 100,851

44. Dieses Exempel hat v. Clausb. 1026 §. N, 17; 899 S. aber ziemlich dunkel ausgedruckt, wenigstens für jemand, dem die kaufmännische Rechensprache nicht ganz geläufig ist. Was er damit sagen wollte: Die Ducaten in Hamburg ½p. C. besser als Bco, habe ich auf die Art, wie gleich im Anfange angeführt ist, aus dem Werthe des Ducatens, der beym v. Cl. in den Nachrichten von Münzen und Wechselarten bey: Hamburg, steht, entwickelt. Er hat nicht deutlich gesagt, daß man für so viel Ducaten, als 100 Thl leicht Geld ausmachen, Louisd'or nach Bco Werthe kaufen, und diese wieder in leicht Geld verwechseln soll. Er giebt zum facit in circa $100 + \frac{7}{8}$ Thl, welches $= 100{,}875$

Vergleichung von Geldsorten mit einander durch Zwischenverhältnisse.

45. Was hiebey zu thun ist, lernt man am besten durch Exempel.

46. Ausrechnungstabelle von Berliner Banco gegen auswärtige Course und courante Geldspecies, Berlin 1765; lang Octav 221. S. beruht auf folgendem:

I) 100 Pfund Berliner Banco = a Thl zu Berlin.
II) 1 Pfund B. Bco = b Thaler des Ortes B
III) 100 Thl des Ortes B = x Berl. Thaler.

Also 1 Thl zu B $= \frac{1}{b}$ Pfund Berl. Bco

=

$= \frac{a}{100.b}$ Berliner Thaler

folglich $x = \frac{a}{b}$

Die Tafel giebt x an.

Exempel. 100 Pf B Bco = 116 = a Berl. Thl.

1 Pf B Bco = $44\frac{1}{8}$ Stüber zu Amsterdam

50 Stüber 1 Amsterdamer Thaler

Also (II) $b = \frac{44,125}{50} = 0,8825$

$x = \frac{1160000}{8825}$

log 1160000 = 6,0644580

log 8825 = 3,9457147

log x = 2,1187433

log 131,4 = 2,1187276

157

giebt x = 131,444 Thl

= 131 Thl 10 gl 7,872 ₰

Das allererste Exempel der Tafel. Die dasige Zahl der ₰ ist 8.

Die Zahl a ändert sich von 116 bis $131\frac{1}{4}$; die Course sind: Amsterdamer, Hamburger, Pariser und Lyoner, Londner.

Für die letzte ist das Berliner Pfund in Pfennigen Sterling angegeben, deren 240 auf das Pfund Sterling gehen. Ist so das Berliner Pfund

Pfund $= \frac{m}{240}$ Pfund Sterling, so ist das

Pfund Sterling $= \frac{2,4.a}{m}$ Berliner Thaler.

Wenn zwischen mehrern Coursen der Unterschied in Procenten angegeben ist, daraus die Vergleichung zwischen dem ersten und letzten zu finden.

47. Es sey wie in (19)

$100.A = (100+e).B$
$100.B = (100+f).C$
$100.C = (100+g).D$

und so weiter, wenn es nöthig ist.

So kömmt

$$100\,A = (100+e).\frac{100+f}{100}.\frac{100+g}{100}.D$$

und so fort, wenn die erste Geldsorte mit einer noch entferntern als D zu vergleichen wäre.

48. Universalregeln der Leipziger Wechselnegotien, sowohl bey steigenden als fallenden Coursen, zum Dienste der hiesigen Comtoiren verfertiget von C. v. Clausberg, Leipz. 1781. 8. Sind Vorschriften, die sich auf dergleichen Formeln wie (48) gründen, nur daß statt $100+e$; $100+f$; u. s. w. a, b, gebraucht sind.

Ein Exempel daraus N. 7. 17 S. Von Leipzig nach Amsterdam a (z. E. $127\frac{1}{4}$ p. C in Corr) von Hamburg nach Amsterdam b (z. E. $103\frac{1}{2}$ Thl. holl. Corr) pro 100 Thl. Hamburg.

Bco;

Bco; wie rendirt Leipzig, Hamburg, d. i. wie viel Leipziger Thaler kommen pro 100 Thl. Hamb. Bco?

In meinen Zeichen wäre

A	B	C
Hamb.	Amst.	Leipz.

$$100.\ A = \frac{(100+e).\ (100+f)}{100}$$

Für die Zahlen des Exempels $\frac{127{,}25.\ 103{,}5}{100}$

$= 131{,}703\,75$

v. El. Universalregel ist: Multiplicirt a mit b und schneidet dem Producte 2 Ziffern zur Rechten ab, so kömmt die begehrte Antwort in Leipziger Thalern. So findet er für das Exempel $131|70\frac{1}{2}$ welches er auf 131 Thl. 16,99 gl. oder 17 gl. in C c a bringt. Der eigentliche Bruch wäre 16,89 gl. v. El. hat das Abgeschnittene, ein klein wenig zu groß genommen.

In manchen Fällen sind die Course nicht nach Procenten ausgedruckt, allemahl aber sind seine Vorschriften, was jeder findet, der das Veränderliche im Course durch einen Buchstaben ausdruckt.

Man sehe noch von diesem Buche (302).

49. Wollte man (47) in sehr grosser Schärfe berechnen, so fände sich

$$(100+e).\ \left(1+\frac{f}{100}\right).\ \left(1+\frac{g}{100}\right) =$$

$$100+e+f+g+\frac{e.f+e.g+f.g}{100}+\frac{e.f.g}{10000}$$

Wo man vermittelst der Logarithmen, die beyden

den letzten Theile viel genauer finden könnte, als wenn man die Logarithmen so gleich bey (48) anwendete.

50. Exempel. Es sey $e = 3 + \frac{3}{8}$; $f = 26 + \frac{1}{4}$; $g = 4 + \frac{5}{6}$; Also $e + f + g = 29 + \frac{5}{8} + 4 + \frac{5}{6} = 34 + \frac{11}{24}$; Ferner $e = 3,375$; $f = 26,25$ $(e+f).g = 29,625.\frac{29}{6}$

Da ist $\log e + \log f = 1,9474031$

$\log((e+f).g) = 2,1559052$

Daher $e.f = 88,594 -$

$(e+f).g = 143,18$

Summe $= 231,774$

Ferner $\log efg = 2,6316498.$

Auch $\log \frac{11}{24} = 0,6611815 - 1$

Das giebt also zusammen folgendes

$100 + e + f + g = 134,45833 +$

$\frac{1}{100}.(ef + eg + fg) = 2,31774 -$

$\frac{1}{100000}.e.f.g = 0,04282 +$

Summe $= 136,81889$

51. Unmittelbar für (48) hätte man im Exempel

$100 + e = 103,375$

$100 + f = 126,25$

$100 + g = 104,833 +$

$\log 203,375 = 2,0144155$

$\log 126,25 = 2,1012314$

$\log 104,833 = 2,0204980$

Summe $- 4 = 2,1361449$

giebt $100\,A = 136,818.$ D

52.

52. Es wäre also die Zeit übel angewandt, die Rechnung mit so viel Weitläuftigkeit nach (50) zu führen, wenn man nichts damit gewinnt, als Zehntausendtheile und Hunderttausendtheile, um die sich der Kaufmann nicht einmahl bekümmert.

53. Freylich, wenn e, f, g, viel kleiner wären als im Exempel, so gäben die Logarithmen, was auf ihre Producte ankömmt, in kleinern Decimaltheilen, und da könnte die Rechnung nach (50) dienen, wenn man eine grosse Schärfe verlangte.

54. Zum Gebrauche des Kaufmanns aber, ist die nach (51) vollkommen zulänglich.

55. Wären nun da für gewöhnliche Course e, f, g, bekannt, so könnte man im Voraus für $100+e$ u. s. w. Logarithmen, deren Addition das Gesuchte gäbe, aus den Tafeln auszeichnen; Berechnung wäre nicht weiter nöthig, als etwa Proportionaltheile anzuwenden, wie im Exempel bey 103,375 und 104,833 ... Hätte man diese Zahlen so ausgedruckt, $100+e = \frac{803}{8}$; $100+g = \frac{832}{8}$ so wären ihre Logarithmen auch ohne Proportionaltheile gefunden worden, alsdann freylich durch eine, doch sehr leichte, Rechnung.

56. Dergleichen Logarithmen, hat Raphael Levi herausgegeben, von dem ich im VII. Cap. 3 Abschn. 14; geredet habe.

57. Vorbericht vom Gebrauch der neuerfundenen Logarithmischen Wechseltabellen, wo-

durch ein Cours aus 2, 3, oder mehr gegebenen Coursen bloß durch addiren und subtrahiren kann gefunden werden, verfertiget und herausgegeben von Raphael Levi, Hannover 1747; 4. lehret auf $4\frac{1}{2}$ Bogen Text, Gebrauch von 2 Tafeln, deren jede ohngefähr eine Folioseite einnimmt.

58. Das Exempel (50) ist aus diesem Gebrauche der Tabellen; 4 §. A, Hamburger Banco; B, Amsterdamer Courant; C, grobe $\frac{2}{3}$ Stück; D, Thaler, deren 5 auf den Louisd'or gehn.

59. Aus seinen Tafeln, schreibt er folgende Operation vor, wo die Zahlen von allen gegebenen Coursen addirt werden:

$26\frac{1}{4}$ p. C.	=	10123
$4\frac{5}{8}$	=	2050
$3\frac{3}{8}$	=	1442
		13615

Dieser Zahl, sagt er, komme in seiner ersten Tabelle am nächsten $36\frac{3}{16}$ p. C. Und das sey also der Cours Hamburger Banco gegen Louisd'or à 5 Rthl.

60. Wer diese Rechnung mit der (51) vergleicht, sieht also bald, daß jede der Zahlen, die R. L. addirt, von einem der Logarithmen in (51) die ersten fünf Decimalstellen enthält, mit Weglassung der Kennzifer. Daher haben die Zahlen für $4\frac{5}{8}$ und $3\frac{3}{8}$ jede nur 4 Zifern, weil von den Logarithmen, in die sie gehören, die erste Decimalstelle 0 ist. Bey $4\frac{5}{8}$ steht 2050, weil man log $(104+\frac{5}{8})$ auch durch 2,02050 aus-

ausdrucken würde, wenn man seine beyden niedrigsten Zifern wegliesse.

61. Man versteht hieraus, was die Tafel enthalten kann, die R. L. beym angeführten Exempel braucht, und die erste nennt. Jedes Glied von ihr ist log (100+e) — 2 nur die ersten fünf Decimalstellen des Logarithmen angegeben; e wächst von 0 bis $51+\frac{15}{16}$ durch alle Sechszehntheile. So ist $151+\frac{15}{16}=\frac{2431}{16}$, davon der Logarithme = 2,1816650, und das letzte Glied der Tafel gehört für $51+\frac{15}{16}$ Procent und ist 18167.

62. Die zweyte Tabelle ist in Spalten getheilt, die unter den Ueberschriften: Index 1; alle Hunderte; 100; 200 . . 900 und unter den Ueberschriften Index 2; die folgenden Hunderte; 1000; 1100 . . 2400 als Ueberschriften der Columnen darstellen; In einer schmalen Seitenspalte wachsen die ganzen Zahlen von 0 . . . 99. Unter der Ueberschrift 2400 und in einer Zeile mit 99 steht der Tafel letztes Glied 3977; Es ist aber

log 2499 = 3,3977662;

So enthält diese Tafel, für alle Zahlen von 100 bis 2499, der Logarithmen vier erste Decimalstellen, ohne Kennzifer.

Supplement zu dem im verwichenen 1747 J. herausgegebenen Vorbericht . . . . von Raphael Levi, Hannov. 1748. Enthält blos einige Aufgaben, zur Erläuterung.

63. Neue compendiöse allgemeine Cours- und Wechseltafeln, bestehend in 26 kleinen Tafeln, vermittelst welchen der Unterschied zwischen allerley Münzsorten, sowohl den ein- als ausländischen durch ganz Europa, blos durch eine kleine Addition oder Subtraction, ohne alle übrige Rechnung, in Procenten, und auch stückweise kann bestimmet werden, verfertiget von Raphael Levi, Hannover 1760; lang Octav, 64 S. Text und die auf dem Titel angezeigten 26 Tafeln.

64. R. L. erwähnt in der Vorrede, nach der Ausgabe voriger beyden Tafeln (57) hätten ihn viele ersucht, ein Compendium, da man ohne Rechnen, welches bey dem vorigen noch nöthig war, alle Coursen bestimmen kann, zu verfertigen. Diesem Verlangen zu folge habe er, aus den vorhin von ihm gedruckten Tabellen dieses Compendium verfertigt, wodurch alle Vorfälle von Cours- und Arbitragerechnungen, blos durch eine kleine Addition und Subtraction durch vier Zifern, und ohne alles übrige Rechnen können bestimmt werden.

65. Unter diesen Tafeln heisst die 26 und letzte: Procenttafel, ist eben so wie die erste (61) beschaffen, e wächst von 0 bis 100; durch alle Achttheile, und durch alle Sechstheile, die Brüche, dazu 0 gerechnet, sind Columnentitel und die ganzen Zahlen stehn in der Seitenspalte. Unter $\frac{7}{8}$ und in einer Zeile mit 199 steht 3008; Es ist aber $199 + \frac{7}{8} = \frac{1599}{8}$, davon der Logarithme $= 2{,}3007585$; Also enthält

hält das Glied von R. L. Tafel die ersten vier Decimalstellen dieses Logarithmen.

So finden sich in dieser Procenttafel der Logarithmen erste vier Decimalstellen, also noch eine weniger als in der (61).

66. Die I. Tabelle vergleicht Ducaten und Hamburger Bancothaler so:

Der Ducaten wird erstlich = 6 Mark gesetzt, so machen 50 Ducaten 100 Bancothaler, deren jeder = $\frac{1}{2}$ Ducaten ist.

67. Nun seyen Ducaten um r Procent besser, als Banco; 100. $\frac{1}{2}$ Duc = (100+r) Thl Bco, schlechter (100 + r). $\frac{1}{2}$ Duc = 100 Thl Bco.

68. Ferner nenne man gewöhnliche Thaler, deren $2\frac{3}{4}$ auf den Ducaten gehn, also 1 gewöhnl. Thl = $\frac{4}{11}$ Ducaten.

Wie viel besser als solche gewöhnliche Thaler sind 100 Thl Bco?

69. Weil ein halber Ducaten $\frac{11}{8}$ gewöhnliche Thaler hält (68). So ist (67) für Ducaten besser als Banco

$$\frac{100 \cdot 11 \cdot 100}{8 \cdot (100+r)} \text{ gew. Th} = 100 \text{ Thl Bco}$$

Und für Ducaten schlechter als Bco

$$\frac{(100+r) \cdot 11}{8} \text{ gew. Th} = 100 \text{ Thl Bco}$$

70. Es sey r = 5,5 Das heisst

Erst: 100 Thl in Ducaten zu 6 Mark gerechnet, betragen 105,5 Thl Bco.

Zweytens: 105,5 Thaler in solchen Ducaten betragen 100 Thl Bco.

Für jede Voraussetzung ist die Frage: Wie viel sind 100 Thl Bco besser als 100 Thl in solchen Ducaten zu $2\frac{3}{4}$ Thl gerechnet?

Weil $\frac{11}{8} = 1{,}375$ so hat man log $\frac{11}{8}$;

Also für die erste Voraussetzung

log $(\frac{11}{8}. 10000) = 4{,}1383027$

log 105,5 $= 2{,}0232525$

Unterschied $= 2{,}1150502$

gehört zu 130, 33;

So viel gewöhnl. Th $=$ 100 Th Bco

Oder 100 Thl Bco sind $30\frac{1}{3}$ Procent besser.

Für die zweyte Voraussetzung

log $\frac{11}{8} = 0{,}1383027$

log 105,5 $= 2{,}0232525$

Summe $= 2{,}1615552$

gehört zu 145,06

So viel gew. Th $=$ 100 Thl Bco

Oder 100 Thl Bco sind 45,06 Procent besser.

71. Levis I. T. heisst: Hamb. Bco per Duc $= 2\frac{3}{4}$ Rthlr. Hat eine schmale Seitenspalte mit der Ueberschrift: proc. Da gehn die Zahlen von 0 durch Viertheile bis $9\frac{1}{2}$. Zwo breitere Spalten, Ueber der einen: bess. über der andern: schl. über jeder Log.

Neben $5\frac{1}{2}$ der Seitenspalte steht unter: bess. 1151. Das sucht man in der Procenttafel auf (65) da gehört es zu $130\frac{1}{3}$.

Nähmlich 1151 sind die vier ersten Decimalziffern des Logarithmen, der für die erste Vorausaus-

aussetzung gefunden ward (70) und auch des log $130\frac{1}{3}$.

Bey eben der $5\frac{1}{2}$ steht unter: schl. 1616. In der Procenttafel gehört 1617 zu $145\frac{1}{8}$; und so sind 100 Thl Bco um $45\frac{1}{8}$ Pc. besser als 100 gew. Thl.

Das giebt R. L. selbst bey diesem Exempel an, Erläut. §. 4. 7. Seite. Indessen ist es etwas zu viel, weil $\frac{1}{8} = 0{,}125$

72. So erspart R. L. Tafel die Rechnung (70) Daß sie die Sache nicht so scharf bestimmt als diese Rechnung, muß dem Kaufmanne unschädlich seyn.

73. Nach (69) ist $\log\left(\frac{10000.11}{8.(100+r)}\right)+\log\left(\frac{(100+r).11}{8}\right) = 4+2.\log\frac{11}{8}$ $= 4{,}276054$, was auch r seyn mag. Dieser Summe vier erste Decimalzifern kommen also heraus, wenn man in irgend einer Zeile der I. Tafel die beyden Log. zusammen addirt.

74. Wenn $r = 0$ oder 100. $\frac{1}{2}$ Duc. $= 100$ Thl Bco; so gehen beyde Voraussetzungen (69) in eine zusammen, und es sind $\frac{1100}{8} = 137{,}5$ gew. Th $= 100$ Thl Bco wie auch R. L. Tafel anzeigt.

75. So viel wird zureichen, einen Begriff von diesen Tafeln zu geben. Man sieht, daß sie nichts weiter enthalten, als abgekürzte Logarithmen. Die Einrichtung, wie sie die Fragen durch Verweisung auf die Procenttafel beantworten, ist

allerdings scharfsinnig. R. L. hat sich ohne Zweifel auf diese seine Erfindungen was zu gute gethan, auch Vortheil davon gezogen. Er hat beyde Tafeln mit seinem Namen bezeichnet, die letzten auch mit seinem Petschafte. Da ich sie aus Auctionen bekommen, die von 1747 selbst aus R. L. Büchern, so kann ich nicht sagen, wie hoch er sie verkauft hat. Die Sorgfalt aber, die er für Beurkundung ihrer Originalität getragen hat, zeigt wohl, daß sie wenigstens in einem höhern Preisse gestanden haben, als ein Exemplar gemeiner trigonometrischen Tafeln, in denen man, auser den hieher nicht gehörigen Dingen, alle Logarithmen für L. Tafeln vollständiger findet, und mit ihnen, die so leichte logarithmische Rechnung schärfer führen kann.

Ueber Gewinn und Verlust.

76. Wenn man eine Waare für einen Preis kauft, für einen andern wiederum verkauft, so giebt der Unterschied beyder Preise, was man daran gewonnen oder verlohren hat.

Mann kann dieses allgemein so ausdrucken:
Preis des Verkaufs — Preis des Einkaufs = Gewinn.

Beträgt der Preis des Einkaufs mehr, so gäbe dieser Ausdruck: **verneinten** Gewinn; In der gemeinen Sprache: Verlust.

77. Aus dem allerersten arithmetischen Grundsatze: Daß sich nur Zahlen vergleichen lassen, die sich auf einerley Einheiten beziehen, ist klar, daß man beyde Preise auf einerley Geld bringen muß, wenn etwa der Verkauf nach anderm Gelde geschehen wäre als der Einkauf.

78.

78. Wer eine Waare um 14 Thl hannöverisch Cassengeld kaufte, gewönne nichts, wenn er sie um 15 Thl in Golde verkaufte, und verlöhre gar, wenn er sie um $14\frac{1}{2}$ Thl in Golde losschlüge, angenommen, daß die Menge von Thalern u. d. g. die er in Golde bezahlt bekömmt, nicht mehr noch weniger beträgt als $\frac{1}{17}$ dieser Menge an Thalern Cassengeld.

79. Es versteht sich, daß die Münzsorten, in denen ausgezahlt würde, durch ihre unterschiedene Verhältniß nach Gold und Cassengelde keine Aenderung machte.

Die Bemerkung (31) wird dieses erläutern.

Gesetzt ich bekomme eine Waare, die $99\frac{1}{6}$ Thl in Golde werth ist, mit 35 Ducaten bezahlt (28)

Ich kann gegen diese 35 Ducaten ihren Werth nach Cassengelde in 20 Louisd'or bekommen.

So gelten diese, 100 Thl in Golde und ich habe also $\frac{5}{6}$ Thl in Golde gewonnen, die ich nicht gewonnen hätte, wenn ich die $99\frac{1}{6}$ Thl mir hätte in Louisd'or bezahlen lassen, da ich $19\frac{5}{6}$ Louisd'or und $1\frac{2}{3}$ Thl klein Geld bekommen hätte.

80. Die Waare anzuschaffen, können Unkosten nöthig seyn, z. E. Unterhändlern, die sie aufsuchen, ihre Mühe zu bezahlen u. d. g. Eben so kann es Unkosten erfodern, sie wiederum ins Geld zu setzen. Diese Kosten vermehren also, was man für die Waare geben muß, und vermindern, was man wiederum für sie bekömmt. Einige haben keine bestimmte Verhältniß gegen Preis oder Menge der Waare. Ein Brief, den man

deßwegen absenden müsste, kann gleichviel Postgeld kosten, so unterschieden Preis und Menge seyn mögen, Andere, z. E. Gebühren der Unterhändler oder Mäkler, pflegen nach Verhältniß des Werthes vom Handel gerechnet zu werden.

81. Wenn dergleichen Spesen nach Procent angegeben werden, so versteht man sie beym Einkaufe auf, beym Verkaufe, von Hundert. (9)

Sind die Spesen beydemahl 1 Procent, und ich kaufe 100; so muß ich dem Verkäufer 101 bezahlen, oder: ich gebe 101 aus, und bekomme dafür 100.

Verkaufe ich aber 100; so bekomme ich nur 99 bezahlt.

v. Clausb. Rechenk. §. 1033.

82. Nach diesen Erklärungen, lassen sich Fragen vom Gewinn und Verlust beym Geldwechsel beantworten. Ich will, um der Deutlichkeit willen, von einem Exempel anfangen, das v. Clausb. 1056 §. 924. S. giebt, und die Berechnung davon auf mehr Arten umständlich zeigt.

83. Hamburg kauft 1000 Louisd'or zu $10\frac{5}{8}$ Mark Banco $= \frac{85}{8}$ Mk $= \frac{85}{8 \cdot 3}$ Thl Banco.

Diese Louisd'or sendet H. nach Leipzig, wo sie zu 5 Thlr. abgesetzt werden.

Wegen Spesen, als: Provision, Courtagie (Gebühren des Mäklers) Fracht und Briefporto, werden in Hamburg 1 Procent, in Leipzig auch 1 Prc. jedes besonders berechnet.

Leipzig sendet die Valuta zurück nach H. à 135 p. C.

Das

Das heisst 100 Thl Hamburger Banco = 135 Leipziger Thaler, deren 5 auf den Louisd'or gehen.

Wie viel hat Hamburg bey diesem Handel gewonnen oder verlohren?

84. Die Spesen beym Einkaufe veranlassen folgende Bemerkung.

1000 Louisd'or ohne Spesen kosteten H; 1000. $\frac{8}{8}^{5}$ Mk, oder umgekehrt, für so viel Mk, bekäme H so viel Louisd'or.

Nun aber, wenn H. 1000. $\frac{8}{8}^{5}$ Mk ausgiebt, bekömmt es nicht 1000 Ld'or, sondern man muß so rechnen

$$101 : 100 = 1000 : \frac{100000}{101}$$

Die vierte Zahl $= 990 + \frac{10}{11}$ zeigt, wie viel Ld'or H. für 1000. $\frac{8}{8}^{5}$ Mk bekömmt, und nach Leipzig senden kann.

Will aber H. wirklich 1000 Ld'or haben, so muß es $\frac{101}{100}$. 1000. $\frac{8}{8}^{5}$ Mk $= 1010$. $\frac{8}{8}^{5}$ Mk auszahlen.

85. Die Frage kann also zweyerley Bedeutungen haben, deren jede offenbahr eine andre Antwort bekömmt:

Was gewinnt oder verliert H. wenn es zu L. $990\frac{10}{11}$ oder 1000 Louisd'or verkaufen läßt?

86. Nach diesen Erläuterungen, wird die Aufgabe wohl in den allgemeinen Ausdrückungen verständlich seyn, in den ich sie nun vortrage.

Eine

Eine Waare wird nach einer Münzsorte mit Spesen nach Procent gekauft, nach einer andern, auch mit dergleichen Spesen, verkauft. Wie viel gewinnt man?

87. Von einer Waare kostet das Stück, in Gelde des Ortes H; a Thaler, wenn man keine Unkosten dabey rechnet.

Am Orte L, wird das Stück, für b Thaler dieses Ortes verkauft, auch wenn man da keine Unkosten rechnet.

h Thl. des Ortes H = l Thlrn des Ortes L

88. Die Spesen des Einkaufs zu H, sind e Procent; das ist: für a; bekömmt man nur

a. $\frac{100}{100+e}$ Stück.

Die Spesen des Verkaufs, sind r Procent, das heisst zu L, wo die Waare verkauft wird, bekömmt man für ein Stück, nicht b; sondern

b. $\frac{100-r}{100}$

89. Man kauft zu H; m Stück der Waare und sendet die nach L, wo sie auf angezeigte Art verkauft werden.

90. Wie viel gewinnt oder verliert man bey diesem Verkaufe?

Erste Bedeutung der Frage.

91. Man gebe zu H; m. a aus.

Dafür bekömmt man nur $\frac{100.m}{100+e}$ Stück

Die sendet man nach L;

Da

Da bekömmt man nur $\frac{100 . m}{100 + e} . \frac{100 - r}{100}$

$= \frac{m (100 - r)}{100 + e}$ Stück bezahlt.

Also bekömmt man $\frac{m . (100 - r)}{100 + e} . b$ Thaler des Orts L.

Oder $\frac{m . (100 - r)}{(100 + e)} . \frac{b . h}{l}$ Thaler des Ortes H.

92. Also ist

Einnahme — Ausgabe oder Gewinnst.

$= m \left(\frac{100 - r}{100 + e} . \frac{b . h}{l} - a \right)$ Thaler des Ortes H.

Zweyte Bedeutung.

93. Man gebe zu H, so viel aus, daß man völlig m Stück bekömmt.

Es ist klar, daß mit den Spesen des Einkaufs, ein ganzes Stück $\frac{a . (100 + e)}{100}$ kostet.

Also giebt man zu H; $m . a . \frac{100 + e}{100}$ aus, um m Stück zu bekommen.

Die sendet man nach L;

Da wird jedes nur so bezahlt als wenn es nicht ganz, nur $\frac{100 - r}{100}$ von ihm da wäre.

So

So bekömmt £; $\frac{m.(100-r)}{100}$. b dasige Thaler

Die betragen $\frac{m.(100-r)}{100}.\frac{b.h}{l}$ Thaler zu H.

94. Folglich ist nun

Einnahme — Ausgabe = Gewinnst

$= m.\left(\frac{100-r}{100}.\frac{b.h}{l} - \frac{a.(100+e)}{100}\right)$

$= \frac{m}{100}.\left((100-r).\frac{b.h}{l} - a.(100+e)\right)$

Thaler zu H. Auch

$\frac{m.(100+e)}{100}.\left(\frac{100-r}{100+e}.\frac{b.h}{l} - a\right)$

Thaler zu H.

95. Vermöge des letztern Ausdrucks ist

Gewinnst (94) $= \left(1+\frac{e}{100}\right)$. Gew. (92)

Wenn an jedem Stücke gewonnen wird, so wird in (94) mehr gewonnen, weil mehr Stücke verkauft werden, m, aber in (92) nur

$\frac{100\,m}{100+e}$

96. Aus (87) erhellt, daß b Thaler zu £, so viel betragen, als $\frac{b.h}{l}$ Thaler zu H.

Soll nun wirklicher Gewinnst seyn, so muß $\frac{b.h}{l}$ gröſſer als a seyn.

Nähm-

Nähmlich, was man ohne Spesen für ein Stück Waare zu ℒ bekömmt, muß mehr werth seyn, als man auch ohne Spesen, zu ℋ dafür giebt, weil die Spesen, noch die Einnahme vermindern, und die Ausgabe vermehren.

97. Aber eben wegen dieses Einflusses der Spesen, könnte das, was nach vorhergehendem Absatze seyn muß, noch nicht allemahl zulänglich seyn, Gewinnst zu erhalten.

Eigentlich erfodert der Gewinnst, daß $\frac{100-r}{100+e} \cdot \frac{b.h}{l}$ grösser als a ist.

98. In jeder Bedeutung (92; 94) ist Gewinnst in Thalern zu ℒ

$= \text{Gew. in Thl zu ℋ} \cdot \frac{l}{h}$ (87)

99. Wollte man die Gewinnste in Stücken der Waare angeben, so wäre folgendes zu bemerken.

Wenn man ein Stück Waare nennt, was a zu ℋ gilt, so kann man statt eines dasigen Thalers zu ℋ, setzen: $\frac{1\ \text{Stück}}{a}$

Und so kann man sagen
Für den Gewinnst bekömmt man so viel Stück als folgender Quotient anzeigt

$$\frac{\text{Gewinnst in Thalern zu ℋ}}{a}$$

100. Eben so: Nennt man ein Stück, was b zu ℒ gilt, so läßt sich ein Thaler zu ℒ,

durch

durch $\frac{1 \text{ Stück}}{b}$ angeben; und man bekömmt für den Gewinnst so viel Stücke als folgender Quotient angiebt

$$\frac{\text{Gewinnst in Thalern zu } \mathfrak{L}}{b}$$

Wo man die Zähler der Brüche aus 92; 94; 98 hat.

101. So kömmt aber aus (98) für (100) Gew in Thl zu ℌ. $\frac{l}{b.h}$

Diese Zahl ist kleiner als die in (99) weil $\frac{b.h}{l}$ grösser ist als a (96)

Die Zahl der Stücke also, durch die einerley Gewinnst ausgedruckt wird, ist in (100) kleiner als in (99)

Denn ein Stück bedeutet in (100) etwas, das b Thaler zu ℒ gilt, und in (99) etwas, das a Thaler zu ℌ gilt. Aber b Thaler zu ℒ sind mehr werth als a Thaler zu ℌ (96). Also bedeutet ein Stück in (100) etwas, das mehr werth ist, und davon gehören nicht so viel Stück, den Gewinnst auszumachen, als in (99) wo ein Stück etwas von geringerm Werthe bedeutet.

Berechnung des Exempels (83).

102. Also sind die Bedeutungen der Buchstaben (87 . . 89) folgende:

hie

	a	b	h	l	e	r	m
hie	$\frac{85}{8.3}$	5	100	135	1	1	1000

103. Erste Bedeutung der Frage (91)

Zu H, bekömmt man für $\frac{85}{8.3}$. 1000 Thl Banco; $\frac{100000}{101}$ Stück Louisd'or (die Zahl ist (84) angegeben).

Dafür erhält man zu L

$1000. \frac{100}{101}. \frac{99}{100}. 5$ Leipziger Thaler

Die machen

$1000. \frac{100}{101}. \frac{99}{100}. \frac{5.100}{135}$ Thl Bco

und mit 3 multiplicirt

$1000. \frac{100.9.11.5.100.3}{101.100.27.5}$ Mark Bco.

Das ist $= \frac{1000.1100}{101} = 10891\frac{9}{101}$ Mk Bco

Als Einnahme.

Ausgabe war $1000. \frac{85}{8}$ Mk $=$

$1000. 10{,}625 = 10625$ Mk

Also Gewinnst $= 266\frac{9}{101}$ Mk.

104. Zweyte Bedeutung (93)

H kaufte 1000 Stück Louisd'or völlig, gab dafür $1000. \frac{101}{100}. \frac{85}{8.3}$ Thl

L bekam für diese 1000 Louisd'or;

$1000. \frac{99}{100}. 5$ Leipziger Thl

$= 1000. \frac{99}{100}. 5. \frac{100}{135}$ Thl Bco

$= 1000. \frac{9.\,11.\,5.\,100.\,3}{100.\,27.\,5}$ Mk Bco

Diese Einnahme beträgt genau = 11000 Mk
Die Ausgabe = 10731,25
Gewinnst = 268,75

105. Ich wollte für beyderley Bedeutungen den Gang der Rechnung zeigen. Verlangt man sogleich den Gewinnst in Mark Bco; so ist er

(92) $1000. \left(\frac{99}{101} \cdot \frac{5.\,100.\,3}{135} - \frac{85}{8} \right)$

$= 1000. \left(\frac{1100}{101} - \frac{85}{8} \right)$

$= 1000. \frac{215}{8.101} = 266\frac{8}{101}$

(94) $= \frac{1000}{100} \cdot \left(\frac{99.\,5.\,100.\,3}{135} - \frac{85}{8}.101 \right)$

$= \frac{1000}{100}. (1100 - 101.\,1{,}0625)$

$= 268{,}75$

In Decimalbrüchen ist der Gewinnst (92)
= 266,089108910 ....
dazu addirt sein $\frac{1}{100}$ = 2,660891089 ...
giebt = 268,749999999

für den Gewinnst (94), vermöge (95) weil e = 1.

106. v. Clausberg Rechenk. §. 1057; giebt beyde Gewinnste an; 929 Seite den, der hie in (103) der erste ist, und 930 S. den, der hie der zweyte ist.

Vielleicht habe ich mich mit v. Cl. Sprache bey diesem Gegenstande nicht zulänglich bekannt gemacht. So viel gestehe ich, daß mir schwer wird, die Gründe seines Verfahrens einzusehn.

Er

Er rechnet 929 S. so, als würden 1000 Louisd'or für 10625 Mk gekauft, und bringt die Hamburger Spesen in den Theil der Rechnung, der den Verkauf der Louisd'or betrifft. Seine Rechnung ist der Formel (92) gemäß, und giebt so allerdings ein richtiges Facit. Ich dächte aber doch, seine Ausdrückungen

die 1000 Ld'or haben 10625 Mk gekostet,
sind im Verkauf auf $10891\frac{8}{101}$ ausgebracht

also gewonnen $266\frac{8}{101}$

wären anstössig.

Denn 1000 Ld'or hätten wegen der Hamburger Spesen mehr gekostet, als 1000. $\frac{8}{8}$ Mk; aber auch mehr ausgebracht.

v. El. sagt 930 S. er habe alle Spesen im Verkauf, weil im Einkauf unser Courtagio, die nur 1. Pro Mille, folglich nur $\frac{1}{10}$ P. C. ist, keine Spesen mehr vorhanden.

Diese Courtagio, hat er also gar bey seite gesetzt. Und: wie im Einkaufe keine Spesen vorhanden seyn können, da die Spesen des Einkaufs eben verursachen, daß man 101 bezahlt, und nur 100 bekömmt, das ist mir schwer zu verstehen.

"Wenn das 1 P. C. Hamburger Spesen beym Einkaufe wäre . . . (fährt v. El. fort: als wenn von einer Waare, die in Hamburg gekauft und in Leipzig verkauft wird, Hamburger Spesen wo anders seyn könnten, als beym Einkaufe?) . . . . so müssten die 2 Aufsätze (des Einkaufs und des Verkaufs) folgendergestalt kommen" . . .

Und nun führt v. Cl. die Rechnung, der zweyten Bedeutung der Frage (93) gemäß.

Meiner Einsicht nach, hat also v. Cl. darinn gefehlt, daß er diese beyden Bedeutungen nicht gehörig unterschied, deren jede eine andre Rechnung erfodert.

Seine Rechnung: wenn das 1 P. C. Hamb. Spesen beym Einkaufe wäre, bezieht sich auf den Fall: Wenn man wirklich 1000 Louisd'or bekömmt, also 1000. $\frac{101}{100}$ bezahlt.

Und seine vorhergehende, da alle Spesen beym Verkaufe sind, auf den Fall: Wenn nur 1000 Louisd'or bezahlt, also nur $990\frac{10}{11}$ erhalten, und wiederum verkauft werden.

107. Der Gewinnst in Louisd'or ist nach (99 und 100) zu berechnen, kann also auch unterschiedlich angegeben werden, nachdem ein Louisd'or; 5 Thl zu Leipzig, oder $\frac{85}{8}$ Mk Bco heisst.

108. Ist die Frage nach (103) beantwortet und die Antwort schon in Mk ausgedruckt, so setze man in (99) statt a, auch den Werth eines Louisd'or in Mark $= \frac{85}{8}$;

So ist der Gewinnst in Louisd'or

$= (266 + \frac{2}{101}) \cdot \frac{8}{85} = \frac{26875 \cdot 8}{85 \cdot 101}$; den Logarithmen hievon finde ich 1,3986982 also die Zahl = 25,043

v. Cl. fängt seine Berechnungen dieses Exempels mit dieser Frage an, 925 S. und findet $25\frac{75}{1717}$ Louisd'. Die Logarithmen geben mir $\frac{75}{1717} = 0{,}043689$

109. Aus vorhergehendem lehrte also diese Rechnung so viel:

H. hat für 1000. $\frac{8}{5}$ Mk; $990\frac{10}{11}$ Louisd'or bekommen, und beym Verkaufe daran $25\frac{7}{11}\frac{5}{17}$ Louisd'or gewonnen, oder so vielmahl $\frac{8}{5}$ Mk mehr bekommen, als es ausgegeben hatte.

110. Nach der zweyten Bedeutung (104) betrüge der Gewinnst $268{,}75 \cdot \frac{8}{5} = 25\frac{5}{17}$ Louisd'or.

Oder: wenn H. wirklich 1000 Louisd'or nach L. schickte, gewinnt es daran so viel Mk als den Werth von $25\frac{5}{17}$ ausmachen.

111. Der Gewinnst in Leipziger Thalern, wird durch eine grössere Zahl ausgedruckt, als die Zahl ist, die ihn in Banco Thalern angiebt, weil ein Leipziger Thaler weniger beträgt, als ein Thl Bco.

In (103) wäre er $= (266 + \frac{8}{101}) \cdot \frac{135}{100}$ Leipziger Thaler $= (266 + \frac{8}{101}) \cdot 0{,}45$

112. Hie 5 Leipz. Thl = Louisd'or gesetzt, betrüge der Gewinnst $(266 + \frac{8}{101}) \cdot 0{,}09$ Ld'or

$$= \left(23{,}94 + \frac{0\,81}{101}\right) = 23{,}94801 \ldots \text{ Ld'or.}$$

Eben das findet sich aus (104) da ist der Gewinnst in Thl Bco $= \frac{26875}{3 \cdot 101}$; also nach (98) $=$

$$\frac{26875}{3 \cdot 101} \cdot \frac{135}{100 \cdot 5} = \frac{26875 \cdot 9}{101 \cdot 100} \text{ Louisd'or.}$$

Der Logarithme hievon $= 1{,}3792696$ giebt 23,948

113. In (108) heißt ein Ld'or $\frac{8}{5}$ Mk Bco.

In (112) heißt ein Louisd'or $\frac{5.100}{137}$ Thl Bco $= \frac{100}{9}$ Mk Bco

Aber $\frac{100}{9} - \frac{85}{8} = \frac{800-765}{72}$; Also beträgt der Louisd'or in (112) $\frac{35}{72}$ Mk mehr als der in (108)

Der Louisd'or muß in Leipzig mehr als $\frac{85}{8}$ Mk Bco gelten, wenn bey dem Handel Gewinnst seyn soll. Hiedurch wird (101) erläutert.

114. Vielleicht habe ich diese ganze Untersuchung spitzfündiger angestellt als nöthig war. Da $990\frac{10}{11}$ Louisd'or (84) sich nicht anders verschicken lassen, als wenn man den Bruch in kleinem Gelde beylegte, oder ein Stück mehr sendete, welches aber wiederum eine neue Rechnung veranlasste, so werden wohl eigentlich 1000 Ld'or gekauft und versandt. Und so müsste die Rechnung nur, für die zweyte Bedeutung geführt werden; (94; 104) Die Rechenmeister werden es wohl wissen, warum sie ein Verfahren lehren, das die erste voraussetzte. (93; 103). Allenfalls kann man sagen: Der Unterschied zwischen beyden Rechnungen ist nicht groß, wenn die Spesen des Einkaufs nicht sehr groß sind (95; 105); und wenn der Handel wirklich in der zweyten Bedeutung geführt wird, die Rechnung aber nach der ersten, so giebt sie den Gewinnst geringer an, als man ihn wirklich erhält, und das ist doch besser, als wenn sie zu viel verspräche.

115.

115. In beyden Bedeutungen (92; 94) ist einerley Verhältniß der Ausgabe zur Einnahme, und der Quotient

$$\frac{\text{Ausgabe}}{\text{Einnahme}} = \frac{100+e}{100-r} \cdot \frac{a.l}{b.h}$$

Aehnliche Sätze 118. 119

116. v. Cl. 926 Seite Nota 3; sagt: Das bisher durchgegangene Exempel liesse sich auch so auflösen: Die empfangenen 1000 Louisd'or hätten so viel Louisd'or gekostet als 1000 mit dem Quotienten (115) multiplicirt giebt. Er ist im Exempel

$$= \frac{10,73125}{11} = 0,97556 + \frac{8}{1100000}$$

giebt also mit 1000 multiplicirt $975,56 + \frac{8}{1100}$

Die Brüche machen zusammen $\frac{25}{44}$;

So sagt v. Cl. die empfangenen 1000 Ld'or haben nur $975\frac{25}{44}$ gekostet, also seyen $24\frac{19}{44}$ gewonnen. Erinnert aber selbst, dieser Gewinnst sey auf $975\frac{25}{44}$; Die Aufgabe aber verlange den auf 1000 zu wissen; den müsste man also nach der Regel Detri oder auf andere Art suchen, und dieser Bemühung überhoben zu seyn, wähle er die vorige Art Auflösungen.

117. Das zeigt doch: Diese Aufgabe komme den Rechenmeistern ziemlich verwickelt vor. Die Ursache ist wohl, weil die Frage nicht recht deutlich bestimmt ausgedruckt, mehrerley Auslegungen fähig ist, und so war es nicht überflüssig, Alles bey ihr umständlich aus einander zu setzen, und was gethan wird durch die Buchstabenrechnung,

kurz vor Augen zu stellen. Man kann damit vergleichen, was v. El. über die mancherley Arten, diese Frage zu berechnen, §. 1061. sagt.

118. Sowohl in (92) als in (94) ist

$$\frac{\text{Gewinnst}}{\text{Ausgabe}} = \frac{100 - r}{100 + e} \cdot \frac{b.\,h}{a.\,l} - 1$$

Deßwegen sey es einerley, nach welcher von beyden Arten man rechne, wenn man nur die Verhältniß des Gewinnstes zur Ausgabe sucht, und jeder müsse wissen, ob die Spesen in seiner Handlung ganz oder größtentheils im Ein- oder Verkaufe aufgegangen, und darnach die Aufsätze richten, sagt v. El. 931 Seite.

119. Uebrigens folgt auch noch aus (115; 117)

$$\frac{\text{Gewinnst}}{\text{Einnahme}} = 1 - \frac{100 + e}{100 - r} \cdot \frac{a.\,l}{b.\,h}$$

Gewinnst an den Geldsorten oder Coursen, bey der Frage vor 87.

120. Man könnte dieses aus vorigen Formeln herleiten, nur die Zahl der Stücke = 1 gesetzt. Ich will aber die kurze Rechnung lieber ganz von neuem führen, damit sie von vorhergehender unabhängig ist, und solche desto mehr bestätigt, wenn man sich von Richtigkeit der gegenwärtigen überzeugt hat.

121. Ein Stück kostet zu H; $\frac{a.(100+e)}{100}$ dasige Thaler (81)

122. Wird zu L so verkauft, als wäre es nicht

nicht ganz, sondern nur $\frac{100-r}{100}$ von ihm vorhanden (81) also für $\frac{100-r}{100}$. b dasige Thaler.

124. Die betragen $\frac{100-r}{100} \cdot \frac{b.h}{l}$ Thäler zu H. (87)

123. Also ist für ein Stück; an Thalern zu H; Einnahme (123) — Ausgabe (121) = Gewinnst $= \frac{100-r}{100} \cdot \frac{b.h}{l} - \frac{(100+e)}{100} \cdot a$

$$= \frac{100+e}{100} \cdot \left(\frac{100-r}{100+e} \cdot \frac{b.h}{l} - a \right)$$

völlig wie in (94) dort m = 1 gesetzt.

125. Wie viel Thaler zu £ bekömmt man für einen Thaler zu H?

Aus (122) erhellt, wie viel Thaler zu £ man für so viel zu H bekömmt als (121) angiebt.

Man schliesse also

$$\frac{a.(100+e)}{100} : 1 = \frac{b.(100-r)}{100} : \frac{100-r}{100+e} \cdot \frac{b}{a}$$

Das giebt, wie viel Thaler zu £ man für einen zu H bekömmt.

126. Und, mit 100 multiplicirt, wie viel Thl zu £ man für 100 zu H bekömmt, oder wie durch diesen Handel der vorige Cours geändert wird, da man für h Thaler zu H, 1 zu £ bekam.

127. Auch kann man fragen, wie viel an einem Stücke in Thalern zu £ gewonnen worden?

Nach (121) kostete es $\frac{100+e}{100} \cdot \frac{a.l}{h}$ Thaler zu £

Man bekömmt dafür (122)

Gewinnt also $\frac{100-r}{100} \cdot b - \frac{100+e}{100} \cdot \frac{a.l}{h}$ Thaler zu £.

wie man sogleich aus 124 gefunden hätte, den dasigen Gewinnst in Thl zu £ ausgedruckt.

Vergleichung dieser Rechnungen mit v. Clausbergs seinen. 140. Aufgabe, 1058. §.

128. Für (124) rechnet v. Cl. so (932 Seite No. 1.):

1 Stück werde verkauft für $\frac{b.h}{l} \cdot \frac{100-r}{100+e}$ Thl zu H

habe gekostet a Thl zu H;

also Gewinnst $\frac{100-r}{100+e} \cdot \frac{b.h}{l} - a$

129. Der Gewinnst, den ich angebe (124) ist also etwas grösser, kömmt heraus, wenn man v. Cl. seinen mit $(1 + \frac{e}{100})$ multiplicirt.

130. Für die Frage (126) rechnet v. Cl. so: (No. 2; 933 S.)

Für 100 Thl zu H; bekömmt man

$100. \frac{b}{a} \cdot \frac{100-r}{100+e}$ Thl zu £

Das stimmt also mit meiner Rechnung genau überein.

131.

131. Für die (127) sagt er (No. 3. 934 S.) Ein Stück, habe zu H in Thalern zu L gekostet $\frac{a.l}{h} \cdot \frac{100+e}{100-r}$

Da es nun für b solcher Thaler ausgegeben worden, so sey der Gewinnst $b - \frac{a.l}{h} \cdot \frac{100+e}{100-r}$

132. Weil $\frac{100+e}{100-r} = 1 + \frac{e+r}{100-r}$, so ist dieser Gewinnst $= b - \frac{a.l}{h} - \frac{a.l.(e+r)}{h.(100-r)}$ und übertrifft den in (127) angegebenen um $\frac{br}{100} - \frac{a.l}{h} \cdot \left(\frac{e+r}{100-r} - \frac{e}{100}\right)$

133. Die Unterschiede zwischen unsern beyden Rechnungen, können freylich nur geringe seyn. Sie rühren daher, daß v. Cl. die Spesen auf andre Art anbringt als ich (106)

Rechnung des Exempels (102)

134. Nach (124) ist der Gewinnst an einem Louisd'or, in Mk Bco

$\frac{99.5.3}{135} - \frac{101.85}{100.8} = 11 - 10{,}73125 = 0{,}26875$; dieses mit 16 multiplicirt, giebt den Gewinnst an einem Ld'or in ßBco $= 4{,}3$

Cl.

El. giebt ihn $4 + \frac{26}{101}$ ß $= 4{,}2574\ldots$
addirt dessen $\frac{1}{100}$ $= 0{,}04257\ldots$
giebt $4{,}29997\ldots$

also meinen Gewinnst nach (129)

135. Nach (125). Gegen einen Thaler Bco, bekömmt H; $\frac{99}{101} \cdot \frac{5 \cdot 8 \cdot 3}{85} = \frac{99 \cdot 8 \cdot 3}{101 \cdot 17}$ Thl. zu L.

Diese Zahl ist $= \frac{2376}{1717} = 1{,}38 + \frac{6{,}54}{1717}$

H bekömmt also für 100 seiner Thaler, $138 + \frac{654}{1717}$ Thl zu L.

Völlig das giebt v. El. an (130).

136. Nach 127; den Gewinnst an einem Stück fand ich in Mk Bco (134)

In Thalern zu L ist er also

$\frac{= 0{,}26875}{3} \cdot 1{,}35 = 0{,}26875 \cdot 0{,}45$

$= 0{,}1209375$

v. El. findet diesen Gewinnst $= \frac{43}{352}$ Thl zu L $= 0{,}12214\ldots$ ein wenig grösser (132)

Wie viel bey dem Handel vor 87; von H, an 100 irgend einer Einheit, die es ausgiebt, gewonnen wird?

137. In (126) drucke man die Menge der Thaler zu L, in Thalern zu H aus; so heisst es:

Für 100 Thl zu H, bekömmt man

$100 \cdot \frac{100 - r}{100 + e} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{h}{l}$ Thaler zu H. Die Zahl heisse $100\,(1+f)$

138. Also überhaupt für 100. E;

$$100.\ (1+f).\ E$$

was auch E seyn mag, Louisd'or, Mark, Thaler zu L, Werth irgend einer Sache.

Denn allemahl hat E eine gewisse Verhältniß zum Thl von H. Es sey n. E = 1 Thl von H; so heisst (137)

Für 100. n. E bekömmt man 100. (1+f). n. E

Also 100. (1+f) E für 100. E

Ist v. Cl. 1056 §. Er macht für jede 100; der Münzsorten, die in der Frage vorkommen, Louisd'or, Thl Bco; Mk Bco; Thl zu L. einen besondern Aufsatz nach der Kettenregel, der freylich allemahl einerley giebt.

139. Im Exempel kömmt aus (135) hie, was in E multiplicirt wird, oder 100. (1+f)

$$= 100.\ \frac{99.8.3}{101.17}.\ \frac{100}{135} = \frac{10000.11.8}{101.17.5}$$

$$= \frac{176000}{1717} = 102\ \frac{866}{1717}$$

Es werden also bey diesem Handel allemahl 100 f = $1\ \frac{866}{1717}$ auf 100 gewonnen.

140. Wollte man g berechnen, die in 100 gewonnen würden, so daß man 100 gegen 100. (1−g) bekäme, so wäre

100. (1−g): 100 = 100 : 100. (1+f) also

$$1-g = \frac{1}{1+f}$$

141. Man könnte die Waare in Thlrn zu L kaufen und in Thlrn zu H verkaufen. War bey vorigem Handel Vortheil, so muß bey diesem

sem Verlust seyn, und umgekehrt. In Betracht, daß die Spesen beym Kauf auf und beym Verkauf in P. C. sind, würde ich so rechnen.

142. 1 Stück kostet $= \frac{100+r}{100}$. b Thl zu

$\mathfrak{L} = \frac{100+r}{100} \cdot \frac{h.\,b}{1}$ Thl zu $\mathcal{H}$

Das ist die Ausgabe.

Zu $\mathcal{H}$ wird es mit den Verkaufsspesen, verkauft für $\frac{100-e}{100}$. a Thl zu $\mathcal{H}$.

Das ist die Einnahme.

Und Ausg — Einn = Verlust, wenn Ausgabe grösser ist.

143. Diese Rechnung giebt, wie viel Thl zu $\mathcal{H}$, an einem Stück verlohren werden. Leicht ist daraus herzuleiten, wie viel an m Stücken, solche Thaler, oder Thaler von $\mathfrak{L}$, oder auch Stücke, verlohren werden, Alles wie vorhin.

144. In den Zahlen des Exempels (102) kaufte $\mathcal{H}$ einen Louisd'or für $\frac{101}{100} \cdot 5$ Thl zu $\mathfrak{L}$

$= \frac{101.5}{135}$ Thl zu $\mathcal{H} = 1\frac{1}{9}$ Mk Bco $= 11 + \frac{2}{3}$

Verkaufte ihn wiederum für $\frac{99}{100} \cdot \frac{85}{8}$ Mark $= 10 + \frac{83}{160}$

Eink — Verk $= 1 + \frac{2}{3} - \frac{83}{160} = \frac{1013}{1440}$

So viel Mk beträgt der Verlust an einem St.

Dieser Verlust, mit dem Einkaufe eines Stücks dividirt, giebt $\frac{1013}{1440} \cdot \frac{2}{101} = \frac{1013}{160.101}$

$=$

$= 0{,}06 + \frac{43{,}4}{16160} = 0{,}06 + \frac{217}{80800}$

145. Diese Frage berechnet v. Cl. 1062 §; wiederum auf unterschiedene Arten; Für seine 943 Seite, sähe das Verfahren, allgemein ausgedruckt, so aus: 1 St. kostet im Einkaufe $\frac{b.h\ (100+r)}{l.\ (100-e)}$, wird verkauft für a

Wo also die Spesen des Verkaufs, beym Einkaufe stehen.

Indessen zeigt v. Cl. am Ende dieses Absatzes, 948 S. daß nach achterley Berechnungen, die man machen könnte, der Verlust allemahl $6 + \frac{217}{808}$ Procent beträgt; völlig wie nach meiner Rechnung (144)

146. Daß bey übrigens einerley Zahlen, der Verlust einen grössern Theil der Ausgabe (144;) mehr Procent (145) beträgt, als der Gewinn (139) ist daraus klar, weil die Spesen den Gewinnst vermindern, den Verlust vergrössern, also bey beyden Rechnungen nicht auf einerley Art wirken.

147. Ohne Spesen wären $e = o = r$ also in 92 wie in 94; für $m = 1$; Einnahme — Ausgabe $= \frac{b.h}{l} - a$, und völlig das Einn — Ausg in (142) Also wenn eins von beyden Gewinn ist, das andre Verlust, nur entgegengesetzt, sonst völlig gleich.

148. Das bisher vorgetragene, beantwortet von Gewinn oder Verlust vier Fragen, die ich beym Gewinn umständlich aus einander gesetzt habe,

I. Wie

I. Wie viel beträgt er bey m Stücken, an eben solchen Stücken? (99)

II. Wie viel an Geldsorten zu H? (92; 94)

III. Wie viel am Course? (126)

IV. Wie viel Procent? (138)

149. Daß diese vier Fragen hie untersucht werden können, erwähnt v. Cl. 1054 §. und setzt 1067 §. noch eine dazu

V. Wie viel beträgt Gewinn oder Verlust wegen der Zeit?

Erinnert aber selbst, daß die eigentlich zur Interesse-Rechnung gehört, und durch eine leichte Regel Detri auszumachen ist.

150. Man sieht leicht, daß diese Frage auf folgende Betrachtung ankömmt:

Wenn ich bey einem Handel etwas jezo gleich zu fodern habe, dasselbe aber erst in einiger Zeit bekomme, so muß ich auch die Zinsen für diese Zeit mit bekommen, sonst habe ich Verlust, weil ich das, was ich sogleich zu fodern hatte, diese Zeit über hätte nutzen können.

Hätte ich aber etwas erst in einiger Zeit zu fodern, so kann ich mich befriedigen, wenn ich statt dessen jezo sogleich etwas geringers als gegenwärtigen Werth bekomme.

Man wird wohl hie nur einfache Zinsen rechnen.

Also kömmt diese Berechnung auf das an, was im IX. Cap. besonders 1. Abschn. gesagt ist.

151. Nur noch mit einem, ein wenig mehr zusammengesetzten Exempel will ich erläutern, daß

daß bey solchen Rechnungen das eigentlich Arithmetische gar keine Schwierigkeit macht, wenn man mit den historischen Känntnissen 1 . . 5 u. s. w. versehen ist. Es ist v. Cl. §. 1068.

152. "Hamburg trassirt auf London 500 £ Sterl. a $32\frac{5}{6}$ ß Vls Bco, remittirt hingegen den Betrag nach Amsterdam a $33\frac{1}{4}$ Stüb. und von dar ferner nach London a $33\frac{3}{4}$ ß Vls. Wenn nun für Spesen überhaupt 1 P. C. berechnet werde, so fragt sichs: Wie viel £ Sterl. H gewonnen oder verlohren."

Dieses muß erst aus der Kaufmannssprache in die gewöhnliche übersetzt werden.

153. H hat einen Wechsel auf 500 Pf Sterling ausgestellt, und dagegen für jedes Pf. Sterling $32\frac{5}{6}$ ß Vls Bco bezahlt bekommen.

Aus Cl. Nachrichten von Münzvergleichungen u. s. w. im Artikel Hamburg 1084 S. erhellt, daß 8 ß Vls = 3 Mk Bco

Also bekömmt H für jedes Pf. Sterling

$$\frac{197}{6}.\frac{3}{8}\text{ Mk Bco} = \frac{197}{2.8} = 12\frac{5}{16}$$

154. Den Wechsel wieder einzulösen, sendet H. nach Amsterdam den Betrag in Wechselthalern, deren jeder = 2 Mk = $33\frac{3}{4}$ Stüber = $\frac{135}{4}$ Stüber

(nach v. Cl. a. a. O. 1085 S.)

1 ß Vls = 6 Stüber (Cl. Amsterdam 1063 S.)

Also 8 Mk = $\frac{135}{6}$ ß Vls

155. Amsterdam zahlt ohne Spesen zu London für jedes Pf Sterling 33,5 ß Vls Bco =

$\frac{33,5.6.8}{135}$ Mk (154). Der Bruch mit 5 und 3 aufgehoben ist $\frac{6,7.2.8}{9} = \frac{1072}{90}$

156. Rechnet man nun 1 auf 100 Spesen wegen der Wiedereinlösung des Wechsels, so kostet ein Pfund Sterl. zu London $\frac{1072.101}{9000}$ Mk $= 12 + \frac{272}{9000}$. Der Bruch mit 8 aufgehoben ist $= \frac{34}{1125}$.

157. Also (153; 156) Einnahme — Ausgabe $= \frac{5}{16} - \frac{34}{1125} = \frac{5081}{18000}$ Mk.

158. Das wäre der Gewinnst, an 1 Pfunde Also an 1000 Pfunden $= \frac{5081}{18} = 282\frac{5}{18}$ Mk und an 500 Pfunden $= 141\frac{5}{36}$. Statt des Bruches giebt Cl. $\frac{1}{8}$ in circa an.

159. Ich dächte es wäre lehrreicher und bequemer, die Rechnung anfangs für ein Stück zu führen, wie hie, und (121)

Lehrreicher, weil es doch gewiß sogleich eine nützliche Nachricht giebt, was ein Stück, beym Verkaufe gilt, beym Einkaufe kostet.

Bequemer, weil man das, was so ist gefunden worden, nur mit der jedesmaligen Zahl der Stücken multipliciren darf. Nach dem Verfahren der Rechenmeister, macht man für jede Zahl von Stücken die Rechnung ganz von neuem.

160. Wenn man auf mehr als einem Wege, eine Waare bekommen; eine Schuld berichtigen kann; so ist ohne Zweifel der Weg am vortheil-

haf-

hafteſten, auf dem man ſeine Abſicht mit den geringſten Koſten erreicht.

Die Wege mit einander zu vergleichen, wird man die jedesmalige Ausgabe allemahl in einerley Geldſorte ausdrucken, und eben ſo, was man dagegen jedesmahl bekömmt, auch allemahl in einerley Geldſorte, ohne daß eben deßwegen dieſe mit jener einerley ſeyn dürfte.

161. Dieſes Verfahren nennt man **arbitriren**, und verſteht alſo unter **Wechſelarbitragen**, ſolche Rechnungen, wie die Wahl eines oder des andern Weges entſcheiden.

Dazu iſt alſo nichts weiter nöthig, als die bisher gelehrte Rechnungen bey den unterſchiedenen Wegen anzubringen, und den jedesmaligen Erfolg einen gegen den andern zu halten.

162. **Exempel**, beym v. Clausb. 1078. §.

Hamburg hat in Leipzig 1000 Thl in Louisblanc zu bezahlen.

I. **Weg.** Es kann ſolche durch einen Wechſel à 135 p. C. auf ſich ziehen laſſen.

Das heiſſt: Es kann einen Wechſel, der auf dieſe Summe geſtellt iſt, unmittelbar bezahlen, und giebt 100 Thl Bco gegen 135 Thl in Louisblanc.

II. **Weg.** Es kann Louisd'or das Stück zu 10 Mk 10 ß = $\frac{85}{8}$ Mark kaufen; und ſolche in Leipzig zu 5 Thl anbringen, aber, wegen des Unterſchiedes zwiſchen Louisd'or und Louisblanc und andrer Speſen mit einem Verluſte von etwa 2 P. C. Welches iſt vortheilhafter?

163. Auf dem I. Wege giebt H. für 1 Thl Louisblanc $\frac{100}{137}$ Thl Bco = $\frac{100}{45}$ Mk Bco = $2\frac{2}{9}$

Auf dem II. giebt es für einen Louisd'or wegen der Spesen $\frac{8}{8}$. $\frac{102}{100}$ Mk

Man rechnet Spesen u. s. w. auf 100 weil hie vom Einkauf die Rede ist (81)

Also da Unterschied der Geldsorten und Spesen, schon in Rechnung gebracht, der Louisd'or übrigens = 5 Thl in Louisblanc gesetzt wird;

So giebt H. für 1 Thl in Louisblanc den fünften Theil des nur gefundenen Werthes oder $\frac{8}{8}$. $\frac{102}{100}$ Mk = $\frac{8}{8}$. 0,204 =

10,625. 0,204 = 2,1675 Mk

Aber (I Weg) $2+\frac{2}{9}$ = 2,22222 . . . .

I Weg — II W = 0,0547222 . . .

So viel giebt H. gegen 1 Thl in Louisbl auf dem I. Wege mehr als auf dem II.

Also für 1000 solche Thaler; 54,7222 . . . Mk mehr; die es auf dem II. erspart.

So ist der II. der vortheilhaftere.

164. Nach v. Cl. 1088 §. kann man die Spesen hie gewöhnlich weglassen, weil man sich mit einem ohngefährlichen Ueberschlage, welcher Weg vortheilhafter ist, anfangs befriedigt, allenfalls nachdem die Spesen mit in Betrachtung zieht. Mit Agio wird es sich anders verhalten, weil dieses den gegenseitigen Werth der Geldsorten bestimmt. Alle Schwierigkeiten also, welche bey diesen Rechnungen vorkommen können, beruhen nur auf den mannichfaltigen, auch veränderlichen Coursen, und vielfältigen Eintheilungen der Münzen.

Auch

Auch enthalten die Bücher, die mir über diesen Gegenstand bekannt sind, vornähmlich solche Nachrichten, keine arithmetische Regeln, die dem Mathematiker neu seyn könnten. Die Vorschriften wegen der Stellung bey der Kettenregel, werden da immer als was sehr Tiefsinniges angesehn. (VII. C. 3. Abschn. 8).

165. R. Levis Tabellen (57) sind begreiflich ebenfalls zu gegenwärtigen Rechnungen zu brauchen.

Imgleichen:

166. Joh. Christian Nelkenbrechers I. V. et Arithm. C. Logarithmische Tabellen zu Berechnung der Wechselarbitragen, Leipz. 1752; 4.

Sind ebenfalls abgekürzte Logarithmen, wie R. L. seine. Wie diese Logarithmen entstanden sind, ist nicht erklärt, nur ihr Gebrauch, ohne Gründe, gewiesen.

167. In der ersten allgemeinen Tabelle, soll man alle Wechselcourse von allen Handelsplätzen in Europa suchen, die ausgenommen, die in Schillingen und Deniers Vlämisch pro 1 ℔ Sterl. gestellt sind.

In dieser Tafel gehn in einer schmalen Seitenspalte linker Hand die Zahlen 20; 21; .... 30 herunter; Dann sind Spalten unter den Aufschriften: Ganze; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$ u. s. w.

Unter: Ganze, neben 20 steht 0. Das brachte mich auf die Gedanken, es sey 20 zur Einheit angenommen, und in den Spalten stehen die Logarithmen von $\frac{1}{20}z$

Zur Probe: Es sey $z = 27 + \frac{7}{8} = 27{,}125$;

Nun $\log 27{,}125 = 1{,}4333697$
$\log 20 = 1{,}3010300$
$\log \frac{1}{20} z = 0{,}1323397$

Aber in N. Tafel steht: unter 27 und neben $\frac{1}{8}$; 13241.

So enthält diese Tafel N. von $\log \frac{z}{20}$ die höchsten vier oder fünf Decimalzifern, ohne die Kennzifer

$\log \frac{199}{200} = 0{,}9978231$

Davon stehen die Zifern 99782 bey N. neben 199. Das letzte Glied dieser Tafel ist 99982; neben 199 unter $\frac{11}{12}$

Es ist aber $\log (199 + \frac{11}{12})$
$= \log \frac{2399}{12} = 0{,}9998190.$

168. Von einer kurzen Tabelle zum Gewinn mit III bezeichnet, ist das allgemeine Glied

$\log \frac{100 + m}{100}$;

Ex. $m = 10 + \frac{3}{4} = 10{,}75$ Also $1 + \frac{1}{100} m = 1{,}1075$

$\log 1{,}1075 = 0{,}0443437$, und bey $10\frac{3}{4}$ steht in dieser Tafel 4434;

Die kurze Tabelle zum Verluste 40 S. enthält $\log \frac{100}{100 - m}$

Ex. $m = 6\frac{7}{8}$ dabey steht 3092; Es ist aber $100 - 6{,}875 = 93{,}125$ und $2 - \log 93{,}125 = 0{,}0309337.$

169.

169. N. erläutert den Gebrauch seiner Tafeln durch Vorschriften und Abhandlungen, in denen, auch ohne Absicht auf die Tafeln, viel Brauchbares enthalten ist. Hie ein Exempel 262 S.

170. Pistolen verlieren gegen Louisblanc $4\frac{1}{2}$ PC. Wie viel Thaler in Louisblanc betragen $137\frac{1}{2}$ Thl in Pistolen.

Allgemein, wenn P einen Thaler in Pistolen und L in Louisblanc bedeutet

$(100 + m)$. $P = 100$. L

und nun p. $P = q$. L wo hie p gegeben ist und q gesucht wird.

Es ist also $\frac{P}{100+m} = \frac{1}{100}$ q oder $q = \frac{100\,p}{100+m} = \frac{p}{1+0{,}01.\,m}$

Für das Exempel $m = 4{,}5$; $p = 137{,}5$ und für mehr Exempel, wo eben die Verhältniß zwischen Pistolen und Louisblanc wäre, nur p anders, könnte man die Rechnung so einrichten:

beständiger log $\frac{100}{104{,}5}$	$= 0{,}9808836 - 1$
log 137,5	$= 2{,}1383207$
log q	$= 2{,}1191043$

$q = 131{,}58$

Nelkenbrecher rechnet so

$137\frac{1}{2}$	83727
$4\frac{1}{2}$	1912
Rest	81815

Facit $131\frac{7}{12}$ in circa.

Er setzt zum voraus, daß man weiß, wo man die Zahlen suchen soll, die neben $13\frac{1}{2}$; $4\frac{1}{2}$ stehen und was den Rest bedeutet. Die erste und der Rest stehn in seiner ersten Tafel, die zweyte in vorhin erwähnter kurzen Tabelle zum Gewinn. N. Rechnung ist also:

$$q = \frac{p}{1 + 0{,}01 \cdot m}$$ und man sieht hieraus ein, warum er in der kurzen Tabelle die Logarithmen des Nenners dieses Ausdrucks angegeben hat.

171. N. läßt in seiner I. Tafel, jede Zahl erst um alle Achttheile wachsen, dann um alle Sechszehntheile, die nicht in den Achttheilen enthalten sind, dann um alle Zwölftheile, die nicht in den Achttheilen enthalten sind. So steht auf jeder Seite eine Zahl dreymahl, jedesmahl mit einer andern Zeile Logarithmen nach ihrem unterschiedenen Wachsthum. Wenn eine Zahl und der Bruch darüber gegeben ist, kann man sie so, leicht aufsuchen und ihren Logarithmen aufsuchen. Wenn aber ein Logarithme gegeben ist, muß man länger suchen, wo er steht, weil die Logarithmen nicht so, wie sie in der Tafel nach einander folgen, auch wachsen. In den gewöhnlichen Tafeln findet man einen Logarithmen viel leichter. Und wenn man die Brüche, die bey den Kaufleuten ohnedem nur in circa angegeben werden, in Decimalbrüchen ausdruckt, kann man auch die gegebenen Zahlen leicht aufsuchen und sehn, was ihnen für Logarithmen gehören.

172.

172. Allgemeine logarithmische Geld- und Wechsel-Arbitrage-Tabellen, von Aaron Kalman Cohen, Düsseld. 1772; 8.

173. Die I. Tafel gehört für Procente von oder in 100; Enthält log (100 : n) für n von 50 bis $99\frac{15}{16}$. Z. E. da 2 — log 85,25 = 0,0693055, so steht in C. I. Tafel 693 bey $85\frac{1}{4}$.

173. Die Zweyte ist für Procente auf oder über 100; Ihre Glieder sind log $\frac{100+n}{100}$ für n = 0 bis $95\frac{15}{16}$, auch die vier höchsten Decimalstellen, ohne Kennzifer.

174. Ferner Tafeln für Spesen, Geldsorten, Wechselcourse.

Von einem Paare dieser Tafeln habe ich allgemeine Glieder zur Probe aufgesucht.

175. Die IV. Tafel heisst: Geldsorten nach dem Niederrheinischen Cours. Der Thaler = 60 Stüber.

Sie fängt mit 10 Stübern an, durch alle Viertheile von Stübern bis $59\frac{3}{4}$

Dann Thaler von 1 bis 7 Thl $42\frac{3}{4}$ St.

Bey 1 Thl steht als Logarithme 0.

Also kann man die Hypothese annehmen: Bey jeder Zahl von Thalern = n stehe ihr Logarithme.

Zur Prüfung: log 5 = 0,6989700

und bey 5 Thl steht 6990

So sind 7 Thl $(42+\frac{3}{4})$ Stüber = 462,75 Stüber

$$\log\left(\frac{462{,}75}{60}\right) = 0{,}8871951$$

und der letzte Logarithme der IV T. ist 8871

Bey den Stübern, die noch keinen ganzen Thaler betragen, stehn die Logarithmen so:

bey 10 St steht 7782

30 3010

Es ist aber 10St $= \frac{1}{6}$Thl; $\log \frac{1}{6} = -0{,}7781513$

30St $= \frac{1}{2}$Thl $\log \frac{1}{2} = -0{,}3010300$

So steht bey jeder Zahl von Stübern der Logarithme des Bruchs vom Thaler, den sie betragen, freylich ohne das Zeichen des Abzugs, welches in C. Vorschriften wohl mit Worten angedeutet werden wird.

$\log \frac{47}{60} = -0{,}1060534$; und bey 47 St. steht 1061

176. Die VI. T. betrifft Geldsorten nach dem Oberrheinischen Cours; geht von 2 Fl. 26 Kreuzer bis 11; $10\frac{3}{4}$ aber nicht ununterbrochen, sondern nachdem Münzen diese Werthe haben. So geht sie vom Anfange bis 2; $50\frac{3}{4}$ für Conventions- und Laubthaler; allsdann sogleich von 5 bis 5; $10\frac{3}{4}$ für Ducaten, dann von 7; 20 bis 7; $30\frac{3}{4}$ für Maxd'or und $\frac{1}{2}$ Severins u. s. w.

Wenn in dieser Tafel m eine Zahl von Gulden bedeutet; (versteht sich Kreuzer als Brüche des Guldens angesehen) so giebt diese Tafel $\log \frac{2}{3}$ m; das heisst, den Logarithmen der Zahl der Thaler, die m Gulden gleich sind.

So 11 Fl $10\frac{3}{4}$ Kr $= \frac{670{,}75}{60} \cdot \frac{2}{3}$ Thl;

und

und log $\frac{670,75}{60} \cdot \frac{2}{3} = 0,8723281$

bey 11; $10\frac{3}{4}$ steht in der Tafel 8723.

177. Die Bedeutung dessen, was diese beyden Tafeln enthalten, habe ich mir aus dem 38 Ex. des Textes dieser Tafeln 51 S. entwickelt.

Ein Maxd'or gilt zu Frankfurt $m = 7\frac{1}{3}$ Gulden, im niederrheinischen Cours $n = 5$ Thl $1\frac{1}{2}$ Stüber, wie verhalten sich der Frankfurter und der niederrheinische Thaler?

Ich berechnete das Exempel so:

$2\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}$ Frankf Th = Maxd'or

$= \frac{301,5}{60}$ niederrh Th; Also

Frankf Th $= \frac{301,5 \cdot 3}{44 \cdot 20}$ niederrh Th

log 904,5 = 2,9564086
log 880 = 2,9444827

0,0119259

giebt Frf Th = 1,0278 Nrh Th

E. hat bey

5 Thl $1\frac{1}{2}$ Stüber. Tab. IV; 7011
5 Fl 20 Kr. Tab. VI; 6892

Unterschied 119

der ihm aus seiner II Tafel $102\frac{3}{4}$ angiebt. Genau genug mit meiner Rechnung übereinstimmend.

178. Weil nun meine Rechnung allgemein die Formel gäbe

Frankf Th $= \frac{n}{\frac{2}{3}m}$ niederrh Th

so

so sahe ich daraus, wie, seine vierte und sechste Tafel die Logarithmen von n und $\frac{2}{3}$ m enthalten.

Wiederum giebt also C. von den Logarithmen die höchsten vier Decimalziffern ohne Kennziffer.

179. Der Text ist eine sehr umständliche und brauchbare Anleitung, zu allen Wechselrechnungen, auch den Silbercours zu finden.

180. Joh. Reimer, Anweisung zur Rechenkunst . . . Hamb. 1776; 8; giebt 270 u. f. Nachricht, wie logarithmische Tafeln zu bisher erklärten Absichten verfertiget und gebraucht werden. Er macht drey Gattungen davon: 1) Specielle, nur für die Vorfälle, auf die sie gerichtet sind, 2) Vermischte, einige zu vielen Coursen allgemein, andere nur zu besondern Coursen, 3) Generale, nach denen alle Course und Preise können berechnet werden, giebt auch dergleichen, wo die Kennziffer weggelassen ist, und nur die vier höchsten Dicimalstellen angegeben sind.

181. Allgemeine Regeln zur Berechnung der Wechselarbitragen, wie auch Verhältnißtabellen, durch deren Hülfe die Wechselcourse, und bey vorkommenden Wechselarbitragen, die vortheilhaftesten Wege ohne die geringste Berechnung gefunden werden, besonders auf die Leipziger Wechselgeschäffte eingerichtet von Christoph Pflugbeil, Arithmeticus. Leipz. 1776. 4.

181. Den Anfang machen allgemeine Regeln zu Berechnung der Wechselcourse und Arbitragen. Hr. Pfl. bezeichnet die Wechselcourse, oder die Zahlen, welche in den Courszetteln befind-

findlich sind, und sich von Zeit zu Zeit ändern, mit Buchstaben; wodurch er den Vortheil erhält, den die Buchstaben geben, eine Regel für veränderliche Zahlen allgemein auszudrucken.

183. Exempel. 1. Aufg. 8 S. der Cours von Amsterdam nach Leipzig ist 37=a Stüber corrent, wie wechselt A mit L? Das ist: wie viel Thl zu Leipzig kommen für 100 Thl Amst. Corr?

Hie muß man wissen, daß 1 Thl zu A = 50 Stüber; Also die gesuchte Zahl Leipziger Thaler $= \frac{5000}{a}$

Im Exempel $= \frac{5000}{37} = 135\frac{5}{37}$

184. Seine 5. Aufg. Ducaten in Leipzig zu $2\frac{3}{4}$ Rthl gerechnet, sind a P. C. besser als Wechselzahlung.

In Amsterdam gilt ein Ducaten b halbe Stüber Amst Cor. Wie wechselt L. mit A. in Corrent?

Es ist $\frac{4}{11}$ Duc = 1 Thl und der ersten Angabe gemäß 100. $\frac{4}{11}$ Ducaten = (100 + a) Thaler Wechselzahlung.

Ferner 1 Thl Amst Cor = 100 halbe Stüber; Also 1 Ducaten $= \frac{b}{100}$ Thl Amst Cor.

Folglich $\frac{4}{11}$. b Thl A Cor = (100 + a) Thl Wz.

Also 100 Thl A Cor $= \frac{(100 + a) \cdot 1100}{4b}$ Thl Wz.

Welche Zahl $= \frac{(100 + a) \cdot 275}{b}$

Er-

Ex. a = 3; Ein Ducaten zu Amst = 5 Fl $4\frac{1}{2}$ St = 104,5 St. Also b = 209,0; Die gesuchte Zahl = $\frac{103 \cdot 275}{209}$ = $135\frac{110}{209}$

185. Man sieht schon zulänglich aus diesen beyden Exempeln, was für Gebrauch Hr. Pfl. sowohl von den Buchstaben macht, als auch von beständigen Zahlen, wie 5000 in (183); 275 in (184).

186. So hat Hr. Pflugbeil 172 Aufgaben. Die letzten betreffen den Hamburger Waarenrabat, und Interesse zu 6 PC. jährlich für eine gegebene Zahl von Tagen, das Jahr 360 T. gerechnet.

187. Die I. Tafel vergleicht Wechselcourse zwischen Leipzig, Hamburg, Amsterdam. Aus folgender Rechnung hergeleitet.

b Stüber Bco zu A = 2 Mk Bco H.

Das ist $\frac{b}{50}$ Thl Bco A = $\frac{2}{3}$ Thl Bco H.

Ferner (100 + c) Thl Leipz = 100 Thl Bco H

Nun sucht man

y. Thl L = 100 Thl Amst Bco.

Es sind aber

100 Thl A Bco = 100. $\frac{100}{3\,b}$ Thl H Bco

= 100. $\frac{100.}{3\,b}$ $\frac{100+c}{3\,b}$ Thl L; Also

$y = \frac{100.\,(100+c)}{100}$

188.

188. Die I. Tafel hat in einer Seitenspalte linker Hand, b von 31 bis $34\frac{3}{4}$ durch alle Sechszehntheile. Ueber dieser Seitenspalte steht: Hamburg und Amsterdam. Die Spalten, welche übrigens die Tafel ausmachen, haben zur Ueberschrift: Leipzig und Amsterdam, und über jeder steht $100+c$, von 132 PC. bis $148\frac{1}{2}$ PC. durch alle Viertheile. In jeder Spalte, neben b das zugehörige y in Ganzen und Sechszehntheilen, auch Viertheilen von Sechszehntheilen.

So für der Tafel allererstes Glied; $b=31$; $c=32$; $y=\frac{100.\ 132}{93}=141+\frac{87}{93}$; Der Bruch ist $(14+\frac{29}{93}).\ \frac{1}{16}$

In der Tafel steht $141\frac{15}{16}$

189. Wollte man Logarithmen brauchen, so berechnete man $y-100=\frac{100.(100+c)-300\,b}{3\,b}$ welches kleiner als 100 seyn wird, also sich durch die Logarithmen auf eine Decimalstelle weiter finden lässt als y.

190. Ex. $b=32{,}5$; $c=44{,}75$

$100.(100+c)=14475$

$300\,b=9750$

4725

$\log 4725=3{,}6744018$

$\log 97{,}5=1{,}9890046$

$\log(y-100)=1{,}6854972$

giebt $y=148{,}472$; die Decimalbrüche betragen $\frac{7}{16}+\frac{2{,}8928}{64}$

191. Statt des y, welches diesen b und c zugehört, findet sich in Hrn. Pflb. Tafel ein Strich.

Gleich darunter, für b = $32\frac{2}{16}$ und c = 44,75 steht y = $148 + \frac{2}{16} + \frac{3}{64}$, die Logarithmen geben mir 148,177 wo die Decimalbrüche = $\frac{2}{16} + \frac{1}{64}$. 3,328.

Dergleichen Striche finden sich mehr in dieser Tafel, ihre Bedeutung habe ich nicht erklärt gefunden.

192. Bey dem Zwischenwechsel (187) kosten 100 Thl Amst Bco; y Thl zu L.

Gesetzt nun, unmittelbar kosteten 100 Thl Amst Bco; 100 + e Thl zu L.

So ist 100 + e — y der Gewinnst, den der Zwischenwechsel bringt. So viel nähmlich giebt man für 100 Thl A Bco weniger an L Thl wenn man über Hamburg wechselt, als wenn man sie unmittelbar mit 100 + e bezahlt.

Wäre 100 + e kleiner als y, so käme bey dem Zwischenwechsel Verlust.

193. Ex. Der Cours von L. auf A sey unmittelbar $142\frac{1}{2}$ Thl = 100 + e;

Diese Grösse ist also aus den Courszeddeln anzunehmen.

Man kann aber zu L. Briefe auf H. nehmen $141\frac{1}{4}$ = c Thl für 100 Thl H. Bco.

Und der Wechsel von H auf A ist $33\frac{1}{4}$ = b Holl. Stüber für 2 Mk Hamb Bco.

Da findet man in der Tafel y = $141\frac{5}{8}$; Also 100 + c — y = $\frac{7}{8}$.

Oder:

Oder: Man gäbe unmittelbar für 100 Thl A Bco; $\frac{7}{8}$ Leipziger Thl mehr als beym Zwischenwechsel.

194. Aus 187 hat man auch $b = \frac{100.(100+c)}{3.y}$

Oder: Wenn die Wechsel von L. auf H (100 + c) und von L. auf A. (y) gegeben sind, findet man den Wechsel zwischen H. und A; nähmlich wie viel holl. Stüber (b) auf 2 Mk Bco zu H gehn.

195. Ex. Der erste Wechsel sey 142; der zweyte 144; so ist $b = \frac{100.142}{3.144} = 32\frac{47}{144}$; der Bruch ein wenig kleiner als $\frac{7}{8}$.

196. Auch $100+c = \frac{3by}{100}$ giebt den Wechsel zwischen L. und H. (100 + c) wenn man den zwischen A und H (b) und den zwischen L und A (y) weiß.

197. Ex. $b = 33\frac{2}{10}$; $y = 141\frac{1}{4}$; $\frac{3by}{100} = 14\frac{11}{10}.\ 14\frac{1}{4}$; Aus log (100 + c) = 2,1529639 findet sich 100 + c = 144,22 also beynahe $144\frac{1}{4}$.

198. Wie man jede der Fragen (194; 196;) durch die Tafel beantwortet, ist leicht zu sehn.

199. Da die übrigen Tafeln auf ähnliche Art, nur für den Wechsel zwischen andern Oertern eingerichtet sind, so hat Hr. Pflb. selbst von ihnen keine Erläuterung nöthig befunden. Ich bringe daher auch von ihnen nichts mehr bey.

ob ich gleich von unterschiedenen, die Einrichtung, und die Formeln, nach den sie berechnet sind, nur aus meinen Papieren abschreiben dürfte.

200. Wegen des Waarenrabats auf 7 Monat giebt Hr. Pflb. 170 Aufg. folgende Regel.

Wenn der Betrag = c (wie IX. C. 1. Abschn. 33) so sey der Rabat $4c + \frac{1}{25}c + \frac{1}{8}c$, mit 100 dividirt.

Das ist $= \frac{107}{2400} \cdot c$ und

$\log \frac{107}{2400} = 0{,}6491726 - 1$

Daher $\frac{107}{2400} = 0{,}04458$

aber $\frac{7}{157} = 0{,}044586$ (IX. C. 1. Abschn. 38)

So kömmt Hrn. Pflb. Vorschrift der Wahrheit nahe genug, und seine Absicht ist gewesen, Zahlen anzugeben, die man leicht in Gedanken behalten und damit bequem dividiren kann.

Ich dächte aber doch, es wäre besser, nach dem IX. C. sich des beständigen Logarithmen zu bedienen.

Sein Exempel ist c = 1978 Mk 14 Schill. Man kann es versuchen, wenn man sein Buch nicht selbst besitzt, wie dieses: viermahl genommen, mit drey, mit 8, dividirt, das zusammen addirt, die Summe mit 100 dividirt, und was keine ganze Mark beträgt, zu Schillingen gemacht wird; da bey jedem Theile der Rechnung Mk und Schill. vorkommen. Ich würde so rechnen

$c = 1978{,}875$ weil $\frac{14}{16} = \frac{7}{8}$

Durch Proportionaltheile findet man

$\log 1978{,}875 = 3{,}2964184$

best $\log \frac{c-y}{c} = 0{,}6491984 - 2$

$\log (c-y) = 1{,}9456168$ giebt

giebt $e - y = 88{,}230$; wo $4.\ 0{,}23 = 0{,}92$ und $4.\ 0{,}92 = 3{,}68$. Also $e - y = 88$ Mk 3,68 Schill. Pflb. giebt 3 bis 4 Schill.

201. Für den Rabat auf 13 Monate ist seine Regel $e - y = (80.\ e - \frac{1}{4}e).\ \frac{1}{1000}$ $= \frac{319\,e}{4000}$; wo $\log \frac{319}{4000} = 0{,}9017307 - 2$ dem die Zahl 0,079750 gehört, der eigentliche Bruch $\frac{13}{163} = 0{,}079754$.

202. In der 172 Aufgabe lehrt Hr. Pflb. jährliche Interessen zu 6 Procent auf einzelne Tage berechnen das Jahr nach kaufmännischem Gebrauche 360 Tage gerechnet. Ist das Capital $= a$, die Zahl der Tage b; so sind die Interessen $= a.\ \frac{b.\ 6}{360.\ 100} = \frac{a.\ b}{6000}$ welches seine Formel ist.

203. Den Schluß macht eine Tafel, wo der Betrag von Spesen zu $\frac{1}{4}$ bis $1\frac{1}{2}$ PC. für unterschiedene Capitale berechnet ist.

Ueber Wechselcommissionen.

204. Einem Kaufmanne am Orte A, wird von einem Freunde, dessen Geschäffte er besorgt, aufgetragen, einen Wechsel nach dem Orte B auszustellen, oder auf B zu trassiren, ferner diesen Wechsel, am Orte C wiederum einzulösen, das heisst, den Betrag des Wechsels, nach C zu remittiren.

Die Bedeutungen dieser Ausdrücke sind aus (11) abzunehmen: Remittiren heisst begreif-

lich eben so gut, einen Wechsel wieder einlösen, als ihn zuerst vom Aussteller kaufen.

205. An jedem der genannten drey Orte, wird anderes Geld gewöhnlich seyn, das unterschiedene Verhältnisse gegen einander hat. Die Summe, deren Auszahlung der Wechsel verordnet, wird in Gelde des Ortes B ausgedruckt; der Aussteller des Wechsels, wird aber so viel als diese Summe beträgt, in Gelde des Ortes A empfangen haben.

Remittirt er nun den Betrag des Wechsels nach C, so heisst das, er zahlt in dasigem Gelde, die Summe aus, auf welche der Wechsel in Gelde des Ortes B lautet.

Also kommen hie die Wechselcourse dieser drey Oerter in Betrachtung.

206. Ich benenne die drey Geldsorten, in denen an diesen drey Orten Buch und Rechnung gehalten wird, mit den grossen lateinischen Buchstaben (wie 15;) und setze

a. $A = b.\ B$

ε. $A = c.\ C$

207. Man setze nun, die Course zwischen dem ersten Orte und jedem der beyden andern, ändern sich, und es sey nun

α. $A = \beta.\ B$

ε. $A = \gamma.\ C$

208. Wenn man nichts weiter annimmt, so sind die Course in 207; von denen in 206; ganz unabhängig, und die Werthe der Geldsorten können bey den einen ganz andere Verhältnisse haben, als bey den andern. 209.

209. Das will ich erstlich mit einem Exempel erläutern, dabey mir verstattet seyn wird, statt Wechselcourse, Münzfusse zu nehmen. Es sey also A ein Louisd'or, B ein Ducaten, C ein Gulden, deren 18 eine Mark Silber fein halten. (VII. Cap. 3. Abschn. 2). Man vergleiche diese Geldsorten in 206; nach Hannöverischem Cassengelde; in 207 nach Golde. Die Vergleichungen wie in 26 angestellt.

Es hat wohl keine Schwierigkeit, diese drey Münzsorten als Geld zu A, B, C, anzusehn, und so auf sie (204) anzuwenden.

Nach Cassengelde sind 4 Louisd'or = 7 Ducaten und ein Louisd'or ist = 7 Gulden.

Nach Golde ist ein Louisd'or = $\frac{15}{2}$ Gulden, ein Ducaten $\frac{17}{6}$ Thl = $\frac{17}{4}$ Gulden, oder 4 Ducaten = 17 Gulden, also $\frac{2}{15}$ Louisd'or = $\frac{4}{17}$ Ducaten, 17 Louisd'or = 30 Ducaten. Folglich

a	b	e	c	α	β	ε	γ
4	7	1	7	17	30	1	7,5

210. I. Wäre also ein Wechsel auf m Ducaten ausgestellt worden, und das ganze Geschäfft (204) wird nach Cassengelde vollzogen; so bekömmt der Aussteller m. $\frac{2}{7}$ Louisd'or.

II. Löst er den Wechsel wiederum in Gulden ein, so muß er für die m Ducaten, 4 m Gulden zahlen, und die betragen $\frac{4m}{7}$ Louisd'or, so giebt er wiederum weg, was er bekommen hatte.

III. Nun setze man, zwischen A und B oder Aussteller und Käufer des Wechsels sey der Han-

del nach Cassengelde geschlossen: Und der Aussteller löse den Wechsel wiederum mit Gulden ein, aber nach der Verhältniß der Werthe, die Ducaten und Gulden in Golde haben. Das ist so viel, als wenn der Wechsel zwischen A und B, wie vorhin geblieben wäre, der aber zwischen A und C hätte sich verändert. Es wäre nähmlich nicht, wie vorhin, c. A = c. C; 1 Louisd'or = 7 Gulden, sondern ε. A = γ. C; 1 Louisd'or = 7,5 Gulden. Zugleich hätte sich auch der Wechsel zwischen B und C verändert, es wäre nicht wie vorhin 1 Ducaten = 4 Gulden, sondern 1 Duc = $\frac{17}{4}$ Gulden.

Also, den Wechsel auf m Ducaten einzulösen, gäbe A; $\frac{m.\ 17}{4}$ Gulden.

Die betrügen nach Cassengelde $\frac{m.\ 17}{28}$ Ld'or.

IV. Wenn also A den Wechsel nach (III) einlöst, giebt es $\frac{m}{28}$ Louisd'or mehr aus als es bekommen hat. (I)

V. Man sieht leicht, wie sich einrichten liesse, daß beym Wiedereinlösen des Wechsels Gewinnst wäre, wozu 26 u. f. Anleitung geben können.

211. Der Auftrag (204) setzt einen gewissen Cours zwischen A und B; auch einen zwischen A und C voraus.

Wenn man, wie in (47) angewiesen ist, verführe, liesse sich aus diesen beyden Coursen der zwischen B und C herleiten.

So

So folgte in (206) $\frac{a}{e} = \frac{b}{c} \cdot \frac{B}{C}$ also

a. c. C = b. e. B

Diese an sich richtige Rechnung, müsste doch mit der Erfahrung nicht eben nothwendig übereintreffen.

Nur alsdann würde die Rechnung sicher seyn, wenn das Geld, das zu B gewöhnlich ist, gleich gut zu A als zu C zu haben wäre.

Daß dieses nicht nothwendig seyn muß, wird das Exempel (209) darthun.

Ducaten könnten an einem Orte, wo nach Louisd'or gerechnet wird, häufig seyn, und da, wo nach Gulden gerechnet wird, selten.

Würde nun am letzten Orte eine Auszahlung verlangt, die in Ducaten geschehen sollte;

So ist begreiflich, daß ein Ducaten da einen höhern Werth haben müsste, als am ersten Orte; weil eine Waare, die man verlangt, allemahl da theurer ist, wo sie seltner ist.

Wäre also die Verhältniß zwischen Louisd'or und Ducaten nach Cassengelde so, daß 4 Louisd'or zu A = 7 Ducaten zu B.

Und wären, ebenfalls nach Cassengelde, 1 Louisd'or zu A = 7 Gulden zu C.

So folgte daraus doch nicht nothwendig, daß 4 Gulden zu C = 1 Ducaten.

Man könnte zu C eine Auszahlung in Ducaten zu verrichten haben.

Wären nun da Ducaten selten, aber Louisd'or häufig; so gäbe man wohl für einen Louis-

d'or nicht mehr als sieben Gulden, aber für einen Ducaten etwas mehr als vier Gulden.

Umgekehrt: wären da Ducaten häufiger als Louisd'or, so gäbe man da vielleicht für einen Ducaten nicht mehr als 4 Gulden, aber für einen Louisd'or mehr als sieben, zumahl wenn die Auszahlung in Louisd'or verlangt würde.

Also: aus den Coursen zwischen A und B; und zwischen A und C, den zwischen B und C herzuleiten, ist nur allsdann verstattet, wenn das Geld von B zu A eben so gut zu bekommen ist, nicht mehr noch weniger verlangt wird, als zu C.

212. Solchergestalt kann man nur annehmen

$$p. C = B$$

ohne daß man $p = \frac{a. c}{b. e}$ setzen dürfte.

Aendern sich nun die Course (206) in die (207) so liesse sich ebenfalls für die letzten annehmen

$$\pi. C = B$$

ohne daß eben $\pi = \frac{\alpha \gamma}{\beta \varepsilon}$

213. Wäre dem Commissionär (204) aufgetragen, das Geschäfft nach den Coursen (206) zu bewerkstelligen: Es fänden aber diese Course zu der Zeit, da er es bewerkstelligen sollte, nicht statt, sondern die (207). So entsteht die Frage:

Darf er das Geschäfft diesen letzten Coursen gemäß bewerkstelligen?

Offenbahr wird ihm dieses verstattet seyn, wenn sein Committent dabey Vortheil, oder wenigstens keinen Schaden hat.

Also

Also fragt sich: Wie dieses zu berechnen ist?

214. Man setze, A soll einen Wechsel auf m. B ausstellen, und diesen zu C wieder einlösen.

Nach (206) bekömmt A die Valute $\frac{m\,a}{b}$ A

Dafür erhält B; m. B;
Die gelten zu C; m. p. C

Diese m. p. C wiederum an sich zu kaufen, oder den Wechsel wiederum einzulösen; giebt A ihren Werth $\frac{m.\,p.\,e}{c}$. A

So verhält sich für A;

Einnahme : Ausgabe $= \frac{a}{b} : \frac{p.\,e}{c}$

Beyde wären gleich, wenn $p = \frac{a\,c}{b\,e}$

Nach 207; bekömmt A die Valute $\frac{m\,\alpha}{\beta}$ A

Dafür erhält B; m B
die gelten zu C; $m\,\pi$ C

Und die wiederum zu kaufen,

giebt A ihren Werth $= \frac{m.\,\pi.\,e}{\gamma}$. A

Da verhält sich also

Einn : Ausg $= \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\pi\,e}{\gamma}$

Die Verhältnisse der Einnahme und Ausgabe, nach 206; 207; lassen sich also aus angeführten

beyden Absätzen nicht allein vergleichen, es müsste zugleich die Verhältniß $p : \pi$ gegeben seyn.

215. Man nehme nun an, diese letzte Verhältniß sey $= 1 : 1$; Oder der Cours zwischen B und C, sey in 206; und in 207; einerley.

Das muß man zum ersten annehmen, wenn man Einnahme und Ausgabe, allein aus 206; 207; vergleichen will: weil in diesen Absätzen, die Course zwischen B und C nicht gegeben sind, und weil man vermöge (211) nicht berechtiget ist, sie aus den 206; 207; unmittelbar gegebenen Coursen zu bestimmen.

Dürfte man aber das nicht thun, was man unter angegebenen Umständen thun muß, so hiesse das so viel:

Einnahme und Ausgabe lassen sich nicht allein aus den unmittelbaren Angaben; (206; 207) vergleichen.

Indessen wird weder in 206; noch in 207; aus den da unmittelbar gegebenen Coursen, der zwischen B und C bestimmt.

Es ist also wenigstens, allgemein betrachtet, nicht widersprechend, daß er für 206 und 207; einerley seyn könnte.

Also, wenn es nicht besondere Umstände verbieten, wenn man, ohne Betrachtung solcher besondern Umstände, allgemein rechnet; darf man das thun, was man, die Verhältnisse zwischen Einnahme und Ausgabe, nur aus 206; 207; zu vergleichen, thun muß.

Solchergestalt, $p = \pi$ gesetzt, ist

216.

216. 206 | 207

$$\frac{\text{Einnahme}}{\text{Ausgabe}} = \frac{a\,c}{p.\,b\,e} \;\Big|\; = \frac{\alpha.\gamma}{p.\,\beta\,\varepsilon}$$

Nun ist ohne Zweifel der Handel da vortheilhafter, wo Einnahme, mit Ausgabe dividirt, den grössten Quotienten giebt.

Der Vortheil ist da am grössten, wo dieser grösste Quotient mehr als 1 beträgt, der kleinere mag auch etwas mehr als 1, oder gar ein eigentlicher Bruch seyn.

Wären aber beyde Quotienten eigentliche Brüche, so wäre eigentlich bey keinem Handel, weder nach 206, noch nach 207, Vortheil, sondern bey beyden Nachtheil, weil bey jedem die Einnahme geringer wäre, als die Ausgabe.

Noch wäre aber der Nachtheil am geringsten, wo der Quotient am grössten ist: Und geringerer Nachtheil, heisst in Betrachtung des grössern, allemahl Vortheil.

Ueberhaupt also kann man sagen, der Handel ist da am vortheilhaftesten, wo der Quotient am grössten ist.

Dieses entscheidet sich auch, wenn man beydemahl p weglässt.

Also ist bey 207; gegen 206;

Vortheil, wenn $\frac{\alpha\,\gamma}{\beta\,\varepsilon}$ grösser als $\frac{a\,c}{b\,e}$

Nachtheil . . . . . kleiner . . . . . .

Gleichheit . . . . . = ...

217.

217. Zuerst will ich die letzte Bedingung etwas weiter ausführen. Sie zeigt, wie die Frage (213) beantwortet wird.

Dem Commissionär sind die beyden Course (206) vorgeschrieben.

Statt eines von diesen beyden findet er einen aus (207) vor sich, der nicht in seinem Gefallen steht, den er annehmen muß, wie er ihn findet.

Nun berechnet er, wie der andre Cours in (207) sey, der statt des andern in (206) zu setzen ist, wenn die beyden veränderten Course, eben die Verhältniß von Einnahme zur Ausgabe haben sollen, die bey den gegebenen statt fand.

Ist der andre geänderte Cours wirklich so beschaffen, so verrichtet der Commissionär das Geschäfft mit den geänderten Coursen ohne Nachtheil des Committenten. Sonst aber muß entschieden werden, ob die Aenderung vortheilhaft oder nachtheilig ist.

So erfodert die Gleichgültigkeit beyder Course, der gegebenen und der geänderten

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{e};$$

Oder $\alpha . \gamma . b . e = a . c . \beta . \varepsilon$

wo man aus drey Quotienten den vierten, oder aus sieben gegebenen Grössen die achte findet.

218. Ex. In 209; sollen die lateinischen Buchstaben ihre Bedeutungen behalten. Auch soll noch für (207) bleiben, was in (206) galt, daß 4 Gulden = 1 Ducaten. Wenn nun

der

der Louisd'or 7,5 Gulden gilt, wie ist die Vergleichung zwischen Louisd'or und Ducaten?

Also in 207; $\varepsilon = 1$; $\gamma = 7{,}5$ und man sucht

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{1} \cdot \frac{1}{7{,}5} = \frac{8}{15} \text{ oder}$$

8 Louisd'or = 15 Ducaten.

So ist nähmlich 1 Ducaten $= \frac{8}{15} \cdot 7{,}5$ Gulden = 4 Gulden.

219. Die Formel (217) enthält, was von Clausb. 1092 u. f. §; 1004 u. f. S. als Wechselcommissionsrechnung lehrt.

Nähmlich in (213) wird dem Commissionär freygestellt, Verkauf und Wiedereinlösung des Wechsels, auch nach andern Coursen zu verrichten, wofern solches ohne Nachtheil des Committenten geschehen kann. Ist nun also statt eines der beyden Course in (206) der zwischen eben den Oertern in (207) gegeben, so soll berechnet werden, wie der Cours zwischen dem zweyten Paare der Oerter in (207) beschaffen seyn muß, wofern sich der Committent der Erlaubniß bedienen darf.

220. Die Formeln hiezu einfacher zu machen, kann man folgende Fälle unterscheiden, deren Bedeutung aus (13) verstanden wird. A hat:

I. Die beständige Valuta, sowohl gegen B als gegen C.

II. Gegen beyde die veränderliche Valute.

III. Gegen B die beständige, gegen C die veränderliche.

IV.

IV. Gegen B die veränderliche, gegen C die beständige.

Nach (24) lassen sich nun diese vier Fälle in der Formel (217) folgendergestalt ausdrucken (206; 207)

221. I. F; $a = \alpha = c = \varepsilon = 1$
$b. \gamma = \beta . c$

222. II. F; $b = c = \beta = \gamma = 1$
$a \varepsilon = \alpha c$

223. III. F; $a = \alpha = c = \gamma = 1$
$\beta \varepsilon = b c$

224. IV. F; $b = \beta = c = \varepsilon = 1$
$a . c = \alpha . \gamma$

225. Ich will diese Formeln mit Clausbergs Exempeln erläutern; Sie stehen bey ihm 1099 §. 1010; 1011 S.

226. No. 1. Hamburg soll nach Danzig à 119 gl trassiren, und die Summe nach Leipzig à 134 p. C. remittiren;

H. findet aber den Cours auf Danzig 120 gl. In welchem Preise muß es die Remesse nach L anstellen?

Danzig rechnet nach Gulden zu 30 gl polnisch, Leipzig nach Thalern.

Die Angabe ist: beym Auftrage war angenommen 1 Thl Hamb. Bco = 19 gl poln; und 100 Thl Bco = 134 Thl zu Leipzig.

Diesem gemäß sollte H einen Wechsel von m. Gulden = m. 30 gl poln. auf Danzig ausstellen, und solchen wieder in Leipzig einlösen.

Ist

Ist nun aber 1 Thl Bco = 120 gl poln; so fragt sich, wie viel 100 Thl Bco in Leipziger Thalern betragen müssen, daß Ausstellung und Wiedereinlösung des Wechsels noch ohne Schaden des Committenten geschehen kann.

H. hat beydemahl die beständige Valute, oder: Es ist angegeben, wie viel ein dasiger Thl Bco; polnischer gl. und Leipziger Thaler beträgt.

Also

In 221 hie	A H.	B D.	C L.	A Thl. Bco	B gl poln	C Thl L
	b	c		β	γ	
	119	1,34		120	γ	

kömmt $\gamma = \frac{120}{119} \cdot 1{,}34$

227. No. 2. Amsterdam bekömmt Commission, eine Summe auf Frankreich à 56 ß zu trassiren, und nach Leipzig à 39 Stüber zu remittiren: Findet den Cours nach Frankreich nur $55\frac{1}{4}$ ß. In welchem Preise muß es die Remesse nach L. anstellen?

Amsterdam giebt gegen einen französischen Ecu; 56 ß Vls Bco m. o. w. hat also die veränderliche Valute.

Giebt auch für einen Leipziger Thl 39 Stüb. Cor. m. o. w. und hat so wiederum die veränderliche Valute.

Ein Stüber = 2 ß Vls

Banco-Geld 5 PC. m. o. w. besser als Corent.

So wären 56 ß Vls Bco = 28 Stüber Bco = 28. 1,05 Stüber Cor. woraus sich die Werthe

des

des Ecu und des Leipziger Thl in Amsterdamer Cor. vergleichen lassen.

Nun ist

222.	A	B	C	A	B	C
hie	A.	Fr.	L.	ℒ Bco	Ecu	Thl Leipz.

$$\left|\begin{array}{c|c|c} a & e & \alpha \\ 56 & \frac{2.39}{1,05} & 55,25 \end{array}\right|$$

Daher $e = \frac{55,25}{56} \cdot \frac{2.39}{1,05}$

228. Wenn 39 Stüber Cor. in ℒ Bco sollen ausgedruckt werden, so ist klar, daß die Zahl, die sie ausdruckt, das seyn muß, was ich unter e gesetzt habe. Hätte ich unter e nur 39 gesetzt, so wäre die Einheit, auf welche sich diese 39 bezogen hätte, nicht gewesen, was in der Zeile darüber unter A steht.

So erhellt, was ich unter e schreiben musste, wenn die Bedeutungen meiner Zeichen zusammenstimmen sollten.

So muß man den gefundenen Werth von e, mit $\frac{2}{1,05}$ dividiren, wenn man wissen will, wie viel Stüber Cor. die gesuchte Zahl beträgt.

Man kann also sogleich diesen Factor weglassen, und sagen: Die gesuchte Zahl von Stüb. Cor. ist $\frac{55,25}{56} \cdot 39$.

Hätte ich unter e geschrieben: 39 St. Cor. so hätten diese Worte den Factor angedeutet, und

und der Ausdruck wäre auch vollkommen richtig gewesen.

229. No. 3. Hamburg erhält Ordre, eine Summe nach Breslau à 137½ zu trassiren und nach London à 32 ß 3 ℔ zu remittiren: Wenn nun H. den Cours nach L auf 32 ß 8 ℔ findet, so fragt sich, nach welchem Preise es die Tratta auf Br. anstellen muß.

Hier ist 1 Thl Hamb Bco = 1,375 Thl zu Breslau; Und 1 Pfund Sterling zu London = 32 ß Wls Bco 3 ℔ = (32 + ¼) ß Wls Bco zu London.

1 Thl Bco zu H = 8 ß Wls, woraus sich ohngefähr der Werth des Pfundes Sterling in Hamb Bco abnehmen läßt.

Hie hat Hamb. gegen Br. die beständige Valute, und gegen London die veränderliche. Also im III. F.

223.

A	B	C	A	B	C
hie H	Br.	L.	Thl Bco	Thl Cor.	Pf. Sterl
	b		e		z
	1,375		32 ß 3 ℔		32 ß 8 ℔

$$\beta = \frac{1{,}375 \cdot (32\text{ ß }3\text{ ℔})}{32\text{ ß }8\text{ ℔}}$$

wo 32 ß 3 ℔ = $\frac{129}{4}$ ß; 32 ß 8 ℔ = $\frac{258}{3}$ ß

und $\beta = \frac{1375 \cdot 129 \cdot 3}{1000 \cdot 4 \cdot 98} = 1{,}35 + \frac{2985}{392000}$

der Bruch = $\frac{585}{78400}$

230. Für den IV. Fall (224) giebt v. Cl. kein Exempel, weil ihm zulänglich ist, eine Regel ge-

geben zu haben, wenn A zu einem der beyden übrigen Oerter die veränderliche Valute, zum andern die beständige hat, es mag nun der erste B wie im III. Falle, oder C wie im IV. seyn.

Wollte man für diesen Fall ein Exempel rechnen, dürfte man nur das nächstvorhergehende Exempel umkehren.

H. sollte nach London à 32 ß 8 ₰ trassiren, und nach Breslau à $135\frac{585}{784}$ remittiren. Wäre nun der Cours nach London 32 ß 3 ₰ in welchem Preisse ist die Remesse nach Breslau anzustellen?

224.	A	B	C	A	B	C
hie	Hamb.	Lond.	Br.	Thl Bco	Pf St	Thl Cor.

a	c	α
32 ß 8 ₰	$135\frac{585}{784}$	32 ß 3 ₰

$$\gamma = \frac{32 \text{ ß } 8 \text{ ₰} \cdot 135\frac{585}{748}}{32 \text{ ß } 3 \text{ ₰}}$$

231. Weil die Formeln in der That einfacher werden, wenn man beständigen und veränderlichen Cours unterscheidet, so war es nicht undienlich, dieses 221 ... 224, angezeigt zu haben. Wenn man aber auf diesen Unterschied nicht merken will, so kann man allemahl die allgemeine Formel (217) brauchen. Z. E. für (223) behalten die grossen Buchstaben die dort angegebene Bedeutung, und nun ist

217.	a	b	e	c	α	ε	γ
hie	1	1,375	32 ß 3 ₰	1	1	32 ß 8 ₰	1

232. Wenn B über A nach C wechselt, so bekömmt es für B;

nach

nach (206); $\frac{a}{b}.A = \frac{ac}{be}.C$

nach (207) $\frac{\alpha\gamma}{\beta\varepsilon}.C$

Beydes einerley, wie die Voraussetzung (216) erfodert. Das lehrt v. Cl. 110, §. Man solle nähmlich sich vorstellen: es werde von B über A nach C gewechselt, einmahl nach den gegebenen Coursen (206) dann nach den (207) so genommen wie (217) vorschreibt, und zwischen beyden arbitriren (161). Der Erfolg wird seyn, daß beyde Wege einerley geben.

233. Sich im Arbitriren zu üben, könnte das Nutzen haben. Sonst, dächte ich, wäre diese Probe weitläuftiger als Wiederhohlung der Rechnung, und so ziemlich entbehrlich, wenn sie nur die Rechnung prüfen soll.

234. Wenn man aber von den Coursen (207) keinen bestimmen kann, sondern beyde statt der (206) nehmen muß, so ist die Frage, ob bey den geänderten Coursen Vortheil oder Nachtheil gegen die gegebenen ist? Im ersten Falle wird dem Commissionär (213) wohl verstattet seyn, die veränderten zu brauchen, aber nicht so im andern Falle.

235. Hierüber allgemein zu urtheilen, nenne man in (216) den Quotienten, den Einnahme, mit Ausgabe dividirt, giebt, für (206) $= r$; für (207) $= \varrho$ also

$$r : \varrho = \frac{ac}{be} : \frac{\alpha\gamma}{\beta\varepsilon}$$

$$= \frac{a}{\alpha} \cdot \frac{c}{\gamma} : \frac{b}{\beta} \cdot \frac{e}{\varepsilon}$$

236. Im zweyten Ausdrucke steht unter jedem lateinischen Buchstaben, als Nenner der griechische, welcher in (207) an des lateinischen Stelle gekommen ist, oder unter jedem Course in (206) der veränderte in (207); Jeder solche Bruch hat also in Zähler und Nenner gleichnahmige genannte Zahlen, deren Nahmen sich aufheben, daß der Bruch eine ungenannte Zahl wird. Man kann auch leicht Zähler und Nenner jedes Bruchs mit einander vergleichen und so sehen, ob r oder ϱ grösser? ob (206) oder (207) vortheilhafter ist?

237. Exempel. v. Cl. 1110 §. No. I. 1021. Frankfurt erhält Ordre, auf Wien à $101\frac{1}{4}$ PC. ($101\frac{1}{4}$ Thl Münze, zu Frkf = 100 Kaiserthaler) zu trassiren, und nach Paris à $77\frac{1}{2}$ PC. ($77\frac{1}{2}$ Thl Münze = 100 Ecus) zu remittiren.

Es findet Briefe auf Paris à 78 und Geld auf Wien à $101\frac{3}{4}$. Darf es diese veränderten Course brauchen?

A	Br	C	A	B	C
Frf.	W.	P.	Thl Münze	Kaiserth.	Ecu

a	b	c	c	α	β	ε	γ
101,25	100	77,5	100	101,75	100	78	100

$$r : \varrho = \frac{101{,}25}{101{,}75} : \frac{77{,}5}{78}$$

=

$$= 1 - \frac{0,5}{101,75} : 1 - \frac{0,5}{78}$$

Von 1 wird im vorhergehenden Gliede der zweyten Verhältniß, was geringers abgezogen als im folgenden. Also ist r grösser als ϱ; und die anfangs gegebenen Course sind vortheilhafter als die geänderten, Frankfurt darf sich also der geänderten nicht bedienen.

238. Noch ein Exempel, das Verfahren mit mehr zusammengesetzten Zahlen zu erläutern, bey v. El; 1032 S. No. 8.

Hamburg bekömmt Ordre, auf Amsterdam zu remittiren à 33¾ Stüber (d. i. 33,75 Stüb Amst Bco = ⅔ Thl Hamb. Bco) nach London zu trassiren à 32 ß 8½ ₰ Vlg. (d. i. (32 + 1/12. 8,5). ⅛ Thl Hamb Bco = 1 Pf Sterling)

Es findet aber Briefe per Amsterdam à 33 5/10 Stüb. und Geld per London à 32 ß 11½ ₰ Fragt sich, ob die Commission in solchen Coursen effectuirt werden mag?

A Hmb	B Lnd	C Amst	A Thl Bco	B Pf St	C Stüb A. Bco
	a		b	c	
(32 + 1/12. 8,5). ⅛			1	⅔ 33,75	
	α		β	γ	
(32 + 1/12. 11,5). ⅛			1	⅔ 33,1825.	

$$r : \varrho = \frac{32\text{ ß }8,5\text{ ₰}}{32\text{ ß }11,5\text{ pf.}} \cdot \frac{33,75}{33,1825} : 1$$

Im ersten Factor, Alles auf pf. gebracht, ist der Zähler = 384 + 8,5 = 392,5

239. Man kann also diesen Factor so ausdrucken: $\frac{1}{1 + \frac{3}{392,5}}$

Und den zweyten so: $1 + \frac{0,5675}{33,1825}$

240. Ob also der Verhältniß, die $r : \varrho$ angiebt, vorhergehendes Glied grösser als 1 oder kleiner ist, kömmt darauf an, ob: $\frac{3}{392,5}$ grösser oder kleiner, als $\frac{0,5675}{33,1825}$ ist.

Diese beyden Brüche sind, der erste $\frac{6}{785}$; der andre hat zum Zähler $33\frac{3}{4} - 33\frac{5}{176} = \frac{7}{176}$ zum Nenner $33\frac{5}{176} = \frac{5833}{176}$ ist also $= \frac{7}{5833}$

Nun ist $\frac{7}{5833} - \frac{6}{785}$ ein Bruch, dessen Nenner das Product aus beyden Nennern, der Zähler $7.785 - 6.533 = 5495 - 3198$

Also ist $\frac{7}{5833}$ grösser als $\frac{6}{785}$; und daher das vorhergehende Glied grösser als das folgende, oder r grösser als ϱ. Also die gegebenen Course vortheilhafter als die geänderten, folglich ist die Aenderung nicht verstattet.

241. Auf diesen Gründen beruhen v. Cl. Vorschriften.

Er nimmt im Exempel (238) die Differenz zwischen beyden Coursen nach B, auch die zwischen beyden nach C.

Jene ist 3 ℔ zum Nutzen, wie er sich ausdruckt, diese $\frac{7}{176}$ zum Schaden. Nun findet er,

daß

daß 7. 785 grösser ist als 6. 533; und zieht daraus die am Ende (240) gemachte Folge.

242. Da man doch solche Verwandelungen wie hie der $\frac{5}{8}$ in $\frac{8}{5}$, nicht vermeiden kann, auch mit Zahlen wie 785; 533; multipliciren muß, so wäre mir bequemer ohne die Differenzen zwischen Zähler und Nenner, und das Besinnen, welche zum Nutzen und welche zum Schaden ist, sogleich für die Verhältniß in 238; mit den Logarithmen zu rechnen; Es sind also des vorhergehenden Gliedes Factoren

Der erste $= \frac{392,5}{395,5}$

Der zweyte $= \frac{540}{533}$, wenn man Zähler und Nenner in Sechszehntheilen ausdruckt u. s. w.

Nun log 3925 $= 3,5938397$

log 3955 $= 3,5971465$

log I. Fact. $= 0,9966932 - 1$

log 540 $= 2,7323938$

log 533 $= 2,7267272$

log II. Fact. $= 0,0056666$

log Products $= 0,0023598$

gehört zu 1,0054

Also r grösser als e

243. Man setze, A hat Auftrag, unmittelbar nach B oder nach E, einerley Summe zu remittiren, doch wohin es dem Committenten, nach den Coursen (206) am nützlichsten ist.

Statt dieser vorgeschriebenen Course aber finden die (207) statt.

Soll es nun bey diesen den Weg nach B oder den nach C zu wählen?

244. Die Course nach (206) mögen I. heissen, die nach (207) II.

A bekömmt für A

zu B; nach I; $\frac{b\,B}{a}$

II; $\frac{\beta.\,B}{\alpha}$

zu C nach I; $\frac{c\,C}{e}$

II; $\frac{\gamma}{\varepsilon}.\,C$

245. Man dividire, was an jedem Orte nach II. erhalten wird, mit dem, was daselbst nach I. erhalten wird. Die Quotienten sind

$\frac{\beta\,a}{\alpha\,b}$ zu B; $\frac{\gamma\,e}{\varepsilon\,c}$ zu C

246. Wo der Quotient am grössten ist, da beträgt das, was an diesem Orte nach II erhalten wird, am meisten gegen das, was daselbst nach I erhalten wird.

247. Die Course II können beyde vortheilhafter seyn, als die I; oder A bekömmt nach II an beyden Orten mehr als nach I.

Alsdann sind beyde Quotienten uneigentliche Brüche, und wo sich der grösste von ihnen findet, an dem Orte ist der meiste Vortheil.

248. Die Course II können beyde nachtheiliger seyn, als die I; Da sind die Quotienten

eigent-

eigentliche Brüche, und wo der grösste statt findet, ist der geringste Nachtheil.

249. Ist von den Coursen II einer vortheilhafter, der andre nachtheiliger als der jedem zugehörige I, so versteht sich, daß man den Ort wählt, dem der vortheilhafte II. zukömmt.

250. Exempel. v. Cl. 1116§. No. 1. 1033 S. Danzig bekömmt Ordre, entweder nach Amsterdam à 290, oder nach Hamburg à 120 zu remittiren.

D. i. 290 gl poln = 1 £ Vls Amst Bco
120 = 1 Thl Hamb in Specie

Es findet aber Briefe per Amsterd. à $288\frac{1}{2}$ und auf Hamb. à $119\frac{1}{3}$.

Beyde geänderte Course sind gegen die ersten vortheilhaft. Danzig bekömmt 1 £ Vls und 1 Thl Specie, jedes für eine geringere Zahl von gl.

A	B	C	A	B	C
Danzig	Amst.	Hamb	gl poln	£ Vls	Thl Spec.
a	b	c	α	β	γ
290	1	120	1	288,5	1	$119\frac{1}{3}$	1

Die Quotienten (245) sind

$\frac{290}{288,5}$ zu Amsterdam; $\frac{120}{119\frac{1}{3}}$ zu Hamb.

log 290 = 2,4623980
log 288,5 = 2,4601458
0,0022522

log 360 = 2,5563025
log 358 = 2,5538830
0,0024195

Der Logarithme für Hamburg ist der grössere, gehört also dem grössern beyder Quotienten und so ist entschieden, daß der Weg nach Hamburg vortheilhafter ist (247) ohne daß man einmahl die Zahlen, welchen die Logarithmen gehören, aufzusuchen braucht.

251. Beym v. Cl. wird die Rechnung wiederum wie in 240 geführt.

Die Differenz beyder Course ist per Amsterdam $= 1\frac{1}{2}$ per Hamburg $\frac{2}{3}$, weil nun 3. 358 $=$ 1074; 2. 577 $=$ 1154; so ist besser, auf Hamburg zu remittiren.

Nähmlich die Quotienten sind

$$1 + \frac{1,5}{288,5} = 1 + \frac{3}{577} \text{ zu Amsterdam}$$

$$1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{119\frac{1}{3}} = 1 + \frac{2}{359} \text{ zu Hamburg}$$

Die beyden Brüche auf eine Benennung gebracht, zeigt sich, daß der letzte für Hamburg grösser ist.

252. Man sieht leicht, daß dieses Verfahren sich auf mehr Oerter erstreckt. Wenn auser dem, was (243) gesagt ist, noch auch frey stünde, die Summe nach D, E, F, u. s. w. nach gegebenen Coursen zu remittiren, und die Course alle sich geändert hätten, so bekäme man nur mehr solche Quotienten, wie in (245). Was zu D nach dem II. Course erhalten wird, mit dem dividirt, was da nach dem I. erhalten wird; u. s. w.

Unter

Unter diesen Quotienten wird einer der grösste seyn, und man wählt den Ort, dem er zukömmt.

Sind einige uneigentliche Brüche, andre eigentliche, so fallen die Oerter der eigentlichen Brüche sogleich weg (249).

Sind alle uneigentliche Brüche, so wählt man den grössten (248).

253. Mehr Exempel dazu findet man beym v. El. 1054 u. f. S.

Bey seinem Gebrauche der Differenzen müssen doch allemahl die Nenner der Brüche berechnet werden, deren Zähler die Differenzen sind, und jede Differenz muß mit dem Nenner des andern Bruchs, dessen Zähler sie nicht ist, multiplicirt werden. Freylich ist die Differenz immer eine kleine Zahl, mit der sich der andre Nenner, auch wenn er groß ist, leicht multipliciren lässt.

Kürzer als die Berechnung der Quotienten (245) ist wohl v. El. Verfahren immer, wenn man jene Rechnung mit den Zahlen selbst macht, und daher zieht es v. El. der Regel Detri vor, die Andre hie brauchen und die auf Berechnung solcher Quotienten ankömmt.

254. Uebrigens bleibt freylich unverboten, die Beurtheilung, welcher Quotient am grössten ist, auf Arten anzustellen, deren die Arithmetik mehr als eine darbietet.

In (251) würde ich daran denken, daß die Nenner zweener gleichen Brüche sich wie ihre Zähler verhalten. Nun ist $358 + \frac{1}{2} \cdot 358 = 358 + 179 = 537$. So groß müsste der Nenner

ner unter 3 seyn, wenn die Quotienten zu Amsterdam und Hamburg gleich seyn sollten: Er ist aber grösser; also der Quotient zu Amsterdam kleiner als der zu Hamburg. So würde man in mehr Fällen die Frage, welcher Quotient grösser ist, leichter als nach den allgemeinen Regeln beantworten.

255. Gewöhnlich sind in diesen Quotienten Divisor und Dividend nicht allzusehr unterschieden. Wenn man also einen solchen Quotienten durch $1+u$ ausdruckt, nachdem er grösser oder kleiner als 1 ist, so wird u immer ein Bruch seyn, dessen Zähler eine kleine Zahl ist. Und ein paar solche Brüche werden sich oft in so weit vergleichen lassen, daß man entscheiden kann, welcher von beyden mehr beträgt, ohne eben jedes Zähler mit des andern Nenner zu multipliciren.

Rechnungen, wo Waare und Geld vermischt vorkommen.

256. Zu solchen Bezeichnungen, wie (15) (204) (206) setze ich noch folgende:

Die Einheit, mit welcher die Waare am Orte A gemessen wird, heisse P, und Q die am Orte B.

So für Waaren, die mit Ellen gemessen werden, wären P, Q, Ellen beyder Oerter, für Waaren, die man wiegt, Centner oder Pfunde u. d. g. für Getreide, Scheffel u. d. g.

257. Für die Vergleichung dieser beyden Maasse sey $p.\ P = q.\ Q$

258. Von einer gewissen Waare, kostet zu A, die dasige Einheit P; m. A

259.

259. Wenn das Anschaffen der Waare u. d. g. Unkosten erfodert (80) so setze man, diese Spesen betragen r Procent.

Die Einheit P (258) koste ohne solche Spesen h. A; so kostet sie mit solchen Spesen h. $(1+0{,}01.\ r).\ A$

Und da ist $m = h.\ (1+1{,}01.\ r)$

Giebt es andre Kosten, die nicht so eine bestimmte Verhältniß zur Menge der Waare haben, so wird keine grosse Schwierigkeit seyn, sie in Rechnung zu bringen.

260. Diese Einheit (258) kostet also $\frac{m.\ b}{a}$. B in Gelde des Ortes B.

261. Und die Einheit, nach welcher B die Waaren angiebt, oder Q, kostet in dasigem Gelde $m.\ \frac{b}{a}.\ \frac{p}{q}.\ B\ (257) = n.\ B$

So findet man n aus m; oder aus dem Preisse einer Einheit zu A in dasigem Gelde den Preis einer Einheit zu B in dasigem Gelde.

262. Wäre dieser letzte Preis gegeben, und man verlangte den ersten, so suchte man m aus n; Man dürfte also nur n mit dem, was in m multiplicirt ist, dividiren, oder man hätte

$$m = n.\ \frac{a}{b}.\ \frac{q}{p}$$

263. Hie sind m, n, die Preise, wenn zu A Spesen Procent gerechnet werden (259). Ohne diese Spesen, wäre der dasige Preis nur h und offenbahr verhalten sich die Preise zu B

wie

wie die Preise zu A. Ist also k der Preis zu B, wenn zu A keine Spesen Procent gerechnet werden, so ist $h:m = k:n$ und $\frac{h}{k} = \frac{m}{n}$. Man findet also für die Verhältniß beyder Preise einerley, es mögen zu A Spesen Procent gerechnet werden oder nicht.

264. Von den beyden Brüchen (261), ändert sich wohl der, welcher den Cours angiebt, wenigstens in Kleinigkeiten. Die Verhältniß der Maasse pflegt beständiger zu seyn. Diese Bemerkung dient dazu, daß man solche beständige Verhältnisse, entweder in Decimalbrüchen bequem ausdruckt, wenn man mit den Zahlen selbst rechnen will, oder für sie beständige Logarithmen vorbereitet.

265. Exempel. Das Bremer Pfund hält 10380 Asen, das Hannöverische 10129 (Crusens Contorist V. Tafel). Man rechnet zu Bremen nach Golde, zu Hannover nach Cassengelde. Wenn nun von einer Waare ein Pfund zu Bremen m Thaler in Golde kostet, wie viel Thaler in Cassengelde kostet ein Pfund zu Hannover? Hie ziehe ich keine Spesen in Betracht (259) also $r = 0$, und $h = m$, $k = n$ (263)

A	B	A	B
Bremen	Hannover	Thl Gold	Thl Cassengeld
a	b	p	q
15	14	10129	10380

Die beständigen Logarithmen sind folgende.

266.

266. $\log 15 = 1{,}1760913$
$\log 14 = 1{,}1461280$
$\log \frac{15}{14} = 0{,}0299633$
$\log \frac{14}{15} = 0{,}9700367 - 1$

267. $\log 10380 = 4{,}0161973$
$\log 10129 = 4{,}0055666$
$\log \frac{10380}{10129} = 0{,}0106307$
$\log \frac{10129}{10380} = 0{,}9893693 - 1$

268. Nimmt man beyde Verhältnisse, zwischen Geld, und zwischen Maassen unveränderlich, so kann man aus den Logarithmen für sie, einen dritten unveränderlichen machen.

269. So hie

$$\log \frac{b}{a} = 0{,}9700367 - 1$$

$$\log \frac{p}{q} = 0{,}9893693 - 1$$

$$\log \frac{n}{m} = 0{,}9594060 - 1$$

$$\log \frac{m}{n} = 0{,}0405940$$

270. Man setze, 100 Bremer Pfund Caffee kosten in Golde 16 Thl 48 Grot $= (16 + \frac{2}{3})$ Thl $= \frac{50}{3}$ Thl $= m$; wenn $P = 100 = Q$; was kosten 100 Hannöverische Pfund in Cassengelde? $(= n)$

$\log 50 = 1{,}6989700$
$\log 3 = 0{,}4771213$
$\log m = 1{,}2218487$

log

$$\log \frac{n}{m} = 0{,}9594060 - 1$$

$\log n = 1{,}1812547$

giebt $n = 15{,}182$ Thl.

Die Brüche betragen 6 mgl 4,416 ₰

271. Zu Bremen kosten 48 Pf Zucker 10 Thl; was 1 Pf zu Hannover? Soll da $P = 1 = Q$ Pfunde seyn, so ist $m = \frac{10}{48}$ und, weil vorauszusehen ist, daß kein ganzer Thaler kommen wird, kann man den Preis eines Pfundes sogleich in Pfennigen suchen.

$$1 + \log \frac{n}{m} = 0{,}9594060$$

$\log 288 = 2{,}4593925$

$3{,}4187985$

$\log 48 = 1{,}6812412$

$\log m$ in Pfennigen $= 1{,}7375573$

giebt den Preis eines Hannöverischen Pfundes $= 54{,}645$ Pfennige Cassengeld.

272. Zur Probe der Rechnung könnte man (262) brauchen. Hie ist ein ander Exempel.

Wenn 12 Hannöverische Pfund, 7 Thl Cassengeld kosten; was kosten 17 Bremer Pfund in Golde?

Wenn die Einheit des Gewichts, $P = Q$ ein Pfund heisst, so ist $n = \frac{7}{12}$ und man sucht $17.m$

Nun ist $\frac{17.7}{12} = \frac{119}{12}$

log

$\log 119 = 2{,}0755470$
$\log 12 = 1{,}0791812$
$\log \frac{119}{12} = 0{,}9963658$
$\log \frac{m}{n} = 0{,}0405939$
$\log 17\,m = 1{,}0369597$

giebt den Preis von 17 Bremer Pfund in Golde = 10,888 Thl; Der Bruch beträgt 72. 0,888 = 62,936 Grot.

273. Wenn B die Zahlung nicht unmittelbar an A, sondern durch Wechsel verrichtet, so kann die Verhältniß P : Q noch unmittelbar gegeben seyn, aber die A : B muß durch Zwischenverhältnisse bestimmt werden. Ich würde sie besonders suchen, ohne sie mit den Verhältnissen der Gewichte zu vermengen, alsdann läßt sich Alles nach (261) behandeln.

274. **Exempel:** Baumöl; Sev. gilt in Cadix, 84 Pesos de Plata per Pipe; die Spesen betragen 1 Peso per Pipe; Provision und Courtage $2\frac{1}{2}$ Proc. Assecuranz Prov. etc. 5 Procent. Der Wechselcours von Cadix auf Amsterdam ist 98 Pfennige Vls Bco per 1 Ducado de Cambio von 375 Maravedis de Plata, und von Leipzig nach Amsterdam 141 Rthl Louisd'or per 100 Rthl Bco. Wenn nun die sämmtlichen Unkosten in Hamburg $1\frac{1}{2}$ Rthl, in Magdeburg 1 Thl 8 gl und in Leipzig 19 gl für 1 netto Centner betragen, und die Pipe in Cadix nur 832 Pfund netto

in Leipzig rendirt, wie hoch wird 1 netto Centner Baumöl in Leipzig zu stehen kommen?

275. Zuerst, vergleiche ich Peso mit Thl Louisd'. Die Angaben dazu, die theils in (274) stehen, theils aus hieher gehörigen Nachrichten müssen erlernt werden, sind:

Peso : Maravedi = 272 : 1
M. Duc. de Camb. = 1 : 375
D. d. C. : Pf VBco = 98 : 1
Pf. V B : Thl Bco = 1 : 100
Thl Bco : Thl Ld'or = 141 : 100.

Peso : Thl Ld'or = 272. 98. 141 : 375. 10000

log 272	= 2,4345689
log 98	= 1,9912261
log 141	= 2,1492191
	6,5750141
log 3750000	= 6,5740313
	0,0009828

giebt Peso = 1,0022 Thl in Louisd'or.

276. Ist also

A	B	A	B
Cadix	Leipzig	Peso	Thl Ld'or

So hat man a = 1; b = 1,0022, und am Ende von (295) steht $\log \frac{b}{a}$.

277. Die Pipe, sehe ich hie als ein Gewicht = P an, ein Leipz. Centner = Q = 110 Leipz. Pf.

also $P = \frac{832}{110}$. Q und $\frac{q}{p} = \frac{832}{110}$

278. Der Preis der Pipe mit Spesen ist 85 Pesos; dazu kommen Provision u. s. w. $2\frac{1}{2}$ Procent,

cent, Assecuranz u. s. w. 5 Pre; macht 7,5 Procent oder r = 7,5 (259); folglich kostet die Pipe zu Cadix, ohne die Spesen, die nach Procent gerechnet werden, 85 Pesos, also h = 85; und nun mit solchen Spesen, h. (1 + 0,1. r) also an Pesos, 85. 1,075 = 91,375 = m

279. Ich suche erst n, was der Centner zu Leipzig, vermöge 277; 276; kostet. Die Kosten zu H. M. L. müssen nachdem besonders in Rechnung gebracht werden, weil sie nicht nach Procent angegeben sind.

280. Also nach (261)

log 110 = 2,0413927
log 832 = 2,9201233

$\log \frac{p}{q}$ = 0,1212694 — 1 (276)

$\log \frac{b}{a}$ = 0,0009828 (275)

$\log \frac{n}{m}$ = 0,1222522 — 1 (261) (263)
log m = 1,9608274 (277)

log n = 1,0830796
giebt n = 12,108 Thl in Louisd'or
= 12 Thl 2 gl 7,104 pf

Kosten bis Leipzig = 3 15 (273)

kömmt der Centner = 15 17 7,104

281. Das Exempel, wie in (274) ausgedruckt, macht den Anfang folgendes Buches:

Joh. Christian Herrmanns, Bürgers und Kaufmanns in Leipzig, Specialregeln zu Berechnung der Waarenpreise, wie solche, sowohl bey steigenden und fallenden Preisen und Wechselcoursen auf ausländischen Plätzen, nach jedesmaliger Angabe derselben in Leipzig per netto Centner und per netto Pfund in Louisd'or-Währung zu stehen kommen . . . Leipz. 1783; auf Kosten des Verf. 209 Quartf.

282. Für Gegenwärtiges; ist Hrn. H. Specialregel:

Addirt zu dem jedesmaligen Preis des Baumöls zu Cadix 1 Peso per Spesen, und multiplicirt denselben mit den beyden jedesmaligen Coursen von Cadix und von Leipzig nach Amsterdam, in Banco, alsdann dividirt das Product durch 97003; so kömmt der Preis per 1 Centner ab Cadix zum Facit.

Das Exempel rechnet er so: 141 Rthl mit 85 Pesos multiplicirt (Cours von Leipz. nach Amsterd. mit dem Preise des Baumöls) giebt 11985; das ferner multiplicirt mit dem Cours von Cadix nach Amst. 98 pf Vls Bco giebt 1174530 Rthl Diese durch 97003 dividirt, kommen 12 Rthl 2 gl 6 pf Ld'or für 1 Centner netto ab Cadix.

283. Wo Hrn. H. Divisor herkömmt, giebt er nicht an. Der Ursprung läßt sich so entdecken.

Vermöge 275, 276, 263; ist (261)

$$\frac{n}{m} = \frac{272.98.141}{3750000} \cdot \frac{110}{832}$$

$$= 141.98. \frac{272.110}{3750000.832}$$

also

also (278)

$$n = 85.\ 141.\ 98.\ \frac{272.\ 1{,}075.\ 110}{3750000.\ 832}$$

Nun ist $272 = 8.\ 34 = 8.\ 2.\ 17$

$4.\ 1{,}075 = 4{,}300$

Also im Bruche der Zähler mit 4 multiplicirt $= 8.\ 2.\ 17.\ 43.\ 11$

Ferner $832 = 8.\ 104 = 8.\ 2.\ 52$

$4.\ 375 = 1500$; Also der Nenner viermahl $= 8.\ 2.\ 52.\ 15000000.$

Daher der Bruch $= \frac{17.\ 43.\ 11}{52.\ 15000000}$

$= \frac{8041}{780000000}$

Wenn man dieses Bruches Nenner, auf die letzte Art ausgedruckt, mit seinem Zähler dividirt, so kömmt 97002,8603

Folglich ist $n = \frac{85.\ 141.\ 98}{97002{,}8603}$

Nun sieht man, warum Hr. H. mit 97003 zu dividiren befiehlt.

284. Dieser sein Divisor ist ein wenig zu groß; daher bekömmt er auch den Quotienten etwas geringes zu klein, das freylich ganz unbeträchtlich ist, 6 pf (282) statt 7 (280).

285. Wollte man statt des Dividirens, multipliciren, so liesse sich so verfahren:

log 8041 = 3,9053101

log 780000000 = 8,8920946

log des Bruchs = 0,0132155 − 5

giebt den Bruch = 0,000010308

286. Mit diesem beständigen Factor könnte man das Product aus h (278) in die beyden Course (282) multipliciren, so bekäme man ebenfalls n.

Statt der Multiplication mit Zahlen liessen sich die Logarithmen brauchen.

287. Im Exempel (282; 283)

log 1174530 = 6,0698641.
best. log (285) = 0,0132155 — 15

log n = 1,0830796

völlig wie in (280)

288. Nähmlich: die Course ändern sich, aber nicht die Eintheilungen der Münzen.

Man setze in 274; x statt 98; und y statt 141; Allemahl bleiben die Verhältnisse

Peso : Marav; und M : Duc de Cambio; und Pfenn Vls Bco : Thl Bco ungeändert.

So bekömmt man nun in (275)

Peso : Thl Louisd'or = 272. x. y : 3750000

Also $\frac{b}{a} = x.\ y.\ \frac{272}{3750000}$

Und weil allgemein $m = h.\ (1 + 0{,}01.\ r)$

So ist aus (261) (277)

$h.\ x.\ y.\ \frac{272.\ (1 + 0{,}01.\ r)}{37500} \cdot \frac{110}{132} = n$

Da nun hier $r = 7{,}5$ so wird in h. x. y. der Bruch multiplicirt, der (283) in 85. 141. 98 multiplicirt ist.

289. Man sondere also in (261) das ab, was vermöge der veränderlichen Course veränderlich ist, und drucke das mit Buchstaben aus, wie (288)

Viel-

Vielleicht wäre es auch nicht unnütz, den Buchstaben r zu behalten, weil die Unkosten doch vielleicht einmahl was anders nach Procent betragen könnten, als das andremahl.

Was unveränderlich bleibt, giebt also einen beständigen Factor, den man einmahl für allemahl berechnen, oder auch für ihn einen beständigen Logarithmen brauchen kann.

290. Wer mit Logarithmen und Decimalbrüchen nicht bekannt ist, wird freylich, statt dieses beständigen Factors, wenn solcher keine ganze Zahl ist, lieber eine einzige ganze Zahl haben, mit der er multipliciren oder dividiren kann; auch sich befriedigen, wenn er nur eine solche Zahl bekömmt, die, statt des eigentlichen Factors gebraucht, keinen beträchtlichen Fehler bringt.

291. Solcher Zahlen nun hat Hr. H. 200, für so viel unterschiedne Fragen gegeben, und das ist es, was er Specialregeln nennt. Bey jeder Frage setzt er auch die Berechnung nach der Kettenregel hin, welches manche Angaben, die in seiner Regel als bekannt gebraucht wurden, deutlicher darstellt, und den Nachdenkenden auf den Ursprung der Specialregel leitet.

Auser dieser Ausführung der nützlichen Bemerkung beständiger Factoren, ist Hrn. H. Buch auch wegen der Nachrichten brauchbar, wo so vielerley Waaren, und in was für Preisen sie zu haben sind.

292. Ich will noch seinen letzten Artikel Cc; der gegebenen Anleitung gemäß erläutern. Mit seinen Worten heisst die Frage so: Zu-

Zuckern Raffinirte, gelten in London 72 ß Sterl. frey am Bord per Centner: Provision in 2 p. C. und Assurance etc. 2 p. C. Der Cours von London auf Hamburg ist 34 ß Vls Bco per 1 Pf Sterl. und von Leipzig nach Hamburg 144 Rthl Louisd'or. Wenn nun der englische Centner in Leipzig nur 109 Pfund rendirt, und die Unkosten in Hamburg 1 Rthl 4 gl in Magdeburg 1 Rthl und in Leipzig 1 Rthl Ld'or für den netto Centner betragen; wie hoch wird 1 netto Centner Zucker in Leipzig kommen?

293. Wenn P = 1 Centner zu London, Q = 1 Centner zu Leipzig ist $P = \frac{109}{110} \cdot Q$ also p = 110; q = 109.

294. Es sey x ß Vls Bco = 1 Pf Sterl. und y Thl in Louisd'or = 100 Thl Hamb Bco.

Aber Thl Bco = 8 ß Vls; also Pfund Sterling $= \frac{1}{8}$ x. Thl Bco $= \frac{x\,y}{800}$. Thl in Ld.

295. Ferner Pfund Sterl = 20 Schill Sterl. Wenn also der Zucker frey am Bord, u Schill Sterling kostet, so sind das $\frac{1}{20}$ u Pfund Sterl. Nenne ich also in (256) A = Pfund Sterl.; B = Thl in Louisd. und so h das, was der Fucker frey am Bord kostet, in Pfund Sterl. ausgedruckt, so ist $h = \frac{1}{20} \cdot u$; $m = \frac{1}{20} \cdot u \cdot (1 + 0{,}01 \cdot r)$ (259).

296. Für (294) ist a = 800; b = x. y

297. Also in (261)

$$\frac{1}{20} \cdot u \cdot (1 + 0{,}01 \cdot r) \cdot \frac{x.\,y}{800} \cdot \frac{110}{109} = n$$

298.

298. Was hie völlig bestimmt ist, ist

$$\frac{110}{20.800.109} = \frac{11}{1600.109}$$

Der Nenner ist 174400; und

log 11 = 1,0413927
log 174400 = 5,2415465

0,7998462 — 5

299. Nach der Angabe (292) ist für Provision, Assurance u. s. w. zusammen r = 4; Nimmt man das also auch unveränderlich an, so ist in (297) noch 1,04 bestimmt, und zu dem (298) gefundenen Logarithmen addire man noch log 1,04 = 0,0170333.

So hat man 0,8168795 — 5

für den Logarithmen, der zu log (u. x. y) addirt log n giebt, oder für den Logarithmen eines beständigen Factors, mit dem man u. x. y multiplicirt, um n zu bekommen. Der Factor selbst, wäre 0,000065596.

300. Für (292) ist u = 72; x = 34; y = 144

log u = 1,8573325
log x = 1,5314789
log y = 2,1583625

log (u x y) = 5,5471739
best log = 0,8168795 — 5

log n = 1,3640534

giebt n = 23,123. Also der gesuchte Preis = 23 Thl 2,952 gl

301. Hr. H. lehrt, man soll mit 15245 dividiren. Es ist aber

$$\log \frac{1}{15245} = 0,8168725 - 5$$

$$\log 15245 = 4,1831274$$

welcher Logarithme von dem (300) nicht merklich unterschieden ist. Auch gehört er zu 0,000065595, giebt also einerley mit (300). Im Exempel findet H. 3 gl. wie man nach (301) auch angeben muß.

Statt der 200 beständigen Divisoren, die Hr. H. nicht ohne viel Geschicklichkeit und Mühe gefunden hat, wären mir 200 beständige Logarithmen lieber.

302. Die Veranlassung zu seiner Arbeit, sagt Hr. H. haben ihm des Hrn. v. Clausberg Universalregeln gegeben, die derselbe der dasigen Kaufmannschaft im Manuscripte mitgetheilt hatte. Da sich die Course in vielen Handelsplätzen seit der Zeit sehr verändert haben, seyen auch diese Regeln gegenwärtig ganz unbrauchbar geworden. Hr. H. habe sich bemüht, die seinigen nach den neuesten Coursen einzurichten, und für unsere Zeiten brauchbar zu machen.

Wahrscheinlich redet Hr. H. von dem (48) angeführten Werke. Wenn die Regeln darinn so gar unbrauchbar sind, so wundert mich, wie es einige Jahre später als Hrn. H. Buch, noch ist abgedruckt worden. Im Vorberichte wird zugestanden, daß die meisten Aufgaben nebst ihren Berechnungen noch unter jene Zeiten zu rechnen sind, da Leipzig noch seine Valuta in Louisblanc leistete, aber doch behaup-

behauptet, die Regeln seyen allemahl sicher anzuwenden, es mögen Zeit und Umstände den wesentlichen Gehalt der Münzen verändern wie sie wollen.

Der Verfasser dieser Regeln schreibt sich völlig wie der von der Demonstrativen Rechenkunst, der sich auch in Leipzig aufgehalten hat. Das Manuscript ist also lange Zeit wohl ein Schatz der Leipziger Kaufleute gewesen, wie für manchen Studierthabenden die Hefte seines Professors. Wie wichtig es jemanden, der gehörig rechnen kann, seyn möge, werden meine Leser leicht beurtheilen.

Thara-Rechnung.

v. Clausb. Rechenk. 1283 u. f.

303. Wenn eine Waare in Fässern, Säcken u. d. g. gepackt ist, die mit ihr zugleich gewogen werden, so bekömmt man natürlich das Gewicht der Waare allein, wenn vom ganzen Gewicht, das der Einpackung abgezogen wird.

304. Ist unter der Waare Unreinigkeit, die mit ist gewogen worden, so muß dieser Gewicht auch abgezogen werden, das Gewicht der reinen Waare zu haben.

305. Das Gewicht: Waare, Packung, Unreinigkeit zusammen, heißt: Sporco, Brutto, Unlauter, der reinen Waare ihres Netto, Lauter, und Sporco — Netto = Thara.

306. Man nimmt insgemein für Thara eine gewisse Menge Procent an. Es sey also

Sporco : Thara = 100 : w; So ist

Tha-

Thara $= \frac{w}{100}$ Sporco u. Netto $= \frac{100 - w.}{100}$ Sporco.

307. Es könnte aber auch geschehen, daß man die Waare nach einem Gewichte, der Hauswage, gewogen hätte, das von dem gehörigen, der Stadtwage, etwas unterschieden wäre.

Es sey ein Pfund der Hauswage $= 1 - \frac{m}{100} = \frac{100 - m}{100}$ Pfund der Stadtwage.

308. So zieht der Verkäufer von jeden 100 Pfund seiner Hauswage m Pfund für gut Gewicht ab, welches also dem Käufer zum Vortheile gereicht, der statt 100 nur $100 - m$ bezahlt.

309. Nun setze man, die Waare wiege nach der Hauswage Sporco p Pfund.

So ist ihr Gewicht Netto, nach der Hauswage $= p. \frac{100 - w}{100}$; und nach der Stadtwage $= p. \frac{100 - w}{100} \cdot \frac{100 - m}{100}$;

310. Verwandelt man das Gewicht Sporco nach der Hauswage erst in Gewicht nach der Stadtwage, und berechnet darnach die Thara, so wird p zuerst mit dem Bruche (307) dann dieses Product mit dem (306) multiplicirt, und kömmt so für Netto eben das heraus.

311. Exempel. Thara sey 10 Procent, und man rechne bey der Hauswage 1 Procent für gut Gewicht, also $w = 10$; $m = 1$;

Die

Die Waare Brutto nach der Hauswage 1648 Pfund = p; also

$$\text{Netto} = 1648.\frac{90.99}{10000} = \frac{1648.891}{1000} = 1468{,}368$$

312. Wenn die Procente in Zahlen gegeben sind, die nur eine Zifer haben, oder überhaupt so beschaffen sind, daß sich mit ihnen leicht dividiren läßt, so führt man die Rechnung leichter durch jedesmaligen Abzug. So im Exempel

	p = 1648
ab für w = 10;	164,8
Netto nach Hauswage =	1483,2
ab für m = 1; für gut Gewicht	14,832
Netto nach Stadtwage =	1468,368

113. Offenbar muß eben das herauskommen, wenn man 1648 — 16,48 = 1631,5 = Brutto nach Stadtwage, und dann 1631,5 — 163,152 = 1468,368 = Netto nach Stadtwage rechnet.

314. Gleichwohl sagt v. Clausberg §. 1290. Num. 6. Not. 1. man brauche zuweilen die Ordnung (313) statt der (312) in Praxi unterweilen einen Vortheil von etwa 1 Pf. zu erlangen; Er bringt auch wirklich nach (313) 1469 heraus, nach (312) aber 1468.

Das aber deßwegen, weil er die Decimalbrüche nicht mit nimmt, also statt der Rechnung

in

in (313) so rechnet: 1648 — 16 = 1632 und 1632 — 163 = 1469.

Die Praxis giebt also nur Vortheil, wenn man nicht scharf genug rechnet.

315. Den Werth vom Lauter in Gelde zu berechnen, ist wiederum gleichgültig, ob man diese Berechnung bis ans Ende versparen, oder, wie v. El. anführt, daß es in Holland gewöhnlich sey, für das, was Thara nach der Hauswage abgezogen, übrig bleibt, den Werth in Gelde berechnen, und davon den Werth für gut Gew. abziehen will.

316. Die Waaren (311) sind Rosinen 100 Pf. Lauter zu 11 Fl Holl. Cour.

Also in (312) der Werth von Netto nach der Hauswage = 14,832. 11 Fl = 163,152 Fl. Davon abgezogen den Werth für gut Gewicht = 1,63152 Fl giebt 161,52048 Fl = 161 Fl 10,4096 Stüb.

317. Die Thara beträgt, der Voraussetzung gemäß, w Procent des Gewichts Brutto; Wenn die Hauswage dieses Gewicht durch p angiebt, und wenn man diese Angabe in p. $\frac{100 - m}{100}$ verwandelt, so geschieht das, um die wahre Grösse des Gewichts zu haben, weil man annimmt, das Pfund der Hauswage sey zu leicht. Oder, wenn man wie in (309) zuerst Netto nach der Hauswage berechnet hat, so ist klar, daß man dieses durch die Multiplication mit $\frac{100 - m}{m}$ in Netto der Stadtwage verwandelt.

318. Die Rechnung muß also nothwendig wie in (309) oder nach den gleichgültigen Arten 312; 313; geführt werden. Giebt es Rechner, wie v. El. erwähnt, die beyde Procente addiren, also Netto so berechnen: p. $\left(\frac{100-(m+w)}{100}\right)$ so verfahren die den Grundsätzen der Rechnung nicht gemäß, und bekommen weder der Hauswage noch der Stadtwage Netto.

Was sie bekommen, ist $=$ p. $\left(1-\frac{(m+w)}{100}\right)$ und die wahre Grösse $=$ p. $\left(1-\frac{(m+w)}{100}+\frac{m.w}{10000}\right)$!

319. Das wahre Lauter, ist also grösser, und die falsche Rechnung thut dem Verkäufer Schaden. Er bekömmt p. $\frac{m.w}{10000}$ zu wenig bezahlt.

Im Exempel betrüge das 1,648 Pfund, an Gelde 0,18128 Fl. Freylich ist der Fehler allemahl was sehr geringes.

Fusti.

320. Diesen Nahmen, oder Gerbelut oder Refactie, führt, was vom Gewichte einer Waare deßwegen abgezogen wird, weil sie etwa durch Wasser u. d. g. Schaden gelitten. Es wird auch durch Procent des Gewichts angegeben. Also, wenn das Gewicht Brutto gegeben ist, muß

muß man nach vorigen beyden Procenten Netto berechnen, und das gehörige Procent hievon, ist Refactie, welches dann, vom vorigen Netto abgezogen, den Rest läßt, der bezahlt wird.

321. Exempel. Eine Waare, die auf der See Schaden gelitten hat, wiegt Brutto 4288 Pf. Zu berechnen ist: Thara 10 PC. wegen der Fässer, wegen gut Gewicht $\frac{3}{4}$ PC = 0,0075 wegen des Wasserschadens 6 Procent.

	4288
ab Thara	428,8
bleibt	3859,2
mult mit	0,0075
	192960
	270 44
Product	28,94400
ab von	3859,2
	3830,256
mult mit	0,06
Refactie =	229,81536
ab von	3830,256
	3600,44064

322. Ist die Refactie r Procent, so findet sich wie in (309) was bezahlt soll werden

$$= p. \frac{(100 - w).(100 - m).(100 - r)}{1000000}$$

welches sich durch Logarithmen leicht und so scharf, als man fodert, berechnen läßt.

Im Exempel wäre es

= 4288. 90. 99,25. 94. 0,000001

323.

323. Die Absicht dieser Rechnungen ist, zu wissen, was für die Waare soll gezahlt werden. Wenn also a der Preis eines Pfundes ist, so muß man ohne Zweifel abrechnen, was von dem erst angegebenen Gewichte der Waare = p, wegen gut Gewicht, Thara und Refactie, abgeht, und multiplicirt mit a den Rest, das ist, was (322) angegeben ist.

324. Die Rechenmeister nennen das bisherige: Thara u. s. w. In oder Von, und geben eine Rechnung für Thara Auf an, die sich kurz so vorstellen läßt:

325. Man setze r = 0 = m oder man rechne nur Thara, ohne das übrige.

326. Aus p Brutto, berechnet man nach diesem Verfahren $\frac{100 . p}{100 + w}$; und das mit a multiplicirt, soll der Werth der Waare seyn.

327. Ist aber die Verhältniß von Brutto zur Thara, wie angenommen wird = 100 : w; So liefert der Verkäufer in der That nur $p . \left(\frac{100 - w}{100}\right)$ Netto (309) Nun ist

$$\frac{100}{100 + w} - \frac{100 - w}{100} = \frac{+ w^2}{(100 + w) . 100}$$

Was dieser Bruch, mit p multiplicirt, beträgt, das bekömmt in (326) der Verkäufer bezahlt, ohne es zu liefern.

328. So ist die Thara Auf dem Verkäufer zuträglicher als die Thara Von. Welches Tobias

Beutel erinnert: Zum siebentenmahle neu aufgelegte Arithmetica. Leipz. 1693; 12. 194 S.

329. Das Verfahren (326) ist Nachahmung der einfachen Zinsrechnung (9 Cap. 1. Abschn. 13) und wäre richtig, wenn w Procent Thara hiesse: Brutto: Netto = 100 + w: 100

330. Da Thara u. s. w. doch aus Anfangs untersuchten Erfahrungen sind bestimmt worden, so kömmt es darauf an, wie man den Erfolg dieser Erfahrungen ausgedruckt hat, ob man ihn so angegeben hat: Wenn Waare mit ihren Fässern u. s. w. 100 Pf. wiegt, so ist das Gewicht der Fässer 5 Pf. und der lautern Waare ihres 95 Pf.

Oder: wenn die Waare mit den Fässern 105 Pf. wiegt, ist der Fässer Gewicht 5; der Waare ihres 100.

Das erste wäre Thara von, das andre Thara auf.

Man muß also annehmen, die Erfahrungen sind nach der ersten Art gebraucht worden, welches wenigstens Clausberg zum Grunde seiner Behauptung legen muß. Auch 998 §. erinnert er ausdrücklich, daß Thara von 100 abgezogen, aber was man Procent rabattiren nennt, nicht in, sondern auf 100 gekürzt, statt 100 + w; 100 gerechnet wird.

Tauschrechnung.

331. Wenn eine Waare gegen eine andre, vertauscht, umgesetzt, barattirt, verstochen, wird, so ist natürlich, daß man beyder Werth in einer-

ley

ley Gelde ausdruckt, und daß der eine Werth so viel als der andre betragen.

332. Oft nun wird die Einheit der einen Waare, ein Pfund, eine Elle u. s. w. im Tausche höher angesetzt als für baar Geld. Alsdann setzt der Besitzer der andern Waare auch die seinige im Tausche verhältnißmässig höher an.

Das sieht nun natürlich so aus, als wenn der erste vermittelst des Tausches betrügen wollte, und der andre wäre zu klug, sich betrügen zu lassen. Die Mühe könnte also wohl von beyden Seiten erspart werden; Aber da hätten die Rechenmeister ein Geschäfft weniger.

333. Man kann also die Fragen, die hiebey vorkommen können, folgender Gestalt vorstellen.

Von der Waare A		B
kostet 1 Stück		
baar	a	b
im Tausche	A	B
man giebt		
Stück	m	n

334. Also $a : A = b : B$ (332)
$m . A = n . B$ (331) also auch
$m . a = n . b$

335. Ex. Man hat von der ersten Waare 1625 Pf; von ihr gelten 100 Pfund, baar 47,5 Fl im Stiche 50; Dafür soll eine Waare gegeben werden, von der 100 Pfund, baar 19 Fl gelten. Wie hoch ist diese Waare im Stiche anzusetzen? (B) und wie viel Pfund von ihr sind gegen 1625 der ersten zu geben? (n)

a	A	b	m
47,5	50	19	16,25

$$B = \frac{19.50}{47,5} = \frac{1900}{95} = \frac{380}{19} = 20$$

$$n = \frac{1625.47,5}{19} = 1625.2,5 = 4062,5$$

336. Gesetzt, der Besitzer der zweyten Waare, wollte m Stück von der ersten haben; hätte aber nicht n dagegen zu geben, so viel als (334) erfodert, sondern nur eine geringere Zahl = r.

Setzte man diese Zahl statt n; so käme die Zahl von Stücken der Waare A, die dagegen eingetauscht wird $= \frac{r\,b}{a}$; und diese Zahl wäre kleiner als m.

Der Besitzer der Waare B, muß also $m - \frac{r\,b}{a}$ Stück der Waare A, baar bezahlen.

Er giebt also r Stück seiner Waare und baar Geld m. a — r. b.

336. Wie hoch jeder seine Waare beym Tausche rechnet, kömmt hie gar nicht vor; weil nähmlich das Product aus der Menge der ersten Waare in den Preis eines Stücks von ihr, so viel beträgt, als das Product aus der Menge der andern Waare in den Preis eines Stücks von ihr, die Preise mögen die im baaren Gelde, oder die im Tausche seyn (334).

337.

337. Der Besitzer der Waare A, bekäme für gleichviel Stück derselben, einmahl so viel Stück als das andre von der Waare B; sie möchten nach den Preisen für baares Geld, oder nach den Tauschpreisen tauschen, eben weil der Besitzer der zweyten Waare, sie im Tausche auch verhältnißmässig höher ansetzt (332).

338. Exempel. Einer hat 15 Stück einer Waare, davon er das Stück für 285 Fl. baar verkauft, im Stiche 294 Fl. ansetzt. Der andre giebt dafür 120 Centner einer Waare, da der Centner 24 Fl baar im Preise ist. Man fragt I) wie hoch der Centner im Tausche anzusetzen? II) wie viel baar Geld zuzugeben?

m	a	b	r	A
15	285	24	120	294

Für die zweyte Frage finde ich sogleich $15.285 - 120.24 = 4275 - 2880 = 1395$ Fl

Für die erste ist $B = \frac{24}{285}.294 = \frac{8.294}{95}$

$= 24 + \frac{72}{95}$

So ist r. $B = 120.(24 + \frac{72}{95})$

Dafür bekömmt der zweyten Waare Besitzer, $\frac{r.B}{A} = \frac{120.8}{95}$ Stück, der ersten $10 + \frac{10}{95}$ Stück, muß also baar bezahlen $4 + \frac{17}{19}$ Stück, das Stück mit $285 = 3.5.19$ Fl.

Also giebt er baar $4.285 + 17.15 = 1395$ Fl. wie vorhin gefunden ward.

339. v. Cl. giebt dieses Exempel 1296. §. No. 6; 1260 S. nennt es von den vorherge-

henden, wo nur baare Zahlung, oder nur lauter Tausch vorkam, merklich unterschieden, und rechnet so: 15 St. der Waare A kosten baar 4275; im Tausche 4410; den Unterschied 135 nennt er Uebersatz; sagt, der müsse völlig auf die 120 ℔ der Waare B, geschlagen werden, kommen $\frac{135}{120} = 1\frac{1}{8}$ Fl auf 1 ℔. Die addirt er zu dem gegebenen Preise 24 Fl und sagt, der ℔ der zweyten Waare müsse im Stiche $25\frac{1}{8}$ Fl angesetzt werden.

Für die zweyte Frage aber berechnet er beyde Waaren nach dem, was sie baar gelten; weil nun 15. 285 = 120. 24 = 1395 Fl, so findet er 1395 Fl. für das, was der Besitzer der zweyten Waare herausgeben muß, eben wie ich gefunden habe.

340. Wegen der Beantwortung der zweyten Frage, bin ich also mit El. vollkommen eins.

Bey seiner Antwort auf die erste aber, sehe ich nicht, was die Mengen Stücke, die von jeder vorhanden sind, für einen Einfluß darein haben, wie hoch B im Tausche soll angesetzt werden?

341. Was berechtigt der Waare B Besitzer, den Uebersatz auf seine Waare zu schlagen, und so, sie im Tausche desto höher anzusetzen, je weniger er davon hat?

Freylich, wenn der Besitzer von A die Waare B gern haben will, muß er sich gefallen lassen, sie desto höher anzunehmen, je seltner sie ist.

Aber

Aber hie wird wohl nicht angenommen, daß B deßwegen seltner ist, und mehr gesucht wird, weil ihr jeziger Besitzer wenig davon im Vorrathe hat.

Hätte er nun einen Centner, so müßte man nach Clausb. den Ueberschuß völlig auf diesen einen Centner schlagen, käme 135 Fl. und erhielte also einen Centner im Tausche (24+135) Fl.

Oder; im Tausche für einen unendlichen Werth, wenn er gar nichts von seiner Waare hätte.

Cl. Verfahren scheint mir also wider den gesunden Menschenverstand.

342. Wird im Tausche 1 Centner mit Cl. auf $25\frac{1}{8}$ Fl. gesetzt, so betragen die 120 Centn. im Tausche 3015 Fl; Sollen nun x Stück der ersten Waare im Tausche eben so viel betragen, so ist $x.294 = 3015$ also $x = \frac{3015}{294} = 10 + \frac{25}{98}$ also bleiben von dieser ersten Waare $m - x = 4 + \frac{73}{98}$ Stück baar zu bezahlen, jedes mit 285 Fl. giebt $1406 + \frac{12}{28}$.

Also folgt aus Cl. Antwort auf die erste Frage, etwas, das seiner Antwort auf die zweyte widerspricht. Er hätte seinen Irrthum bey der ersten entdeckt, wenn er sie zur Probe mit der zweyten verglichen hätte. Die zweyte beantwortet er völlig wie ich, und von seiner Antwort auf die erste ganz unabhängig, deßwegen konnte er sie richtig beantworten.

341. Man nehme für die erste Waare an, was in (333) steht, setze aber, jedes Stück von ihr soll nicht ganz vertauscht werden, sondern

für jedes soll an baarem Gelde c bezahlt werden, und nur so viel davon, als A — c beträgt, vertauscht.

Nähmlich, die Waare wird im Tausche das Stück zu A angesetzt, und davon soll c baar bezahlt werden.

342. Man kann nicht sagen, Es verhalte sich c : A — c wie der Theil, der baar bezahlt wird, zu dem Theile, der vertauscht wird.

Denn die Theile verhalten sich nur wie ihre Preise, wenn die Preise in einerley Bedeutung genommen werden, hie aber ist der erste: baar, der zweyte: im Tausche.

343. Aber eben weil sich Theile einer Waare verhalten wie ihre Preise, in einerley Bedeutung genommen, ist der Theil, der baar bezahlt wird, $= \frac{c}{a}$ des Stücks.

Folglich der übrige Theil, der vertauscht wird, $1 - \frac{c}{a}$ des Stücks

Dieser gölte baar a — c

344. Nach der Verhältniß, die beym Ganzen zwischen Preisen baar und im Tausche angenommen wird, gölte dieser Theil im Tausche $(a - c) \cdot \frac{A}{a} = A \cdot \left(1 - \frac{c}{a}\right)$

Aber vermöge der Voraussetzung (341) gilt er im Tausche A — c;

Um

Um $c.\left(\frac{A}{a}-1\right)$ mehr als nach voriger Verhältniß.

345. Durch das Verfahren (341) wird also der Theil, der vertauscht wird, im Tausche höher angesetzt, als nach der Verhältniß geschähe, die beym Ganzen zwischen Preisen baar und im Tausche angenommen war.

346. Es verhält sich nähmlich für diesen Theil Preis baar : Preis im Tausche $= a-c : A-c$

347. Will also der zweyten Waare Besitzer auf diese Art tauschen, so muß er für den Tausch, den baaren Preis seiner Waare nicht in der Verhältniß erhöhen, die bey der ersten Waare für das Ganze angegeben ist, sondern in der (346) also schätzt er seine Waare im Tausche

$$\frac{b.(A-c)}{a-c}$$

348. Ex. Von der ersten Waare gelte ein Centner baar 56 Fl. Holl. $= a$; im Tausche 60 Fl $= A$; Ihr Besitzer will den dritten Theil (dessen, was sie im Tausche gilt,) baar Geld haben, 20 Fl $= c$

Von der andern Waare kostet das Pfund 13,5 Stüber; Eigentlich also $b = \frac{13,5}{20}$ wenn die Einheit der Münze ein Gulden bleiben soll. Wenn man aber in eine Verhältniß allemahl nur Einheiten einer Art, Gulden oder Stüber setzt,

so erspart man bekanntermaassen die Aufmerksamkeit auf die unterschiedenen Grössen derselben.

Der Besitzer der zweyten Waare schätzt also im Tausche, ein Pfund von ihr $\frac{40}{36}$. 13,5 = 15 Stüber.

349. Will er auf die angegebenen Bedingungen, m Stück der ersten Waare haben; So giebt er 1) m e baar. Ferner, von seiner Waare, p Stück, so daß p. b. $\frac{(A - e)}{a - e}$ $= m. (A - e)$ also $p = \frac{m. (a - e)}{b}$

350. **Exempel.** Von 2400 Pfund = m der ersten Waare kostet das Pfund baar $2\frac{3}{4}$ Thl. = a; im Stiche 3 = A. Beym Tausche wird der vierte Theil baar Geld verlangt, bey jedem Pfunde $\frac{3}{4}$ Thl = e.

Von der andern Waare gilt jedes Pfund baar $1\frac{1}{3}$ Thl = b.

Im Tausche ist also sein Preis = $\frac{4}{3}$. $\frac{2,25}{2} = \frac{2}{3}$.

Man giebt von dieser Waare $\frac{2400. 2}{4}$. 3 = p = 3600 Pfund

Und dazu baar Geld 2400. $\frac{3}{4}$ Thl = m. e = 1800 Thl.

351. Alles, was bey der Stichrechnung vorgeht, deutlich aus einander zu setzen, schien mir nicht überflüssig, weil v. Cl. Vortrag mich nicht immer überzeugte, selbst einmahl einen Fehler zu ent-

enthalten schien. Daß auch die Rechenmeister, aus Mangel deutlicher Begriffe, hierüber uneins gewesen sind, zeigt folgendes Exempel aus Lorenz Biermanns Ph. Math. und Arith. zu Leipzig; Neuer arithmetischen Schatzkammer Nürnb. 1667. 4. 143 S. Ich lasse es in seiner alten Gestalt:

352. "Zwey Lägerkaufleute tauschen mit einander, A hat 96 Paar schöne Juchten Stiefeln, giebt das Paar contant pro $4\frac{1}{2}$ Rthl im Stich aber pro 5 Rthl. B hat 32 Dutzt gemeine Strümpfe, giebt das Dutzt baar pro $6\frac{3}{4}$ Rthl. Die Frage, wie hoch B das Dutzt Strümpfe soll am Stich setzen, auch wie viel einer dem andern baar hinauszugeben schuldig?"

Nach 333 u. f.

a	A	b	B
4,5	5	6,75	7,5

Also für $m = 96$; käme $n = \frac{96.4,5}{6,75} = 64$

Aber der zweyte Kaufmann hat nur $32 = r$;

Nach (335) giebt er also diese Stücke alle, und noch an baarem Gelde

$$\frac{96.9}{2} - \frac{32.27}{4} = 216 \text{ Thl.}$$

353. Nun erinnert B. bey dergleichen Exemplis seyen die alten und neuen Arithmetici nicht einig, und stellt beyder Auflösungen vor.

354. Der Alten ihre berechnet B. wie ich. Da ist nun $r.B = \frac{32.15}{2} = 240$; Und $m.A = 480$; Also $m.A - r.B = 240$; Er

So viel giebt nach der Alten Rechnung der zweyte Kaufmann dem ersten baar heraus.

355. Der Neuern ihre lässt sich in meinen Zeichen so darstellen.

Die erste Waare, gilt m. a baar, m. A im Tausche, so nennen sie m. (A — a); Uebersatz.

Ferner soll nach ihnen der andre seine völlige Waare im Stiche r. b + m. (A — a) ansetzen.

Also ein Duzend von ihr; $b + \frac{m}{r}. (A - a)$

Wie viel der andre seine völlige Waare im Stiche ansetzt, abgezogen von dem, was des ersten seine völlige Waare im Stiche gilt, heisst

m. A — (r b + m. (A — a) = m a = r b

Und das giebt der zweyte baar.

356. Die Alten (354) beantworten also die erste Frage (351) richtig, und die Neuern (355) die zweyte. Eine Frage wird von Jeden unrichtig beantwortet. Der Neuern Verfahren ist v. Clausb. seines (339).

Biermann giebt den Neuern Beyfall. So viel erinnert er allerdings richtig, daß (354) m. A — r. B nicht baar Geld, sondern Stichgeld sind.

357. Der Besitzer der zweyten Waare setze in (347) ein Stück von ihr im Tausche auf $\frac{(b + x).(A - c)}{a - c}$; höher, als dorten angegeben ist. Nähmlich zur dortigen Angabe $\frac{x\,(A - c)}{a - c}$ gesetzt.

358.

358. Also, für m Stück der ersten Waare giebt er baar m. e; und q Stück seiner Waare, so daß $m = \frac{q.(b+x)}{a-e}$ also $q = \frac{m.(a-e)}{b+x}$; Nicht so viel als (349).

Gäbe er p; so gewönne er nichts, weil eben in 349; die Rechnung so geführt ist, daß von der zweyten Waare so viel gegeben wird, als nach dem Preise des Tausches, dem gleich ist, was von der ersten Waare nach dem Werthe des Tausches, dagegen erlangt wird.

359. Gegenwärtig also gewinnt der Besitzer der zweyten Waare, so viel, als p — q Stück seiner Waare, betragen.

Die Zahl der gewonnenen Stücke ist

$$m.(a-e).\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b+x}\right)=\frac{m.(a-e).x}{b.(b+x)}$$

Also, der Gewinnst an ihnen, nach dem Preise, den jedes im Tausche hat (347)

$$=\frac{m.(A-e).x}{(b+x)}$$

Oder nach dem Preise, den sie baar haben, $\frac{m.(a-e).x}{b+x}$; welches man findet, wenn man die Zahl der gewonnenen Stücke mit dem baaren Preise eines multiplicirt, oder den im Tauschpreise gefundenen Werth, vermöge (347) in Werth im baaren Preise verwandelt.

360.

360. An einem Stücke der ersten Waare gewinnt also der Besitzer der zweyten Waare, baar $\frac{(a-e).x}{b+x}$

361. So viel gewinnt der Besitzer der Waare bey Eintauschung eines Stücks der ersten.

Also, wenn er $\frac{a-e}{b+x}$ Stück seiner Waare (358) und dazu baar e ausgiebt.

Der Werth seiner Waare beträgt in baarer Bezahlung $\frac{a-e}{b+x}.b$

Also, was er ausgiebt, ein Stück der ersten Waare zu bekommen, in baarem Gelde

$$e+\frac{a-e}{b+x}.b=\frac{ab+ex}{b+x}$$

So ist

Ausg : Gewinnst $= ab+ex : (a-e).x$

362. Sollte diese Verhältniß $= 100 : r$ seyn, so wäre $100.(a-e).x = abr+rex$

$$x=\frac{abr}{100.(a-e)-r.e}$$

363. Ex. Es sey wie in (350) $a=\frac{11}{4}$; $b=\frac{4}{3}$; $e=\frac{3}{4}$; Man wollte $3=r$ mit 100 gewinnen, so ist in (362) der Zähler $=\frac{11}{4}.\frac{4}{3}.3=11$; der Nenner $=100.2-\frac{9}{4}=\frac{791}{4}$ also $x=\frac{44}{791}$; Nun ist in (350) $\frac{A-e}{a-e}=1{,}125$

log

log 44 = 1,6434527
log 791 = 2,8981765

log x = 0,7452762 — 2
log 1,125 = 0,0511525

0,7964287 — 2

Der Logarithme gehört
der Zahl = 0,062579
dazu (350) = 1,5

Tauschpr. (357) = 1,562579
Ferner x = 0,055626
(350) b = 1,333333

b + x = 1,388959

Nun ist a — e = 2
log (a — e) = 0,3010300
log (b + x) = 0,1426894

0,1583406

Vermöge (358) zeigt des gefundenen Logarithmen Zahl = 1,4399 an, man gebe so viel Pfund der zweyten Waare gegen ein Pfund der ersten. Ferner

zu diesem = 0,1583406
addirt log $\frac{4}{3}$ = 0,1249367

kömmt = 0,2832773

der Logarithme des baaren Werths von genannter Pfundzahl.

Dieser Werth = 1,9199
dazu addirt baar = 0,75

kömmt = 2,6699

für den Werth an baarem Gelde, den man so für ein Pfund der ersten Waare giebt.

364.

364. In (350) gab man von der zweyten Waare $\frac{3}{2}$ Pfund, deren Werth baar $= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$; dazu $\frac{3}{4}$ Thl baar Geld gerechnet, kostete ein Pfund der ersten Waare nach baarem Werthe

vorhin $= 2{,}75$
jezo $= 2{,}6699$

Gewinnst $= 0{,}0801$
$2 + \log 0{,}0801 = 0{,}9036325$
$\log 2{,}6699 = 0{,}4260067$

$0{,}4776258$

gehört zu 3,0034

Nicht völlig scharf $= 3$ wie in (363) verlangt ward, weil die Zahlen nicht in grösster Schärfe sind berechnet worden, aber doch so genau, als hie erfodert wird.

365. v. Clausberg lehrt die Tauschrechnung so, daß keiner soll übervortheilt werden, wie geschähe, wenn die gehörige Proportion nicht in acht genommen wird. Daher kömmt die Untersuchung 357 u. f. bey ihm nicht vor. Zu ihr hat mich Biermann veranlasst, der 146. S. ein Exempel giebt: wie hoch der Besitzer der zweyten Waare sie verstechen soll, damit er 4 Procento mehr als der Besitzer der ersten gewinne. Sein Exempel selbst durchzuarbeiten habe ich nicht Lust, weil ich erst Zeit aufwenden müsste, seine Ausdrückungen zu verstehn. Daß dieselben nicht eben die deutlichsten und richtigsten sind, zeigt der angeführte: Einer soll mehr als der andre gewinnen. Gewinnen kann doch nur einer, also der nicht mehr als der andere, denn

denn so algebraisch, daß Etwas mehr als Nichts ist, hat Biermann gewiß nicht gedacht. Es giebt freylich Fälle, wo bey einem Tausche alle beyde gewinnen, wenn Jeder etwas weggiebt, das ihm unbrauchbar oder entbehrlich wäre, und dagegen was bekömmt, das ihm nützlich, unentbehrlicher ist, wenn der Hahn die Perle, die er auf dem Miste fand, der Magd, die ihn füttert, für eine Handvoll Weizen überläßt. Aber von solchen Fällen ist hie nicht die Rede. In dieser Bedeutung wäre eigentlich immer bey Tausche oder Handel Gewinnst.

Neuerlich sind sehr viel gute Bücher von der kaufmännischen Rechenkunst erschienen, auch mathematischen Einsichten gemäß, Ich kann sie nicht alle kennen, vielweniger prüfen, mich also nicht dem Vorwurfe der Partheylichkeit auszusetzen nenne ich keines.

XI. Capitel.

Vermischungsrechnungen.

I. Aufgabe.

Man hat ein gegebenes Gewicht Wasser, von dem man ein gegebenes Gewicht wegnimmt, und solches mit Weine ersetzt.

Der Wein soll sich mit dem Wasser gleichförmig vermischen, daß sich nun z. E. in jedem Pfunde der Mischung, Wein und Wasser verhalten, wie im Ganzen.

Von dieser Mischung nimmt man nun eben so viel wiederum weg, als vorhin vom reinen Wasser, und ersetzt den Abgang mit Weine, der sich ebenfalls wie vorhin, gleichförmig vermischt.

Dieses, mehrmahl wiederhohlt, immer gleichviel Gewicht der Mischung weggenommen, und den Abgang durch Wein ersetzt, bekömmt man offenbahr immer andere Mischungen, in denen verhältnißmässig mehr Wein ist, weil man Mischung aus Wasser und Weine wegnimmt, und dagegen reinen Wein zusetzt.

Die Frage ist also: Wie sich in jeder dieser nach einander folgenden Mischungen Wein und Wasser gegen einander verhalten?

Auflösung.

1. Das Gewicht des reinen Wassers sey = a; Man nehme davon b weg, und ersetze das mit Weine.

2. So hat man die erste Mischung. In ihr nur noch a — b Wasser, Gewicht der Mischung so groß als vorhin, weil das Gewicht immer ungeändert bleiben soll. Der Voraussetzung gemäß, daß sich beyde Materien immer gleichförmig vermischen, ist in jedem Pfunde z. E. dieser Mischung, der Theil $\frac{a-b}{a}$ Wasser, der Theil $\frac{b}{a}$ Wein.

3. Nimmt man also von dieser ersten Mischung das Gewicht b weg, so nimmt man $a-b$

$\frac{a-b}{a}$. b Wasser weg, und $\frac{b.b}{a}$ Wein.

Wasser bleibt in ihr das Gewicht $a-b-\frac{(a-b).b}{a}$

$=\frac{(a-b)^2}{a}$, und Wein $b-\frac{b^2}{a}$ Des Wassers und Weins Gewicht machen zusammen $a-b$.

4. Von neuem das Gewicht b durch Wein ersetzt, entsteht die zweyte Mischung, in der noch so viel Wasser ist als in (3), des Weins Gewicht $=2b-\frac{b\,b}{a}$

5. In dieser zweyten Mischung giebt das Gewicht des Wassers, mit dem Gewicht der Mischung dividirt, den Bruch $\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$

6. Nimmt man also von ihr das Gewicht b weg, so nimmt man $\left(\frac{a-b}{a}\right).^2$ b Gewicht Wasser weg, und lässt (3) $\frac{(a-b)^2}{a}.\left(1-\frac{b}{a}\right)$

$=\frac{(a-b)^3}{a^2}$ Gewicht Wasser zurück.

7. Das weggenommene Gewicht, mit Weine ersetzt, entsteht die dritte Mischung, in welcher das Wasser (6) den Theil $\left(\frac{a-b}{a}\right)^3$ vom Gewichte der ganzen Mischung ausmacht.

8. Also: In der ersten, zweyten, dritten Mischung, beträgt das Wasser den Theil des Ganzen, der durch erste, zweyte, dritte Potenz von $\frac{a-b}{a}$ angegeben wird.

9. Dieses Gesetz allgemein und kurz darzuthun; sey, in irgend einer Mischung, sie mag die (n—1)te heissen; Das Gewicht des Wassers = w; also $\frac{w}{a}$ der ganzen Mischung.

10. Von dieser Mischung das Gewicht b wegnehmen, heisst $\frac{w.\,b}{a}$ Wasser wegnehmen, folglich $\frac{w.\,(a-b)}{a}$ übrig lassen.

11. Das weggenommene Gewicht durch Wein ersetzt, giebt die nächstfolgende nte Mischung. In ihr ist das Wasser (10) dessen Gewicht also $\frac{w.\,(a-b)}{a^2}$ der ganzen Mischung beträgt.

12. Ist also, für irgend eine, (n—1)te Mischung, $\frac{w}{a} = \left(\frac{a-b}{a}\right)^{n-1}$, so ist für die nächste, nte, der Quotient, den das Gewicht des Wassers, mit dem Gewichte der ganzen Mischung dividirt, giebt $= \left(\frac{a-b}{a}\right)^{n}$

13. Die Voraussetzung (12) gilt für n — 1 = 3 also die Folgerung für n = 4; Und solcher-

chergestalt die Voraussetzung für $n = 5$. Immer von einem Werthe der Zahl n geht der Schluß auf den nächstfolgenden.

14. Wenn also $m = \left(\frac{a-b}{a}\right)$; und das Gewicht des Wassers in der nten Mischung $= c$; so ist $c = a.m^n$

15. Sucht man, die wievielte Mischung ein gegebenes Gewicht Wasser übrig hat, das ist: Sucht man n; So ist

$$\log c = \log a + n.\log m \text{ und}$$
$$n = \frac{\log (c:a)}{\log m}$$

16. Exempel: $a = 150$ Pfund, $b = 5\frac{3}{25}$ Loth $= 5{,}12$ Loth $= \frac{5{,}12}{32}$ Pfund $= 0{,}16$ zur Einheit das Pfund genommen.

Also $a - b = 149{,}84$ und $m = \frac{14984}{15000} = \frac{1873}{1875}$.

17. Wenn ich hie Logarithmen brauche, und solche mit grossen Zahlen multiplicire, so könnte man sich erinnern, daß dieses bey den Logarithmen der gewöhnlichen Tafeln, wo nur sieben Decimalstellen angegeben sind, Unrichtigkeiten verursachen möchte. Es wäre aber wohl nicht der Mühe werth, deßwegen, blos zum Gebrauche eines Rechnungsexempels, Logarithmen auf mehr Stellen zu suchen.

18. Man suche das Gewicht des Wassers in der 365 = n Mischung (14). Der Logarithme von m ist für (16) beständig

19. log 1873 = 3,2725378
log 1875 = 3,2730013

log m = 0,9995365 − 1
365

4,9976825
59,972190
299,86095

$\log \frac{c}{a}$ = 364,8308225 − 365

log a = 2,1760913

log c = 2,0069138

giebt $\frac{c}{a}$ = 0,67736

c = 101,60

Oder in der 365 Mischung, sind noch 101,60 Pfund = 3251,20 Loth Wasser, dieses von 150 Pfund abgezogen, giebt in dieser Mischung 48,40 Pfund = 1548,8 Loth Wein. Das Wasser beträgt 0,67736 des Ganzen, oder des anfangs vorhandenen Wassers.

Es ist auch log m = — 0,0004635

20. Setzt man, jeden Tag würde eine neue Mischung gemacht, so gäbe (19) den Zustand am Ende des ersten Jahres.

21. Wollte man für mehr gemeine Jahre rechnen, so dürfte man nur von der Potenz der

Zahl

Zahl m, deren Exponent 365 ist, von der Potenz, deren Logarithmen (19) angiebt, das Quadrat, den Würfel u. s. w. machen, also nur erwähnten Logarithmen zweymahl, dreymahl, u. s. w. nehmen.

Es giebt aber dieser Logarithme, multiplicirt mit

			Zahl
1	0,8308225	— 1	0,6773
2	0,6616450	— 1	0,4588
3	0,4924675	— 1	0,3107
4	0,3232900	— 1	0,2105

Also wären am Ende des 1; 2; 3; 4; Jahres $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; des anfänglichen Wassers vorhanden.

22. Man suche die Zahl der Mischung (n) für welche nur noch der 50 Theil des anfänglichen Wassers vorhanden ist, also $\frac{c}{a} = \frac{1}{50}$ $= 0{,}02$; wo $\log 0{,}02 = \log 2 - 2$ und so nach (15)

$$n = \frac{-1{,}6989700}{-0{,}0004635}$$

bejaht, weil Divisor und Dividend verneint sind.

Da hie Logarithmen selbst mit einander dividirt werden, so behandle ich sie als gemeine Zahlen, und brauche ihre Logarithmen.

$\log 1{,}69897 = 0{,}2301857$

$\log 0{,}0004635 = 0{,}6660497 - 4$

$\log n = 3{,}5641360$

$n = 3665{,}5$

Also

Also (20) wäre ohngefähr nach zehen Jahren nur $\frac{1}{30}$ Wasser noch in der Mischung.

Anwendung dieser Rechnung.

23. Man begreift wohl leicht, daß im Ernste dergleichen Verfahren mit Wasser und Weine, einer solchen Untersuchung nicht werth wäre, auch ist es nur ein Gleichniß, etwas Wichtigers zu erläutern.

24. Wie unser Körper immer Theile verliert, so bekömmt er neue, durch Nahrung.

Unter diesem Worte verstehe ich hie, nicht die ganze Menge von Speise und Trank, die genommen wird: Bekanntermaassen, geht vieles davon, oft nicht sehr verändert, wieder fort, wie es genommen wird: Nur das nährt, was sich wenigstens auf einige Zeit lang mit den flüssigen oder festen Theilen des Körpers vereinigt.

25. Die Materie, die der Körper von Zeit zu Zeit verliert, enthält doch offenbahr auch immer mit Theile, die ihm von der Nahrung zugewachsen waren, und wiederum, mit andern Theilen, die sich vorher im Körper befunden hatten, abgehen.

26. Man stelle sich den Körper in einem Zustande vor, wo die Menge seiner Materie, sein Gewicht ungeändert bleibt, also der jedesmahlige Abgang, immer wiederum durch Nahrung ersetzt wird.

27. Die Betrachtung dieses Zustandes, fange man, von irgend einem Augenblicke an, da der Körper eine gewisse Menge Materie enthält.

Von

Von dieser gehe etwas weg, und der Abgang werde genau durch Nahrung ersetzt.

28. Diese Nahrung aber, mische sich so vollkommen unter die Materie, zu der sie kömmt, daß, wenn nun zum zweytenmahle was vom Körper weggeht, in diesem Weggehenden, die Menge der vorher vorhandenen Theile, und der Theile der Nahrung, sich verhalte, wie die Masse, zu welcher die Nahrung kam, und die Masse der Nahrung.

29. Stellt man sich dergleichen Abgang mehrmahl wiederhohlt vor, so ist leicht zu sehen, was das Gleichniß sagen will, Wasser bedeutet die vorhandne Materie des Körpers, Wein die Nahrung, nicht die Menge Speise und Tranks (24).

Ob sich übrigens die Sache physiologisch völlig genau so verhält, daran ist doch wohl nichts gelegen, wenn nur die Vorstellung der Wahrheit nahe kömmt.

30. Sie ist von Johann Bernoulli gebraucht: Dissertatio medico-physica de Nutritione, Groning. 1699. Op. Io. Bernoullii, T. I. n. 53. wo man die Rechnung, welche ich bisher erläutert habe, §. 16 u. f. findet. B. setzt das Gewicht eines Menschen 150 Pf. und nach dem Sanctorius, tägliche Speise und Trank 8 Pf. davon der funfzigste Theil, also $5\frac{3}{25}$ Loth in Substanz des Körpers verwandelt werde; So kommen die Zahlen (16) und die aus ihnen hergeleitete, die man also nun leicht auf den menschlichen Körper anwenden wird.

31. Bernoulli hatte noch eine andre Ursache, diese beständige Aenderung der Materie im menschlichen Körper aus einander zu setzen. Es war ihm in einer Disputation entwischt, zu sagen: corpora humana non eadem numero resurrectura, und darüber hatte man ihn beschuldigt, er läugne die Auferstehung. Man s. angef. Dissert. §. 23. Jezo hätte er freylich diese Verketzerung nicht zu besorgen.

32. Aber des Sanctorius Angaben möchten ebenfalls jezo nicht mehr für ganz richtig erkannt werden, und Keil, ist in seinen medicinisch-physischen Versuchen bemüht gewesen, unterschiedenes zu berichtigen.

33. Eine andere Betrachtung bey dieser Untersuchung, blos als Rechnungsaufgabe betrachtet, könnte folgende seyn.

Wenn Abgang und Zusatz, nicht wie ist angenommen, in bestimmten Zwischenzeiten, erfolgen, jedesmahl von bestimmter Grösse sind; Sondern ununterbrochen fortdauern; Wenn durch ein Paar Canäle, beständig Wein zuflösse, und Mischung abflösse.

In der gemachten Anwendung ist offenbahr, daß so was geschieht, weil die unmerkliche Ausdünstung, beständig Theilchen vom Körper abführt, und eben so kann man annehmen, daß Verdauung, Chylification u. d. g. immer Theile dessen, was wir zu uns genommen haben, in Nahrung verwandelt.

34. Hie entsteht jeden Augenblick eine neue Mischung, so wäre die, in einer Zeit, die sich angeben

geben lieſſe, die Zahl der Miſchungen, n; unermeßlich groß; Aber der jedesmahlige Zuſatz b; unmerklich klein. Nur eben nach unzählichen Wiederhohlungen dieſes Zuſatzes, entſtünde für (14) eine Miſchung, in welcher die Waſſermenge c, merklich von der erſten a, unterſchieden iſt.

35. Aus der gemeinen Rechenkunſt, iſt freylich ſchwer abzuſehn, wie man ſich hie verhalten ſollte. Ohngefähr eine Vorſtellung deſſen, was hie erfodert wird, iſt folgendes:

Man ſetze in (14) $\frac{b}{a}$ ſehr klein, alſo m ſehr beynahe $= 1$; Dagegen aber n ſehr groß. So iſt $\frac{c}{a}$ eine hohe Potenz eines eigentlichen Bruches; Alſo nicht ganz unmerklich kleiner, als er ſelbſt.

Je näher der Bruch der Einheit kömmt, deſto höher muß ſeine Potenz ſeyn, wenn es merklich werden ſoll, daß ſie kleiner als der Bruch iſt.

36. **Exempel.** Es ſey $\frac{b}{a} = 0{,}001$; alſo $m = 0{,}999$; Ferner $n = 1000$; alſo $\frac{c}{a}$ die Potenz von 0,999, deren Exponent $= 1000$.

Nun iſt

$1000 \cdot \log 0{,}999 = 999{,}5655 \ldots - 1000$
$= 0{,}5655 \ldots - 1$

alſo (14) $\frac{c}{a} = 0{,}3675$

37.

37. Bey kleinern b, und grössern n, würden die logarithmischen Tafeln bald unzulänglich werden; die Potenz selbst zu berechnen, würde niemand Zeit und Geduld haben: Und für die eigentliche Voraussetzung in (34) würden Zeit und Geduld unendlich, also gewiß übermenschlich erfodert.

38. Es giebt aber eine Kunst, solche Fragen zu beantworten, für welche die gemeine Rechenkunst, selbst die viel höhere, die Algebra, so weit sie Carteſius und seine nächsten Nachfolger gebracht hatten, eine Ewigkeit erfoderte. Diese Kunst heisst die **Rechnung des Unendlichen.** Ihre Nothwendigkeit zeigt sich alle Augenblicke bey genauer Känntniß der Naturbegebenheiten.

39. In der Natur gehn alle Veränderungen, die von Bewegung herrühren, durch unmerkliche Stufen, da man einen Zustand von dem zunächstvorhergehenden nicht unterscheiden kann, nur wahrnimmt, was aus einem angenommenen, durch unzählige Zwischenzustände geworden ist. Selbst die Begebenheit, die alle Kinder kennen, das Fallen schwerer Körper, gehört hieher, daß ein Stein, je länger er fällt, immer geschwinder fällt. Wie sich diese Geschwindigkeit, Zeit und Höhe des Falles nach einander richten, kann niemand einsehn, der nicht unzählich viel, unmerklich kleine Aenderungen zusammen zu rechnen weiß.

40. Es wird also auch jemanden, der nur die gemeine Rechenkunst versteht, nicht ganz unangenehm seyn, an dem Exempel (33) zu sehn, wie die Rechnung des Unendlichen etwas unsern Kräf-

ten

ten unterwirft, das sie sonst überstiege. Auserdem darf ich wohl auch Leser erwarten, welchen die Rechnung des Unendlichen nicht unbekannt, und diese Anwendung von ihr desto lehrreicher ist.

41. Wenn in (12) w die Menge Wasser in irgend einer Mischung bedeutet, so heisse die Menge Wasser in der nächstfolgenden, $w + dw$ wo dw, ein einziges Zeichen, nicht ein Product von ein Paar Buchstaben, anzeigt, um wie viel die Wassermenge in der nächsten Mischung von der, die unmittelbar vorhergeht, unterschieden ist.

Jede folgende Wassermenge ist kleiner als die nächstvorhergehende: Also, um sie zu finden, wird etwas von w abgezogen. Ich setze indessen vor dw das Zeichen + und sehe lieber dw selbst als eine verneinte Gröſſe, die zu einer bejahten addirt, solche vermindert. (Arithm. I. C. 90). So bleiben die folgenden Rechnungen in ihrer gewöhnlichen Ordnung, da man sonst Aenderungen machen müsste.

42. Diese Bezeichnung könnte auch gebraucht werden, wenn die Aenderung des Wassers, durch bestimmte, angebliche Stufen fortgeht, da bedeutete dw den endlichen Unterschied zwischen ein Paar Mischungen. In der Rechnung des Unendlichen, bedient man sich dieser Bezeichnung gewöhnlich für Unterschiede, die man unendlich klein annimmt.

43. Wie sich auch die Mischung ändert, in gewissen Absätzen, und bestimmten Zwischenzeiten, wie anfangs angenommen ward, oder unabläſſig, durch beständigen Ab- und Zufluß wie in (33)

so

so wird man doch allemahl angeben können, wie viel Wein, in einer gewissen bestimmten Zeit, z. E. einem Tage, einer Stunde u. s. w. zugesetzt wird. Das Gewicht dieses Weines sey = h; und die Zeit, innerhalb welcher es zugesetzt wird, verhalte sich zu der Zeit, in welcher b zugesetzt = 1 : d t wo d t wiederum als ein einziges Zeichen, nicht als ein Product verstanden, einen kleinern Zeittheil bedeutet, den man als einen Bruch der Zeit, in welcher h hinzukömmt, ansieht.

Wäre z. E. h die Menge Weins, die in einem Jahre hinzukömmt, und b die in einem Tage, so wäre d t = $\frac{1}{365}$

44. Nun nimmt man an, der Zusatz des Weins geschehe gleichförmig, in gleicher Zeit gleichviel.

45. Also ist h : b = 1 : d t und b = h. d t.

45. Bey einem unabläßigen Zuflusse und Abflusse, bedeutet d t ein unendlich kleines Zeittheilchen.

46. Diesen Erklärungen der Zeichen gemäß, läßt sich (12) so ausdrucken $\frac{w}{a} = \left(\frac{a - h.\,dt}{a}\right)^{n-1}$

und $\frac{w + dw}{a} = \left(\frac{a - h.\,dt}{a}\right)^{n}$

47. Diese Ausdrückungen sind richtig, auch wenn n endlich ist, da bedeuten d w, und d t endliche Grössen.

48. Also, die folgende Wassermenge mit der vorhergehenden dividirt

$$\frac{w + dw}{w} = \frac{a - h.\,dt}{a} \text{ oder}$$

1 +

$$1 + \frac{dw}{w} = 1 - \frac{h.dt}{a}$$ Daher

49. $$\frac{+dw}{w} = \frac{-h.dt}{a}$$

50. Auch diese Gleichung ist richtig, wenn auch Abnahme des Wassers, und Zeittheil, endliche Gröſſen sind.

Daß sie linker Hand des Gleichheitszeichens +, rechter Hand — hat, rührt begreiflich daher. Wenn d t, Zunahme der Zeit bedeutet, so bedeutet d w, Abnahme der Wassermenge, und umgekehrt. Am Anfange der Zeit d t war die Wassermenge w, am Ende ist sie kleiner.

Wenn ein Paar Gröſſen, wie hie Wassermenge und Zeit, sich zusammen ändern, aber dergestalt, daß eine wächst, die andre abnimmt, so gehört nothwendig zu einer bejahten Aenderung, zu Wachsthume, der einen, verneinte Aenderung, Abnahme, der andern.

Aber welche von beyden Aenderungen als bejaht soll angenommen werden, ist gleichgültig. So kann man die Wassermenge vom Anfange der Zeit d t bis an ihr Ende um etwas abnehmen lassen, da wächst die Zeit; oder man kann von der Wassermenge, die am Ende der Zeit d t vorhanden war, auf die gröſſere, am Anfange selbiger Zeit zurückgehn, da nimmt die Zeit ab.

51. Innerhalb der Zeit d t, vorerwähntermaassen von ihrem Anfange gerechnet, nimmt die Wassermenge w, um d w ab; Weil aber

der

der ganzen Mischung Gewicht immer ungeändert = a bleibt, so kömmt in dieser Zeit so viel Wein dazu, als die Abnahme der ganzen Mischung beträgt, diese Menge Weins ist = h d t, und verhält sich zu dem unveränderlichen Gewichte der ganzen Mischung, wie die Abnahme des Wassers zu der nächst vorher vorhandenen Wassermenge.

52. Man kann also auch d t, als eine kleine Aenderung einer Zeit t ansehn. In dieser Zeit t, kömmt zu der Mischung, die im Anfange dieser Zeit vorhanden war, eine Menge Wein = h t. Das folgt aus (44) Es ist nähmlich d t : t = h. d t : h. t

53. In der Sprache der Rechnung des Unendlichen sagt man: h d t ist das Differential der Menge Wein, die in der endlichen Zeit t, hinzukömmt, und dieses Differentials Integral, oder die Menge Weins, die in dieser Zeit hinzukömmt, ist = h t.

54. Wenn man (49) als eine Gleichung zwischen unendlich kleinen Aenderungen der Wassermenge und der Zeit nach (39; 45) ansieht, so lehrt die Rechnung des Unendlichen, aus ihr eine Gleichung zwischen der jedesmaligen Wassermenge und der Zeit herleiten, wobey für die Wassermenge, die Logarithmen gebraucht werden, die man natürliche nennt. Diese Gleichung, die Integralgleichung, der Differentialgleichung ist (nach meiner Analysis des Unendlichen 218)

$$\log \text{nat } w = \frac{-h.t}{a} + \text{Const}$$

Setzt

Setzt man, die Zeit t soll sich anfangen, wenn die Mischungen anfangen, das ist, wenn t = o ist, soll die Wassermenge w = a seyn, so hat man

log nat a = Const.

55. Also log nat $\frac{w}{a} = \frac{-h.t}{a}$

Oder; $\frac{h.t}{a} = \log nat \frac{a}{w}$

56. Die Einheit, mit welcher die Zeit gemessen wird, ist hie die Zeit, in welcher die Menge des Weines h zugesetzt wird.

57. Die Gleichung (55) lehrt t berechnen, wenn man w und folglich davon den natürlichen Logarithmen hat.

58. Aus der Zeit, die Wassermenge zu finden, wäre sie nicht so bequem. Da bedient man sich der Zahl e (An. An. 232) deren natürlicher Logarithme = 1;

So giebt (55)

$\log nat (w : a) = \frac{-h.t}{a}$. log nat e;

Und wenn man von den Logarithmen auf die Zahlen zurückgeht

$\frac{w}{a} = e^{-h.t:a}$

Was rechter Hand steht, mit a multiplicirt, giebt w.

59. Exempel. Wie in (16) nehme man a = 150, und setze in einem Tage = 1; gehn wie dorten 0,16 Pfund = h weg, von der Mischung,

wie sie jedesmahl vorhanden ist, und werden wiederum durch Wein ersetzt. Aber beydes geschieht nicht, immer etwa am Ende eines Tages wie in (20) sondern durch beständigen Ab- und Zufluß wie (33) so daß vom Anfange jedes Tages bis an desselben Ende, so viel von der Mischung abgeht, und so viel von der Mischung dazu kömmt.

Hie hat man die beständige Grösse $\frac{a}{h} = 1\frac{999}{1000}$ deren briggischer ebenfalls beständiger Logarithme $= 2,9719713$

60. Wie viel Tage $= t$, verfliessen, bis vom anfänglichen Wasser nur noch $\frac{1}{50}$ vorhanden ist?

Also in (55) $\frac{a}{w} = 50$; Es ist aber, aus Hrn. Wolfram Tafeln, die Hr. Schulze mitgetheilt hat (VIII. Cap. 4. Abschn. 7.); log nat 50 $= 3,912023$ . . . . Dieser, als eine gewöhnliche Zahl behandelt, müsste mit $1\frac{000}{1000}$ multiplicirt werden.

Ich erleichtere mir diese Rechnung wiederum mit den briggischen Logarithmen

log brigg 3,9120	$=$	0,5923988
Proptheil für 2;	$=$	22
3;	$=$	3
log 3,912023	$=$	0,5924013
beständ. log (59)	$=$	2,9719713
log t	$=$	3,5643726

giebt $t = 3667,5$

61.

61. Diese Zeit ist etwas länger, als diejenige, welche für eben die Verminderung der Wassermenge in (22) gefunden ward.

62. Hievon lässt sich leicht Rechenschaft geben.

In 20 u. f. wurden am Ende des ersten Tages 0,16 Pfund reines Wasser weggenommen, und mit Weine ersetzt.

In 33 u. f. geht nur den ersten Augenblick dieses Tages rein Wasser weg, die folgenden, schon mit Weine vermischtes; die 0,16 Pfund, welche am Ende dieses Tages weggegangen sind, waren schon vermischtes Wasser, es ist also am Ende des ersten Tages nicht so viel Wasser in (33) abgegangen, als in (20).

So geht es jeden der folgenden Tage fort. Im ersten Augenblicke jeden Tages ist in der Mischung eine gewisse Menge Wasser, das Uebrige Wein.

Am Ende des Tages werden nach (20) von dieser Mischung, wie sie am Anfange war, 0,16 Pf. weggenommen, und mit Weine ersetzt.

Aber nach (33) sind am Ende dieses Tages 0,16 Pf. einer Mischung abgelaufen, die bey dem beständigen Abflusse, immer etwas aus Wasser und Wein gemengtes verlohr, und eben so viel Gewicht Wein wiederum erhielt, also immer weinreicher ward; diese 0,16 Pfund enthielten also nicht so viel Wasser als die in (20).

63. Gregorii Fontanae, Cler. Reg. Schol. Piar. in Reg. Caes. Papiensi univ. sublimioris Matheseos P. P. Disquisitiones Mathematicae; Pavia 1780; 4. Da handelt Disquisitio III.

de sanguinis restitutione . . . p. 49. H. F. führte Keilen an, der eben die physiologische Frage, die Bernoulli betrachte (30), auch mit so einem Gleichnisse, wie B. braucht, erläutert, nur daß er das Faß anfangs mit Wein füllt, und den Abgang jedesmahl mit Wasser ersetzt. Uebrigens nimmt Keil auch an, die Mischung werde am Ende jedes Tages geändert wie (20). Das nun tadelt Don Fontana, und erinnert, die Sache müsse so wie (33) betrachtet werden. Weil er aber nicht integrirt, wie ich (49 u. f.) sondern Reihen braucht, so ist seine Rechnung etwas weitläuftiger, bringt ihn aber auch auf natürliche Logarithmen, eben vermittelst eines Verfahrens, wie ich (35) als Vorbereitung beschrieb, daß ein Bruch, der unendlich wenig von 1 unterschieden ist, auf eine unendlich hohe Potenz erhoben wird.

64. Er nimmt mit Keilen, das Gewicht des Körpers 160 Pfund an, davon täglich 4 Pf. abgehn und wiederum ersetzt werden.

Also $a = 160$; $h = 4$; $\frac{a}{h} = 40$

65. Wie viel von der Materie, die der Körper am Anfange eines Jahrs hatte, ist an desselben Ende noch vorhanden?

In (58) ist $t = 365$; und $-\frac{h.t}{a} = -\frac{365}{40} = -9{,}125$; der Exponent, auf den e muß erhoben werden.

Das

Das heisst: Man macht einen Bruch, dessen Zähler = 1; der Nenner e auf die Potenz erhoben, deren Exponent = + 9,125 = 9 + $\frac{1}{8}$

Dieser Bruch ist = $\frac{w}{a}$

66. Die Zahl e selbst steht in meiner Anal. d. Un. 222; Ihre ersten Zifern sind; 2,71828 ....

Man kann wiederum die Rechnung mit ihrem briggischen Logarithmen führen. Aus meiner Anal. d. Un. 230; 231; 232; ist er

= 0,43429448

mult. mit 9; = 3,90865032

mit $\frac{1}{8}$; = 54286810

3,96293713

abgezogen von

log 160 = 2,2041200

log w = 0,2411829 — 2

giebt w = 0,017425 Pfund

Nur so wenig wäre noch von den 160 Pfunden Materie übrig, die im Anfange des Jahres vorhanden waren.

67. Von Bernoulli's Rechnung (21) weicht dieser Erfolg begreiflich dessentwegen so sehr ab, weil hie 4 Pfund ist, was dort 0,16 Pf. war.

67. Hr. Fontana vergleicht mit dieser Untersuchung, Jac. Bernoulli's Aufgabe. (9 Cap. 2. Abschn. 124) ohne Zweifel weil da auch alle Augenblicke ein Zuwachs entsteht, Abgang ist nicht. Eine andre Aufgabe, an welche der sehr ähnliche Gebrauch natürlicher Logarithmen erinnern

könnte, wäre: Die Berechnung, wie viel das Barometer sinkt, wenn es höher gebracht wird. Man s bey meinen Anmerkungen über die Markscheidekunst, die Abh. über Höhenmessungen mit dem Barometer; (11).

Zusatz zur ersten Aufgabe.

1. Es bedeutet a das anfängliche Gewicht des reinen Wassers, b was jedesmahl an Gewicht weggenommen wird, auch wenn schon Wasser mit Wein vermischt ist, und durch Wein ersetzt wird.

$m = \frac{a-b}{a}$; n die Zahl der Mischung e, das Gewicht des Wassers in der nten Mischung und $e = a.\, m^n$ (das. 14 §.).

2. Es sey also die Verhältniß des noch vorhandenen Wassers, zum ganzen Gewichte gegeben oder $\frac{c}{a} = r$; So hat man $\sqrt[n]{r} = \frac{a-b}{a}$ also $b = a.(1 - \sqrt[n]{r})$ wo man a oder b suchen kann, wenn n gegeben ist, auch n wenn das Uebrige gegeben ist.

3. Es sey $r = \frac{1}{2}$ oder so viel Wasser als Wein in der Mischung.

So ist $\frac{b}{a} = 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$

4. Wäre also b und a gegeben, so fände sich $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{b}{a}$ und $n.\log\frac{1}{2} = \log m$,

und

und $n = \frac{\log m}{\log \frac{1}{2}}$

5. Wäre n und b gegeben, so wäre

$$\frac{b}{1 - \sqrt[n]{\frac{1}{2}}} = a$$

6. Exempel. Es sey $n = 3$; $b = 2$ also

$$a = \frac{2}{1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}}$$

Nun ist $\log 0{,}5 = 2{,}6989700 - 3$

$\frac{1}{3} \log 0{,}5 = 0{,}8996567 - 1$

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0{,}79370$

$1{,}$

$0{,}20630$

$\log 2 = 0{,}3010300$

$\log 0{,}2063 = 0{,}3144992 - 1$

$\log a = 0{,}9865308$

$a = 9{,}6947 -$

Oder, für eine genauere Rechnung

$$1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2}} \text{ und}$$

$$a = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} - 1}, \text{ wo der Divisor} = 0{,}2599205$$

$\log 2 = 0{,}3010300$

$\frac{1}{3} \log 2 = 0{,}1003433$

$\log 2\sqrt[3]{2} = 0{,}4013733$

$\log 0{,}25992 = 0{,}4148397 - 1$

$\log a = 0{,}9865336$

$a = 9{,}6947$ — wie vorhin.

Probe nach Forts. a. a. O. 14 §. wo

$\frac{1}{m^n} = \frac{a}{c}$

Es ist also $m = \frac{7{,}6947}{a}$

$\log a = 0{,}9865336$

$\log 7{,}6947 = 0{,}8861917$

$\log \frac{1}{m} = 0{,}1003419$

3. $\log \frac{1}{m} = 0{,}30102\,57$

giebt $\frac{1}{m^3} = 1{,}9998$

7. Das Exempel (6) steht in Harsdörfers philosophischen und mathematischen Erquickstunden, dritter Theil; II. Theil von der Meßkunst 19. Frage; Nur hat H. anfangs das Faß voll Wein und füllt Wasser zu. Er giebt eine geometrische Construction, die ich nicht Lust habe zu entwickeln.

II. Aufgabe.

zur Vermischungsrechnung.

1. Man hat dreyerley Materien, die ich mit A, B, C, bezeichne

z. E. Gold, Silber, Kupfer.

2. Ein gewiß Gewicht, besteht aus m Theilen,

z. E.

z. E. die Mark aus 16 Lothen; m = 16
oder 288 Grän m = 288

3. Eine Mischung aus den drey Materien (1) die das Gewicht m, (2) hat, hält dergleichen Theile, die auf dieses Gewicht gerechnet werden
a von A; b von B; m — a — b von C;

Z. E. Man hat Gold, da die Mark m = 288 Grän aus 188 = a Gold, 86 = b Silber, 14 = m — a — b Kupfer besteht.

4. Die Bedingung (3) drücke ich so aus: Die Mischung

I) a. A + b. B + (m — a — b). C.

Man kann a, b, nach Gefallen annehmen, nur daß ihre Summe nicht grösser ist als m. Ist sie so groß, so ist nichts von der dritten Materie vorhanden.

5. Hieraus wird man verstehen, was folgende Ausdrücke von andern Mischungen sagen wollen.

II) A. A + B. B + (m — A — B). C
III) α. A + β. B + (m — α — β). C.
IV) f. A + g. B + (m — f — g). C

6. Dergleichen sich begreiflich mehr erdenken lassen. Jeder bedeutet einerley Gewicht, aus den drey Materien in unterschiedenen Verhältnissen zusammengesetzt. Die undeutschen Buchstaben, zeigen diese Verhältnisse an.

7. Nun habe man von der
Mischung I das Gewicht (1) nmahl
II p
III q

8. Und so seße man aus den vielfachen der drey Mischungen I, II, III; ein Vielfaches der IV zusammen.

9. Also n. (a. 𝔄 + b. 𝔅 + (m − a − b). ℭ)
+ p. (A. 𝔄 + B. 𝔅 + (m − A − B). ℭ)
+ q. (α. 𝔄 + β. 𝔅 + (m − α − β). ℭ)
giebt zusammen
(n + p + q). (f. 𝔄 + g. 𝔅 + (m − f − g). ℭ.

10. Offenbahr besteht das Gewicht jeder Materie in der vierten Mischung, aus den Gewichten dieser Materie in den ersten dreyen zusammen. Also

11. n. a + p. A + q. α = (n + p + q). f

12. n. b + p. B + q. β = (n + p + q). g

13. Wenn man in 11; 12; was auf einer Seite steht, addirt, so kömmt

n. (a + b) + p. (A + B) + q. (α + β)
= (n + p + q). (f + g)

aber

n. m + p. m + q. m = (n + p + q). m

Also, das Obere vom Untern abgezogen

n. (m − a − b) + p. (m − A − B) + q. (m − α − β)
= (n + p + q). (m − f − g)

14. Diese letzte Gleichung folgt aus den beyden vorhergehenden.

Auch aus (9) folgte sie, für das Verhalten der Grössen, die zur dritten Materie gehören.

Begreiflich eben deßwegen, weil das Gewicht der dritten Materie, mit dem Gewichte der beyden andern zusammen, in jeder der drey einzelnen Mischungen, m ausmacht, und in der vierten (n + p + q). m.

15.

15. Es sey die Verhältniß der Materien in jeder der vier Mischungen gegeben, oder: Man soll aus drey Mischungen, in deren jeder die Verhältniß der Materien gegeben ist, eine Vierte machen, in welcher auch die Verhältniß der Materien gegeben ist.

16. So sind die Buchstaben in 4; 5; gegeben.

17. Und für die drey n, p, q, hat man zwo Gleichungen (11; 12;) denn (13) ist eine Folge (14).

18. Also kann man noch einen nach Gefallen annehmen, und daraus die übrigen berechnen.

19. Ich nehme n an.

20. Aus (11; 12;) kömmt

$$n.(a-f)+p.(A-f)+q.(\alpha-f)=0$$
$$n.(b-g)+p.(B-g)+q.(\beta-g)=0$$

21. Daher

$$\frac{n.(a-f)+q.(\alpha-f)}{A-f}=-p=\frac{n.(b-g)+q.(\beta-g)}{B-g}$$

22. Also

$$n.(a-f).(B-g)=n.(b-g).(A-f)$$
$$+q.(\alpha-f).(B-g)+q.(\beta-g).(A-f)$$

23. Daher

$$n.\begin{bmatrix}(a-f).(B-g)\\-(b-g).(A-f)\end{bmatrix}=q.\begin{bmatrix}(\beta-g).(A-f)\\-(\alpha-f).(B-g)\end{bmatrix}$$

24. Oder

$$\frac{n.((a-f).(B-g)-(b-g).(A-f))}{(\beta-g).(A-f)-(\alpha-f).(B-g)}=q$$

25. Wenn man eben aus (20) die beyden Werthe von $-q$ einander gleich setzt, so kömmt

n.

$$\frac{n.(a-f)+p.(A-f)}{\alpha-f} = \frac{n.(b-g)+p.(B-g)}{\beta-g}$$

Folglich

$$p.\begin{cases}(A-f).(\beta-g)\\-(B-g).(\alpha-f)\end{cases} = n.\begin{cases}(b-g).(\alpha-f)\\-(a-f).(\beta-g)\end{cases}$$

26. Daher

$$\frac{n.((b-g).(\alpha-f)-(a-f).(\beta-g))}{(\beta-g).(A-f)-(\alpha-f).(B-g)} = p$$

Eine andere Frage.

27. Man hat von jeder der drey ersten Mischungen das Gewicht = m; Und will aus ihnen die vierte von eben dem Gewichte machen: Wie viel nimmt man von jeder der ersten dreyen? Hie ist also n nicht gegeben, sondern wird gesucht.

28. Also $n+p+q=m$

29. Daher in (11) $n.a+p.A+(m-(n+p)).\alpha = m.f$

(12) $n.b+p.B+(m-(n+p)).\beta = m.g$

30. Man suche aus diesen beyden Gleichungen p wegzuschaffen. Also

31. Aus der ersten

$n.a+p.A+m.\alpha = m.f$,

$-n.\alpha-p.\alpha$ und

$$\frac{n.(a-\alpha)+m.(\alpha-f)}{\alpha-A} = p$$

32. Und eben so aus der zweyten Gleichung (29)

$$\frac{n.(b-\beta)+m.(\beta-g)}{\beta-B} = p$$

wie

wie man sogleich ohne Rechnung übersieht, wenn man bedenkt, daß statt a, A, α, f, in der zweyten Gleichung b, B, β, g, kommen.

33. Wenn man die Werthe von p einander gleich setzt, und jedes Zähler mit des andern Nenner multiplicirt, also die beyden Zähler, die so herauskommen, gleich setzt, und ihre gemeinschaftlichen Nenner, das Product aus beyden, wegläßt, so kömmt

$$n.(a-\alpha).(\beta-B) = n.(b-\beta).(\alpha-A) + m.(\alpha-f).(\beta-B) + m.(\beta-g).(\alpha-A)$$

34. Und daraus

$$n = m.\frac{((\beta-g).(\alpha-A)-(\alpha-f).(\beta-B))}{(a-\alpha).(\beta-B)-(b-\beta).(\alpha-A)}$$

35. Man drucke dieses so aus

$$n = \frac{m.Z}{N}$$

wo man leicht sieht, was die neuen grossen Buchstaben bedeuten.

36. Also in (31)

$$p.(\alpha-A) = \frac{m.Z}{N}.(a-\alpha) + m.(\alpha-f) = \frac{m}{N}(Z.(a-\alpha) + N.(\alpha-f))$$

37. Es ist aber

$$Z.(a-\alpha) = (\beta-g).(\alpha-A).(a-\alpha) - (\alpha-f).(\beta-B).(a-\alpha)$$

$$N.(\alpha-f) = +(a-\alpha).(\beta-B).(\alpha-f) - (b-\beta).(\alpha-A).(\alpha-f)$$

38.

38. Folglich Z. $(a-\alpha)+N.(\alpha-f) = (\alpha-A).\ \{(\beta-g).(a-\alpha) - (b-\beta).(\alpha-f)\}$

39. Daher (36)

$$p = \frac{(\beta-g).(a-\alpha) - (b-\beta).(\alpha-f)}{N}.\ m$$

40. Damit ich die Freyheit behalte, n, p, q, in den Anfangs (7) erklärten Bedeutungen zu brauchen, schreibe ich x statt n (35) und y statt p (39) also $\frac{x}{m} = \frac{Z}{N}$

$$\frac{y}{m} = \frac{(\beta-g).(a-\alpha) - (b-\beta).(\alpha-f)}{N}$$

41. Zu einer Mark von IV nimmt man also

$\frac{x}{m}$ einer Mark von I

$\frac{y}{m}$ II

$\frac{m-x-y}{m}$ III

42. Will man also r Mark von IV machen, so nimmt man die rfachen der gefundnen Werthe.

43. Imgleichen, wollte man zu der Mischung IV; n Mark von I nehmen, so gehörte dazu

$\frac{n.y}{x} = p$ Mark von II; und

$\frac{n.(m-x-y)}{x} = q$ Mark von III.

Da ist $n+p+q = \frac{n.m}{x}$

Wie

Wie viel Grössen in der Frage (8) gegeben seyn können.

44. Die Grössen, die in ihr vorkommen, sind a; b; A; B; α; β; f; g; n; p; q; an der Zahl 11;

Man hat aber, sie zu bestimmen, nicht mehr als zwo Gleichungen 11; 12; Wenn die Frage so allgemein abgefasst ist, daß man noch nicht Verhältniß der Theile in den Mischungen, und Mengen von jeder, als gegeben ansieht.

45. Man kann also (Anal. endl. Gr. 207) von den genannten Grössen, 9 nach Gefallen annehmen, und daraus die beyden übrigen bestimmen.

46. So waren in (15) die ersten acht gegeben und das Gewicht einer Mischung, man fand daraus die Gewichte der beyden Mischungen, die jener beygefügt werden. Das Gewicht der Mischung aus allen dreyen, oder der vierten Mischung ihres sehe ich nicht als eine besondere Grösse an, weil es durch die ersten drey gegeben wird.

47. Wollte man es aber auch so betrachten und r nennen wie in (42), so hätte man noch eine Gleichung $n+p+q=r$. Und so in (44) 12 Grössen und drey Gleichungen, da 9 Grössen gegeben seyn könnten.

48. Das würde seinen Gebrauch haben, wenn man aus dreyerley Mischungen eine vierte von gegebenem Gewichte machen sollte, welche Frage schon in der gemeinen Arithmetik bey der Vermischungsrechnung vorkömmt. Ich glaube aber, hie würde sie sich am bequemsten nach (42) beantworten lassen.

49. Man könnte also vermittelst der Gleichungen 11; 12; auch folgende Frage beantworten: Es sind die Verhältnisse der Theile in den ersten drey Mischungen gegeben, und die Gewichte aller drey; Wie verhalten sich die Theile in der vierten? Dieses erhellt so gleich, wenn man in 11; 12; auf beyden Seiten mit $n+p+q$ dividirt.

50. So könnte man auch ein Paar Gewichte annehmen, und dazu sieben von den Verhältnißzahlen, daraus liesse sich eine, und ein Gewicht finden.

Aus zwo Mischungen eine dritte.

51. Begreiflich läßt man hie nur (III) in (7) weg; und hat

52. $n.a+p.A=(n+p).f$

53. $n.b+p.B=(n+p).g$

54. Daraus $n.(a-f)=p.(f-A)$

$n.(b-g)=p.(g-B)$

55. Also $\frac{n}{p}=\frac{f-A}{a-f}=\frac{g-B}{b-g}$

56. Die Mischung (III) in (5) weglassen, heißt $q=0$ setzen (9). Da werden aus (11) (12); die beyden Gleichungen (52; 53) und der Zähler in (24) $=0$ gesetzt, giebt die (55) welches aber gezeigter maassen keine neue, sondern eine Folgerung aus denen (52; 53) ist.

57. Es giebt also (55) eine Gleichung zwischen den sechs Buchstaben, welche die Verhältnisse der Theile der Mischungen angeben, und diese Gleichung enthält die Menge der Mischungen nicht.

58.

58. Man kann also nicht alle sechs Verhältnißzahlen annehmen, sondern aus fünfen ist die sechste bestimmt.

Das heisst: Man kann nicht aus zwo gegebenen Mischungen eine dritte auch gegebene zusammensetzen. Nur könnte man von dieser dritten annehmen, wie sich die Menge der einen Materie in ihr, zu m; verhalten sollte; der andern, und folglich der dritten Materie Mengen wären dadurch bestimmt.

59. Auch weil $\frac{n}{p}$ (52) bejaht ist, so folgt:

Nachdem a grösser oder f
kleiner als
b g
Ist auch f A
g B

60. Die beyden Gleichungen (55; 56) enthalten acht Grössen. Aus sechs gegebenen, kann man also zwo übrige finden. Nur müssen die sechs gegebenen nicht alle die Verhältnißzahlen seyn (57) oder wenn sie das wären, müsste von sich selbst die Gleichung (55) zwischen ihnen zutreffen. Alsdann aber, finden sich nicht die beyden gesuchten Grössen n; p, selbst, sondern nur ihr Quotient, und man könnte eine nach Gefallen annehmen.

61. Gesetzt, man hätte von der Mischung (I) eine gewisse Menge; Also wären a, b, n, gegeben. Man wollte ihr die Mischung II zusetzen, daß die dritte Mischung in der f, g, gegeben wären, daraus entstünde. So könnte man fragen, wie die Mi-

schung (II) beschaffen wäre, und wie viel man von ihr nehmen müsste? Also sucht man A, B, und p.

62. Also sind (54) in der Gleichung zwischen den Verhältnißzahlen zwo Grössen unbekannt, und man kann eine von ihnen nach Gefallen annehmen.

63. Diese Gleichung ist (55)

$$fb - fg - A.(b - g) = ag - fg - (a - f).B$$

oder

64. $$(a - f).B = (b - g).A + ag - fb$$

65. Wo man also A annehmen, und B daraus berechnen könnte.

66. Ferner aus dieser Annahme,

$$p = \frac{a - f}{f - A}.n = \frac{b - g}{g - B}.n$$

67. In (63) muß A groß genug angenommen werden, daß B bejaht wird; und nicht so groß, daß A + B zusammen mehr als m betrügen.

68. Wollte man in (66) p annehmen, und daraus A berechnen, so müsste man es so annehmen, daß A nicht gröſſer als m kömmt, und auch den Bedingungen (60) nicht widerspricht.

69. Exempel zu 19.

Man hat

I. Gold; in der Mark	188 Grän	= a;	A
	86	= b;	B
	14	= m-a-b;	C
II. Ducatengold	282	= A;	A
	6	= B;	B
	0	= C;	C

III.

III. Kupfer	0	$= \alpha$; A
	0	$= \beta$; B
	288	$= m$; C

Daraus verlangt man

IV. Goldguldengold	224	$= f$; A
	36	$= g$; B
	28	$= m-f-g$; C

Vom Golde I, hat man $75 = n$ Mark

Also in 24; 26; der gemeinschaftliche Nenner

$$-36.(282-224)+224.(6-36)$$
$$= -2088-6720 = -8808$$

Nun was in jedem Zähler in n multiplicirt ist.

Im Zähler von p;

$$(86-36).-224-(188-224).-36$$
$$= 50.-224+36.-36 = -11200-1296 = -12496$$

Im Zähler von q;

$$(188-224).(6-36)-(86-36).(282-224)$$
$$= -36.-30-50.58 = +1080-2900 = -1820$$

$$\text{Also } p = \frac{75.12496}{8808}$$

$$q = \frac{75.1820}{8808}$$

$\log 75$	$= 1{,}8750613$
$\log 8808$	$= 3{,}9448773$
$\log \frac{75}{8808}$	$= 0{,}9301840 - 3$
$\log 12496$	$= 4{,}0967710$
$\log p$	$= 2{,}0269550$
	$0{,}9301840 - 3$
$\log 1820$	$= 3{,}2600714$
$\log q$	$= 1{,}1902554$

Also n = 75
p = 106,40
q = 15,497
n + p + q = 196,897

Probe

Weil α = 0, ist nach 11; 12;
n. a + p. A = (n + p + q). f
n. b + p. B = (n + p + q). g
log p = 2,0269550
log A = 2,4502491
log p. A = 4,4772041
p. A = 30005
75. 188 = n. a = 14100
p. A + n. a = 44105
log 44105 = 4,6444878
log 196,897 = 2,2942392
log f = 2,3502486
giebt f = 224,00 — wie gehörig.

Eben so log p = 2,0269550
log 6 = 0,7781513
log p. B = 2,8051063
p. B = 638,42
75. 86 = n. b = 6450
p. B + n. b = 7088,42
log 7088,42 = 3,8505494
2,2942392
log g = 1,5563102
giebt g = 36,000 wie gehörig.

Man

Man bekömmt also Goldguldengold, wenn man zu den 75 Mark des Goldes I. 1,06,4 Mk Ducaten und 15,497 Mk Kupfer setzt.

70. Die Frage steht in N. Schmids Rechenkunst (Leipz. 1774) Neuntes Cap. n. 135; 236 S. Die dasige Rechnung, die wegen der vielen Brüche sehr mühsam seyn muß, wird so geführt, daß man das Gewicht des Ducatengoldes und Kupfers immer genauer und genauer durch Näherung findet. Hr. Schm. bleibt dabey stehen, daß er $99\frac{5}{47}$ Mark Ducaten, und $14\frac{29}{48}$ Kupfer zusetzt, erinnert aber: hiebey vorkommende kleine Unrichtigkeit, könnte noch durch fortgesetzte Rechnung vermindert werden. Ich habe nach dem, was er angiebt, so gerechnet.

71. 75 Mk gegeb. Gold (I) hält die Mk 188 Grän A
86 B
14 C

Also sind in den 75 Mark,

75. 188 = 14100 Grän A
75. 86 = 6450 B
75. 14 = 1050 C

Schmidt setzt an Ducaten zu

$(47 + 52\frac{5}{47})$ Mk = $(99 + \frac{5}{47})$ Mk

Die Mk Ducaten hält 282 Grän A 6 Gr. B

also 99 Mk halten 99. 282 = 27918 Grän A
99. 6 = 594 B
$\frac{5}{47}$ Mk $\frac{5}{47}$. 282 = 30 A
$\frac{5}{47}$. 6 = $\frac{30}{47}$ B

An Kupfer setzt er zu $14\frac{29}{48}$ Mk.

log 5 = 0,6989700
log 47 = 1,6720979
log $\frac{5}{47}$ = 0,0268721 – 1 | $\frac{5}{47}$ = 0,10638
log 29 = 1,4623980
log 48 = 1,6812412
log $\frac{29}{48}$ = 0,7811568 – 1 | $\frac{29}{48}$ = 0,60416

Also bekömmt Schmidt folgende Gewichte

das gegebene	=	75 Mk
Ducaten	=	99,10638
Kupfer	=	14,60416
zusammen		188,71054

Darinnen sind Grän A

von den 75 Mk	=	14100
Ducaten	=	27948
		42048 Grän A
Grän B von den 75 Mk	=	6450
Ducaten	=	594,63830
Grän B	=	7044,63830

Also sind in der Mark der Mischung

$\frac{42048}{188,71054}$ Grän A; $\frac{7044,6383}{188,71054}$ Gr. B.

log 42048 = 4,6237453
log 188,71 = 2,2757949
2,3479504
log 7044,6 = 3,8478563
Propth für 3 = 18
8 5
log 7044,638 = 3,8478586

log

log 188,71 = 2,2757949

1,5720637

Also in der Mark Gr. 222,81 A

37,330 B

260,140

288

℔ 27,85

Goldgulbengold erfodert in der Mk 224 Grän A

36 B

260

28 ℔

Das Gold 222,81 in der Mk ist also doch ziemlich nahe an Goldguldengolde. Aber der Unterschied etwa von 1,2 Grän, die in der Mk zu wenig sind, beträgt doch bey mehr als 188 Mark etwas merkliches.

Es sollten nähmlich in dem Ganzen 188,71054. 224 Grän Gold seyn.

log 188,71054 = 2,2757961

log 224 = 2,3502480

4,6260441

gehört 42271; Es sind aber

nur da 42048

fehlen also 233

Ist es also nicht besser, nach der Formel, die ich gegeben habe, die Rechnung gerade zu, bequem und scharf zu führen, als mit Versuchen, die man immer verbessern muß, mühsamer und weniger richtig zu rechnen? Das letz-

te muß man sich freylich gefallen lassen, wenn man keine Buchstabenrechnung anbringen will. Schmidt hatte solches vermuthlich in einer Anleitung zur gemeinen Rechenkunst nicht gewagt, da er sonst mit der Algebra bekannt genug war, selbst im zweyten Theile seiner Rechenkunst dazu eine gute Anleitung gegeben hat.

72. Exempel zu 27.

Man hat drey Mischungen folgender Beschaffenheit. Die Mark hält von

I. 12 Lth = a Silber; 1 ℔ = b Kpfr; 3 ℔ = m-a-b Zin
II. 1 = A 12 = B 2 = m-A-B
III. 0 = α 14 = β 2 = m-α-β

Man will daraus machen

IV. 4 = f 9 = g 3 = m-f-g

Also 34; 40;

$Z = (14-9).-1+4.(14-12) = 3$

$N = 12.(14-12)-(1-14).-1 = 11$

Der Zähler in $(40) = 5.12-(1-14).-4 = 8$

Also

$x = \frac{3}{11}$. 16 Loth; $y = \frac{8}{11}$. 16 Loth.

Die Aufgabe 27; steht mit diesem Exempel in Newtons Arithmetica universali Probl. ar. 8. N. bezeichnet in seiner Rechnung der dritten Materie Gewicht mit einem eignen Buchstaben, da es doch schon durch die beyden andern gegeben ist.

Uebrigens wird in seinem Exempel die Mischung IV; nur aus den ersten beyden gemacht. Denn da die Mischung IV, das Gewicht m hat (27), so nimmt man zu ihr von der dritten

m

$m - x - y$ Das ist aber hie $16 - \frac{3 \cdot 16}{11} - \frac{8 \cdot 16}{11} = 0$. Eigentlich also passt Newtons Exempel zur Aufgabe nicht.

73. Zweytes Exempel zu 27.

In dem Exempel zu (19) verlangt man eine Mark Goldguldengoldes. Also lässt man von den Angaben dieses Exempels die weg, daß $n = 75$.

Man bekömmt nun (35)

$Z = -36. - 282 + 224. - 6 = 8808$

$N = 188. - 6 - 86. - 282 = 23124$

$$\text{Also } x = \frac{288 \cdot 8808}{23124}$$

Der Zähler für y (40) ist

$-36.188 - 86. - 224 = -18.47.8 + 43.56.8$

$= 1562.8 = 12496$

$$y = \frac{288 \cdot 12496}{23124}$$

$\log 288 = 2,4593925$

$\log 23124 = 4,3640630$

$0,0953295 - 2$

$\log 8808 = 3,9448773$

$\log x = 2,0402068$

Auch $0,0953295 - 2$

$\log 12496 = 4,0967710$

$\log y = 2,1921005$

Man nimmt also zur Mark Goldguldengold

von I) x = 109,7000 Grän
II) y = 155,6326

x + y = 265,3326
288

von III) = 22,6673

Für die Probe muß nach 29; 40; folgendes statt finden

x. a + y. A = m. f
x. b + y. B = m. g

welches auch eintrifft, wie man vermittelst der Logarithmen leicht berechnet.

Wollte man von I; 75 Mk = n nehmen, so gehörten dazu (43) $\frac{75. y}{x}$ Mk von II. Die Rechnung mit den Logarithmen giebt dieses p = 106,40 wie vorhin im Exempel zu (19) ist gefunden worden.

Für n + p + q = $\frac{n. m}{x}$ (43) finde ich hie durch die Logarithmen 196,90; die Rechnung des Exempels bey (19) gab diese Zahl = 196,897

74. Exempel zu 61.

Was für Gold muß man zu Ducatengolde (I) setzen (II) um Goldguldengold (IV) zu bekommen?

Also (Man s. das Exempel zu (19)),
a = 282; b = 6; f = 224; g = 36
6. 24 — 282. 36 = — 30. A — 58. B
6. 112 — 141. 36 = — 15. A — 29. B oder

4404

$$4404 = 15.A + 29.B$$

$$\text{also } \frac{4404 - 15A}{29} = B$$

Man setze $A = 100$; Also $B = \frac{4404 - 1500}{29}$

$$= \frac{2904}{29} = 100,13793;$$

Ferner ist $f - A = 124$; $a - f = 58$; Also $n : p = 62 : 29$

Man kann also zum Ducatengolde, anderes Gold nehmen, wo die Mark 100 Grän Gold, und $\frac{2904}{29} = 100 + \frac{4}{29} = 100,13793$ . . Silber hält, also 86 $+ \frac{25}{29}$ Grän Kupfer. Die Gewichte des Ducatengoldes und des andern müssen sich verhalten $= 62 : 29$

75. Ich sage, man kann, nicht man muß, denn es hätte sich für A eine andere Zahl nehmen lassen.

76. Weil $a - A = 182 = 91.2$, so verhalten sich $n : p : r = 62 : 29 : 91$ (66)

Will man also eine Mark Goldguldengold haben, so ist nach (68) $n = \frac{62}{91} = 0,68132$; $p = \frac{29}{91} = 0,31868$; das findet sich aus

$\log n = 0,8333503 - 1$

$\log p = 0,5033566 - 1$

Zur Probe, berechne man nach (54)

$\log n.a = 2,2835994$ giebt

$n.a = 192,13$

$p.A = 31,868$

Summe $= 223,998$

stimmt also mit $f = 224$ genau überein. Woll-

Wollte man die Brüche der Mark in Grä-nen ausdrucken, so hätte man

log n = 0,8333503 — 1
log 288 = 2,4593925

2,2927428

gäbe 196,22 Grän Ducatengold
also 91,88 vom andern Golde.

77. Aenderung dieses Exempels.

Gesetzt, man wolle zum Ducatengolde, nur Silber mit Kupfer legirt nehmen.

So ist A = 0; und B = $4\frac{404}{29}$ = 151,86 wie sich aus log B = 2,1814493 findet.

Ferner n : p = f : a — f = 112 : 29
n : r = f : a = 112 : 141

Man nimmt also zum Ducatengolde, Silber, da die Mark 151,86 Grän fein, folglich 136,14 Grän Kupfer hält. Das feine Silber in der Mark beträge 8 Loth 7,86 Grän. Die Gewichte des Ducatengoldes und des legirten Silbers, verhalten sich = 112 : 29, und vom Gewichte des aus der Mischung entstandenen Goldguldengoldes, beträgt das Ducatengold $\frac{112}{141}$.

Bemerkungen bey den Fällen, wo eine Grösse nach Gefallen angenommen wird.

78. Wenn dergleichen vorkömmt, wie (62) ist gleichwohl nicht ganz willkührlich, wie groß man diese Grösse annehmen will (67; 68).

79. Exempel. Man hat 12 Mk = n Gold, in welchem die Mark m = 288; 282 = a Grän Gold, 5 = b Silber, also 1 Grän Kupfer hält.

Das

Das ist die Mischung (I) (4)

80. Man will eine Mischung (IV) in (5) machen, wo die Mark; 284 = f Grän Gold, 2 = g Grän Silber, also 2 Grän Kupfer halten soll.

81. Was für eine Mischung (II) muß man dazu nehmen? Was sind A und B?

Und wie viel Mark dieser Mischung; p?

82. Die Gleichung (64) giebt hie

$-2B = 3A + 282.2 - 284.5.$

83. Hieraus folgt $428 - \frac{3}{2} A = B$

84. Also $428 - \frac{1}{2} A = A + B$; welches nicht grösser als 288 seyn darf. Also darf $\frac{1}{2} A$ nicht kleiner seyn als $428 - 288 = 140$, und A nicht kleiner als 280. Ist es genau so groß, so kömmt B = 8 und in der Mischung ist kein Kupfer.

Nähme man A kleiner, z E. = 240; so käme B = 428 — 360 = 68; Das wäre eine Mischung, in welcher die Mark; 240 Gold; 68 Silber hält. Das betrüge 308; mehr als das Gewicht einer Mark. Oder dergleichen Mischung zu haben, müsste man 288 — 308 = — 20 Grän Kupfer hinzusetzen, eigentlich so viel wegnehmen, welches freylich nicht angeht.

85. Auch folgt aus (83); daß A nicht grösser ist als $\frac{2.428}{3}$ oder als $\frac{856}{3} = 285 + \frac{1}{3}$

Ist es genau so groß, so ist in der Mark dieser Mischung kein Silber, sondern $2\frac{1}{3}$ Grän Kupfer.

86. Dieses bestimmt nur, wie man A wegen (64) annehmen muß, wie die Verhältniß der Materien

rien in einer Mark muß angenommen werden, daß sich derselben gemäß eine Mk zusammensetzen läßt.

87. Aber aus (66) kömmt $p = \frac{-2.12}{284-A}$

Also, damit p bejaht wird, muß A grösser als 284 seyn.

Wäre es genau so groß, so käme p unendlich; wäre es nur etwas sehr geringes grösser, so käme p sehr groß.

88. So ist vermöge 85; 87; A in ziemlich enge Gränzen eingeschlossen. Innerhalb deren man es doch wohl von der kleinsten gern etwas entfernt nehmen wird, um von der zweyten Mischung nicht so gar viel nöthig zu haben.

89. Man nehme also $A = 285$; davon das dreyfache $= 855$; $\frac{3}{2}A = 427{,}5$ also (83) $B = 0{,}5$

90. Folglich (87) $p = 24$

91. Also, zu der Mischung (79) nimmt man, als (II) 24 Mk, von einer, da die Mk; 285 Gold, 0,5 Silber, folglich 2,5 Kupfer hält.

92. Probe. Die Mischung (IV) welche $12 + 24 = 36$ Mk wiegt, enthält

$12.282 + 24.285 = 3384 + 6840$
$= 10224 = 36.284$ Gr. Gold
$12.5 + 24.0{,}5 = 72 = 36.2$ Gr. Silber
$12.1 + 24.2{,}5 = 72 = 36.2$ Gr. Kupfer
wie gehörig.

93. Statt (89) nehme man $A = 285 + \frac{1}{3}$
(85) So kömmt $p = \frac{-2.12.3}{-4} = +18$

(87)

(87) der kleinste Werth, den es haben kann (88).

94. Man nimmt also 18 Mark, da die Mk 285 + $\frac{1}{3}$ Gold hält, kein Silber, und $\frac{8}{3}$ Kupfer.

So hat man 12 + 18 = 30 Mk; und darinnen

Gold; $12.282 + 18.\frac{8}{3}^{0} = 8520 = 284.30$

Silber; $12.5 = 2.30$

Kupfer; $12 + \frac{18.8}{3} = 2.30.$

Alligationsregel.

95. Man versteht darunter: Aus Beschaffenheit und Menge unterschiedener Mischungen, die zusammengesetzt werden, des Ganzen, das aus ihnen entsteht, Beschaffenheit und Menge zu bestimmen.

96. Oder auch: Ein Ganzes, von dem Beschaffenheit und Menge gegeben sind, aus Theilen zusammen zu setzen, bey denen man von diesen Umständen einige annimmt, andre sucht.

97. Die erste dieser Fragen ist in (10) u. f. beantwortet. Begreiflich, so groß auch die Zahl der gegebenen Mischungen wäre, verfährt man allemahl mit ihnen, wie mit den dreyen, die als Exempel dienten.

98. Die zweyte läßt sich allemahl aus den Formeln herleiten, welche man für die erste gemacht hatte, wie 19 u. f. zeigen. Die Rechnung wird freylich manchmahl etwas verwickelt und weitläuftig, muß auch anders geführt werden,

den, nachdem dieser oder jener Umstand gesucht wird. Auch ereignet sich bey ihr, daß man Grössen, welche nicht ganz bestimmt werden, zwar mit Aenderung, doch nur innerhalb gewisser Gränzen, annehmen darf (61 u. f.).

Alligationsregel bey Silber.

99. Da Silber nur mit Kupfer versetzt wird, so kommen bey einer solchen nur zwo Materien wie A; B, (1) zusammen. Der Gehalt wird so angegeben, wie viel Loth fein Silber in der Mark sind, also sind die ersten Buchstaben für die Mischungen in 4; 5; Zahlen von Lothen, und $b = 16 - a$; $B = 16 - A$ u. s. w. brauchen nicht besonders gegeben zu werden.

100. Zweyerley Silber, von gegebenem Gehalte zu vermischen, daß die Mischung einen gegebenen Gehalt hat.

Heisst aus Mischungen (I) (II) wo a, A, gegeben sind, eine dritte machen, wo f gegeben ist.

Also nach (54) $\frac{n}{p} = \frac{f - A}{a - f}$; So wird die Verhältniß der Gewichte beyder Mischungen bestimmt, und folglich das Gewicht der einen, wenn der andern ihres gegeben ist.

101. Die Erinnerung (59) zeigt, daß A zwischen a und f falle, oder: die dritte Mischung muß besser als die zweyte, schlechter als die erste seyn, welches schon der natürliche Verstand freylich lehrt.

102.

102. **Exempel:** Aus 15löthigem = a; und 10löthigem = A, soll 13löthiges = f gemacht werden. Also $\frac{n}{p} = \frac{3}{2}$

Hätte man also vom 10löthigen Silber 30 Mark = p, so nähme man vom 15löthigen $\frac{3.30}{2} = 45$ Mk = n.

103. Aus (100) ist $n + p = \frac{a - A}{a - f}$. p wäre also das Gewicht gegeben, das die dritte Mischung haben soll, also n + p; so fänden sich die Gewichte, die man von den ersten beyden nehmen muß, $p = \frac{a - f}{a - A}$. (n + p) und $n = \frac{f - A}{a - A}$. (n + p)

104. Wären a, A, f, Preise von gleichen Gewichten oder Maassen, jedes = m; dreyer Materien, so gäbe die Formel (100) eben so wie sich der ersten beyden Mengen verhalten müssten, damit aus ihnen die dritte vom Preise f entstünde.

105. So trägt man diese Aufgabe als ein leichtes Exempel der ersten algebraischen Rechnung vor: Aus zweyerley Weine, da von jedem der Preis der Kanne gegeben ist, einen dritten von gegebenem Preise zu mischen. Bey dem gewöhnlichen Vortrage, wie in meinen Anfangsgr. der Analys. endl. Grössen 67; wird die

Kanne Wein = 1 gesetzt, und die Preise, jeder durch einen Buchstaben angedeutet.

Wären nähmlich die Preise der Kanne von dreyerley Weinen, a, A, f, und man wollte aus den beyden ersten, den letzten zusammensetzen, so nenne man y den Theil der Kanne, den man vom ersten nehmen muß, also $1-y$ was vom zweyten genommen wird. Die Summe der Preise dieser beyden Theile $y.a+(1-y).A=f$ dem Preise der Kanne des dritten Weins gesetzt, hat man $y.(a-A)+A=f$ also $y=\frac{f-A}{a-A}$; auch so $1-y=\frac{a-f}{a-A}$

und $\frac{y}{1-y}=\frac{n}{p}$ (100)

106. Man hat Silber, die Mark 11 Thl; 457,25 Mark, will es mit Kupfer, davon die Mark $\frac{1}{6}$ Thl kostet, beschicken, damit die Mark der Mischung 10 Thl gilt. Wie viel ist von Kupfer zuzusetzen?

v. Clausb. Rechenk. §. 1337; 1307 Seite.

Ich suche, was für einen Theil y, das Silber in einer Mark der Mischung ausmachen muß. Also $a=11$; $A=\frac{1}{6}$; $f=10$; $y=\frac{59}{65}$; $1-y=\frac{6}{65}$: Folglich

$59:6=457,25:46,5$

wo das letzte Glied die Anzahl von Mark Kupfer anzeigt, die man zu der gegebenen Menge Silber setzen muß.

107. Will man diese Formeln auf Silbermischung, davon das Löthige angegeben ist, wie

z. E.

z. E. auf (102) anwenden, so muß man bedenken, daß die gegebenen Buchstaben, sich nun auf die Mark beziehen, und also nicht Zahlen von Lothen, sondern Sechszehntheile bedeuten, wenn die Mark, wie hie geschehen muß, = 1 gesetzt wird. Für funfzehnlöthiges ist nun a nicht 15, sondern $\frac{15}{16}$.

Allerdings ist verstattet, von diesen Brüchen nur die Zähler hinzuschreiben, weil der allen gemeinschaftliche Nenner sich in der Rechnung aufhebt, aber das muß erinnert werden, wenn man die Rechnung verständlich und Anfängern belehrend vortragen will.

Zuweilen will jemand seinen Sammlungen durch hie und da angebrachte Buchstabenrechnungen ein mathematisches Ansehn geben. Wenn er sie nun so vorträgt, wie angeführtes Exempel zeigt, so sieht man gleich, daß er sie nur abgeschrieben, aber selbst nicht verstanden hat.

Mischung von drey Silbern.

108. Der Rechenmeister Vorschriften hierüber beruhen auf folgenden Gründen:

109. Wenn man zu einer Menge f löthiges Silber, eine andre Menge, eben so viel löthiges setzt, so ist das, was aus beyden zusammengesetzt wird, eben so viel löthig.

In der Summe sind so vielmahl f Loth, so viel Mark sie enthält, eben, wie in jedem Theile, aus dem sie zusammengesetzt ist.

110. Man nenne also drey Silber, in der Ordnung, wie ihre Löthigkeit abnimmt, das erste a löthig, das zweyte A löthig, das dritte α löthig, das folgende immer schlechter als das vorhergehende.

111. Will man aus ihnen f löthiges machen. So muß f gewiß zwischen a und α fallen, weil man aus zwey bessern Silbern kein schlechteres, und aus zwey schlechtern kein besseres machen kann.

Es fällt ferner entweder zwischen a und A, oder zwischen A und α.

Ich will das erste annehmen. Bey der andern Voraussetzung wird eben so gerechnet, nur mit andern Zahlen.

112. Man mache aus den beyden ersten Silbern, f löthiges, nach (100), so ist die Menge des zweyten Silbers, die man dazu nimmt, $p = \frac{a-f}{f-A}$. n, wo man des ersten Silbers Menge nach Gefallen nehmen kann, und daraus die Menge des zweyten Silbers durch die Verhältniß bestimmt.

113. Nun mache man auch f löthiges aus dem ersten und dritten Silber. Zu der Absicht nehme man vom ersten die Menge N, vom dritten Q; und hat wie in (100)

$$\frac{N}{Q} = \frac{f-\alpha}{a-f} \text{ also } Q = \frac{a-f}{f-\alpha}. N$$

114.

114. Nun setze man die beyden f löthigen Silber (112; 113) zusammen, so bekömmt man von

I	II	III
a + N	p'	Q

Da nun n, N, bekannt sind, so hat man die Verhältniß dieser drey Theile.

115. Uebrigens ist klar, daß die Meynung nicht ist: man solle wirklich von den Silbern so viel nehmen, als die gefundenen Zahlen andeuten, vielleicht hätte man dazu nicht genug Vorrath, sondern: man soll nur die Silber in dieser Verhältniß nehmen.

116. Hätte man z. E. n = N = 100 Mk gesetzt, so hieße das nicht: man müsse vom ersten Silber 200 Mk nehmen, und vom zweyten $\frac{a-f}{f-A}$. 100 Mk; und vom dritten $\frac{a-f}{f-\alpha}$. 100 Mk; sondern nur, man müsse von diesen drey Silbern, drey Mengen nehmen, die sich wie die Hunderttheile der angegebenen Mengen von Marken verhalten.

117. Weil n, N, ganz willkührlich sind, so bekömmt diese Frage, aus drey Silbern das vierte zu machen, unzählich viel Antworten.

Hätte man z. E. N = 2n gesetzt, so verhielten sich die Mengen, die man von den drey Silbern nehmen müsste, wie

$$3 : \frac{a-f}{f-A} : \frac{a-f}{f-\alpha} . 2$$

Diese Verhältnisse können offenbahr mit den (116) nicht einerley seyn.

118. Exempel.

a	A	α	f
15	11	7,5	13

Also $a - f = 2 = f - A$; $f - \alpha = 5{,}5$; Daher $p = n$; $Q = \frac{4}{11} \cdot N$, und die Verhältnisse der drey Silber sind $n + N : n : \frac{4}{11} \cdot N$

119. Man setze $n = 2$; $N = 11/2$ so kommen die Verhältnisse $15/2 : 2 : 2$ oder $15 : 4 : 4$

Das ist, zu 15 Theilen des ersten Silbers nimmt man 4 des zweyten, und eben so viel des dritten.

120. Da diese Zahlen zusammen 21 ausmachen, so ist klar, daß die Verhältnisse 21 : 15 und 21 : 4; angeben, wie sich zu einer gegebenen Menge des 13löthigen Silbers, die man machen will, die Mengen der Silber, die man dazu nehmen muß, verhalten (Ar. V. C. 43).

Das Exempel steht beym Clausberg 1338. §. freylich nicht mit Buchstabenrechnung. Er zeigt auch, wie man mannichfaltige andre Verhältnisse zwischen den drey Silbern finden kann. Seine Silber A, B, C, sind meine III; II; I.

121. Fiele der Gehalt des gesuchten Silbers zwischen die von II und III (111) so müsste man statt (112) aus II und III, flöthiges machen.

122. Wären mehr als drey Silber vorhanden, so nähme man sie immer so paarweise zusammen, wie sich aus einem Paare, das gesuchte erhalten läßt.

123.

123. Ich will dieses mit einem etwas weitläuftigen Exempel erläutern. Es steht in Salomon Haasens, Rechenm. zu Darmstadt: Vollständigen Münzmeister und Münzwardein . . . . Frf. 1765; 4; 106 S.

Man hat folgende Silber

I)	380 Mk	13 Lth;	15 löth.	u. 6 Grän	= 276 Gr.
II)	288		13	8	= 242
III)	290	12	10	14	= 194
IV)	300	4	6	2	= 110
V)	420	8	5	12	= 102

Daraus sollen 584 Mk gemacht werden
6 Loth 16 Grän fein = 124 Gr.

Die gegebene Zahl 584; wird in drey Theile zerlegt 244 + 240 + 100

Der erste Theil 244 wird aus I; V; zusammengesetzt.

Der zweyte Theil 240; aus II; IV;

Der dritte Theil 100; aus III; V;

Für jeden Theil kann die Rechnung nach der Formel (100) geführt werden.

Erster Theil.

$a = 15$ Loth 6 Gr. $= 276$ Gr.
$f = 6 \quad 16 \quad = 124$
$A = 5 \quad 12 \quad = 102$

$n : p = 22 : 152 = 11 : 76$
$n : n + p = 11 : 87$

Daher $n = \frac{244 \cdot 11}{87} = \frac{2684}{87} = 30 + \frac{74}{87}$

	=	30 Mk	13 Loth	$10\frac{28}{29}$ Gr.
Folglich p	=	213	2	$7\frac{1}{29}$
Dieß von V)	=	420	8	
läßt von V übrig	=	207	5	$10\frac{28}{29}$

Zweyter Theil.

$a = 242$ Gr.
$f = 124$
$A = 110$
$n:p = 14:118 = 7:59$ also
$n:n+p:7:66$;

$$n = \frac{7 \cdot 240}{66} = \frac{7 \cdot 40}{11} = 25\frac{5}{11} \text{ Mk}$$

Folglich $p = 214\frac{6}{11}$

Dritter Theil.

$a = 194$
$f = 124$
$A = 102$
$n:p = 22:70 = 11:35$
$n:(n+p) = 11:46$

$$n = \frac{1100}{46} = \frac{550}{23} = 23\frac{21}{23}$$

Folglich $p = 76\frac{2}{23}$

So wird das gesuchte Silber folgendergestalt zusammengesetzt:

Theil	von	Mk
Erster	I	$30\frac{74}{87}$
	V	$213\frac{13}{87}$

Zwey-

Zweyter	II	$25\frac{6}{11}$
	IV	$214\frac{6}{11}$
Dritter	III	$23\frac{3}{23}$
	V	$76\frac{2}{23}$

Daß sich zu jedem Theile von den einzelnen Silbern so viel als nöthig ist nehmen lasse, zeigen die für sie angegebenen Zahlen.

Für die Probe.

Wenn man die Menge von Mark, die von jedem Silber in die Mischung genommen werden, jede durch den uneigentlichen Bruch ausdruckt, der sie angiebt, und mit der Zahl von Granen, die eine Mark jedes Silbers enthält, multiplicirt, so bekömmt man folgendes:

Wobey man bemerken muß, daß V, sowohl im ersten als im dritten Theile zu finden ist, und in beyden zusammen $289 + \frac{13}{69} + \frac{3}{23}$ Mk $= 289 + \frac{473}{2001}$ Mk beträgt.

Die Silber, welche zu der Mischung genommen sind, enthalten

I	$\frac{2684}{69}$. 276 Grän
II	$\frac{280}{11}$. 242
III	$\frac{529}{23}$. 194
IV	$\frac{2360}{11}$. 110
V	289,232. 102

log 2684 = 3,4287825
log 276 = 2,4409091

5,8696916

log 87 = 1,9395193
log Silber aus I = 3,9301723

giebt Silber aus I = 8514,7
II = 6160,0
III = 4639,1
IV = 23600
V = 29501,664

In 584 Mk; ist fein = 72415,464 Gran
log 72415 = 4,8598285
log 584 = 2,7664128

2,0934157
gehört zu 123,99

Also ist die Rechnung richtig, da die Mark der Mischung 124 Gr. halten soll.

Haasens Rechnung ist ungemein viel weitläuftiger, weil er, wie viel von jedem Silber zu jedem Theile zu nehmen ist, jedesmahl durch eine eigne Regel Detri berechnet, welches allenfalls sogleich zur Probe, daß man bey jedem Theile richtig gerechnet hat, dienen könnte. Er bedient sich auch des so ganz gemeinen Vortheils nicht, Verhältnisse in kleinern Zahlen auszudrucken. Freylich will er die belehren, welche nichts weiter vom Rechnen wissen, als die Regel Detri.

Als eine Probe giebt er an, daß, was man von I; V zum ersten Theile genommen hat, und von II, IV zum zweyten, und von III, V zum dritten, zusammen 584 Mark beträgt.

Das ist nun wohl nicht zulänglich, denn es liesse sich leicht versehen, daß man z. E. für den

ersten

ersten Theil, so viel von I rechnete als von V gehört, und so viel von V als von I gehört, so wäre die Rechnung sehr falsch und beyde Silber machten doch zusammen 244 Mk.

Auch giebt H. selbst nachgehends die genauere Probe, die ich gebraucht habe.

Das Exempel, mit den Proben, freylich alle Rechnungen hingesetzt, nimmt bey H. 15 Quartseiten ein.

Begreiflich bestimmt er die Aufgabe dadurch, daß er die Mischung aus drey Theilen von gegebener Grösse zusammensetzt. Diese Grössen hätten sich aber auch wohl anders nehmen lassen, z. E. 284; 200; 100 u. s. w. Jede andere solche Abtheilung der Zahl 584 gäbe eine andre Antwort auf die Frage, nur mit der Bedingung, daß für diese Antwort so viel von jedem Silber, als sie verlangt, vorhanden ist.

124. Diese Alligationsregel für mehr Silber als zwey, ist also der Natur der Sache gemäß, zeigt, wie man von der Zusammensetzung zweyer Silber, da die Verhältniß bestimmt ist (100), auf die Zusammensetzungen mehrerer ordentlich fortgeht, und unbestimmte Verhältnisse bekommen muß, weil man das gesuchte Silber aus den gegebenen auf mehr Arten erhalten kann.

125. Indessen erfodert ihre Ausübung Aufmerksamkeit, wie man die Paare wählen muß, aus denen sich das Gesuchte zusammensetzen läßt, und ferner ziemlich weitläuftige Rechnungen, dergleichen man, auser der Probe (123)

beym

beym v. El. sehen kann. Er sucht selbst ein etwas bequemeres Verfahren 1344 §. anzugeben. Ob die Regel nun gleich verdient, gekannt zu werden, auch mit deßwegen, weil ihr Nahme in der Rechenkunst berühmt ist, so dächte ich doch, eine mehr analytische Beantwortung solcher Fragen, wäre in der Ausübung bequemer.

126. Das Löthige in der Ordnung wie (110) angedeutet; Nehme man x vom ersten Silber, y vom zweyten, P — x — y vom dritten, daß der drey Silber Gewicht zusammen P beträgt.

127. Wenn P gegeben ist, sucht man x, y; Ist es nicht gegeben, sucht man die Verhältniß dieser Grössen zu P.

128. Also ist

x. a + y. A + (P — x — y). α = P. f

Eine Gleichung wie die in (11)

129. Daher x. (a — α) + y. (A — α) = P. (f — α).

130. In dieser Gleichung, sind x, y, beyde unbekannt, auch wenn man P als gegeben annimmt. Man kann also nichts anders thun, als noch eine dieser Grössen annehmen, und aus ihr die andre bestimmen.

131. Nimmt man x an, so findet sich

$$y = \frac{P.(f-\alpha) - x.(a-\alpha)}{A-\alpha}$$

Wo f — α, a — α, A — α; bejahte Grössen sind (126).

132. Weil man von allen drey Silbern etwas nehmen will, so ist y eine wirkliche bejahte

jahte Grösse, also x gröſſer als $\frac{P.(f-\alpha)}{a-\alpha}$

133. Imgleichen $P - x - y$ bejaht; Also $P - \frac{P(f-\alpha)}{A-\alpha} + \frac{x.(a-\alpha)}{A-\alpha} - x$ bejaht.

Da man alles mit dem bejahten $A - \alpha$ multipliciren kann, so folgt, daß auch das Product bejaht seyn muß. Es ist aber =
$P.(A - f) + x.(a - A)$;

134. Davon der zweyte Theil allemahl bejaht.

135. Der erste Theil ebenfalls, wenn die Mischung schlechter werden soll, als das zweyte Silber.

136. In diesem Falle also mag man x so klein bejaht nehmen, als man will, selbst könnte es = o gesetzt werden, da man nichts von dem ersten Silber nähme.

Offenbahr heisst das so viel: In (135) kann man die Mischung allein aus dem zweyten und dritten Silber zusammensetzen, weil sie schlechter ist, als das beste von ihnen.

137. Soll sie aber besser seyn, als das beste dieser beyden, so ist f gröſſer als A und was in (133) bejaht seyn soll, wird so ausgedruckt:
$x.(a - A) - P.(f - A)$

138. Das giebt $x > \frac{P.(f-A)}{a-A}$

139. Innerhalb der Gränzen (132; 138 oder 136) kann man unzählige Werthe für x annehmen, deren jeder andre Werthe für die

übri-

übrigen Silber giebt. Man kann also wählen, welche, dem vorhandnen Vorrathe, oder andern Umständen, am gemässesten sind.

140. Exempel. Das (118) giebt für (132)

$$\frac{f-\alpha}{a-\alpha} = \frac{5,5}{7,5} = \frac{11}{15}$$

Es gehört zu (137);

$$\frac{f-A}{a-A} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Also kann man x zwischen $\frac{1}{2}$P und $\frac{11}{15}$P annehmen, wie man will.

Die beyden Gränzen sind $\frac{15}{30}$ und $\frac{22}{30}$

141. Allgemein $y = \frac{P.5,5 - x.7,5}{3,5} = \frac{P.11 - x.15}{7}$

142. Man nehme $x = \frac{2}{3}$P, wie nach (140) verstattet ist.

So ist $y = P.\frac{11-10}{7}$;

Also, P = 1 gesetzt, sind die Mengen der drey Silber

$I = \frac{2}{3}$; $II = \frac{1}{7}$; $III = 1 - \frac{17}{21} = \frac{4}{21}$

Probe: $\frac{2}{3}.15 + \frac{1}{7}.11 + \frac{4}{21}.7,5 = 10 + \frac{11}{7} + \frac{10}{7} = 13$

Hie ist x dem grössten Werthe, den es haben darf, nahe genommen, daraus folgt y klein, und $1 - x - y$ groß.

143. Hätte man vom dritten Silber wenig Vorrath, so könnte man die Rechnung so einrichten,

richten, daß man mehr vom zweyten brauchte. Zu dieser Absicht nähme man z. E. $x = \frac{8}{15}$, näher bey dem kleinsten Werthe, den es haben darf.

Da käme

$$y = \frac{11 - 8}{7} = \frac{3}{7}; \quad x + y = \frac{56 + 45}{7.15}$$

und $1 - (x + y) = \frac{105 - 101}{7.15} = \frac{4}{7.15}$,

und man nähme von den drey Silbern

$$I = \frac{8}{15}; \quad II = \frac{3}{7}; \quad III = \frac{4}{7.15}$$

Probe: $\frac{8}{15}.15 + \frac{3}{7}.11 + \frac{4\ 7,5}{7.15} = 13.$

144. Aus Vier Silbern das Fünfte.

Zu den vorigen Bezeichnungen komme noch das vierte, A löthig, wo A kleiner als α (126). Vom dritten, nehme man nun z; so ist

$x.a + y.A + z.\alpha + (P - x - y - z).A = P.f.$

Also

$y.(A - A) + z.(\alpha - A) = P.(f - A) - x.(a - A)$

145. Hie sind drey Grössen, die drey letzten Buchstaben des Alphabets, unbekannt.

146. Man nehme x nach Gefallen an, so daß es kleiner ist als $\frac{P.(f - A)}{a - A}$, so ist das, was linker Hand des Gleichheitszeichens steht, bejaht.

147. Und zugleich gegeben. Man hat also nun eine Gleichung, darinn y, z, noch unbekannt sind, nimmt y an, und bestimmt daraus z.

148.

148. Dabey muß y so genommen werden, daß z eine wirkliche Grösse und bejaht wird.

Setzte man $z = 0$ so wäre in (144)

$$y = \frac{P.(f-\mathfrak{A}) - x.(a-\mathfrak{A})}{A-\mathfrak{A}}$$

Damit also z etwas Bejahtes wird, muß y kleiner als dieser Werth genommen werden.

149. Exempel.

a	A	α	$\mathfrak{A}$	f
14	13,5	11,5	11	13

Also

$A-\mathfrak{A}$	$\alpha-\mathfrak{A}$	$a-\mathfrak{A}$	$f-\mathfrak{A}$
2,5	0,5	3	2

150. Also überhaupt

$y.2,5 + z.0,5 = P.2 - x.3$ oder $P = 1$ gesetzt

$5.y + z = 4 - 6x$

Da ist x kleiner als $\frac{2}{3}$

Und y kleiner $\frac{4-6x}{5}$

151. Man setze $x = \frac{1}{2}$

Folglich y kleiner als $\frac{1}{5}$

152. Es ist aber auch $x + y + z$ kleiner als 1

oder $0,5 + y + z$ kleiner als 1

Daher $y + z$ kleiner als 0,5

153 Da nun $z = 1 - 5y$; So ist $1 - 4y$ kleiner als 0,5; folglich $4y$ grösser als 0,5 oder y grösser als 0,125

154. So fällt y zwischen 0,125 und 0,2

155. Man nehme $y = 0,15$; So ist

$z = 1 - 0,75 = 0,25$

156.

156. Nun x = 0,5
y = 0,15
z = 0,25

Summe = 0,90

Probe: 0, 5. 14 = 7
0,15. 13,5 = 2,025
0,25. 11,5 = 2,875
0, 1. 11 = 1,1

Summe = 13

157. Wie klein y angenommen werden darf (153), lässt sich wohl in jedem bestimmten Exempel am besten ausmachen, wenn man auch x angenommen hat, also keine Buchstaben mehr als z und y vorhanden sind.

Wollte man für diese Frage allgemeine Formeln in Buchstaben suchen, wie für die ähnliche (138), so würde nicht nur der Ausdruck durch die vielen Buchstaben verwickelt und in der Anwendung zu beschwerlich, sondern man müsste auch noch mehr Fälle als dorten, unterscheiden, nachdem f; zwischen drey Paare jeder nächsten Löthigkeiten der gegebenen Silber fällt.

158. Gesetzt, man hätte von den vier Silbern in der Ordnung immer vom bessern aufs schlechtere verstanden, die Gewichte n, p, q, r;

159. Wollte man nun von den bessern, so viel als möglich in die Mischung bringen, so könnte man versuchen, ob sich folgende Proportionen anbringen liessen:

$n : p = x : y$

$n : q = x : z$

160. Die erste in (145) gebraucht, giebt

$$\frac{p\,x}{n}.\,(A-\mathfrak{A}) + z.\,(\alpha-\mathfrak{A}) = P.\,(f-\mathfrak{A}) - x.\,(\alpha-\mathfrak{A})$$

also

$$z.\,(\alpha-\mathfrak{A}) = P.\,(f-\mathfrak{A}) - x.\left\{\begin{matrix}\frac{p}{n}.\,(A-\mathfrak{A}) \\ -\,(\alpha-\mathfrak{A})\end{matrix}\right\}$$

wo man x so annehmen muß, daß z bejaht wird.

161. Setzte man aber auch die zweyte Proportion in die Gleichung, so käme

$$\left\{\begin{matrix}\frac{q}{n}.\,(\alpha-\mathfrak{A}) \\ +\frac{p}{n}.\,(A-\mathfrak{A}) \\ +\alpha-\mathfrak{A}\end{matrix}\right\} x = P.\,(f-\mathfrak{A})$$

Eine bestimmte Gleichung für x, da Alles Uebrige gegeben ist.

162. In der Gleichung (150) käme

$$\frac{5.p}{n}x + \frac{q}{n}x = 4 - 6x;\quad \text{Also}$$

$$\left(\frac{5p+q}{n} + 6\right).\,x = 4 \text{ und}$$

$$x = 4 : \left(\frac{5p+q}{n} + 6\right)$$

163. Ex. Man hat $28 = n$ Mk; 14löthig Silber, $24 = p$; 13,5löthiges; $20 = q$; 11,5 löthi-

löthiges. Dazu will man 11löthiges nehmen, und aus allen vieren, 13löthiges machen. Die Zahlen des 13löthigen sind die in (149). Daher braucht man die Gleichung des nächst vorhergehenden Absatzes. Weil $\frac{5p+q}{n} =$

$\frac{5.24+20}{28} = \frac{5.6+5}{7}$

$= 5$; so ist $x = \frac{4}{11}$; $y = \frac{4}{11}.\frac{6}{7}$; $z = \frac{4}{11}.\frac{5}{7}$; $x+y+z = \frac{7}{7}$; Man setzt also das vierte Silber so zusammen.

28.	14 Loth	= 392 Loth
24.	13,5	= 324
20.	11,5	= 230
5.	11	= 55
77 Mark halten		= 1001 Loth = 77. 13 Lth.

164. v. Clausb. § 1348; No. 3. trägt dieses so vor: Man wolle aus den vier gegebenen Silbern (163) das grösste Werk, so möglich ist, von 13löthigem verfertigen, welches, wie sein Verfahren zeigt, so viel sagt, als: Man wolle so wenig als möglich von dem schlechtesten dazu nehmen. Aus meiner Auflösung ist klar, daß man allemahl die Mengen der drey bessern, so viel man auch davon hat, verbrauchen kann, wenn man nur die Menge des schlechtesten gehörig dazu nimmt, und übrigens sich gefallen läßt, wie viel das Ganze wiegen soll.

165. So setze man, es wären Silber von den angegebenen Gehalten vorhanden $5 = n$ Mk,

$2=p$; $1=q$; Also $y=\frac{2}{5}x$; $z=\frac{1}{5}x$; so käme in (150); $2x+\frac{1}{5}x=4-6x$. Daher $x=\frac{20}{41}$, $y=\frac{8}{41}$; $z=\frac{4}{41}$; und $20+8+4=32$ also

das 11löthige Silber $\frac{32}{41}$.

Die Mischung betrüge also 41 Mk, und hielte an Silber 20. 14 + 8. 13,5 + 4. 11,5 + 9. 11 = 280 + 108 + 46 + 99 = 533 = 41. 13 Loth.

166. So lassen sich von dreyen der vier gegebenen Silber, die Gewichte, und solchergestalt ihre Verhältnisse nach Gefallen annehmen, wie viel man von dem vierten nehmen soll, giebt sich daraus, durch eine Gleichung, wie die (161).

Mehr als vier gegebene Silber.

167. Es ist leicht zu sehen, daß fünf gegebene auf eine Gleichung führten, in der vier unbekannte Grössen wären, wie in der (144) drey sind; Und so bekäme man für jedes gegebene Silber mehr, eine Gleichung, in welcher eine unbekannte Grösse mehr wäre, die man dann, immer eine nach der andern bestimmte.

168. Wollte man mit dieser einzigen Gleichung sich nicht so lange beschäfftigen, so könnte man aus einigen der gegebenen Silber, ein mittleres zusammensetzen, aus den übrigen wiederum ein mittleres, und aus den beyden mittlern das gesuchte. Dieses Verfahren ist mit dem (114) nicht ganz einerley. Dort macht man aus mehrern Paaren der gegebenen Silber, Mi-

schun-

schungen, eine wie die andere von dem gegebenen Gehalte; Hier aus einigen der gegebenen, Besseres, damit sich aus demselben, und dem schlechtesten, das verlangte machen lässt. Aber v. Cl. 1344 §. schreibt eben so was vor.

Sind nicht mehr als fünf Silber gegeben, daraus das sechste zu machen, so kann man sich begnügen, ein mittleres nach (144) zu finden.

169. Ex. Man hat 15; 14; 10; 9; 8; löthiges Silber, will daraus 12löthiges machen.

170. Man mache aus den vier ersten; 13 löthiges; Aus diesem, und dem letzten, 12löthiges.

171. Also, für die vier ersten (144)

a	A	α	𝔄	f	P
15	14	10	9	13	1

y. 5 + z. 1 = 1. 4 − x. 6

172. Ich nehme x = 0,2;

173. Also z = 2,8 − 5. y

Da ist y kleiner als 0,56

Ferner x + y + z oder 3 + 4 y kleiner als 1;

Also y grösser als 0,5

Ich nehme y = 0,52; giebt z = 0,2; x + y + z = 0,92; Und so sind 0,2. 15 + 0,52. 14 + 0,2. 10 + 0,08. 9 Lth = 3 + 7,28 + 2 + 0,72 = 13 wie verlangt ward.

174. Aus diesem Silber, und dem fünften gegebenen, mache ich nun 12löthiges.

Dafür ist (100) a = 13; A = 8; f = 12 die Menge des (173) = n; des 8löthigen = p und n : p = 4 : 1; n + p : p = 5 : 1

175. So sind in einer Mark der Mischung aus allen fünf Silbern, $\frac{4}{5}$. 13 + $\frac{1}{5}$. 8 Loth = 12 Loth wie gehörig.

176. In $\frac{4}{5}$ = 0,8 einer Mk des Silbers (173) sind 0,8 jeder Menge der dort für die ganze Mk gefundenen Lothe. Wenn man jede solche Menge mit 0,8 multiplicirt, kömmt 2,4 + 5,824 + 1.6 + 0,576; dazu addirt 0,2. 8 (175) kömmt in der Mark der Mischung (175) 13, wie verlangt ward.

177. Die (175) gefundenen Werthe von x, y, z, 1 — x — y — z; multiplicirt man jeden mit $\frac{4}{5}$ = 0,8 so erhellt, daß man folgende Theile der Mark von jedem Silber nehmen muß

I	0,16
II	0,416
III	0,16
IV	0,064
V	0,2

Nähmlich vom fünften Silber; $\frac{1}{5}$ Mark. Die Summe dieser Theile giebt, wie gehörig 1.

178. Wollte man also ein begehrtes Gewicht der Mischung machen, z. E. 50 Mk, so gehörte dazu 50. 0,16 = 8 Mk von I; 50. 0,416 = 20,8 von II u. s. w.

179. Da wäre freylich die Frage, ob von jedem Silber der erforderliche Vorrath vorhanden wäre. Weil aber die begehrte Mischung sich auf unzählige Arten erhalten lässt, so müsste man von Anfange die vorhandenen Vorräthe wissen, und die Rechnung so einrichten, daß man

von

von den Silbern das meiste brauchte, von den das meiste vorhanden ist. Zu dieser Absicht könnte man z. E. nicht x, sondern y oder z zuerst annehmen, das Verfahren (159) anbringen u. s. w.

Was erfolgte, wenn man die Mischung dreyer Silber nach 35 u. f. berechnen wollte.

180. Darauf könnte man verfallen, weil da durch n; die beyden Grössen m, p, gegeben sind, also die Verhältnisse der drey Mischungen, aus denen die vierte entsteht.

181. Diese allgemeinen Formeln hie anzuwenden, würde man überlegen, daß jede einzelne Mischung, die hie betrachtet wird, nur zwo Materien enthält, Silber und Kupfer.

Also wäre hie, in 4; 5;

$b = m - a$; $\beta = m - \alpha$

$B = m - A$; $g = m - f$

Daher

$\beta - g = f - \alpha$; $\beta - B = A - a$

182. Das gäbe in (34)

$Q = (f - \alpha).(\alpha - A) - (\alpha - f).(A - \alpha)$

$= (f - \alpha).(\alpha - A + A - \alpha) = 0$

$N = (a - \alpha).(A - \alpha) - (\alpha - a).(\alpha - A)$

$= (a - \alpha).(A - \alpha + \alpha - A) = 0$

Auch so den Zähler für p (39)

$= (f - \alpha).(\alpha - A) - (\alpha - f).(A - \alpha)$

auch $= 0$

So käme $n = \frac{m.0}{0}$

$p = \frac{m.0}{0}$

183.

183. Man darf hieraus nicht schliessen, daß diese Grössen = 0 seyn müssten. Denn man kann leicht Ausdrückungen angeben, in denen unter gewissen Umständen $\frac{0}{0}$ als Factor vorkömmt, und von denen man sich doch leicht überzeugen kann, daß sie alsdann nicht = 0 sind, sondern einen gewissen Werth, der sich angeben läßt, haben.

184. Ein Exempel ist genug, dieses zu zeigen. $\frac{hh-xx}{k.(h-x)}$ giebt $\frac{0}{0.k}$ für $x=h$;

Weil aber überhaupt der Zähler $=(h+x).(h-x)$ so ist diese Grösse allgemein eigentlich $=\frac{h+x}{k}$; und für $h=x$ wird sie $\frac{2h}{k}$

Sie kann also für diesen Fall unzählige Werthe haben, nachdem für k andere und andere Werthe genommen werden.

185. Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ hat also nicht die Bedeutung = 0; auch in dieser Allgemeinheit überhaupt keine bestimmte Bedeutung.

186. Man setze $y=2x$; also $\frac{y}{x}=2$. Das ist folglich allemahl wahr, was auch y und x sind. Folglich, wenn sie beyde zugleich verschwinden, ist hie $\frac{0}{0}=2$

Hätte man aber statt 2 eine andre Zahl gesetzt, so wäre allemahl $\frac{0}{0}$ dieser Zahl gleich.

187. In der Analysis des Unendlichen, ist es wichtig, die jedesmalige Bedeutung dieses

Aus-

Ausdrucks zu entwickeln; Meine Anal. des Unendl. 372.

Hie bringe ich nur einen Fall, wo so was vorkömmt, bey, den Lehrling der Rechenkunst auf eine solche Seltsamkeit aufmerksam zu machen, ihn vor dem falschen Schlusse, den er sonst übereilt machen könnte, daß dieses $= 0$ sey, zu warnen, und darauf zu führen, daß dieser Ausdruck hie nur das andeutet: die Verhältnisse $n : m$; $p : m$, haben keine bestimmten Werthe, sondern unzählich viele.

Ueber den Nahmen der Alligationsregel.

188. Michael Stifel erklärt diese Regel mit folgendem Exempel, in

Arithmetica integra Authore Michaele Stifelio, cum praef. Philippi Melanthonis, Norib. 1544; Lib. I. Appendix p. 100.

189. Ein Maaß schlechten Weins gilt 6 denariolos, ein Maaß bessern 13; Man will aus beyden einen mischen, das Maaß für 8.

So setze man die numeros alligandos in eine Reihe; darnach den, ad quem fit alligatio, nehme die Differenzen zwischen ihm, und jenen, und stelle sie verwechselt, folgendergestalt

6		13 Num. alligandi
	8	Numerus ad quem fit ...
5		2 Differentiae

Dieses Verfahren heißt: alligatio.

Das Uebrige, sagt St., wird durch die Regel Detri bewerkstelligt, wie der Gesellschafts-

rechnung. Die Summe der Differenzen giebt einen gemeinschaftlichen Divisor, und die Differenzen selbst, einzeln gesetzt, werden die termini secundi oder multiplicantes u. s. w. folgendergestalt

5 5/7

7 1 facit

2 2/7

Das ist 7 Maaß Mischung bekommen 5 Maaß des schlechtern, also ein Maaß Mischung 5/7 des schlechtern, und 2/7 des theurern.

Beweis giebt St. nicht, nur die Probe, und noch ein Exempel für dreyerley Wein, zu einem vierten zu mischen.

190. Seine Vorschrift führt auf die Formel (103). Es sind nähmlich

A, a, numeri allig.

f; ad quem fit allig.

a — f; f — A differentiae

a — A aggregatum differentiarum

Wie die beyden Theile durch den gemeinschaftlichen Divisor, und die einzelnen Differenzen als Multiplicatoren, oder Zähler angegeben werden, zeigt (103).

191. Der Nahme bedeutet also; Anbinden zweyer Zahlen an eine dritte. Nachlässigkeit in Aussprache und Schreiben hat zuweilen allegatio daraus gemacht, wie auch einmahl beym St. steht.

192. Mir ist die Alligationsregel, mit Worten nach Art der Rechenmeister vorgetragen, immer

mer etwas dunkel, und die Art, wie mit den Differenzen muß verfahren werden, schwer zu merken vorgekommen. Ich schrieb solches meiner Angewohnheit an Buchstabenformeln zu, und daß ich nicht Gedult genug hatte, die wortreichen Regeln durchzudenken. Ich finde aber doch, daß es andern, auch sonst guten Mathematikern eben so gegangen ist, von denen ein Paar, wohl nicht viel Buchstabenrechnung geübt haben.

193. In der sogenannten Breslauischen Sammlungen I. Supplemente (Supplementum I. curieuser und nutzbarer Anmerkungen von Natur- und Kunstgeschichten . . . . von Joh. Kanold, Budissin 1726) findet sich 170 S. Joh. Wilh. Theodor Leichners, Phil. M. et dicasterior. Electoral. Erfurtens. advoc. Ord. in Eil entworfne Anmerkungen, über den gar schlechten, und theils ganz unrichtigen, theils aber ganz unhinlänglichen Begriff, von der Kunstreichen Regula Alligationis, den verschiedene, auch selbst berühmte Professores Matheseos in ihren Schriften geäusert.

1. Erinnerungen betreffen hauptsächlich die Verbindung mehrer als zwo Zahlen, mit der mittlern, (108 u. f.).

Da haben nach seiner Behauptung folgende, theils für Stellung der Differenzen u. d. gl. unrichtige Anweisung gegeben, theils die Mannichfaltigkeit der Antworten nicht genug entwickelt

Peter Laurenberg Institut. arithmet. p. 156.
Nottnagel Inst. mathemat. P. I. p. 319.

Aegid.

Aegid. Strauch Doctrina numeror. Aphor. 204.
Joh. Christian Sturm Math. Iuvenil. P. I. p. 96.
Erhard Weigel Comp. Logisticum p. 98.
Weidler Inst. Math. p. 55.
Peschek im Beschluß der Rechenkunst.

194. Da mir von diesen Büchern vielleicht kaum eines oder zwey fehlen, so könnte ich wohl die angezeigten Stellen nachschlagen und prüfen, das wäre aber für meine jezige Absicht ziemlich unnütz. Wem eines oder das andre davon in die Hände kömmt, der wird mit einer solchen Untersuchung sich vortheilhaft üben können.

195. Daß in jedem Exempel von 3 oder mehr numeris alligandis, unendlich viel facit, alle vollkommen richtig statt haben, behauptet L. gegen Peschek und bietet diesem darüber eine Wette von 100 Thl. an. Dieses Paradoxon sey seine eigne Erfindung, die er vor vielen Jahren gemacht, als er den wahren Grund der Alligationsregel untersucht.

196. Eine einleuchtende Probe von dem Nutzen der Buchstabenrechnung, für die solche Erfindungen, und was so verdienten Mathematikern dunkel und schwer war, Kleinigkeiten sind.

197. Andr. Tacquet S. I. Arithmeticae Theoria et Praxis (Brüssel 1683) Ar. Pract. L. 4; c. 4; erinnert für die Verbindung mehrerer als zwey Dinge zu einem mittlern, sey der Beweis nicht leicht, Manche, die davon geschrieben, schienen nicht einmahl verstanden zu haben, worauf die Schwierigkeit ankomme,

und

und was zu beweisen sey. Er giebt einen Beweis durch Buchstabenrechnung, der aber auch ziemlich weitläuftig wird, weil er so die Differenzen jedes der gegebenen Dinge und des mittlern, und was mit ihnen gemacht werden soll, ausdruckt.

Rechnungen über Salzwasser.

198. Den Gehalt der Soolen, oder Wasser, aus denen Salz gesotten wird, pflegt man durch Salzspindeln zu untersuchen, die sich nach hydrostatischen Gesetzen, (Hydrost. 69) desto weniger einsenken, je reichhaltiger die Soole an Salze ist. Beschaffenheit und Bereitung dieser Werkzeuge findet man in Schriften von Salzwerken, z. E. Joh. Wilh. Langsdorf, Ausführlicherer Abhandlung von Anlegung, Verbesserung und zweckmässiger Verwaltung der Salzwerke . . . Giessen 1781; 4. I. Abschn. 45 u. f. §.

199. Ihre Abtheilung wird so gelehrt: Man läßt in einer bekannten Quantität süssen Wasser, eine bekannte Quantität Salz sich auflösen, und bemerkt, wie tief sich die Spindel darinn senkt. Man schliesst alsdann, wenn sie sich in einer vorgegebenen Soole, eben so tief senkt, so haben darinn Wasser und Salz eben die Verhältniß, die sie in der Auflösung hatten, in welcher man jenen Versuch angestellt hatte.

200. Ganz zuverlässig ist dieses nicht, weil in natürlicher Soole noch mehrerley Materien sind, als in einer Solution reinen Salzes mit

rei-

reinem Wasser, also diese Solution mit natürlicher Soole, die eben so viel Salz enthielte, nicht einerley specifische Schwere hat; (Langsdorf a. a. O. 73 §.). Indessen sind diese Werkzeuge zu einer vorläufigen Erforschung des Gehalts immer sehr brauchbar.

201. Bey Wärme von 50 fahrenheitischen Graden erfodert 1 Theil Salz zur Auflösung 2,823 Theile Wasser (Erxleben, Chemie 112 §.) oder in einer Solution, deren Gewicht 3823 wäre, kann nicht mehr als 1000 Salz seyn. Soolen enthalten wohl nie so viel Salz.

202. Man kann also für die Zubereitung (199) etwa nur so viel Salz zum Wasser nehmen, als wahrscheinlich die stärkste Soole halten möchte. Man wird aber auch die Spindel in viel schwächere Auflösungen bringen, um sie so abzutheilen, daß sie den Gehalt unterschiedner Soolen angiebt. Das führt auf folgende Aufgabe.

203. Man hat eine Solution von gegebener Stärke, man soll daraus stärkere oder schwächere machen.

204. Ein Bruder des vorhin genannten, Hr. Carl Christian Langsdorf, der durch mehrere, besonders mathematische Schriften vortheilhaft bekannt ist, hat Beytrag zur Aufnahme der Salzwerkskunde herausgegeben, I. Probe, Frft. 1778. II. Probe, Giessen 1779. 8. In der I. Probe 10 §. ist die genannte Aufgabe aufgelöst. Ich will hie die Auflösung vortragen, die ich mir davon gemacht habe. 205.

205. Ich nenne m löthige Solution; die m Loth Salz in 100 hält, also 100 — m Loth Wasser. So sollen die übrigen Buchstaben, die ich brauche, alle Zahlen von Lothen bedeuten.

Das Wort löthig wird nicht allemahl dieser Bestimmung gemäß genommen. In vielen, zumahl ältern Schriften, wird von Lothen geredet, ohne zu melden, wie sie zu verstehen sind, z. E. Bösens Generale Haushalts-Principia von Berg- Hütten- Salz- und Forstwesen (Leipz. 1753. Fol.) 14 u. f. S. Des vormaligen Leipziger Lehrers Lehmanns Schriften, als: Sachsen kann alle arme Salzquellen mit Nutzen bauen (Leipz. 1721; 4.) u. s. w. Solchen Verfassern fiel nicht ein, daß ein Wort, welches bey ihnen zur gemeinen Sprache gehörte, jemand unverständlich seyn könnte. Wie es auf manchen Salzwerken genommen, und wie der Salzgehalt noch anders angegeben wird, erzählt Hr. Hofr. Beckmann, Technologie 26. Abschn. 342, 360 S.

Diese Erinnerung war nöthig, damit man nicht das Wort, so wie ich es mit Langsdorfen erkläre, versteht, wo es eine andere Bedeutung hat. Wenn Salz der Helden dreylöthige Soole hat, d. i. 3 Loth in 2 Pfunden, so beträgt das Salz $\frac{3}{64}$ der Soole, in 100 Soole wäre $\frac{300}{64} = 4\frac{11}{16}$ Salz, oder: die Soole wäre in meiner Bedeutung $4\frac{11}{16}$ löthig.

206. Man hat A Loth m löthige, und B Loth n löthige.

Die geben zusammen ein Gewicht $= A + B$,

das

das hält $\frac{m+n}{100}$ Loth Salz.

Also in einem Lothe Solution ist $\frac{Am+Bn}{100(A+B)}$ Loth Salz, oder die Mischung ist $\frac{Am+Bn}{A+B}$ löthig.

207. Sie sey r löthig. So hat man

$$Am+Bn=Ar+Br$$

wo sich von den fünf Grössen vier nach Gefallen annehmen lassen, nur innerhalb solcher Gränzen, daß nichts der Natur der Sache widriges daraus folgt.

208. So muß r zwischen m und n fallen, weil A. (m—r) + B. (n—r) = o und also m—r; n—r; eines bejaht, das andre verneint seyn muß, da alle einzelne Buchstaben bejahte Grössen bedeuten.

209. Ist B süsses Wasser, also n = o so kömmt A. m = Ar + Br.

210. Will man m löthige Solution, durch Zugiessen süsses Wassers, r löthig machen (208) so ist $\frac{A.(m-r)}{r}=B$

211. So hätte man also nun ein Gewicht $A+B=A+\frac{Am}{r}-A=\frac{Am}{r}$; r löthige Solution.

212. Gesetzt, man wollte zu dieser C Wasser giessen, um s löthige daraus zu machen.

213.

213. So ist 207

A	B	m	r
$\frac{Am}{r}$	C	r	f

also $\frac{Am}{r} \cdot \frac{r-f}{f} = C$

Und das Gewicht ist das (211) + C also $= \frac{Am}{f}$

214. Wenn also aus der Anfangs gegebenen m löthigen Solution, durch Zuguß irgend einer Menge Wasser, r löthige geworden ist (210) und man will aus dieser r — 1 löthige machen, so giesst man zu ihr $\frac{A.m}{r.(r-1)}$ Wasser, = C und hat nun das Gewicht $\frac{Am}{r-1}$ Solution.

215. Man habe Anfangs 24löthige Solution, A = 100; m = 24. Daraus will man nach und nach durch Zugiessen von Wasser Solutionen machen, die 23; 22; ... 1 löthig seyn sollen, also sind r, f, alle ganze Zahlen, wie sie von der grössten 23 an abnehmen.

216. So 23 = r Solution zu machen,

$B = \frac{100.1}{23}$; (210)

Und aus dieser 22löthige zu machen, giesst man zu ihr (214) $C = \frac{100.24}{23.22}$

217. Aus der 24löthigen, 10löthige = r zu

machen, $B = \frac{100.14}{10} = 4$ Pf. 22 Loth

Und aus dieser 9löthige

$C = \frac{100.24}{10.9} = 26\frac{2}{3}$ Loth

218. Unmittelbar aus der 24löthigen 9löthige $= r$ zu machen, fände sich $B = \frac{100.15}{9}$

219. Wo $100.(\frac{15}{9} - \frac{14}{10}) = \frac{100.24}{100}$ = dem C (27) wie gehörig, weil B in (28) das B in (27) um das dasige C übertrifft.

220. Für $r = 2$löthig, ist $B = \frac{100.22}{2}$ = 24 Pf. 12 Loth; und daraus 1löthige zu machen, $C = \frac{100.24}{2.1} = 37$ Pf. 16 Loth.

221. Also aus der 24löthigen Solution, (215) 1löthige zu machen, hätte man zu ihr 24 Pf. 12 Lth + 37 Pf. 16 Lth = 71 Pf. 28 Lth Wasser giessen müssen, das sind 2300 Loth, machen mit den anfänglichen 100 Loth Solution das Gewicht 2400 darinn 24 Loth Salz sind.

222. L. a. a. O. hat eine Tafel, welche durch alle 24 Lothe, C (214) angiebt.

223. Wollte man die Auflösung von jeder Löthigkeit besonders machen, also 1) 76 Loth Wasser 24 Loth Salz; 2) 77 W. 23 S. 3) 78. W. 22 S; u. s. w. So brauchte man an

Salze

Salze $1+2+3 \ldots +24=25.\ 12=300$ Lth; Da man nun bey dem erklärten Verfahren nur 24 Loth braucht, so erspart man dadurch 276 Lth = 8 Pf. 20 Lth Salz.

L. hat einen kleinen Rechnungsfehler, er setzt die Summe der arithmetischen Reihe 9 Pf. 22 Loth, welches 310 Loth gäbe, und rechnet so die Ersparung 10 Loth mehr, als sie ist.

224. Eine gewöhnliche Einwendung gegen Rechnungen, die über die Regel de Quinque in Zahlen hinausgehn, ist: Solche Dinge sind nicht de pane lucrando!

Wenigstens zeigt dieses Beyspiel, daß sie de Sale lucrando seyn können.

225. Wie viel ähnliches diese Rechnung mit der Alligationsrechnung (100) hat, brauche ich wohl nicht zu sagen.

226. Durch Mischung von zwo Auflösungen, macht man eine stärkere, als die schwächste von beyden ist, eben wie durch Mischung von zwey Silbern, ein besseres als das schlechteste.

227. Salz selbst könnte man als eine 100löthige Auflösung ansehn. Setzte man also in (206) $n=100$, so machte man nach 207; aus m löthiger Auflösung r löthige, wenn man zu ihr $B=\frac{A.(r-m)}{100-r}$ Salz setzte.

228. Gesetzt, man wollte aus zwölflöthiger Auflösung $m=12$; funfzehnlöthige $r=15$ machen. So thäte man zur ersten $B=\frac{A.3}{85}$ Salz.

Da betrüge das nunmehrige Gewicht der Auflösung A. $\frac{88}{85}$.

Und das Gewicht des Salzes in ihr $=$ A. $(\frac{12}{100} + \frac{3}{85})$; die beyden Brüche sind $= \frac{12.85 + 300}{100.85}$ davon der Zähler

$= 1320 = 15.88$.

Also ist das Gewicht des Salzes, mit dem Gewicht der Auflösung dividirt $= \frac{15.88}{100.85} \cdot \frac{85}{88}$

$= \frac{15}{100}$ oder sie ist 15löthig.

229. Aus der m löthigen Solution (206) stärkere zu machen, ohne das Gewicht zu ändern; nehme man von ihr das Gewicht D weg, und setze eben so viel Salz hinzu. So hat sie nun das Gewicht A — D + D also noch das vorige.

In diesem Gewichte aber sind $\frac{(A-D).m}{100}$ + D Loth Salz, also in 100 Lothen von ihr $\frac{(A-D).m + 100.D}{A}$ Loth Salz, oder so viel löthig ist sie.

230. Soll sie r löthig seyn, so ist das nur gefundne $=$ r gesetzt,

$$D = \frac{A.(r-m)}{100-m} = \frac{B.(100-r)}{100-m} \quad (227)$$

231. Weil 100 — m grösser ist als 100 — r (229) so ist D kleiner als B in 227; und man er-

erspart an Salze hie $D-B=B.\frac{(r-m)}{100-m}$

$=\frac{A(r-m)^2}{(100-r).(100-m)}$

232. So, für (228) ist $D=\frac{A.3}{88}$ und

$D-B=\frac{A.9}{88.85}$.

233. Aus der r löthigen Auflösung (230) will man so r+1 löthige machen, daß man das Gewicht E von ihr wegnimmt, und wieder um durch Salz ersetzt. So ist

230	r	m	D
hie	r+1	r	E

Also $E=A.\frac{1}{100-r}$

234. Man setze das beständige Gewicht der Auflösung $=100$; also $E=1+\frac{r}{100-r}$

235. Wenn man da r durch alle Werthe von 0 bis 24 gehen lässt, so geht E durch 24 Werthe, deren jeder anzeigt, wie viel Salz man zu einer Auflösung von gewisser Löthigkeit thun muß, eine zu machen, die Eins mehr an Löthigkeit hat. Die Werthe von E — 1 sind alsdann

$0; \frac{1}{99}; \frac{2}{98}; \frac{3}{97} \ldots . \frac{22}{78}; \frac{23}{77};$

wo man von den Brüchen, mehrere Decimalstellen, leicht durch die Logarithmen findet, wenn man nicht mit den Zahlen selbst rechnen will.

236. Es ist $\frac{1}{99} = 0{,}010101 \ldots$.
$\log \frac{1}{49} = 0{,}3098038 - 2$
$\log \frac{3}{97} = 0{,}4903496 - 2$ u. s. w.

237. So liesse sich eine Tafel machen, deren Anfang ich darstelle. Die Columne unter r, enthält Löthigkeiten, die unter E, wie viel Salz man bey jeder r löthigen Solution haben muß, sie in die nächste r + 1 löthige zu verwandeln, die unter S, die Summe des verbrauchten Salzes, wie viel man nähmlich verbraucht hat, erst 1 löthige, daraus 2 löthige, daraus 3 löthige zu machen u. s. f.

r	E	S
0	1	1
1	1,010101	2,010101
2	1,020408	3,030509
3	1,030927	4,061436
24	1,29870	

238. Der Gebrauch der Columne S wäre, zu finden, wie viel Salz verbraucht wäre, Auflösungen durch alle 24 Stufen der Löthigkeit zu erhalten, dazu müsste man die Mühe übernommen haben, E durch alle 24 Werthe von r zu berechnen.

239. Gränzen, zwischen welche das verbrauchte Salz fällt, lassen sich ohne völlige Berechnung der Columne E so angeben. Es ist

mehr als $24 + \frac{23}{99} = 24{,}232323$

weniger als $24 + \frac{23 \cdot 23}{77} = 30{,}8701$

240.

240. Hr. L. giebt im 16§. seines Beytrags eine Tafel wie die (237) durch alle 24 Werthe, aber was ich E und S nenne, nur bis auf Hunderttheile eines Lothes, wie ohnstreitig für die Ausübung scharf genug ist. So ist neben r = 24; sein E = 1,30; und die Summe aller E findet er 27,20, also beynahe das arithmetische Mittel zwischen den beyden Gränzen (239).

241. Dieses Verfahren brauchte also etwas mehr Salz als das 21§.

Verstärkung der Solution durch Ausdünsten.

242. Gesetzt, es sind in P Lothen Solution, t Loth Salz; so wären in 100 Lothen dieser Auflösung $\frac{100.\,t}{P} = m$ Loth Salz; dieser Quotient druckte also die Löthigkeit der Solution aus.

243. Durch Ausdünstung geht nur Wasser weg, kein Salz; Und so sey von voriger Auflösung das Gewicht p durch Ausdünstung weggegangen. Jezo ist eben das vorige Gewicht Salz, im Gewichte P — p Auflösung enthalten, die nun $\frac{100.\,t}{P-p} = \frac{m.\,P}{P-p}$ löthig ist.

244. Wären in 100 = P Lothen, 4 = t Loth Salz, und giengen p = 10 Loth durch Ausdünstung weg;

So wäre die Auflösung anfangs 4 löthig, und würde $\frac{400}{90} = 4\frac{4}{9}$ löthig.

Vergleichung mit dem Raume.

245. Jedes Gewicht Wasser nimmt mehr Raum ein, als das gleiche Gewicht Auflösung, weil Auflösung dichter ist als reines Wasser, oder, welches eben so viel sagen will; weil ein gegebener Raum, z. E. ein Cubiczoll Auflösung mehr wiegt, als eben dergleichen Cubiczoll Wasser.

246. Aber wie sich die Räume nach der Stärke der Auflösung ändern, lässt sich durch bloße Rechnung nicht bestimmen. Wenn 99 Loth Wasser einen gewissen Raum einnehmen, und 1 Loth Salz einen andern, so nimmt eine Auflösung dieses Salzes, in jenem Wasser, ein-löthige Auflösung gar nicht den Raum ein, dem die Summe jener beyden Räume gleich ist, denn das Salz geht in die Zwischenräume des Wassers, und der Raum der Auflösung ist also viel kleiner als erwähnte Summe. Eine Kanne Salzwasser, und eine Kanne süsses, zusammengegossen, füllen nicht zwo Kannen aus.

247. Man setze, die Auflösung (242) nehme F Cubikzoll ein, nachdem von ihr p abgedunstet ist, (243) nehme das übrige F — f Cubikzoll ein.

248. Wäre von der Auflösung, ein Gewicht = p abgeschöpft worden, so wäre das ein Theil Auflösung gewesen, wie die ganze, und der Raum, den es eingenommen hätte = $\frac{F.\ p}{P}$ kleiner als f (247) der Raum, den das gleiche Gewicht, abgedunstetes Wasser verlassen hat (245).

249.

249. Also ist F — f, der Raum der stärkern Auflösung, kleiner als $F - \frac{F.p}{P}$ oder als $F.\frac{P-p}{P}$

250. Die Stärke der Auflösungen, die erste und die zweyte, verhalten sich wie P — p : P (242; 243).

Die stärkere Auflösung nimmt nun freylich einen kleinern Raum ein;

Aber man würde sich irren, wenn man sagen wollte, dieser Raum sey in der Verhältniß kleiner, in der sie stärker ist, oder: Er verhalte sich verkehrt wie die Stärke der Auflösung.

Da wäre er $F.\frac{P-p}{P}$

Er ist aber kleiner; (249).

251. Im Exempel (244) wäre $\frac{1}{10}F$ das, warum sich der Raum der Auflösung verminderte, wenn man von ihr 10 Loth abschöpfte; aber die 10 Loth Wasser, die ausgedünstet sind, haben einen grössern Raum leer gelassen, als 10 Loth Auflösung einnehmen, also ist f grösser als $\frac{1}{10}F$;

Die Stärken der Auflösungen verhalten sich $= 4 : \frac{40}{9} = 9 : 10$

Die Räume $= F : F - f$; Und da ist nicht $F - f : F = 9 : 10$ sondern $F - f$ kleiner als $\frac{2}{10}F$.

Wenn dreylöthige Auflösung, ein Prisma zwölf Zoll tief anfüllt, und durch Ausdünstung

zwölflöthig, viermahl stärker werden soll, so muß sie alsdann nicht den vierten Theil des ersten Raums, drey Zoll einnehmen, sondern einen geringern. Denn sind nur $\frac{3}{4}$ ihres Raumes, 9 Zoll, durch Ausdünstung fortgegangen, so sind das 9 Zoll Wasser. Dessen Gewicht beträgt weniger als $\frac{3}{4}$ des Gewichts von 12 Zoll Auflösung. In den übrigen drey Zoll also ist noch Auflösung, deren Gewicht mehr als $\frac{1}{4}$ des anfänglichen beträgt, und doch hält sie nicht mehr Salz, als in der Auflösung, die 12 Zoll füllte, enthalten war. Das Gewicht dieses Salzes ist also in der Auflösung, die 3 Zoll ausfüllt, nicht viermahl so viel enthalten als in der anfänglichen, sondern mehr als viermahl, und so ist die letzte Auflösung nicht viermahl so stark als die erste.

Langsdorf a. a. O. 18. §.

Ueber eigne Schwere von Salze und Soole.

252. Lambert hat in den Memoires de l'Ac. des Sc. et de Belles lettres de Prusse 1762. Untersuchungen dieser Art geliefert. Man findet sie Deutsch übersetzt, bey Georg Friedrich Brander Beschreibung einer neuen hydrostatischen Wage, nebst zweyen dazu gehörigen Abhandlungen. Augsp. 1771.

253. L. geht da von dem Satze aus §. 25 eigne Schweren von Salz und Wasser verhalten sich wie 1:2,148

254.

254. In Lamberts deutschem Briefwechsel II. Band (Berl. 1782) 280 S. findet sich ein Brief von Hrn. Glenk, Bauinspector zu Berlin, an L. vom 27. Jan. 1774; darinn Gl. folgendes fragt.

1) Was der rheinl. Cubikfuß Salz wiegt.

2) Bis auf welchen Grad sich solches in kaltem Wasser auflösen lasse?

L. Antworten sind:

ad 1) Gepreßt 55 bis 65 Pfund, ungepreßt $\frac{1}{3}$ weniger.

ad 2) Im Sommer in 1205 Pf. Soole; 337 Pf. Salz.

255. L. giebt nicht an, was er für Pfunde versteht. Doch wohl Berliner, wie er in der Abhandlung (252) ausdrücklich Berliner Gewicht nennt. Das Berliner Pfund verhält sich zum Leipziger oder Cölnischen = 7697:7680 nach v. Clausberg Rechenk. 1142 §. und Hrn. Franz Christian Lorenz Karsten Rechenk. 142 §. Das Gewicht eines rheinländischen Cubikfuß Wasser meldet L. nicht, also kann man seinen Brief mit der Abhandlung nicht vergleichen.

256. Nach seiner Antwort auf die zweyte Frage, werden im Sommer 337 Salz in 868 Wasser aufgelöst.

Aus $\log \frac{1205}{337} = 0{,}5533571$

$\log \frac{337}{1205} = 0{,}4466428 - 1$

$\log \frac{868}{337} = 0{,}4108898$

folgt

folgt Soole = Salz. 3,5756
Salz = Soole. 0,2795
Wasser= Salz. 2,575
Salz = Wass. 0,4561

257. Erxleben erfodert etwas mehr Wasser zur Auflösung eines Theiles Salz (201). Nähmlich seine 50 fahrenheitische Grad sind geringere Wärme als was L. Sommerwärme nennen wird. Die Wärme im tiefen Keller der Pariser Sternwarte, die das ganze Jahr ungeändert angegeben wird, beträgt 52.4 Fahrenheitische Grad, nach Heinsius von Erxleben auf Fahrenheitische Grade gebrachtem Verzeichnisse. Erxleben Naturlehre XIII. Abschnitt 761 §. der 3. Ausgabe. Bey geringerer Wärme wird natürlich mehr Wasser zur Auflösung erfodert.

258. Musschenbrök Introd. in phil. nat. §. 1417. pag. 335. (Leid. 1762) giebt folgende eigne Schweren an:

Sal Gemmae = 2,143
Marinum = 2,125
Mar. depuratum = 1,9183
enixum = 2,148
Guajaci = 2,148

Die beyden letzten gleichen Schweren, die doch wohl keinem Küchensalze gehören, stimmen genau mit L. Angabe (253) überein, was aber L. Salze doch am ähnlichsten seyn müsste, gereinigtes Meersalz, weicht am meisten ab, Steinsalz, davon sich wohl ein fester Klumpen ausrechnen, wie-

wiegen, und so die eigne Schwere finden liesse, kömmt L. Angabe näher.

Sal enixum war mir nicht bekannt. Herr Hofr. Gmelin belehrt mich, es sey sonst ein gleichgültiger Nahme für Sal medium gewesen, kein Sal enixum im eingeschränktern Verstande aber kenne er nicht, und wisse also nicht, was M. darunter verstanden haben mag.

Man wird aus Beygebrachtem urtheilen, wie weit Lamberts Angabe zuverlässig ist.

259. Aus den bekannten eignen Schweren von Salz und Wasser, berechnete man die eigne Schwere einer Auflösung von gegebener Stärke nach Archimeds Regel (Hydrost. 52) wenn die Voraussetzung dieser Regel statt fände (das. 54), welches aber nicht ist (246). Also bleibt nur übrig, Auflösungen von gegebener Stärke zu machen, und jeder eigne Schwere durch die Erfahrung zu erforschen.

260. Das hat L. in mehrerwähnter Abhandlung unternommen. Er fängt damit in seinem 8 §. an, daß er Wasser, so viel ein gewisses Gefäß anfüllt, wiegt, daraus nach (253) berechnet, wie viel der gleiche Raum voll Salz wiegen würde . . . welches er gleiche Masse Salz nennt, nun eben das Gefäß nach einander, mit fünferley Sorten anfüllt, und die Gewichte angiebt, die natürlich alle kleiner ausfallen, weil die Salzkörnchen Zwischenräumchen lassen.

261. Sein Gefäßchen war ein Cylinder 22 Pariser Linien hoch, 16 Durchmesser. Also

2,559 Pariser Cubikzoll Inhalt. Auch hält es nur 856 Berliner Gran Wasser.

262. Die Auflösungen machte er in einer Phiole, die 1128,3 Gran süsses Wasser hielt.

Nun richtete er seine Versuche darauf ein: wie viel mehr als die genannte Zahl von Granen, Solutionen von unterschiedner Stärke wogen, die eben die Phiole füllten.

Folgende Zeilen stellen seine Versuche dar:

Salz Gran	0	100	200	300	380
Ueberschuß	0	67	131	188	231

Die letzte Auflösung war die stärkste, die sich machen ließ, bey 15 Reaumurischen Graden, das sind 65¾ Fahrenheitische, wenn man zwischen Eyßpunct und siedendes Wasser 80 Reaum. Grad setzt, und nach solchen Vorschriften rechnet, wie ich bey meinen Anfangsgr. der angew. Mathem. in der III. Zugabe bey der I. Abtheil. gegeben habe.

Diese Wärme ist grösser als die (201). Auch die Solution ist beträchtlich stärker. Denn nach der Verhältniß 1000:3823; müsste eine Solution, in welcher 380 Gran Salz wären, 1452,74 Gran wiegen, also 1172,74 Gran Wasser halten. Die Lambertische aber hält nur 1128,3 + 231 − 380 = 979,3 Gran Wasser. Also weniger Wasser gegen eben so viel Salz.

Gewöhnliche gelinde Sommerwärme wird 68 Fahrenheitische Grad gesetzt (angef. Zug. 9) beyde Wärmen, hie u. (201) sind also geringer.

263.

263. Wenn eine Solution, welche die Phiole anfüllt, x Salz enthält, und das Gewicht 1128,3 + y hat, so sucht L. aus den angeführten Erfahrungen eine allgemeine Vergleichung zwischen x und y durch Kunstgriffe, die man Interpoliren nennt, aus gegebenen Gliedern einer Reihe ihr Gesetz, und so andre Glieder als die gegebenen zu finden.

Die Erfahrungen, geben fünf zusammengehörige Paare x und y: z. E. zu x = 380 gehört y = 231.

264. Die Vergleichung zwischen x und y muß ohne Zweifel so beschaffen seyn, daß beyde zusammen verschwinden, wenn statt einer Solution reines Wasser da ist, auch wachsen, weil stärkere Solution mehr wiegt.

265. Das veranlasst L. folgendes anzunehmen

$$y = a.x + b.x^2 + c.x^3 + d.x^4 \ldots$$

wo die ersten Buchstaben des Alphabets unbekannte Coefficienten sind, die nach und nach aus den Erfahrungen müssten bestimmt werden.

266. Z. E. x = 100; y = 67; giebt

$$67 = a.100 + b.10000 + c.1000000 + d.100000000$$

wenn man nicht mehr als vier Coefficienten annehmen will.

Da wäre also

$$d = \frac{67}{100000000} - \frac{a}{1000000} - \frac{b}{10000} - \frac{c}{100}$$

Hie

Hie ist schon klar, daß d sehr klein seyn muß, wenn nicht a, b, c, ungeheuer groß wären.

267. Braucht man nun diesen Werth von d in einer Gleichung, welche sich giebt, wenn man in die 265; $y = 131$, $x = 200$ setzt, so bekömmt man eine Gleichung, in der nur a, b, c, und gegebene Zahlen sind, also läßt sich auch so c durch a, b, ausdrucken.

268. Und so aus (266) d durch a, b.

269. Setzt man also in 265; $x = 300$; $y = 188$ so hat man (267; 268) eine Gleichung, in der lauter Zahlen, nur a, b, Buchstaben sind.

270. Daraus findet man b durch a;

271. Und c, d, allein durch Zahlen und a (267; 268)

272. Endlich in (265) $x = 231$; $y = 380$ gesetzt, hat man eine Gleichung, in der nur der Buchstaben a ist. Den man also daraus berechnet.

273. Weil x nicht gröſſer wird als 231; (262) so kann man beurtheilen, ob etwa c, d, so kleine Brüche werden, daß sie auch mit der dritten und vierten Potenz dieses gröſsten x multiplicirt, gegen $ax + bx^2$ etwas wenig Beträchtliches geben. Alsdann kann man diese Glieder und folgende der Reihe c, wenn man etwa ex^5 u. s. w. angenommen hätte, weglassen, und nur $y = ax + bx^2$ setzen.

274. Freylich lieſſen sich e und mehrere Coefficienten, die man etwa angenommen hätte, nicht

nicht einmahl bestimmen, wenn nicht mehr zusammengehörige Paare von x und y durch mehr Erfahrungen gegeben wären. Auch ist es nicht ganz sicher, ob nicht mehr Erfahrungen, alsdann Werthe von c, d, geben möchten, die nicht so gar klein wären. Solche Bedenklichkeiten werden bey diesem Verfahren bey seite gesetzt.

275. L. findet nun, daß er (273) annehmen darf, und die Werthe von a und b so daß

$$y = 0{,}6963 \cdot x - \frac{x\,x}{4298}$$

Diese Formel kann man so prüfen, daß man statt x einen der Werthe (261) setzt, da dann das zugehörige y wenigstens ziemlich nahe herauskömmt.

276. Um die unbequeme Zahl 1128,3 wegzuschaffen, verwandelt L. die gefundne Formel in eine, bey welcher die Auflösung so viel Raum einnähme, als 1000 Gran süssen Wassers. Er trägt blos die Vorschrift zu dieser Verwandlung kurz und undeutlich vor, ich denke, es ist der Mühe werth, sie zu entwickeln.

277. Wenn in einem Raume, den 1128,3 Gran Wasser ausfüllen, der Solution Gewicht $1128{,}3 + y$ ist, findet sich in ihr x Salz am Gewichte.

Man setze von eben der Solution, so viel genommen, als einen Raum ausfüllt, in den 1000 Gran Wasser gingen, wiege $1000 + w$ und enthalte u Salz.

So ist

$1128{,}3 : 1000 = 1128{,}3 + y : 1000 + w$

$y : x = w : u$

Die erste Proportion giebt

$1128{,}3 \cdot 1000 = 1128{,}3 \cdot 1000$

$+ 1128{,}3 \cdot w + 1000 \cdot y$

Daher $y = 1{,}1283 \cdot w$

Aus der zweyten ist $x = \frac{uy}{w}$

278. Also in (275)

$$y = \frac{0{,}6963 \cdot uy}{w} - \frac{uuyy}{4298 \cdot w \cdot w}$$

Mit y überall dividirt, und mit ww multiplicirt

$$ww = 0{,}6963 \cdot u \cdot w - \frac{u \cdot u \cdot y}{4298}$$

Hie statt y seinen Werth aus der ersten Proportion gesetzt, und alles mit w dividirt

$$w = 0{,}6963 \cdot u - \frac{1{,}1283 \cdot u \cdot u}{4298}$$

279. Diese Gleichung wird aus der (275) wenn man dorten das letzte Glied mit 1,1283 multiplicirt, und y, x, nun w, u, bedeuten läßt.

Die Formel von 1128,3 auf 1000 zu bringen, sagt L., dürfe man nur xx : 4298 mit 1,1283 multipliciren. Wie dadurch die Absicht erreicht wird, erläutert er nicht, verschweigt so gar, daß y, x, andre Bedeutungen bekommen. Seine Abhandlung war doch nicht blos Analysten bestimmt, die sich so was selbst aus einander

ander seßen, und doch auch es willig annehmen, wenn man ihnen die Zeit erspart, sich erst einen dunkeln Ausdruck zu erklären. Wer aber dergleichen Aufsaß nur liest, Anwendungen für die Ausübung zu machen, dem könnten wohl nicht alle solche Kunstgriffe sogleich gegenwärtig seyn.

280. Den Bruch $\frac{1,1283}{4298}$ verwandelt L. in $\frac{1}{3810}$

Ich finde des ersten Bruches Logarithmen $=0,4191582-4$; also ihn $=0,00026251$; von L. verwandelten, den Logarithmen $=0,4190740-4$, ihn selbst $=0,00026246$.

281. Seßt man nun $z=1000+w$ so hat man $z=1000+0,6963.u-\frac{1}{3810}.u.u$

Darnach hat L. eine Tafel berechnet, wo u durch alle Zehnfache, 10; 20; . . . 330 geht, noch zuleßt $=336,8$ geseßt ist, und jedem das zugehörige z, in Ganzen. Nur daß er x schreibt, wo ich u schreibe.

Wollte ich dergleichen Tafel berechnen, so würde ich mich wenigstens für das leßte Glied, des Logarithmen (280) bedienen. L. besaß so viel Fertigkeit und Arbeitsamkeit, daß er solche kleine Erleichterungen nicht achtete.

282. Der Gebrauch von L. Tafel besteht darinn: Wenn man einer Solution specifische Schwere weiß, daraus ihren Salzgehalt zu finden, oder umgekehrt aus dem Salzgehalte die specifische Schwere. Allemahl ver-

steht sich, daß die specifischen Schweren des Wassers seine = 1000 setzen.

Gesetzt, sagt L., ein Cubikfuß süsses Wasser wiegt 63 Pf. ein Cubikfuß Soole = 74; So muß man suchen, wie viel der letzte wiegt, wenn des ersten Gewicht = 1000 gesetzt würde; Also $\frac{74000}{63} = 1175$; Diese Zahl in der Tafel unter z gesucht, hat neben sich x = 280; Das ist dieser Soole Gewicht, verhält sich zum Gewichte des Salzgehaltes in ihr = 1175 : 280;

Oder auch: Das Gewicht Wasser, das mit dieser Soole gleichen Raum einnimmt, verhält sich zum Gewichte des Salzes in ihr = 1000 : 280.

Die letzte Verhältniß wäre hie bequemer; Sie gäbe 1000 : 280 = 63 : 17,64 für die Menge von Pfunden Salz in dieser Soole.

Mehr Anwendungen, die L. von seiner Tafel macht, kann man bey ihm selbst nachlesen.

283. Watson Phil. Transf. Vol. 60. p. 323. hat Versuche, wie Lamberts seine, wiederhohlt, und aus dem Erfolge, den er gefunden, eine andre Tafel berechnet, die freylich manchmahl von Lamberts seiner abweicht. Für die eigne Schwere der Soole 1,007 giebt W. $\frac{1}{84}$ vom Gewichte der Soole für Salz an, L. $\frac{10}{1007}$ oder etwa $\frac{1}{100}$; Für 1014 hat W $\frac{1}{48}$; L. $\frac{20}{1014}$ welches etwa $\frac{1}{50}$ ist. Beyde Tafeln findet man in Hrn. Hofr. Beckmanns Technologie 26. Abschn. Meine Absicht ist hie nur gewesen, das Verfahren zu Berechnung derselben zu erläutern. Ihre Zuverlässigkeit beruht alsdann

dann auf der Richtigkeit der Versuche, da ich dann freylich glaube, daß L. seine, etwas zu sehr im Kleinen, auch ihrer zu wenig sind. Er glaubte vielleicht diesen Mangel durch seine Scharfsinnigkeit ersetzen zu können. Ist das eine Einwendung gegen sie, daß natürliche Soolen noch mehrerley Materien enthalten, als Auflösungen von Salz im Wasser, so wird man auch dergleichen Auflösungen nicht brauchen können, Salzspindeln abzutheilen. Freylich aber wäre es lehrreich, die eignen Schweren natürlicher Soolen zu untersuchen und mit ihrem Salzgehalte zu vergleichen.

184. Zu dem (254) angeführten liesse sich noch folgendes setzen, das ich aus dem London Chronicle vom 14 . . 16 April 1768 genommen habe.

In England soll das Salz nicht anders verkauft werden als 56 Pf. auf den Bushel gerechnet, nach einer Acte vom 9 und 10 J. Wilhelms III. Cap. 3. Sect. 1. 2.

Das giebt 14 Unzen die Pinte. Wer es anders verkauft, giebt dem Informer, 5 Pf. Sterling Strafe.

Also soll der Peck (= $\frac{1}{4}$ Bushel) 14 Pfund wiegen.

Es giebt aber auch Salz, da der Peck nicht über 10 bis 11 Pf. wiegt.

Im Lond. Chron. wird erinnert, daß Personen straffällig werden, weil diese Parlamentsacten fast unbekannt sind.

Nehme ich aus Patoun Treatise of Navigation (Lond. 1730.) den Bushel Malz (der zu Kohlen ist kleiner) = 2150,4 Cubikzoll, so wiegt ein Engl. Cubikfuß Salz = $\frac{1728.56}{2150,4}$ Pfund

log 1728 = 3,2375437
log 56 = 1,7481880
4,9857317
log 2150,4 = 3,3325191
1,6532125

Gehört genau zu 45.

Wer Lust hat, sich im Rechnen zu üben, kann die Verhältnisse zwischen den Englischen und Berliner Pfunden, dem Englischen und rheinländischen Fusse aufsuchen und diese Angabe mit L. seiner vergleichen.

XII. Capitel.

Rechnungen zum Münzwesen.

1. Unterschiedenes, das diesen Gegenstand betrifft, musste schon im Vorhergehenden, unter den Exempeln nützlicher Anwendungen vorkommen. Als: bey der Kettenregel (V. Cap. 3. Abschn. 2.) Vermischungsrechnungen, im vorigen Capitel; die Alligationsregel wird von Allen,

Allen, die Münzrechnung lehren, vorausgesetzt. Was ich hie beybringen will, ist dem Münzwesen mehr eigen, und erfodert mehr vorläufige Nachrichten dazu, als daß es sich bequem, blos Exempelsweise im Vorigen hätte beybringen lassen.

Von den Gewichten.

2. Beym Silber wird die Mark = 16 Loth in 288 Grän getheilt, das Loth also = 18 Grän; Quentchen = 4,5 Grän. Man theilt auch noch das Quentchen in 4 Pfenniggewichte, das Pfenniggewicht in 2 Heller.

3. Beym Golde ist die Mk = 24 Karath, jedes = 12 Grän.

4. Die Probirer nennen Richtpfennig eine Eintheilung der Mark in 65536 Theile, welches der 2 sechszehnte Potenz ist. Da ein solcher Theil sehr klein ist, so lassen sich durch Mengen ganzer Theile, also Potenzen der 2, allerley Gewichte sehr genau angeben. So ist 1 Loth = 4096 = der zwölften Potenz der 2; 1 Quentchen = 1024 = der zehnten Potenz u. s. w.

5. Indessen lassen sich doch nicht durch ganze Theile des Richtpfennigs solche Eintheilungen der Gewichte angeben, die nicht aus Division der Mark durch eine Potenz der 2 entstehn. So wäre 1 Karat (3) = 2730$\frac{2}{3}$ Theile des Richtpfennigs.

6. Wie man die Theile des Richtpfennigs braucht, Gewichte dadurch auszudrucken, lehrt

mit mehr Beyspielen Schlüter, im Probierbuche VI. Cap. (Unterricht von Hüttenwerken . . . nebst einem Probierbuch . . . von Christoph Andreas Schlüter, Brschw. 1738. Fol.)

Er erinnert daselbst, daß man, das Karathgewicht klein zu haben, zum Probiren 256 Theile des Richtpfennigs für 24 Karath annehme.

Da $256 = 2^8$; so wird alsdann 1 Karath oder $\frac{1}{24}$ der Mk $= \frac{2^5}{3} = 10\frac{2}{3}$ Theile des Richtpfennigs.

7. Setzt man einen Theil des Richtpfennigs $= e$; für die Mark $= 1$; so ist $0 - \log 65536 = \log e = 0,1835200 - 5$

Das giebt $e = 0,000015158$ Mk

Vermittelst dieses Logarithmen, kann man leicht jedes Gewicht, dessen Verhältniß zur Mark man weiß, in Theilen des Richtpfennigs ausdrucken, und umgekehrt jede Menge von Theilen des Richtpfennigs in Theile der Mark verwandeln.

8. Gewichte mehrerer Länder, und deren Eintheilungen muß man aus bekannten Büchern lernen; z. E. Crusens Hamburg. Contoristen. Schlüter hat a. a. O. auch einiges angegeben, und Hr. Hofr. Beckmann, Technologie 32. Abschn. auch brauchbare Nachrichten gesammlet. v. Clausb. Rechenk. 1142 §. 1102 S. hat sorgfältig mit dem Leipziger Gewichte, sehr viel andere, die der Leipziger Rath angeschafft, verg-

gli-

glichen, und giebt sie in Pfunden, Lothen, Quentchen, Pfenniggewichten und Gränen an; Das Quentchen hat 4 Pfenniggewichte und 4. 15 = 60 Grän.

Diese zum Vergleichen etwas unbequeme Ausdrückungen, finden sich, alle auf Grän gebracht, in Hrn. Franz Christian Lorenz Karsten, Rechenkunst, Bützo und Wismar 1775; 202 S.

9. Gold- und Silbergewichte zu Amsterdam. Aus Crusen Contoristen, Ausg. 1782; 44 S.

I. Mk Troys = 8 Unzen = 160 Engels = 5120 Aasen wiegt 68985 Richtpfennigstheile, also $\frac{68985}{655360}$ der Cöln. Mk.

II. Die Cölnische Mk hält 4352 Cölnische Eschen; Cr. Cöln; 127 S.

Also 1 Eschen = $\frac{1}{4352}$ der Cöln. Mk = $\frac{655360}{4352}$ Richtpfennigstheile.

III. Es ist $2^{12} = 4096$ also $4352 = 4096 + 256 = 2^{12} + 2^8 = 2^8 . (2^4 + 1) = 256 . 17$

IV. Also (III)

$$1 \text{ Eschen} = \frac{2^{16}}{2^8 . 17} \text{ Richtpfennigstheile.}$$

Diese Zahl $= \frac{2^8}{17} = \frac{256}{17} = 15 + \frac{1}{17}$ oder

17 Eschen = 256 Richtpfennigstheile.

$\log \frac{256}{17} = 1,1777911$

Aasen und Engel aus (I).

V. 16 Engel = 512 Aasen
1 Engel = 32 Aasen.

Aasen und Richtpfennigstheile (I)

VI. 5120 Aasen = 68985 Richtpfth.
mit 5 dividirt
1024 Aasen = 13797 Rpfth.
Aase = $(13 + \frac{485}{1024})$ Rpfth.

VII. log 13797 = 4,1397847
log 1024 = 3,0103000

$$\log \frac{\text{Aase}}{\text{Richtpf}} = 1,1294847$$

$$\log \frac{\text{Richtpf}}{\text{Aase}} = 0,8805153 - 2$$

Aase = Richtpf. 13,473
Richtpf = Aase. 0,075947

Aase und Eschen (VI)

VIII. Aase = $\frac{13797}{1024}$ Richtpfth (6)
Eschen = $\frac{65536}{4352}$ Richtpfth (II)
= $\frac{256}{17}$ Richtpfth.

Also

Aase : Eschen = $\frac{13797}{1024} : \frac{256}{17}$
log $\frac{256}{17}$ = 1,1777911 (IV)
log $\frac{13797}{1024}$ = 1,1294847 (VII)

log (Esch : Aase) = 0,0483064

VIII^b. Aase und Quentchen.
Quentchen = 1024. $\frac{1024}{13797}$ Aasen (1 u. 9; VI)

log

log 1024 = 3,0103000
log $\frac{1024}{137\,97}$ = 0,8705153 — 2
log $\frac{Qu.}{Aa.}$ = 1,8808153
log $\frac{Aa.}{Qu.}$ = 0,1191847 — 2

Quent. = Aase. 76,000
Aase = Qu. 6,013158
Mk Troys und Cöln. Mk

IX. Aus (I) M Troys = $\frac{68985}{65536}$ Cöln. Mk
= $(1 + \frac{3449}{65536})$ Cöln. Mk

log 3449 = 3,5376932
log 65536 = 4,8164799
0,7212133 — 2
Mk Troys = 1,052627 Cöln. Mk

X. log 68985 = 4,8387547
log 65536 = 4,8164799
log (M Tr : C M) = 0,0222748
log (C M : M Tr) = 0,9777252 — 1
M Tr = 1,0526 C M.
C M = 0,95000 M Tr.

XI. Also ziemlich genau
100 C M = 95 M Troy; 20 C M = 19 M Troy
wie auch Cr. angiebt.

10. Französisch Gold- und Silbergewicht.

I) Cruse Frankreich 157 S.
Marc Troyes = 5094 Aasen = 68634 Richtpfennigstheile.

II)

II) Dieses zu vergleichen aus (9; VI)

log 5094 = 3,7070589
1,1294847

4,8365436 zu 68634 +

III) Diese Marc also kleiner als die Amsterdamer (9; I)

IV) Also ist Marc = $\frac{68634}{65536}$ Cöln Mk
= $(1 + \frac{3098}{65536})$ C M

log 3098 = 3,4910814
log 65536 = 4,8164799

0,6746015 — 2

Marc = 1,047272 C M

V) log 68634 = 4,8365393
log 65536 = 3,8164799

log (Marc : C M) = 0,0200594
log (C M : Marc) = 0,9799406 — 1
Marc = 1,0472. C M
C M = 0,95486. Marc.

Also 100 C M = 95,486 Marc
Beym Cruse 100 Mark Cöln = 95½ Franz. Mk.

VI) Marc = 8 Onces = 64 Gros od. Drachm.
= 160 Estelins = 192 Deniers
= 320 Mailles = 640 Felins
= 4608 Grains

VII) 2000 Grains = 2211 Asen, nach Er.
So ist Grain = 1,1055 Asen
4608 Grain = 5094,1440 Asen,

Stimmt mit (I) so genau als nöthig ist, überein.

VIII)

VIII) Die Feine wird so angegeben:
Gold, die Marc zu 24 Carat, jeden 32 Theile
Silber Marc = 12 Deniers zu 24 Grains
oder Marc = 288 Grains.
Das sind also andre Grains als (VI).

11. In den Silbermünzen, ist das Silber, das sie enthalten, mit Kupfer vermengt, oder legirt. In einer Mark, die so aus Silber und Kupfer besteht, hat das Silber eine gewisse Verhältniß zum Kupfer, ist z.E. 13; 12; u. s. w. Loth, oder 13löthig, 12löthig. Wie sich das Silber zum Kupfer bey jeder Münze verhalten soll, nennt man Korn. Auch so bey Goldmünzen, wie viel das feine Gold vom Gewichte der Münze beträgt. Der Nahme rührt daher, weil beym Probiren eines Metalls oder Erzes, der Gehalt, den die Probe angiebt, Korn genannt wird.

12. Wie viel ein Stück der Münze wiegen soll, heißt Schrot.

13. So muß also die Münze an Schrot und Korn richtig seyn. Man sieht leicht, daß acht Fälle hie statt finden können.
I) Beyde recht
II) III) Eins recht, das andre zu gut
IV) V) Eins recht, das andre zu schlecht
VI) VII) Eins zu gut, das andre zu schlecht
VIII) Beyde zu schlecht.

14. Der Werth der Münze wird nach dem Silber geschätzt, das sie enthält.

Sie

Sie hätte also in II; III; mehr Werth als ihr gesetzmässig beygelegt wird, in IV; V; VIII, weniger.

Das erste wäre dem Münzmeister nachtheilig, das andre dem öffentlichen Ansehn, das der Münze einen gewissen Werth versichert hat.

15. In VI; VIII; könnte vielleicht ein Fehler den andern aufheben. Man machte die Münze etwas leichter oder schwerer als gewöhnlich, nachdem das Silber in ihr besser oder schlechter wäre, als es seyn sollte. Dieses heisst, sich mit Stückelung der Gelder helfen. Gar zu weit dürfte doch dieses nicht gehn, weil das Gewicht eines Stück Geldes, am leichtesten kann untersucht werden, und eine grosse Abweichung vom Gewöhnlichen, allemahl Verdacht erregen würde, der sich bey dem gewöhnlichen Gebrauche des Geldes nicht wohl beurtheilen liesse.

16. Das Silber zur Münze sey f löthig; Ein Stück von ihr wiege m Loth; Also gehn auf die rauhe Mark; $\frac{16}{m} = r$ Stücke; und ein Stück hält $\frac{m.f}{16}$ Loth fein Silber.

17. Die Mark fein werde zu h Thalern ausgeprägt; oder aus einer Mark fein Silber, prägt man so viel Geld als h Thlr beträgt.

18. Aus

18. Aus einer Mark f löthig Silber werden solchergestalt $\frac{f.h}{16}$ Thl. geprägt.

19. Der Werth des Stückes Geld (16) ist also $\frac{m.f.h}{16.16} = \frac{f.h}{16.r}$ Thaler.

20. Exempel. (Schlüter Probierbuch 33. Cap.) Man soll 5löthiges = f Silber, die Mark fein zu 14 Thl = h ausprägen. Wie viel Mariengroschen = $\frac{1}{36}$ Thl gehn auf die rauhe Mark? Man sucht also r.

21. In (19) ist also $\frac{f.h}{16.r} = \frac{1}{36}$ und ferner $\frac{5.14}{16.r} = \frac{1}{36}$ also $r = \frac{5.14.36}{16} = \frac{5.7.9}{2}$ = 157,5. So viel Mariengroschen gehn auf die rauhe Mark; Oder: So viel werden aus einer Mark fünflöthiges Silber geprägt, wenn die Mark fein auf 14 Thl ausgebracht wird.

22. Einer dieser Mariengroschen wöge also $\frac{16}{157,5} = \frac{32}{315}$ Loth = m; enthielte $\frac{32}{315} \cdot \frac{5}{16} = \frac{2}{63}$ Loth Silber. Also in den 157,5 Mariengroschen sind $\frac{2}{63} \cdot 157,5 = 5$ Loth Silber. Die betragen nach dem angenommenen Münzfusse $\frac{5.14}{16}$ Thl = $4\frac{3}{8}$ Thl und so viel Thaler = 157,5 Mgl, welches als Probe dient.

23. Aus

23. Aus gegebenen Silbern, eine Mischung von gegebenem Gehalte machen.

Wenn ferner gegeben ist, auf wie viel Thaler die Mark fein ausgeprägt werden soll, zu finden, wie viel Stücke Geldes von gegebenem Werthe, aus einer Mark der Mischung geprägt werden.

Das zusammen lehren die Münzmeister unter dem Nahmen der Beschickung.

24. Der erste Theil dieser Frage ist also blos Alligationsregel,

Der zweyte beantwortet sich aus (19)

25. Wenn die Beschickung, wie oft angegeben wird, mit Kupfer geschieht, so sieht man dieses als 0löthiges Silber an.

26. Für das Exempel (20) ward das fünflöthige Silber so erhalten:

Man hatte 36 Mk 12löthiges; und 56 Mk 10 Loth, achtlöthiges; Das sollte mit Kupfer beschickt werden, fünflöthiges zu bekommen.

Nimmt man also z Mk Kupfer, so ist

$$36.12 + 56{,}625.8 + z.0 = (36 + 56{,}625 + z).5$$

also

$$36.(12-5) + 56{,}625.(8-5) = 5.z$$

oder

$$\frac{36.7 + 56{,}625.3}{5} = z = 84{,}375$$

Zu den Gewichten des 12löthigen und des achtlöthigen, des Kupfers seines addirt, kommen

men 177 Mk, die halten zusammen 36. 12 + (56 + $\frac{5}{8}$). 8 = 885 Loth Silber. Also eine Mk; $\frac{885}{177}$ = 5.

27. Man hat 505 Mk 15löthig; das soll mit 3löthigem beschickt werden, daß die Mark 14 Loth 4 Grän = 14 + $\frac{2}{3}$ Loth hält.

Daraus sollen Speciesthaler, (also das Stück = $\frac{4}{3}$ Thl) gemünzt werden, nach dem Leipziger Fuß, die Mk fein zu 12 Thl = h ausgebracht.

Die Frage ist, wie viel Stücke auf die rauhe Mark gehen? (r)

28. Zum ersten für die Alligation. Das 3löthige sey y Mk

505. 15 + y. 3 = (505 + y). (14 + $\frac{2}{3}$)

Wo 14 + $\frac{2}{3}$ = $\frac{128}{9}$

Also

505. (15 − $\frac{128}{9}$) = ($\frac{128}{9}$ − 3). y;

505. 7 = 101. y; 35 = y

So beträgt das 15löthige und 3löthige zusammen 540 Mk, und hält 505. 15 + 35. 3 7680 Loth Silber; also eine Mk; $\frac{7680}{540}$ = 14$\frac{2}{3}$

29. Für die zweyte Frage ist in (19) f = $\frac{128}{9}$; h = 12; also

$\frac{4}{3}$ = $\frac{128}{9}$. $\frac{12}{16r}$ folglich

$$r = \frac{128.3}{3.16} = 8$$

Valvation.

30. Wie viel ein Stück Geld, nach einem gewissen Münzfusse werth ist, die Angabe davon heisst: Valvation.

31. Das erfährt man also daraus: Wie viel es wiegt, wie viel die rauhe Mk, dergleichen Geldes, fein hält, und wie viel Thaler aus der Mark fein nach dem Münzfusse geprägt sind. Folglich aus (19)

32. Ist also gegeben, wie viel das Stück gelten soll, so weiß man, ob es nach dem Münzfusse ausgemünzt ist oder nicht.

33. Ex. Fünf Zweydrittheilstücke, wiegen zusammen 24273 Theile des Richtpfennigs; die Mark davon hält 12 Loth fein; Wie viel gehen auf die rauhe Mark? und was ist eins nach dem Leipziger Fusse (27) werth?

Eins wiegt also $\frac{24273}{5}$. e (8)

$= 4854{,}6 \cdot e$

Für die erste Frage

$\frac{65536}{4854{,}6} = r$ (16)

Für die zweyte (18) $f = 12 = h$; $\frac{f.h}{16}$

$= \frac{12.12}{16} = 9$

Folg:

Folglich log 65536 = 4,8164799
log 4854,6 = 3,6861535
(16) log r = 1,1303264
von log 9 = 0,9542425
log des Werths = 0,8239161 — 1 (19)

Auf die rauhe Mark gehen 13,499 Stück, Eines Werth = 0,66677 Thl.

Eigentlich also etwas mehr als $\frac{2}{3}$ = 0,66666.... Thl aber der Unterschied = 0,00011 kömmt nicht in Betrachtung.

Die Stücken waren also richtig nach dem Leipziger Fusse ausgemünzt.

Schlüter 34 Cap. 3. §. Er findet r = $13.\frac{1}{2}\frac{2}{4}\frac{1}{2}\frac{3}{7}\frac{1}{3}$; den Bruch geben die Logarithmen, 0,49977; Schlüter nimmt statt dessen $\frac{1}{2}$ und berechnet also den Werth eines Stücks daraus, daß $13\frac{1}{2}$ auf die rauhe Mark gehn, da dann genau $\frac{2}{3}$ Thl herauskommen.

34. Ex. $8\frac{3}{4}$ Speciesthaler Franzgeld wiegen eine Mark; sind 14 Loth 13 Grän fein; Wie viel ist ein Stück nach dem Leipziger Fusse werth?
Hie r = 8,75; f = $\frac{265}{18}$; h = 12

Also ist (19) der Werth = $\frac{265.12}{18.16.8,75}$
= $\frac{265}{6.4.8,75}$ = $\frac{53}{24.1,75}$; Der Nenner = 24. $(1+\frac{3}{4})$ = 42; Also der Bruch = $1+\frac{11}{42}$;
Der Werth ist also 1 Thl $6\frac{7}{7}$ gl.

35. Wenn 75 Speciesthaler Franzgeld für 100 Thl current ausgegeben werden, so ist der Werth dieser 75 Stück nach dem Leipziger Fusse $= 75.(1 + \frac{11}{44})$ Thl $= 94\frac{3}{4}$ Thl.

Der Unterschied, wie viel 100 Thl nach dem Leipziger Fusse mehr werth sind, als 100 Thl current, beträgt in Thalern nach dem Leipziger Fusse; $5\frac{3}{4} = 5$ Thl 8 gl $6\frac{6}{7}$ ₰.

36. Ex. Die Mark soll 14 Loth 4 Grän halten, und 8 Stück Geld auf die rauhe Mark gehn. Ein solches Stück ist nach dem Leipziger Fusse $1\frac{1}{2}$ Thl werth.

Denn $f = 14 + \frac{2}{9} = \frac{128}{9}$; $l = 8$, $h = 12$

Also der Werth $= \frac{128.12}{9.8.16} = \frac{4}{3}$

37. Diesen Münzfuß nennt man den **alten Reichsfuß**. Er ward auf dem Reichstage zu Augspurg 1566 vorgeschrieben. Die Stücken Geld, 8 auf die rauhe Mark, hiessen **Thaler**. Unterschiedene Stände waren damit nicht zufrieden, weil der rechte Gold- und Silberkauf nicht gehörig in acht genommen war.

Gründliche Nachricht von dem teutschen Münzwesen, älterer und neuerer Zeiten mit Joh. Dav. Köhlers Vorrede . . . Göttingen 1739; V. Cap. 8. §. 141. S.

38. Ein solcher Thaler (37) heisst von seinem Gewichte zwey Loth, uncialis; welchen Nahmen man daher jezo dem **Speciesthaler** giebt.

39. In

39. In der Mark des Silbers dazu, sind $\frac{128}{9.16} = \frac{8}{9}$ fein. Folglich ist in einem solchen Thaler $\frac{1}{9}$ einer Mk fein, oder in 9 Thalern 1 Mk fein, die Mark fein wird auf 9 Thl ausgebracht.

40. Der Zinnische Fuß (die (37) angeführte Schrift VI C. 2. §.) ward von Sachsen und Brandenburg 1667 eingeführt. In allen grossen und kleinern Münzsorten, sollte die feine Mark Silbers, auf $10\frac{1}{2}$ Thl ausgebracht werden, nur den Reichsthaler ausgenommen, dem man von seiner innern Güte nichts nehmen wollte. Das veranlasste eine neue Art grober Münze: Güldiner, oder $\frac{2}{3}$ Stücke von einem Reichsthaler, oder doppelte Markstücke, von der dreyfachen Benennung ihres Werthes: 60 Kreuzer = 16 Groschen = 32 Schillinge. Nähmlich 16 Schillinge heissen eine Mark Geldes.

Die Stadt Zinna, wo dieser Vergleich geschlossen ist, liegt im Herzogthume Magdeburg.

41. Wie schwer muß ein Zweydrittheilstück nach dem Zinnischen Fusse seyn, wenn es aus Silber wie (39) gemacht wird?

Die Mark fein wird nach dem Zinnischen Fusse auf $\frac{21}{2}$ Thaler ausgebracht.

Also, eine Mark, von der $\frac{8}{9}$ fein sind, auf $\frac{21}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{28}{3}$ Thl; das ist, auf $14.\frac{2}{3}$ Thl; Eine Mark dieses Silbers giebt also 14 Zweydrittheilstücke, oder 14 gehen auf die rauhe Mark.

Eines davon hält also $\frac{1}{14} \cdot \frac{8}{9}$ einer Mark fein; das ist $\frac{4}{63}$; folglich ist eine Mark fein, in $\frac{63}{4} = 15\frac{3}{4}$ solchen Zweydrittheilstücken enthalten.

42. Ward solch Silber, wie in (41) angenommen war, gebraucht, so gab es die Bequemlichkeit, daß man das Zweydrittheilstück aus dem Gewichte beurtheilen konnte. Von besserm oder schlechterm Silber, musste es leichter oder schwerer seyn; Allemahl enthielt es $\frac{2}{3}$ des feinen Silbers, das nach dem Zinnischen Fusse auf 1 Thl gerechnet wird, also $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{21}$ Mk.

43. Nach dem Leipziger Fusse, da $\frac{1}{12}$ Mark fein Silber einen Thaler werth sind, findet sich der Werth eines Zinnischen Zweydrittheils nach folgender Proportion:

$$\frac{1}{12} : \frac{4}{63} = 24 \text{ gl} : 18\frac{2}{7} \text{ gl.}$$

Man findet noch dergleichen Drittheile und Zweydrittheile mit dem Gepräge der damaligen Churfürsten von Sachsen und Brandenburg.

44. Oft angeführte Nachricht erzählt, wie sich hiebey die drey obern Creise verhalten, wo Gold mehr als Silber in Cours war, da durch den Zinnischen Fuß das Silber höher als vorhin ausgebracht ward. Es kam darauf an, zwischen Gold und Silber die Verhältniß zu behaupten, daß $15\frac{1}{2}$ Mk Gold so viel gölten, als 1 Mk Silber. Auch mehrere Bewegungen und Vorschläge wegen des Münzfusses werden dort angezeigt.

45. Im Jänner, 1690 ward von den Häusern Sachsen, Brandenburg und Braunschweig-Lüneburg, der Leipziger Fuß errichtet. Die feine Mark, in Zweydrittheilen, und Drittheilen, um 12 Thl oder 18 Gulden auszubringen. Im folgenden Februar d. J. ward zu Torgau die Abrede genommen, bey Scheidemünzen die feine Mark in Zweygutegroschenstücken um $12\frac{2}{3}$ Thl, in den einzelnen Gutengroschen- und Mariengroschenstücken um $12\frac{1}{2}$ Thl, und in noch kleinern Sorten, als: 6; 4; 3; 2; 1 Pfennig, um 13 Thl auszubringen.

46. Wenn man beym Leipziger Fusse eben solch Silber braucht, wie beym alten Reichsfusse (39) so giebt eine Mark solches Silbers $\frac{8}{9}$. 12 = $10\frac{2}{3}$ Thaler.

47. Aber 12 Thl = 288 ggl und $10\frac{2}{3}$ Thl = 256 ggl; Die ganze Mark hält 288 Grän, und von dem Silber (46) die Mark 256 Grän fein.

Also wird von diesem Silber jedes Grän auf einen Ggl. ausgebracht.

48. Die Mark hält 256 Pfenniggewichte (2). Bey jezigem Silber also, wird jedes Pfenniggewicht auf einen Ggl. ausgebracht.

Jedes Pfenniggewicht dieses Silbers, hält $\frac{256}{288}$ seines Gewichts, fein; Das ist $\frac{1}{288}$ der Mark fein; also so viel fein als zu 1 Ggl. gehört, da zu 288 Ggl. eine Mark fein gehört.

49. Die beyden Sätze (47; 48) druckt die Nachricht . . . VI. C. 8. §. so aus: Es beträgt jedes Grän an Korn, und jeder Pfennig an Schrot, eben 1 guten Groschen, und kann eines gegen das andre in gerader Rechnung gesetzt werden.

Die Mark dieses Silbers, hat so viel Grän fein (am Korn) so viel Sgl. aus ihr gemünzt werden, und die rauhe Mark wiegt so viel Pfenniggewichte (am Schrot) so viel Sgl. aus ihr gemünzt werden.

50. Das ist wohl der Grund, warum auch auf dem Harze, wo sonst Mariengroschen gewöhnlich sind, "bey Münzrechnungen, alles nach guten Groschen gerechnet wird" Schlüter, Probierbuch 24. Cap. 3. §.

51. Diesen Leipziger Münzfuß, bestimmte ein Reichsgutachten vom 10 Sept. 1738 zum allgemeinen Reichsmünzfusse für ganz Deutschland. (Pütter: über den Werth der heutigen sogenannten Conventionsmünze ... Gött. 1784; 4 S.) Jezo aber wird er allein noch von Churbraunschweig beybehalten.

52. Nach dem **Preussischen** oder **Graumannischen** Fusse, wird die feine Mark zu 14 Thl ausgemünzt; = 21 Gulden, nach dem Conventionsfusse zu 20 Gulden = $13\frac{1}{3}$ Thl; Nach dem Vier und zwanzig Guldenfusse zu 24 Gulden = 16 Thl. Wie sich die Werthe zweyer Stücke Geld, nach zween solchen Fussen ge-

gemünzt, gegen einander verhalten, wenn man nur auf das Silber sieht, ist leicht zu berechnen.

53. In so fern man den Werth einer Goldmünze nach dem schätzt, was sie fein Gold enthält, ist begreiflich keine andre Rechnung für sie nöthig als für Silbermünzen, nur daß bey ihr die Mark in Carat getheilt wird (3) und daß man die Ausdrückungen verstehen muß, in denen die Feine angegeben wird. Ich will indessen noch einige Berechnungen darüber und auch über Silbermünzen beybringen, nachdem ich zuvor etwas andres, das dabey vorkömmt, erklärt habe.

Remedium.

54. Weil man das Metall nicht allemahl genau von der vorgeschriebenen Feine erhalten, auch die Stücken nicht alle genau von dem gehörigen Gewichte machen kann, so wird verstattet, daß das Metall um etwas, geringes freylich, weniger fein seyn darf, als das Gesetz fodert, und die Menge von Stücken, die zusammen eine Mark wiegen sollten, etwas geringes weniger wiegen dürfen. Beydes nennt man Remedium; Jenes an Korne, dieses an Schrote (11; 12).

Folgendes wird die Rechnung hierüber allgemein darstellen.

55. Das Gewicht einer Mark, werde durch m ausgedruckt. Dieses kann also nach der Eintheilung der Mark, andere und andere Zahlen

bedeuten, 16 wenn man die Mark in Lothen ausdruckt, 288 wenn sie in Gränen angegeben wird u. s. w.

56. Eine Mark geprägtes Metall, gelte a.

57. Gesetzmässig soll die Mark b Theile von den m der Mark fein seyn.

So in (36) Wenn $m = 16$; wäre $b = 14 + \frac{2}{9}$ Oder wenn $m = 1$; $b = \frac{1}{16} \cdot \frac{128}{9}$; $\frac{b}{m} = \frac{8}{9}$.

58. So hält gesetzmässig die Mark geprägtes Metall $\frac{b}{m}$ einer Mark fein, und so viel feines Metall wird auf a ausgebracht.

In (36) auf acht jezo so genannte Speciesthaler.

59. Diesem gemäß, die feine Mark auf $\frac{a.m}{b}$

In (39) auf 9 Speciesthaler.

60. Das Remedium sey

am Schrote $= \frac{c}{m}$ Mark

am Korne $= \frac{e}{m}$ Mark

61. Das heisst $\frac{m-c}{m}$ Mark geprägt Metall wird für eine Mark gerechnet.

62. Und

62. Und die völlige Mark geprägt Metall braucht nicht so viel fein zu halten, als nach (57) erfodert würde, sondern nur $\frac{b-e}{m}$ einer Mark fein.

63. In dem Gewichte Geld also, das für eine Mark gerechnet wird (61), ist nur $\frac{(m-c).(b-e)}{m.m}$ einer Mark fein enthalten.

64. Da nun dieses für den Werth a, ausgegeben wird, so heisst das:

Eine Mark fein wird für den Werth

$$\frac{m.m.a}{(m-c).(b-e)} = g$$

ausgemünzt.

65. Für (59) wären c und e = o.

66. Bey der Anwendung auf gewisse Münzsorten kann man nach der dabey gewöhnlichen Eintheilung des Gewichts bestimmte Zahlen einführen.

Bey Goldmünzen.

66. Es bedeute c eine Zahl von Gränen, so ist $\frac{c}{m} = \frac{c}{4608}$

Und b, e, bedeuten Zahlen von Karaten, so ist $\frac{b-e}{m} = \frac{b-e}{24}$

67. Es

67. Es widerspricht sich also hie nicht, daß m zweyerley Bedeutung bekömmt, eine für Gräne, die andere für Karate.

68. So sind nach (63) in so viel Gelde, als für eine Mark ausgegeben wird,

$$\frac{(4608-c).(b-e)}{4608.24}$$ fein enthalten.

69. Und in (64) ist

$$g = \frac{4608.24.a}{(4608-c).(b-e)}$$

70. Da ist im Zähler ein unveränderlicher Factor, den, oder wenn man Logarithmen brauchen will, dessen Logarithmen, man einmahl für allemahl berechnen kann.

71. Weil der Unterschied zwischen g und dem Werthe (59) hie $\frac{24\,a}{b}$, doch kleiner ist, als einer der beyden Werthe, könnte man darauf fallen, eine Formel für ihn zu berechnen. Sie käme

$$24\,a.\left(\frac{4608}{(4608-c).(b-c)} - \frac{1}{b}\right)$$

und wäre wenigstens zum Gebrauche der Logarithmen nicht sehr bequem. Es ist also wohl besser, bey der (69) zu bleiben.

Exempel.

72. Nach Crusens Hamb. Contoristen; Ausg. 1782. I. Th. Art. Frankreich; 153 S.

Die

Die neuen Schildlouisd'or, sollen nach dem Edicte vom Jan. 1726; 30 Stück, jedes zu 24 Livres, eine Französ. Marc (10) wiegen, 22 Carat fein seyn.

73. Aber nach Stewarts Angabe, ist das Remedium bey Golde, im Schrote 15 Grän, im Korne $\frac{3}{8}$ Carat per Marc.

74. Also $a = 30 . 24 = 720$ Livres;
$b = 22$; $e = \frac{3}{8}$; $b - e = 21\frac{5}{8} = \frac{173}{8} = 21,625$; $c = 15$; $4608 - c = 4593$.

75. So würde edictmässig die feine Mark Gold (59) auf $720 . \frac{24}{22}$ Livres ausgebracht.
Das ist $720 . (1 + \frac{1}{11}) = 720 + 65 + \frac{5}{11} = 785,454545 \ldots$

76. Mit dem Remedium wird die Mark auf

$$\frac{4608 \quad 24 . 720}{4593 . 21,625}$$ Livres ausgebracht.

77. Es ist aber (70)

beständ. log	= 5,0437237
log 720	= 2,8573325
log des Zählers	= 7,9010562
log 4593	= 3,6620964
log 21,625	= 1,3349561
log des Nenners	= 4,9970525
abgez. von	= 7,9010562
log g	= 2,9040037
log 801,68	= 10
	27

78.

78. Giebt g = 801,685 Livres
dazu addirt = 785,454 (75)

giebt = 1587,139
arithm. Mittel = 793,564

Weil 0,564. 20 = 11,28 u. 0,28. 12 = 3,36
So ist dieses arithmetische Mittel
793 Livres 11 Sous 3,36 Deniers;
Cruse setzt $4\frac{1}{2}$ Deniers.

Zweytes Exempel.

79. Vom Französischen Silbergelde; da ein Ecu (Laubthaler) 3 Livres gilt, sollen nach vorerwähntem Edicte, 8,3 doppelte Ecus eine Marc wiegen, und 11 Deniers fein seyn (10; VIII).

80. Wiederum nach Stewart, ist das Remedium 36 Grän am Schrote (also 4608 Gr. auf die Marc) und $\frac{1}{8}$ Denier am Korne.

81. Also nach (57)

$a = 8,3.\ 6 = 49,8$ Livres;

$$\frac{b-e}{m} = \frac{11-0,125}{12} = \frac{10,875}{12}$$

$$\frac{c}{m} = \frac{36}{4608}; \quad \frac{m-c}{m} = \frac{4572}{4608};$$

$$g = \frac{4608.\ 12.\ 49,8}{4572.\ 10,875}$$

82. Best log (4608. 12) = 4,7426937
log 49,8 = 1,6972293

log des Zählers = 6,4399230

log

log 4572 = 3,6601062
log 10,875 = 1,0364293
log des Nenners = 4,6965355
log g = 1,7433875
log 55,384 = ...43
32
giebt g = 55,3844 Livres.

83. Ohne Remedium würde die Mark fein auf 49,8. $\frac{1}{11}$ Livres ausgebracht; Es ist aber

$\frac{49,8}{11}$ = 4,527272...
addirt = 49,8
kömmt = 54,32727...

84. Zwischen (83) und (82) ist das arithmetische Mittel = 54,8558.. = 54 Livres 17 Sous 1,392 Deniers.

Verhältniß des Goldes zum Silber, das bey diesem Münzfusse statt findet.

85. Ich dividire mit einander die mittlern Werthe, auf welche eine Mark Gold (78) und Silber (84) ausgebracht wird.

log 793,564 = 2,8995820
log 54,856 = 1,7392241
1,1603579
Zahl = 14,466

So viel Mark Silber werden diesem gemäß einer Mark Gold gleich gesetzt.

86. In

86. In der ersten Ausgabe von Erusens Contoristen I. Theil Hamb. 1761; ist das Remedium beym Schildlouisd'or am Schrote 12 Grän, am Korne $\frac{5}{16}$ Karat angegeben; Daraus folgt, daß die Mk fein Gold auf 798,853 Livres ausgebracht würde.

Beym Laubthaler wird da das Remedium angegeben wie in (80).

87. Diese Angaben finden sich auch in Hrn. Hofr. Beckmann Technologie 32 Abschn. 11. §. Man kann nach den Formeln, die ich gegeben habe, leicht rechnen, was es gäbe, wenn man, wie Hr. B. da erinnert, nur die Hälfte der angezeigten Grössen als Remedium rechnete. Da es hie auf ein Mittel ankömmt, das man doch nur ohngefähr angeben kann, so würde Erusens vorhin erwähnte Art, das arithmetische Mittel zwischen dem Ausbringen ohne und mit Remedium zu suchen, wohl eben so gut seyn.

Werth eines Stück Silbergeldes, das mit dem Remedium ausgeprägt ist, nach dem Leipziger Fusse.

88. Nach (63) weiß man, wie viel eine Mark dieses Geldes, fein Silber hält: versteht sich, die bey ihm gebräuchliche Mark.

Man weiß auch, wie viel Stücke Geld auf eine solche Mark gerechnet werden; denn wegen des Remedium am Schrote würden ihrer eigentlich mehr darauf gehn.

Also

Also weiß man, wie viel ein Stück fein enthält, durch die erwähnte Mark ausgedruckt.

Das drucke man durch die Cölnische Mark aus;

Weil die Cölnische Mark fein auf 12 Thl nach dem Leipziger Fusse ausgebracht wird, so ist daraus bekannt, wie viel das Stück nach dem Leipziger Fusse werth ist.

89. Exempel. Beym doppelten Ecu (79) halten 8,3 Stück, $\frac{(m-c).(b-e)}{m.m}$ (63)

$= \frac{a}{g}$ (64) einer Mark Troys fein.

Also (82)

log g	= 1,7433875
log 8,3	= 0,9190781
	2,6624656
log a	= 1,6972293
log (g : a. 8,3)	= 0,0347637 — 1
addirt (10 ; V)	= 0,0200594
	0,0548231 — 1
addirt log 12	= 1,0791812
	0,1340043

gehört 1,3614; So viel Thaler nach dem Leipziger Fusse ist der doppelte Ecu werth.

90. Wollte man das arithmetische Mittel (84) brauchen, so rechnete man, auf wie viel Livres die Cölnische Mark fein ausgebracht

wird, wie viel also eine Livre in Thalern werth ist, und so wie viel 6 Livres werth sind.

aus (85) = 1,7392241
aus (10; V) = 0,9799406 — 1

Summe = 1,7191647
abgez. von log 12 = 1,0791812

Rest = 0,3600165 — 1

Giebt den Werth der Livre = 0,22910 — Thl also 6 Livres = 1,3746 Thl.

Wie auf dem Harze Schrot und Korn zum Silbergelde berichtigt werden.

91. Das Silber, das durch Abtreiben aus dem Bleye erhalten wird, und Blicksilber heisst, wird von dem Fremden, das noch darin ist, durch eine Arbeit gereiniget, die man Brennen nennt, und heisst alsdann: Brandsilber.

Belehrung hievon findet man in Henning Calvörs Werke: Historisch chronologische Nachricht und theoretisch und practische Beschreibung des Maschinenwesens und der Hülfsmittel beym Bergbaue auf dem Oberharze (Brschw. 1763; 2. B. in Fol.) II Theil 7. Cap. 266 Seite.

Als ein dritter Theil dieses wichtigen Buches ist anzusehn: Desselben: Historische Nachricht von der Unter- und gesammten Oberharzischen Bergwerke .... Aufkunft ... Auflas und Wiederaufnehmung .... Brschw. 1765. Fol.

Fol-

Folgendes meldet Calvör a. a. O. 245 S.

Die Silber können nicht höher und feiner als 15 Loth 16 Grän (= 286 Grän) gebrannt werden, und bleiben 2 Grän Unart oder Bleyrauch darinn, . . . Nun sollten aus einer Mark fein, 18 Stück Gulden gemünzt werden (45).

Man setzt also zu einer Mark Brandsilber, noch 2 Grän, und münzt 18 Stück Gulden aus diesen 299 Grän. So enthalten diese 18 St. Gulden völlig 288 Grän fein, wiegen aber 290 Grän. Das Feine findet man beym Probiren wieder, nachdem sich die 2 Grän Unart in die Capelle gezogen. So werden auch beschickte Münzen, (die man etwa wiederum zum Vermünzen einschmelzt) auf 15 Loth 16 Grän beschickt.

92. Wenn die zugesetzten 2 Grän, nicht ganz fein Silber, sondern auch Brandsilber sind, so halten sie der Angabe gemäß nur $\frac{2.286}{288} = \frac{2.143}{144}$ Grän fein, und in den 290 Grän, sind nur $286 + 2 - \frac{1}{72}$ Grän fein. Da nun jeder Grän fein 1 Groschen werth ist (49), so wäre das feine Silber in 18 Gulden, eigentlich nicht völlig 18 Gulden werth, sondern es fehlte daran noch $\frac{1}{72}$ Gr. $= \frac{1}{6}$ Pfennig, oder

$\frac{1}{18.16.72} = \frac{1}{20736}$ des Werthes, den es haben soll.

93. Allgemein liesse sich die Sache so betrachten:

Man hat p löthig Silber; Von dem will man x Mark nehmen, so daß darinn q Loth fein enthalten ist.

Also $p.x = q$ und $x = q : p$

Z. E. Man hätte zwölflöthiges Silber $p = 12$; Wie viel muß man davon nehmen, daß man $14 = q$ Loth fein darinn hat? $x = \frac{7}{6}$

Nähmlich in $\frac{7}{6}$ Mark zwölflöthiges Silber sind $12 + \frac{1}{6}.12 = 14$ Loth fein.

Will man sogleich 1 Mk fein haben, also $q = 16$; So sey $16 = p + r$; also $x = 1 + \frac{r}{p}$

Z. E. Wie viel Brandsilber muß man nehmen, darin eine Mark fein zu haben?

$p = 15 + \frac{8}{9} = \frac{143}{9}$; $r = \frac{1}{9}$; $x = 1 + \frac{1}{143}$

Nun ist $\frac{1}{143}$ Mark $= 2 + \frac{2}{143}$ Grän.

Also 1 Mk fein in 1 Mk $+ 2 + \frac{2}{143}$ Grän Brandsilber.

Der Bruch des Gräns fehlt nach (92).

Er ist $= \frac{1}{143.144} = \frac{1}{20592}$ der Mark, also sehr unbeträchtlich.

Eben dadurch das Verfahren zu rechtfertigen, war die Absicht dieser Rechnung.

94.

94. Wenn in einem Stücke Geld, Gold, Silber und Kupfer sind, den Werth dessen, was von diesen drey Metallen darin ist, und den Werth des Geldes mit einander zu vergleichen.

Eine Mark

Gold koste a Thl
Silber b
Kupfer c

In einer beschickten Mark, wie das Geld aus ihr geprägt wird, sind m Grän Gold
n Silber
288 — m — n Kupfer

So ist der Werth der beschickten Mark $= \frac{ma + nb + (288 - m - n).c}{288}$ Thl.

Vom Gelde gehen r Stück auf die rauhe Mark, und eines gelte k Thaler.

Der Werth der drey Metalle im Stücke Geld ist $= \frac{ma + nb + (288 - m - n).c}{288.r}$ Thl.

Also, die Münzkosten bey seite gesetzt $= k$.

Nimmt man diese Gleichung an, so läßt sich von den acht Buchstaben, die sie enthält, einer aus den übrigen sieben finden.

95. Wer hievon Anwendung machen will, muß die Kaufpreise der Metalle wissen, was die Münze, für eine Mark Metall, in solchem Gelde, wie sie daraus prägt, zahlt, nicht wie hoch sie solche ausbringt.

96. Dieses mit einem Beyspiele zu erläutern, wende ich die Formel an, den Werth des Kupfers in (33) zu finden. Da ist $m = 0$; $n = 12$ Loth $= 216$; also $288 - m - n = 72$, $r = 13{,}5$ $k = \frac{2}{3}$; Nun wird die Mark fein Silber auf 12 Thl ausgebracht, seßte man also $b = 12$, so bekäme man

$$216.\ 12 + 72.\ c = 288.\ 13{,}5.\ \tfrac{2}{3}$$

also

$$2592. + 72.\ c = 1592$$

So gölte die Mark Kupfer nichts. Die Münze muß solchergestalt die Mark fein Silber wohlfeiler haben als zu 12 Thl.

97. Calvör Maschinenw. II. Th. 294 S. meldet: Kupferne Pfennigstücke werden das Pfund zu 18 mgl. ausgemünzt. Also die Mk zu $\frac{1}{4}$ Thl.

Das muß auch mehr seyn als die Mark Kupfer der Münze kostet.

98. Seße ich indessen in der Formel, nach welcher ich nur gerechnet habe, $c = \frac{1}{4}$ und suche b, so kömmt

$$216.\ b + 72.\ \tfrac{1}{4} = 2592 \quad \text{also}$$

$$b = \frac{2574}{216} = 11\tfrac{11}{12}.$$

99. Ein andres Exempel; aus Calvörs (91) angeführtem Buche II. Th. 296 S.

Goldgulden, die 1749 zu Hannover geprägt wurden, halten

18 Ka-

18 Karat 10 Gr. = 226 Gr. = m Gold
3 8 = 44 = n Silber
1 6 = 18 = 288-m-n Kpfr.
Gehn auf die rauhe Mark 72 = r
Gelten 2 Thl = k

Calvör sagt, die feine Mark Gold komme darinn so hoch als in reichsgesetzmässigen Ducaten ausgemünzt 181 Thl 4 ggl.

Setze ich nun $a = \frac{1087}{6}$

Ferner b = 12 (45)

So bleibt noch c, der Werth der Mark Kupfer, zu suchen.

Es ist aber

$288.r - ma - nb = (288 - m - n).c$

Also hie

$ma = \frac{226.1087}{6} = 40943\frac{2}{3}$

$nb = 44.12 = 528$

Summe $= 41471\frac{2}{3}$

$288.r.k - 288.144 = 41472$

$(288 - m - n).c = \frac{1}{3}$

käme die Mk Kupfer $= \frac{1}{3.18}$ Thl.

100. Man begreift, daß ich nur die Anwendung der Formel (94) habe zeigen wollen. Die gegebenen Grössen dazu müsste man nach (95) aufsuchen. Auch alsdann wissen, wie die Feine dieser Metalle beschaffen ist. Bey dem Exempel aus Clausberg XI. Cap. 106;

würde das Silber, davon die Mark 11 Thl gilt, wohl nicht fein seyn. In Crusens Contoristen findet man in einigen Artikeln, z. E. Frankreich, Hamburg, Preise roher Metalle. Natürlich aber müsste man die Preise bey einer Münzstatt wissen, um für die dasige Münze zu rechnen, und allemahl wäre das noch unvollkommen, so lange man nicht wegen der Unkosten, welche die Münze erfodert, und wie diese aufgebracht werden, unterrichtet ist.

Vergleichung zweyerley Münzen nach Gehalte und Gewichte.

101. Wenn eine Münze aus den drey Metallen, wie in (97) besteht, so benenne man die drey Metalle mit den deutschen Anfangsbuchstaben ihrer Nahmen. Ein Stück von ihr hält alsdann

$$\frac{m.G + n.S + (288 - m - n).K}{r}$$

wo die Buchstaben m, n, Gräne bedeuten, r wie viel Stück auf eine Mark gehn.

102. M, N, R sollen ähnliche Bedeutungen für eine andre Münze haben, so hält ein Stück von ihr

$$\frac{M.G + N.S + (288 - M - N).K}{R}$$

103. Hätte man von der ersten Münze t Stück, von der zweyten T; so verhielten sich in

in beyden Zahlen von Stücken, die Mengen Goldes, wie $\frac{m.t}{r} : \frac{M.T}{R}$, die Mengen Silbers wie $\frac{n.t}{r} : \frac{N.T}{R}$

104. Soll in einer Zahl so viel Gold seyn als in der andern, so ist $\frac{m.t}{r} = \frac{M.T}{R}$.

105. Eine ähnliche Gleichung giebt sich, wenn in einer Zahl so viel Silber als in der andern seyn soll.

106. Beyde Bedingungen (104; 105) zugleich gäben $\frac{m}{M} = \frac{T.r}{t.R} = \frac{n}{N}$, da müssten sich also Gold und Silber gegen einander in einer Münze wie in der andern verhalten, auch wäre $T : t = R : r$.

Es wären nähmlich zweyerley Stücken Geld nach einerley Münzfusse, nur am Gewichte unterschieden, wie z. E. doppelte und einfache Louisd'or.

107. Bey Silbermünzen dürfte man nur $m = o = M$ seßen, wie (96)

108. Verlangte man die Menge Goldmünzen T, die so viel Gold hielte, als eine andre gegebene Menge, so wäre $T = \frac{m}{M} \cdot \frac{R}{r} \cdot t$

109. Alsdann verhielte sich die Menge des Silbers in beyden Zahlen (103)

$$= \frac{n.t}{r} : \frac{N}{R} \cdot \frac{m.R}{M.r} \cdot t = \frac{n}{m} : \frac{N}{M}$$

$$= \frac{n}{N} : \frac{m}{M}$$

110. Exempel. Im Jahre 1443 sind 10000 = t Goldgülden ausgeliehen worden. Die Mark hielt damahls 19 Carat Gold, 5 Carat Silber, also m = 19. 12

111. Die sollen 1660 in Goldgülden wiederum bezahlt werden, da die Mark 18,5 Carat Gold; 5,5 Silber hält, also M = 18,5. 12. Die gesuchte Zahl dieser Goldgülden = T

112. Man nehme an, von beyden Goldgülden, gehn gleich viel auf die rauhe Mark; 72 = r = R

113. So ist in (109) $T = \frac{19\ 12}{18{,}5.\ 12} . t$

$= \left(1 + \frac{0{,}5}{18{,}5}\right) . t = (1 + \frac{1}{37}) . t$; wo $\frac{10000}{37}$ $= 270 + \frac{10}{37}$ also $T = 10270 + \frac{10}{37}$. So viel Goldgülden von 1660 wären statt der von 1443 zu geben, wenn eben so viel Gold wieder erstattet werden muß.

114. Man behalte 110; 111; setze aber, auf die Mark gehn von den alten Goldgülden 67 = r; von den neuern 72 = R; So ist

T =

$$T = \frac{19}{18,5} \cdot \frac{72}{67} \cdot t = \left(1 + \frac{1}{37}\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{67}\right) \cdot t$$

$$= \left(1 + \frac{1}{37} + \frac{5}{67} + \frac{5}{37 \cdot 67}\right) \cdot t$$

$\log 37 = 1,5682017$

$\log \frac{1}{37} = 0,4317982 - 2$

$\log 10 = 1,$

$\log 134 = 2,1271048$

$\log \frac{5}{67} = 0,8728952 - 2$

$\log \frac{5}{37 \cdot 67} = 0,3046934 - 3$

$\frac{1}{37} = 0,027027$

$\frac{5}{67} = 0,074627$

$\frac{5}{37 \cdot 67} = 0,0020169$

$0,1036709$

Daher $T = 10000 + 1036,709$

115. Das Exempel ist aus folgendem Buche:

Alter und Neuer Münzschlüssel, oder Beantwort- und Eröffnung 222 Curioser Fragen das Münzwesen betreffend, nähmlich von der Münze Alterthum . . . . . bis auf dieses 1683 Jahr . . . wobey auch 1260 . . . Münzsorten in schönen Kupferrissen figurirt und vorgebildet seyn . . . Durch des Hochlöbl. Fränk. Kreises General Münzwardein Leonhard Wilibald Hofmann. Nürnb. 1683; 4.

Es

Es findet sich da zu Erläuterung der 12 Frage: Wie solle oder muß das alte Witte oder Wichte . . . gegen den jezigen Valor gerechnet . . . werden? 239 Seite.

Witte (von Weiß beym Silber im Gegensatze des Kupfers, das auch: Roth genannt wird) heisst also hie so viel als Korn, und Wichte Schrot.

Die Goldgülden für 1660 werden K. Ferdinand I. 1559 zu Augspurg aufgerichteter Münzordnung gemäß angegeben.

H. Beantwortung der Frage, ist mit viel juristischer und arithmetischer Weitläuftigkeit abgefasst, und die Rechnung nach folgender Anleitung angestellt, die der in re monetaria berühmte Rechtslehrer Renerus Budelius in tractatu suo de re nummaria L. 1. c. 18. n. 12. p. 77. giebt: Si scire desideras, quot aurei ex marca auri puri secundum praescriptum pedem et ordinationem cudantur, per insignem illam, Astronomis, Arithmeticis et passim inter mercatores usitatam regulam proportionum quam Detri vocant, facile te expedis, Casum ad regulam collocando.

Uebrigens giebt H. für mein (113) genau eben die Zahl, für (114) $1036\frac{17}{24}\frac{16}{79}$.

116. Nach (109) verhalten sich die Mengen Silbers, in den 10000 alten und 11036,709 neuern, $= \frac{5}{5,5} : \frac{19}{18,5} = \frac{10 \cdot 37}{11 \cdot 37} = 10 : 11 + \frac{11}{37}$ $= 1 : 1,1297297$ (114).

117.

117. Also ist in den neuern Goldgülden so viel Gold, aber mehr Silber als in den alten, und in so fern das Silber doch auch Werth hat, würde in der That zu viel wiedergegeben.

118. Eine Menge neuer Goldgülden, in welcher zugleich so viel Gold, und so viel Silber wäre, als in 10000 alten, giebt es nicht (106). Verlangte man also eine völlige Gleichheit, so müsste der, dem die neuen ausgezahlt werden, am Gewichte so viel Silber zurückgeben, als er zu viel bekömmt.

119. Oder man müsste schätzen, was das Silber an Golde werth wäre. Das käme aber auf die Verhältniß des Silbers zum Golde an, die so veränderlich ist, und in 1443 gewiß anders gewesen ist, als in 1660. Ein Rechtsgelehrter, der über diesen Casum ein Responsum abfassen sollte, würde freylich diese Verhältnisse aufsuchen, ich werde hie dafür nicht bezahlt, und will also nur eine Verhältniß hersetzen, die in eine Zwischenzeit gehört, und mir ohngefähr in die Hände gefallen ist.

120. Sie steht in folgendem Buche: "Eyn Newe vnnd wolgegründte vnderweysung aller Kauffmanß-Rechnung .... Durch Petrum Apianum von Leyßnick, d' Astronomei zu Ingolstadt Ordinariß verfertiget." Ist zu Ingolstadt durch Georgium Apianum von Leyßnick 1527 gedruckt. Die Seiten sind nicht gezählt. Ich muß also die Stellen so angeben:

Auf

Auf dem Blatte A a v wird bey einem Rechnungsexempel angesetzt:

Die Mk fein Gold 93 fl 10 ß. Silber 8 fl 18 ß.

Es ist aber der fl = 20 ß, auf des Blattes Cvj zweyter Seite.

Also Gold: Silber = 93,5 : 8,9 = 10$\frac{4}{5}$: 1

Sehr unterschieden von den jezigen Verhältnissen: z. E. VII. C. 3. Abschn. 2. und gegenw. Cap. 85.

121. Ich will noch etwas zur Münzrechnung gehöriges, aus eben dem Buche beybringen. Auf des Blattes A a jjj zweyter Seite, steht folgende Erklärung:

"Tollet Rechnung lernt durch die Rechenpfennig ein Metall auß dem andern ziehen."

Auf der zweyten Seite des Blattes A a iiij steht: "Die formb vnnd gestalt der Tolleten wi sie auff einem Tisch soll gemacht werden."

Es ist nähmlich ein Rechenbret, so eingerichtet, daß die Münzrechnungen nach Gewichte und Werthe der Metalle darauf können geführt werden.

Es hat längst herunter drey Abtheilungen Cambi. Das erste Cambi zu den Stücken, das zweyte zum Golde und feinen Silber, das dritte zum Kaufe eines jeglichen Metalls.

Das Loth wird in Quentchen getheilt, dann in Viertheilsquentchen, oder Sechszehntheile des Lothes und ferner durch Halbirungen in 32; 64; 128 u. s. w. Theile.

122.

122. Folgendes ist ein Exempel, das auf die Tolleten gerechnet wird, auf vorhin (120) angeführter Seite.

Einer kauft ein Stuck Silber; wiegt Mark 82 Loth 14 Quentch. $3\frac{3}{16}$, $\frac{0}{32}$, $\frac{1}{64}$. Und hält die Mark an der Prob 1 Loth 3 Qu. $\frac{1}{16}$ Gold. Und eine Mark hält auch fein Silber 13 Loth 2 Qu. $\frac{1}{16}$. Kostet 1 Mark fein Silber fl 8 ß 18 Eine Mark Gold 93 fl 10 ß. Und man giebt von einer Mark, Scheiderlohn 8 ß 10 Haller. Ist die Frage etc.

Nähmlich was dieses Stück kostet?

Ein fl hat 240 Haller, wie auf dem letzten Blatte des Bogens P steht.

Aus dieser Aufgabe habe ich vorhin die Preise des Goldes und des Silbers gebraucht.

123. Auf der ersten Seite des Blattes Bb ij wird erinnert: Tollet werde auch mit der Feder oder Kreide gerechnet, und das sey nützlicher zum täglichen Gebrauche als die vorige Tolleten, die mit den Rechenpfennigen einen grossen Raum bedarf.

Als Exempel dieses Tollet, werden gewöhnlich ökonomische gegeben, z. E. was 34 Centner Wachs kosten, wenn der Preis von 1 C. gegeben ist.

Das gehört doch nicht unter die Definition der Tolletrechnung (121).

Diese Tolletrechnung, heisst es, werde durch etliche Buchstaben vollbracht, als C bedeute Hundert u. s. w.

In-

Indessen wird mit den Buchstaben nicht gerechnet, sondern mit Zifern.

Einige Tafeln zu Gold- und Silberrechnungen.

124. Die bisherigen Rechnungen erfodern nicht eben hohe Kunstgriffe, ihre öftere Wiederhohlung verursacht aber doch Zeitverlust und Mühe, die durch Tafeln erspart werden können. Davon werden einige, die ich bey der Hand habe, als Proben genug seyn.

125. Eröffnetes Geheimniß der praktischen Münzwissenschaft, samt beygefügter Tariffa über Gold und Silber, Nürnb. 1762. 4. Enthält allerley Nachrichten von Geschichte, Rechnungen und Arbeiten, auch Abbildungen von Oefen und Maschinen auf 8 Kupfertafeln. Hie erwähne ich es wegen der Tariffa, die aus lauter berechneten Tafeln entsteht, sie nehmen 314 Seiten ein, und lehren, wenn der Gehalt der rauhen Mark gegeben ist, wie viel eine gegebene Menge solcher Mark, fein hält.

Auch, was erfodert wird, wenn man fein Silber in 3 bis 15löthiges verwandeln will, und wie viel Silber von dergleichen Gehalte zu unterschiednen Werken erfodert wird.

126. Kurzgefasste Tafeln zu Ausrechnung des Goldes u. Silbers, von Raph. Levi. Hann. 1768.

Von andern Tafeln dieses Rechners habe ich X. Cap. 56 geredet.

Mein

Mein Exemplar gegenwärtiger habe ich auch aus seiner verauctionirten Bibliothek gekauft. Es ist auf dem Titel mit seinem beygeschriebenen Nahmen authenticirt.

Die erste Tafel lehrt, wie viel Mark und Loth fein in einer gegebenen Menge rauher Mark enthalten sind, wenn man weiß, wie viel die rauhe Mark fein hält. Die Angabe dieses letzten Feinen, geht durch alle ganze Lothe durch, und die Zahl der rauhen Marke, durch 1 ... 10; dann durch alle Zehnen, und Hunderte bis mit 1000.

So reicht die Tafel, von etwa einer Quartseite zu, jede der angezeigten Fragen zu beantworten; nur muß man immer mehrere Glieder von ihr addiren. Z. E. 265 rauhe Mark, zu 11 Loth fein, da sucht man, was 200; und 60; und 5; jede zu 11 Loth fein, halten.

Die 2. Tafel beantwortet eben die Frage, wenn die rauhe Mk von $\frac{1}{2}$ Grän bis 17 fein ist. Die dritte und vierte Tafel geben den Gehalt fein von einer gegebenen Menge rauher Loth an, wenn die Mk Lothe und Gräne fein hält.

Weil die Mark Abtheilungen in Lothe, Sechszehntheile des Lothes oder Pfennige, und Gräne hat, so waren so viel Tafeln nöthig. Es giebt Fälle, wo sie alle vier zusammen müssen gebraucht werden, z. E. wenn die Mk 13 Loth 11 Gr. fein hält, wie viel fein ist in 542 Mk 13 Lth 8 Pfenn. rauh; Da müssen Zehn Posten addirt werden.

Folgende Tafeln zeigen, wie viel eine gegebene Menge Mark, Lothe, Grän kosten, wenn der Preis einer Mark fein gegeben ist.

Die 11. Tafel gehört zur Alligationsrechnung, enthält abgekürzte Logarithmen. Das Urtheil, das ich von den für Wechselrechnungen gefällt habe, gilt auch von gegenwärtigen. Aus 21 Mark Silber, da die Mark 9 Loth 6 Grän fein hält, durch Zusatz von Kupfer achtlöthiges zu machen, dazu würde ich doch weder ganze Logarithmen brauchen, noch verstümmelte.

Die Anordnung der Tafeln vermöge der dekadischen Progression verdient indessen Lob, da solchergestalt wenig Tafeln ausrichten, wozu sonst eine Menge gehört, die L. zu Berechnung des feinen Silbers allein auf 289, angiebt. Tafeln des Werthes müssen noch 288 dazu kommen.

127. Bey Aaron Kalman Cohens Tafeln, (X. C. 172.) betreffen die letzten auch Silbercours und Feinheit.

XIII. Ca-

XIII. Capitel.

Einzelne arithmetische Untersuchungen und Nachrichten.

I. Abschnitt.

Die Regel Falsi.

1. Man sucht eine Zahl, von der folgendes angegeben wird: Etliche Vielfache von ihr, oder Theile, die herauskommen, wenn man sie mit ganzen Zahlen dividirt, sollen addirt oder abgezogen, zusammen eine gegebene Zahl ausmachen.

Diese Frage zu beantworten nimmt man nach Gefallen eine Zahl an, macht von derselben die angezeigten Vielfache und Theile, verfährt damit, so wie für die gesuchte Zahl soll verfahren werden, und sieht, was herauskömmt.

Kömmt die gegebene Zahl heraus, so hat man die gesuchte Zahl sogleich errathen.

Kömmt was anders heraus, so schliesst man nach der Regel Detri,

Was herauskömmt: angenommenen Zahl = der gegebenen Zahl: der gesuchten.

Das heisst die Regel Falsi eines einzigen Satzes. Regula falsi unius positionis.

2. Exempel. Von einer Anzahl feindlicher Soldaten ist der dritte Theil geblieben, der vierte gefangen worden, 1000 sind entflohen: Wie viel waren ihrer?

Man nimmt willkührlich eine Zahl an, nur der bequemern Rechnung wegen so, daß man die angezeigten Theile von ihr in ganzen Zahlen nehmen kann, nothwendig ist das nicht.

Sie sey 12; Man setze also, von 12, sind $\frac{1}{3}$. 12 = 4 geblieben, $\frac{1}{4}$. 12 = 3 gefangen, so wären 12 − 4 − 3 = 5 entflohen. Also 5 : 12 = 1000 : 2400; Das letzte Glied ist die gesuchte Zahl; Drittheil und Viertheil davon sind 800 + 600 = 1400 und so konnten noch 1000 entlaufen.

3. Nennte man in diesem Exempel die gesuchte Zahl = x, so wäre $\frac{1}{3}$ x + $\frac{1}{4}$ x + 1000 = x also 1000 = x. (1 − $\frac{1}{3}$ − $\frac{1}{4}$) = x. $\frac{5}{12}$ und x = $\frac{12000}{5}$ wie vorhin.

4. Hieraus erhellt sogleich, daß alle Exempel, wo sich die einfache Regel Falsi anbringen läßt, folgendergestalt beschaffen seyn müssen: Die ganzen Zahlen oder Brüche, mit denen die gesuchte Zahl multiplicirt wird, rechne man wie es ihre Zeichen + oder − erfodern, zusammen; so kömmt allemahl eine einzige gegebene Zahl aus ihnen, die m heissen mag. Und wenn a die gegebene Zahl heisst, die das Alles zusammen ausmachen soll, so ist m. x = a;

Nun

Nun nehme man statt x, das man nicht weiß, eine Zahl r nach Gefallen an. Macht man mit ihr, was man mit der gesuchten Zahl machen soll, so kömmt m. r = p wo p also bekannt ist.

Und deutlich p : r = a : x

5. Freylich wäre es leichter, sogleich $x = \frac{a}{m}$ zu berechnen. Wem nun aber nicht einfällt, daß man Alles bekannte, das in eine unbekannte Zahl multiplicirt wird, zusammenrechnen, und als einen einzigen Factor ansehen kann?

6. Und wie es möglich ist, daß Einem dieses nicht einfallen kann, wird daraus begreiflich: Wer keine Buchstabenrechnung braucht, wenigstens was geschehen soll, nicht mit den arithmetischen Zeichen ausdruckt, der übersieht nicht auf einmahl, was geschehen soll, sondern denkt es nach und nach.

Er kann also was ihm vorgesagt wird, mit einer angenommenen Zahl nach und nach machen, z. E. $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$ von ihr nehmen;

Aber er bemerkt nicht so leicht, was herausgekommen wäre, wenn er auf einmahl gethan hätte, was er nach und nach thut, sogleich $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ von ihr nähme.

Wenn der einfache Satz der Regel Falsi nicht zureicht.

7. Wenn die gegebene Zahl nicht blos aus Vielfachen und Theilen der gesuchten entsteht, sondern zu denselben noch eine gegebene Zahl addirt oder davon abgezogen werden muß; die Gleichung also so aussähe

$$mx + b = a$$

8. Da nehme man nach Gefallen r an und erhalte so $mr + b = p$

9. Hie ist aber nicht $p : r = a : x$.

10. Man nehme also noch eine Zahl t nach Gefallen, und erhalte $m.t + b = q$

11. So ist $m.(x - r) = a - p$; $m.(x - t) = a - q$; $m.(r - t) = p - q$;

12. Ferner mache man $p - q : r - t = a - p$: einer vierten Zahl. Diese ist aus (11)

$$= \frac{a - p}{m} = x - r$$

13. Also $x =$ dieser vierten Zahl $+ r$

14. Diese Vorschriften werden mit Worten etwa so ausgedruckt.

I) Man nehme eine Zahl an (r) und sehe, was sie giebt (p)

II) Auch eine zweyte (t) und sehe, was die giebt (q)

III) Man vergleiche mit der gegebenen Zahl (a) die gefundne p; q; Der Unterschied zwischen jeder und der gegebenen heisst Irrthum,

zu

zu wenig, wenn die gefundene kleiner ist als die gegebene, zu viel, wenn sie grösser ist.

IV) Sind die Irrthümer ähnlich, beyde zu wenig oder beyde zu viel, so nehme man ihren Unterschied.

V) Sind sie unähnlich, einer zu viel, der andre zu wenig, so nehme man ihre Summe.

VI) Zu diesem Unterschiede oder Summe, der angenommenen Zahlen Unterschiede, und einem Irrthume, suche man die vierte Proportionalzahl.

VII) Die addire man zu der angenommenen Zahl, welche den Irrthum gab, den man in (VI) brauchte. So kömmt die Gesuchte.

15. Man wird V gleich einsehn, wenn man bedenkt, daß unähnliche Irrthümer, einer bejaht, der andre verneint sind, also sie abziehen heisst, sie addiren.

Wäre p kleiner als a aber q grösser, so druckte man den letzten Irrthum so aus $q - a$; Der erste bliebe $a - p$; Aus ihnen entsteht $q - p$, wenn sich a aufheben soll.

16. Exempel. Ihrer drey haben zusammen $400 = a$ gewonnen; der zweyte 12 mehr als der erste, der dritte 16 mehr als der zweyte. Wie viel beträgt jedes Gewinnst.

Man setze einmahl für des ersten Gewinnst 1; So hat der zweyte 13 gewonnen, der dritte 29; Zusammen ist der Gewinnst 43; Soll 400 seyn, also der Irrthum 357, zu wenig.

Dann setze man des ersten Gewinnst 2; So ist des zweyten seiner 14; des dritten 30; Aller zusammen 46; Der Irrthum 354 auch zu wenig.

Also, der Irrthümer Unterschied = 3

Der angenommenen Zahlen Unterschied = 1

3 : 1 = 357 : 119

Den Irrthum 357 gab die angenommene Zahl 1

Also die gesuchte Zahl, oder

des ersten Gewinnst	= 1 + 119	= 120
des zweyten	=	132
des dritten	=	148
Summe	=	400

17. Die Exempel (2; 16) sind aus Tacquet im XI. C. 197 angef. Arithmetik L. 4. C. 5. 6. T. hat die Theorie und Ausübung dieser Regel sehr umständlich abgehandelt, Vorschriften zu bequemer Ausübung derselben, und noch ein ander Verfahren für die Regel von zween Sätzen gelehrt.

18. Freylich ist es eine sehr unnöthige Weitläuftigkeit, auf diese Art zu berechnen, was man sogleich aus $x = \frac{a-b}{m}$ (7) findet.

19. Im Exempel (16) wäre des zweyten Gewinnst = x + 12; des dritten = x + 28; also aller drey = 3 x + 40 = 400; x = $\frac{360}{3}$

20. Sti

20. Stifel Ar. int. App. L. I. p. 98 führt, Bereicherungen der Regel Falsi durch Gemma Frisius, als eine vortreffliche Erfindung an. Sie beziehn sich auf Fragen, wo Producte und Potenzen der gesuchten Zahlen vorkommen; z. E.

Ein Paar Zahlen zu finden, die sich wie 2 : 3 verhalten und zum Producte 864 geben.

Wenn die kleinste = y; so ist $\frac{3}{2}$. y. y = 864; also y. y = 2. 288 = 4. 144; y = 12.

21. Bey der Regel Falsi wird statt der Zahl, die man sucht, eine willkührliche angenommen, und mit derselben so gerechnet, wie man mit der gesuchten rechnen sollte.

Bey der analytischen Rechnung setzt man statt der unbekannten Zahl einen Buchstaben, und macht eben das mit ihm.

In so weit also ist das Verfahren der Regel Falsi dem analytischen ähnlich.

22. Nur darinn unterschieden, daß: Rechnung mit einer bestimmten Zahl, auch ein bestimmtes Facit giebt, das ist dann nicht die gegebene Zahl, die herauskäme, wenn man statt der willkührlichen sogleich die wahre, die man erst sucht, genommen hätte; Und so muß dieses Facit erst mit der gegebenen Zahl verglichen werden, die gesuchte zu finden. Die analytische Rechnung druckt ein unbestimmtes Facit durch den Buchstaben aus, der die unbekannte Zahl bedeutet, und findet dadurch den Buchstaben ohne Versuche.

23. Daher bemerkt Stifel: Certum est regulam Falsi formatam esse iuxta formam regulae Algebrae, quemadmodum regula Algebrae formata est iuxta formam regulae Detri. Arithmet. L. III. c. 1.

Auch Hr. Hofr. Karsten hat die Regel Falsi vorgetragen, den Gang der mathematischen Erfindungskunst zu zeigen, Lehrbegriff der Mathem. II. Th. (Greifsw. 1768) allgem. Rechenk. 181. §.

24. Man findet die Regel Falsi selbst von Mathematikern erwähnt, denen es nicht an ganz andern Kunstgriffen fehlte. Newton bedient sich ihrer zu Bestimmung der Planetenbahnen; de Mundi Systemate p. 99. ed. Lond. 1731. Man nehme das Verhalten zwischen der Geschwindigkeit eines Kometen und seiner Entfernung von der Sonne, einmahl an, und berechne daraus die Bahn, dann noch einmahl anders, und daraus wiederum die Bahn, finde aus Observationen die Fehler jeder Bahn, potest assumtio per regulam falsae positionis corrigi et sic tertia inveniri traiectoria quae cum observationibus plane congruet. Für das plane wollte ich eben nicht stehen, da man an demselben, seit Newton bis jezt, noch so viel gearbeitet hat.

25. Weil nach der Regel Falsi die gesuchte Zahl vermittelst der beyden Irrthümer vollkommen richtig gefunden wird, so bekümmert man sich gar nicht darum, daß die angenommenen

ihr

ihr etwa nahe seyn sollen, sondern nimmt solche so an, wie man am bequemsten mit ihnen rechnen kann.

Den Theil der Regel Falsi; Eine Zahl annehmen, und das, was sie giebt, mit dem, was die gesuchte geben soll, vergleichen, braucht man häufig in der Analysis, in der Astronomie bey Bestimmung der Planetenbahnen, und anderswo. Nur ist man alsdann bedacht, die Zahl der Gesuchten nahe anzunehmen, und sich dieser ferner durch andre Rechnungen zu nähern, als die eigentliche Regel Falsi vorschreibt.

26. Noch eine logische Bemerkung läßt sich bey ihr machen. Man hat sie als ein Beyspiel des Satzes angeführt: daß zuweilen aus falschen Voraussetzungen Wahrheit könne gefolgert werden.

Daniel. Lipstorpii Lubec. Specimina philosophiae Cartesianae . . . Leiden 1653; Append. Num ex falsis directe verum possit elici p. 216.

Lipstorp bemerkt ebenfalls, daß man nur so verfahre, wie in der Analysis bey Gleichungen, und die Wahrheit aus den angenommenen Zahlen herausbringe, non quia falsi sunt, sed quia debitam ad valorem quaesitum rationem et virtutem in se continent. Welches wohl deutlicher hätte können gesagt werden.

27. Den Satz: Man könne aus falschen Voraussetzungen Wahrheit folgern, hatte Tac-

quet

quet behauptet, und sucht ihn noch gegen Lipstorpen zu vertheidigen. Tacqu. Elem. Geom. (Amst. 1683) in App.

Es kömmt auf die Bedeutung des Wortes an; Eigentlich schliesst man nie aus dem Falschen Wahrheit. Wenn man zeigt, aus dem Angenommenen folge etwas, das sicherer Wahrheit widerspricht, so ist das Angenommene falsch, und freylich alsdann der ihm entgegengesetzte Satz wahr, dergleichen deductiones ad impossibile in der Geometrie häufig vorkommen. Das nennt T. aus Falschem Wahrheit schliessen.

28. Vielmahl dient auch das Falsche, das man annimmt, eigentlich nicht zum Grunde des Schlusses, sondern nur zur Einkleidung. Allezeit schliesst man alsdann nicht aus dem Falschen, sondern aus dem, was in ihm wahr ist. Ich habe dieses in ein Paar Aufsätzen ausgeführt, die sich in den Belustigungen des Verstandes und des Witzes finden.

Vom Nutzen der Erdichtungen im Erfinden, VII. Band (Leipz. 1744) 343 S.

Ueber die Hypotheses in der Naturlehre, VIII. Band, L. 1745; 455 S.

29. Das Angeführte wird zeigen, daß diese so berühmte Regel Falsi, doch noch verdient, gekannt zu werden, wenn man sie gleich jezo nicht mehr braucht.

II. Abschnitt.

Unbestimmte Fragen, welche durch beygefügte Umstände bestimmt werden.

1. Wenn man ein Paar Zahlen angeben soll, deren Product = 100; So heisse die eine von ihnen = x die andre ist alsdann $\frac{100}{x}$. Da mag man nun für x annehmen, was man will, so lässt sich allemahl die andre daraus finden.

2. Wenn aber zugleich erfordert würde, daß beyde Zahlen bejahte ganze seyn sollten, so müsste x ein Factor von 100 seyn. Es gäbe also nicht mehr als folgende Antworten

x	2	4	5	10
100 : x	50	25	20	10

3. Eine Frage wie (1) auf die sich **unzählige Antworten** geben lassen, heisst **unbestimmt.** Durch solche Umstände wie (2) daß z. E. die gesuchten Zahlen lauter ganze bejahte seyn sollen, wird die Zahl der Antworten oft auf wenige eingeschränkt, und dadurch kann die Aufgabe **bestimmt** werden.

4. In der Algebra heisst eine Aufgabe **bestimmt**, ebenfalls wenn die Grösse, die man in ihr sucht, nur eine gewisse bestimmte Menge von Werthen hat, so daß der Aufgabe nur einer von diesen Werthen genug thut. Aber diese

Men-

Menge wird alsdann durch den Exponenten der Potenz bestimmt, auf welchen die gesuchte Grösse in der Gleichung steigt, daraus sie gefunden wird.

Wenn $x^3 - 6x^2 + 11x = 6$; So lehrt die Algebra, daß x nur drey Werthe haben kann, weil die dritte Potenz davon in der Gleichung vorhanden ist. Für das Exempel, sind die drey Werthe: 1 oder 2 oder 3;

Solche Gleichungen gehören eigentlich nicht in die gemeine Arithmetik, wo man entweder nur die erste Potenz der unbekannten Grösse betrachtet, oder wenn höhere von ihr vorkommen, die Frage durch die gewöhnliche Ausziehung der Wurzeln beantwortet, also nur reine Potenzen der gesuchten Grösse hat.

Auch bey denen, bekömmt eine Frage mehr als eine Antwort, so bald die Potenz höher als die erste steigt. Die Zahl, deren Quadrat 100 ist, kann + 10 oder — 10 seyn. Den Würfel 8 giebt freylich keine andere mögliche Zahl als 2; aber $-1 \pm \sqrt{-3}$ geben eben den Würfel, nähmlich die unmögliche Wurzel aus — 3; zur — 1 mit + oder mit — gesetzt.

Allgemein handelt hievon meine Analysis endlicher Grössen (237), und zeigt, daß allemahl auch solche reine Potenzen eine bestimmte Menge Wurzeln haben, darunter, so bald es über die zweyte geht, allemahl unmögliche sind.

Hie

Hie bringe ich diese algebraische Bedeutung des Wortes bestimmt nur bey, um zu zeigen, wie sie von voriger (3) unterschieden ist.

5. Ob man jede der Grössen, die man sucht, mit einem eignen Buchstaben andeuten, oder vermittelst des Verhaltens, das beyde zum Gegebenen haben, eine sogleich durch die andre angeben will, wie ich in (1) gethan, das kömmt darauf an, wie man die Frage am leichtesten durch die arithmetischen Zeichen darstellen und behandeln kann.

6. I. Von einem Paare Zahlen, können Summe und Unterschied nicht gleich seyn.

Denn das hiesse: Es müsste gleichviel herauskommen, wenn man die zweyte Zahl zur ersten addirte, oder davon abzöge. Die zweyte müsste also $= o$ seyn.

II. Sollten aber beyder Zahlen, x; y; Summe und Product einerley seyn, so wäre $x + y = x\,y$

$$\text{also } x = y.\,(x-1);\quad y = \frac{x}{x-1};$$

$$x + y = \frac{x^2}{x-1} = x\,y$$

III. Man kann also x völlig nach Gefallen annehmen; selbst einem uneigentlichen Bruche gleich, da würde aber y verneint.

Nimmt man es nur sehr wenig grösser als 1; so kömmt y sehr groß, und dann ist sowohl die Summe beyder Zahlen, als ihr Product, nur wenig von der grössten unterschieden.

Es

Es sey $x = 1{,}001$ so ist $y = \frac{1{,}001}{0{,}001}$ $= 1001$; und Product wie Summe sind, jedes $= 1002{,}001$

Je weniger x die Einheit übertrifft, desto näher kommen Product und Summe dem grossen Werthe von y, den man alsdann findet.

Die Gränze hievon ist $x = 1$ zu setzen, da man $y = \frac{1}{0}$ unendlich nennt, und dieses mit 1 multiplicirt, eben so viel giebt, als dazu addirt.

Für $x = 2$ kömmt $y = 2$. Für jeden andern Werth von x, der grösser als 1 ist, wird y ein Bruch, ein uneigentlicher, wenn x grösser als 1.

Man setze $x = 1 + z$ so ist $y = 1 + \frac{1}{z}$

Nimmt man also x zwischen 1 und 2, so ist $\frac{1}{z}$ ein Quotient, immer grösser, je kleiner z ist, je weniger 1 von x übertroffen wird. Also kann dieser Quotient so groß werden als man will, wenn x der Einheit so nahe kommen kann als man will.

Exempel. $x = 1{,}001$, so ist $y = 1001$ $x + y = 1002{,}001$, $xy = \frac{(1001)^2}{1000}$

Daher für $z = 0$ oder $x = 1$, $y = \infty$

Beyde Zahlen können nie ganze seyn, als wenn jede $= 2$.

Wenn

Wenn x gröſſer ist als 2 und immer wächst, so ist y kleiner als 2 und nähert sich der 1 immer mehr und mehr, je gröſſer x wird.

IV. Man nehme nach Gefallen ein paar ganze Zahlen an, eine $= a$; die andre $= b$; Es sey $x = 1 + \frac{a}{b}$, so ist $y = \left(1 + \frac{a}{b}\right)$. $\frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$; und $xy = \frac{(a+b)^2}{a.b} = x + y$

So findet man, aus jedem Paar angenommener ganzen Zahlen, ein Paar zusammengehörige Werthe der gesuchten; einer davon ist allemahl ein Bruch.

Es sey $a = 15$; $b = 3$; $x = 6$ so ist $y = 1 + \frac{1}{5}$, und $6.(1 + \frac{1}{5}) = 7 + \frac{1}{5}$

V. Unterschied und Product gleich gesetzt, giebt $y - x = xy$

also $y.(1 - x) = x$; $y = \frac{x}{1-x}$

$xy = \frac{x^2}{1-x}$

Oder auch $x = \frac{y}{y+1}$

Wenn hie y eine ganze Zahl ist, so kann x keine seyn. Auch ist x ein eigentlicher Bruch, wenn y nicht kleiner ist als 1. Je gröſſer y wird, desto mehr nähert sich x der 1; es ist nähmlich $1 - x = \frac{1}{y+1}$

Exempel: $y = 999$; $x = \frac{222}{1000}$; $xy = \frac{999^2}{1000}$ $y - x = \frac{999000 - 999}{1000} = \frac{999\,(1000-1)}{1000}$

Man setze in voriger Bedeutung der Buchstaben; $x = 1 - \frac{a}{b}$ so kömmt $y = \left(1 - \frac{a}{b}\right)$. $\frac{b}{a} = \frac{b}{a} - 1$

Wenn $a = 14$; $b = 21$; ist $x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{2}$; und $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

VI. Summe und Quotient gleich; $x + y = \frac{y}{x}$ also $x^2 + xy = y$; $\frac{x^2}{1-x} = y$; $\frac{x}{1-x} = \frac{y}{x}$

Ist wiederum $x = 1 - \frac{a}{b}$ So kömmt $y = \frac{(b-a)^2}{ab}$

Für $a = 14$, $b = 21$ kömmt $x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{6}$. $\frac{3}{2} = \frac{1}{6}$ und $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

VII. Unterschied und Quotient $y - x = \frac{y}{x}$; $yx - x^2 = y$; $y = \frac{x^2}{x-1}$; $\frac{y}{x} = \frac{x}{x-1}$

Für

Für $x = 1 + \frac{a}{b}$ ist $y = \frac{(b+a)^2}{a.b}$

Wenn $a = 15$; $b = 3$; kömmt $x = 6$; $y = \frac{36}{5}$; Und $\frac{36}{5.6} = \frac{36}{5} - 6$.

7. Die Fragen (6; II; V; VI aber nicht mit VII) mit allgemeinen Auflösungen, freylich nicht durch Buchstabenrechnung, führt Schwenter mathem. Erquickst. I. Theil 76 ... 78 Aufgabe an, aus M. Joh. Widmann v. Eger Arithmetica vor 107 Jahren gedruckt; Wenn Schwenter dieses geschrieben hat, kann man ganz genau nicht wissen, die mathemat. Erquickstunden sind 1636 herausgekommen, bald nach seinem den 19. Jan. selbigen Jahres erfolgten Tode. Man s. Doppelmayer, von Nürnbergischen Mathematicis ... 96 S. Widmann findet sich nicht im Gelehrtenlexicon, auch nicht in Wydra Historia Matheseos, in Bohemia et Moravia cultae (Prag 1778.). Schwenter sagt: es seyen bey ihm mehr schöne Regeln und Inventiones zu finden, er habe ganz vertreulich gehandelt und vielen Rechenmeistern das Eyß gebrochen und den Weg gebahnet.

8. Man sucht zwo ganze Zahlen, die zusammen 100 ausmachen. Eine mit 8 dividirt, läßt 7 zum Reste, die andre mit 10 dividirt, ebenfalls 7.

Die erste ist also $= 8.x + 7$, wo x eine ganze Zahl seyn muß.

Die zweyte $= 100 - 8x - 7 = 93 - 8x = 10y + 7$ wo y auch eine ganze Zahl seyn muß.

Also $86 - 8x = 10y$

Soll, was linker Hand steht, ein Zehnfaches einer ganzen Zahl seyn, so muß für x etwas angenommen werden, dessen Achtfaches zur niedrigsten Ziser 6 hat, damit sich diese Ziser in 86 aufhebt.

Man hat also folgende zwo Antworten

x	8x	10y	y	I. Zahl	II. Zahl.
2	16	70	7	23	77
7	56	30	3	63	37

$86 - 8x = 10y$ liesse sich auch so behandeln $8 + \frac{6 - 8x}{10} = y$; Folglich $\frac{6 - 8x}{10}$ eine ganze Zahl; das ist $\frac{3 - 4x}{5}$ eine ganze Zahl.

Bejaht aber kann die nicht seyn.

Und doch muß sie mit 8 eine bejahte ganze Zahl ausmachen.

Also ist $\frac{4x - 3}{5}$ eine bejahte ganze Zahl, kleiner als 8.

Es sey $\frac{4x - 3}{5} = n$; $x = n + \frac{n + 3}{4}$

n =	1	5	9
$\frac{n+3}{4}$ =	1	2	3
x =	2	7	12

n = 9

$n = 9$ gäbe also $86 - 96 = 10y$ oder $-1 = y$

9. Die Rechenmeister pflegen solche Fragen in Erzählungen einzukleiden, das hat zweyerley Wirkung: Erstlich klingt die Frage so ergötzlicher — wenigstens für jemanden, dem eine Frage blos von Zahlen wie (8) zu trocken wäre — Zweytens wird sie durch die Umstände, welche die Erzählung beyfügt, etwas verdunkelt, man muß nähmlich diese Umstände wiederum absondern, das bloß Arithmetische in der Frage zu erkennen. Gewöhnlich liegt in der Erzählung auch das, was die Aufgabe bestimmte, z. E. daß die Zahlen ganze seyn müssen.

10. Nur erwähnte Frage wird so vorgetragen: Zwo Bäuerinnen haben zusammen 100 Eyer; die erste spricht: Wenn ich die meinigen zu 8 überzähle, so bleiben 7 übrig; die andre spricht: Wenn ich die meinigen zu 10 überzähle, bleiben mir auch 7 übrig; Wie viele Eyer hatte jede?

11. So findet sie sich in Hrn. Leonh. Euler, vollständiger Anleitung zur Algebra, St. Petersb. 1770; II. Th. 2. Abschn. 7. §. Hr. E. braucht noch eine dritte Grösse z durch die er die beyden andern bestimmt.

12. Der ganze zweyte Abschnitt dieses Buchs betrifft die unbestimmte Analytik, und enthält eine Mannichfaltigkeit verwickelter Fragen mit sinnreichen Auflösungen. Der Nutzen davon ist eigentlich Uebung und Vergnügen des Verstandes. Die schwersten betreffen Quadrate und Würfel. Ich schränke mich hie auf Fragen

ein, wo nur die erste Potenz des Gesuchten vorkömmt.

12) Wenn m, n, gegebene ganze Zahlen sind, die ganze Zahl, x, so zu finden, daß $\frac{mx}{n}$ eine ganze Zahl ist.

I. Fall. m, n, haben keinen gemeinschaftlichen Factor; (numeri inter se primi).

Da ist n selbst der kleinste Werth, den x haben kann; Und ferner kann man statt x jedes Vielfache von n setzen.

Ex. $\frac{12}{35}$. x; wird 12; 2. 12; 3. 12 u. s. w. nachdem man 35; 2. 35; 3. 35 u. s. w. statt x setzt.

II. Fall. Die beyden gegebenen Zahlen haben einen gemeinschaftlichen Factor, durch den beyde dividirt, auf den ersten Fall gebracht werden.

Da ist der kleinste Werth von x, der Factor von n, den m nicht hat, und die folgenden Werthe sind Vielfache dieses Factors.

Der kleinste Werth der herauskommenden Zahl, ist der Factor von m, den n nicht hat, und die folgenden sind Vielfache desselben.

Ex. $\frac{72}{21}$. x; wird auf $\frac{24}{7}$. x gebracht. Die Werthe von x sind also 7; 2. 7. u. s. w. Und die Werthe der herauskommenden Zahl; 24; 2. 24 u. s. w.

13. Wenn c auch eine ganze Zahl ist, so läßt sich nach Vorhergehendem machen, daß $\frac{mx}{n} + c$ eine ganze Zahl wird.

14.

14. Man verlangt, daß $ax + by = c$; wo alle Buchstaben ganze bejahte Zahlen bedeuten, und die drey ersten des Alphabets gegeben sind.

15. Also $x = \frac{c - by}{a}$;

Es sey $\frac{c}{a} = d + \frac{e}{a}$; die Buchstaben bedeuten allemahl noch ganze bejahte Zahlen, und e ist kleiner als a.

16. Folglich $x = d + \frac{e - by}{a}$ oder

$= d - \frac{by - e}{a}$;

Wie man hie y zu nehmen hat, läßt sich wohl allgemein nicht brauchbar darstellen, in besondern Exempeln muß man es aus der Beschaffenheit der bestimmten Zahlen herleiten.

17. Eine Zahl mit 5 dividirt soll 2 übrig lassen, eine andre 4, wenn sie mit 7 dividirt wird. Zusammen sollen sie 100 ausmachen.

Die erste heisse $5x + 2$; die zweyte $7y + 4$; Also $5x + 7y + 6 = 100$; und $5x + 7y = 94$; Daher in (14) $a = 5$, $b = 7$, $c = 94$; $\frac{c}{a} = \frac{94}{5} = 18 + \frac{4}{5}$; $d = 18$; $e = 4$; $x = 18 - \frac{7y - 4}{5}$

18. Da muß $\frac{7y - 4}{5}$ eine ganze Zahl

seyn, also $y + \frac{2y-4}{5}$ eine ganze Zahl; also $2y-4 = 5.m$; $2y = 5m+4$; Also ist $5m+4$ eine gerade Zahl, folglich, weil 5 ungerade ist, muß m gerade seyn.

Man nehme also statt m jede gerade Zahl, so hat man $y = \frac{5}{2}.m + 2$

m	0	2	4	6
y	2	7	12	17
$\frac{7y-4}{5}$	2	9	16	23

So liessen sich unzählliche Werthe für y finden.

Aber für die Aufgabe passen nur die, wo $\frac{7y+4}{5}$ nicht grösser als 18 ist.

Man hat also nur folgende Werthe dafür

y	2	7	12
x	16	9	2

Und so drey Paare gesuchter Zahlen

80 + 2 und 14 + 4
45 + 2 und 49 + 4
10 + 2 und 84 + 4

19. Aus den unzählichen Werthen (18) sind deßwegen nur so wenig brauchbar, weil, was aus ihnen entsteht, von x soll abgezogen werden (15). Wäre also die Gleichung so beschaffen

$$ax = by + c$$

So

So liessen sich alle die unzählichen Werthe, die man für y fände, brauchen, und gäben auch unzähliche Werthe für x.

20. Eine Zahl soll mit 7 dividirt aufgehn, mit 15 dividirt, 10 übrig lassen.

Also $7x = 15y + 10$;

$x = 2y + \frac{1}{7}y + 1 + \frac{3}{7}$

Folglich muß $y + 3$ sich mit 7 dividiren lassen.

Man nehme $y = 7m - 3$

So ist $x = 14m - 6 + m - \frac{3}{7} + 1 + \frac{3}{7}$

$= 15m - 5 = 5.(3m - 1)$

Die Zahl $= 35.(3m - 1)$

m	1	2	3
y	4	11	18
x	10	25	40
Zahl	70	175	280

u. s. w.

v. Clausb. Rechenk. 1343 S. nennt diese Aufgabe: einen harten Knoten.

21. Eine Zahl soll sich mit 5 dividiren lassen, aber mit 7 dividirt, 3 Rest geben.

Die erste Bedingung druckt $5x$ aus, die zweyte $7y + 3$; Also

$5x = 7y + 3$ Daher

$$x = y + \frac{2y + 3}{5}$$

Man setze $2y + 3 = 5.n$ also

$y = \frac{5n - 3}{2}$; So muß $5n - 3$ eine gerade Zahl seyn, folglich n eine ungerade.

Also jede ungerade Zahl statt n gesetzt, giebt einen Werth für y; und jeder solcher Werth ein $x = y + n$

n	1	3	5	7	
y	1	6	11	16	u. s. w.
x	2	9	16	23	

So ist eine der gesuchten Zahlen $= 5.23 = 112 = 7.16 + 3$

22. Eine Zahl soll mit 39 dividirt 16 übrig lassen, und mit 56 dividirt, 27;

Diese beyden Bedingungen geben

$$39p + 16 = 56q + 27 \text{ also}$$
$$39p = 56q + 11$$
$$p = q + \frac{17q + 11}{39}$$

Solchergestalt $17q + 11 = 39.r$

$$q = 2r + \frac{5r - 11}{17}$$

Daher $5r - 11 = 17.s$

$$r = 3s + \frac{2s + 11}{5}$$

Folglich $2s + 11 = 5.t$

$$s = 2t + \frac{t - 11}{2}$$

Und $t - 11 = 2u$

$t = 2u + 11$ Daher rückwärts

$s = 5u + 22$

$r = 17u + 77$

$q = 39u + 176$

$p = 56u + 253$

Da

Da ist $39.p + 16 = 39.56u + 39.253 + 16$
$56q + 27 = 56.39.u + 56.176 + 27$
So ist die gesuchte Zahl $N = 56.39.u + 9883$
wo $56.39 = 2184$.

23. Obgleich in diesen Rechnungen unter den Buchstaben lauter ganze bejahte Zahlen verstanden werden, so wird doch verstattet seyn, einem Buchstaben einen verneinten Werth zu geben, wenn dadurch in den übrigen Voraussetzungen der Rechnung nichts gestört wird.

Dergleichen wäre, wenn man in (22) u verneint setzte, so daß doch t und folglich alle die übrigen Buchstaben, bejahte Werthe behielten.

Der grösste verneinte Werth, den man so für u brauchen darf, wenn t bejaht bleiben soll, ist $u = 4$; giebt das kleinste bejahte $t = +3$, und so fort das kleinste bejahte $N = 1147$.

Man setzte also $u = x - 4$, so kömmt $N = 2184.x + 1147$, und die Zahlen, welche der Frage (22) genug thun, sind in einer arithmetischen Reihe, deren erstes Glied $= 1147$; Unterschied $= 2184$; Dergleichen sind
1147; 3331; 5515; 7699; 9883 ...

24. Zu Aufgaben dieser Art, gehört die Chronologische: Das Jahr der Julianischen Periode zu finden, dem gegebene: Indiction, Mondszirkel und Sonnenzirkel zugehören, wovon ich in meinen Anfangsgr. der angew. Mathematik 46 §. der Chronologie eine Analysis gegeben habe.

25. Fragen wie 8 ... 21 führen auf eine Gleichung, in der zwo Grössen unbekannt sind. Eben so können zwo Gleichungen gegeben seyn, in denen drey Grössen unbekannt sind, oder überhaupt eine Gleichung weniger als unbekannte Grössen sind. Ehe ich zu solchen übergehe, bringe ich noch eine Aufgabe bey, die in vollständigen Anleitungen zur Rechenkunst wohl bey der Lehre von Brüchen vorkömmt, weil sie einen Bruch sogleich auf die kleinsten Zahlen bringen lehrt. Da man aber dieses durch leichte Versuche, Zähler und Nenner zu zerfällen, bewerkstelligen kann, so hat sie mir für die Ausübung ziemlich entbehrlich geschienen, und ist deßwegen im I. Cap. weggeblieben.

Das grösste gemeinschaftliche Maaß von ein paar ganzen Zahlen zu finden; (duorum numerorum reperire communem mensuram maximam.)

26. Man sagt, eine Zahl messe die andre (metitur) wenn sich mit ihr die andere ohne Rest dividiren lässt, oder wenn sie ein Factor der andern ist.

27. Es sey A eine grössere, B eine kleinere Zahl, die erste, mit der zweyten dividirt, lasse C zum Reste, eine Zahl, die kleiner als die zweyte seyn muß; Also

$$A = a.\ B + C$$

28. Man dividire die zweyte Zahl mit dem ersten Reste, und bekomme einen zweyten Rest D,

klei-

kleiner als der erste; wiederum den ersten Rest mit dem zweyten, und bekomme einen dritten Rest, kleiner als der zweyte; nun den zweyten Rest mit dem dritten, und bekomme einen vierten, kleiner als der dritte; So fahre man fort, immer jeden vorhergehenden Rest mit dem folgenden zu dividiren.

29. Von diesen, immer abnehmenden Resten, giebt jeder, als Divisor beym vorhergehenden gebraucht, einen Quotienten, und entweder einen neuen Rest, oder keinen.

30. Findet das letzte statt, so ist der Rest, mit dem man den vorhergehenden so dividiren kann, daß die Division aufgeht, der beyden Zahlen grösstes gemeinschaftliche Maaß.

31. Ereignet sich das erste, so setze man die Division weiter fort, und kömmt man so nie auf eine Division, die keinen Rest giebt, so muß man auf eine kommen, die 1 zum Reste giebt; weil ganze Zahlen, die immer abnehmen, gewiß bis auf 1 oder bis auf 0 abnehmen.

32. Alsdann ist 1 der grösste gemeinschaftliche Divisor beyder Zahlen, oder sie haben keinen gemeinschaftlichen Factor, sind numeri inter se primi.

33. Nähmlich wenn ein Rest = 1 ist, so dividirt er seinen nächstvorhergehenden, ohne fernern Rest, also ist dieses nur ein besondrer Fall von (30).

34. Der Gang dieser Arbeiten läßt sich so vorstellen: Die grossen Buchstaben bedeuten

nach

nach der Ordnung, wie sie im Alphabete folgen, immer kleinere Zahlen

$$A = a.\ B + C$$
$$B = b.\ C + D$$
$$C = c.\ D + E$$
$$D = d.\ E + F$$
$$E = e.\ F$$

35. Weil F ein Factor von E ist, so ist es auch ein Factor von D;

Nähmlich $D = (d.\ e + e).\ F$

Folglich auch ein Factor von C, weil jeder der beyden Theile, aus denen C besteht, F zum Factor hat.

Eben so hat jeder der beyden Theile, aus denen B besteht, F zum Factor.

Und auch jeder der beyden Theile, aus denen A besteht.

Also ist F ein gemeinschaftlicher Factor von A und B.

36. P bedeute eine grössere Zahl als F.

Man nehme an; P sey ein gemeinschaftlicher Factor von A und B.

Weil $A - C = a.\ B$; und der Voraussetzung gemäß B sich ohne Rest mit P dividiren läßt, so ist auch $\frac{a.\ B}{P} = \frac{A-C}{P}$ eine ganze Zahl, also P ein Factor von $A - C$;

Da nun $\frac{A}{P}$ der Voraussetzung gemäß ei-

ne

ne ganze Zahl ist, so ist auch $\frac{C}{P}$ dergleichen, oder P ein Factor von C.

Daraus folgt auf eben die Art, daß P ein Factor von B — D = b. C ist.

Folglich auch von D;
Folglich von C — E = c. D
Folglich von E;
Folglich von D — F = d. E
Folglich von F.

Das heisst, die grössere Zahl P, müsste ein Factor der kleinern F seyn.

37. Also ist F, der grösste gemeinschaftliche Factor, den man suchte.

Für (32) wäre F = 1 und e = E.

Ich habe eine Reihe Divisionen angenommen, ehe man auf die kömmt, die aufgeht. Der Beweis ist offenbahr einerley, die Reihe möchte länger oder kürzer seyn.

38. Exempel. Das grösste gemeinschaftliche Maaß von 3780 = A und 2226 = B zu finden.

2226 | 3780 (1 = a
2226

C = 1554

1554 | 2226 (1 = b
1554

D = 672

672 | 1554 (2 = c
1344

E = 210

210 | 672 (3 = d
630

F = 42

42 | 210 (5 = e
210

0

Also ist 42 das grösste gemeinschaftliche Maaß, und in den kleinsten Zahlen ist die Verhältniß 3780 : 2226 = 90 : 53

39. Ex. Der Zahlen 361 = A; 248 = B, grösstes gemeinschaftliche Maaß zu finden.

248 | 361 (1 = a
248

C = 113

113 | 248 (2 = b
226

D = 22

22 | 113 (5 = c
110

E = 3

3 | 22 (7 = d
21

F = 1

1 | 3 (3 = e

Hie

Hie also ist das grösste gemeinschaftliche Maaß = 1. Die Zahlen haben sonst keinen gemeinschaftlichen Factor, und ihre Verhältniß läßt sich nicht in kleinern ausdrucken.

40. Die Aufgabe vor (26) ist Euklids 2. S. des 7. B. Mich erinnerte an ihr, die Aehnlichkeit ihres Verfahrens mit dem (21) wo auch immer Reste mit vorhergehenden dividirt werden. Hr. Euler hat auch diese Aehnlichkeit bemerkt Anl. zur Algebra 231. S. aber den Beweis der Auflösung nicht entwickelt.

Simon Jac. v. Coburg Arithmetischen Labyrinth, einen Bruch, wo man 54mahl dividiren muß, bis man das grösste gemeinschaftliche Maaß findet, giebt Schwenter math. Erquickst. I. Th. 86. Aufgabe.

41. Da Division wiederholtes Abziehen ist, so wird beym Euklid die Auflösung so ausgedruckt: Man solle die kleinere Zahl von der grössern abziehn, bis ein Rest, kleiner als sie, bleibt, diesen Rest wiederum von ihr, bis ein zweyter Rest, kleiner als er, übrig bleibt u. s. w. Statt dieses wiederhohlten Abziehens, brauchen wir bequemer Division. Bey Linien aber, kann es noch dienen, sie mit einander zu vergleichen, wie Wolf erinnert El. Arithm. §. 230. Dahin gehört des Mordente Verfahren, kleine Theile einer Grösse anzugeben, das ich Astronomische Abhandlungen, II. Samml. 176 S. erklärt habe.

42. Ich gehe nun zu Aufgaben, wie (25) erwähnt wurden.

Die Regel Cöci.

43. Eine gegebene Zahl = a; in drey Theile x; y; z, so zu theilen, daß, jeden Theil mit einer gegebenen Zahl multiplicirt, die Summe der Producte eine gegebene Zahl ist.

Also hat man I) $x + y + z = a$

II) $f.x + g.y + h.z = b$

wo nur die drey letzten Buchstaben des Alphabets unbekannt sind.

Beyde Gleichungen verbunden, geben

III) $f.x + g.y + h.(a - x - y) = b$

IV) $(f - h).x = b - a.h + (g - h).y$

Diese Aufgabe hat also viel Aehnliches mit der Vermischungsrechnung, (XI. Cap. 2. Aufg.)

44. Einschränkungen des ganz Unbestimmten in ihr können folgende seyn.

Keiner von den drey Theilen der gesuchten Zahl soll verneint seyn, welches auch vorhin beobachtet ward (XI. C. 2. Aufg. 132).

Folgende Rechnung zeigt, was diese Bedingung erfodert.

Man setze, f, g, h, nehmen wie sie in der Ordnung folgen, ab.

Nun; x angenommen, hat man

$$y = \frac{b - a.h - (f - h).x}{g - h}$$

$x + y$

$$x + y = \frac{b - a.h - (f - g).x}{g - h}$$

$$z = \frac{a.g - b + (f - g).x}{g - h}$$

So darf x nicht grösser seyn als

$$\frac{b - ah}{f - h}$$

Und nicht kleiner, als so, daß $ag + (f - g).x$ nicht kleiner ist als b

45. Eine zweyte Bedingung kann seyn, daß die Buchstaben lauter ganze Zahlen bedeuten sollen. Wie diese zu erhalten ist, muß wiederum an den einzelnen Exempeln untersucht werden.

46. **Exempel.** Man soll $30 = a$, in drey Theile theilen, die mit $15 = f$; $12 = g$, $10 = h$, multiplicirt, zusammen $390 = b$ geben.

Also $b - a.h = 390 - 300 = 90$; $a.g = 360$; $f - g = 3$; $g - h = 2$; $f - h = 5$

x nicht grösser als 18; $360 + 3x$ nicht kleiner als 390 oder $3x$ nicht kleiner als 30; x nicht kleiner als 10; fällt also zwischen 10 und 18.

$$\text{Nun } y = \frac{90 - 5x}{2} = 45 - \tfrac{5}{2}x$$

$$z = \tfrac{3}{2}x - 15$$

Damit y, z, ganze bejahte Zahlen werden, muß x eine gerade Zahl seyn. Also gehören zusammen

x	10	12	14	16	18
y	20	15	10	5	0
z	0	3	6	9	12

So ist 15. 16 + 12. 5 + 10. 9 = 240 + 60 + 90 = 390.

47. Eine Anzahl von 20 Personen, Männer = x; Weiber = y; Jungfern = z = 20 − x − y, verzehren 3 Thl. Ein Mann giebt $\frac{1}{3}$ Thl, eine Frau $\frac{1}{6}$ Thl, eine Jungfer $\frac{1}{12}$ Thl; Wie viel waren ihrer?

Also $\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{20-x-y}{12} = 3$

Oder $4x + 2y + 20 = 36$
$- x - y$

Daher $y = 16 - 3x$
$z = 4 + 2x$

x	1	2	3	4	5
y	13	10	7	4	1
z	6	8	10	12	14

So für die drey letzten Zahlen

$\frac{5}{3} + \frac{1}{6} + \frac{14}{12} = \frac{11+7}{6} = 3$

48. Die Rechenmeister nennen diese Regel Coeci, oder Zekis, oder Virginum, oder potatorum. Die beyden letzten Nahmen beziehen sich wahrscheinlich auf solche Exempel, wie das, das ich eben deßwegen nur angeführt habe. Den ersten könnte man wohl daher leiten, weil, wer die Kunst nicht weiß, nach den Zahlen blindlings herum-

herumtappen wird, ich vermuthe aber eher, er ist aus dem zweyten verderbt, welcher selbst wahrscheinlich ein verderbtes Arabisches Wort ist.

49. Einer kauft Diamanten an der Zahl D; Rubinen R; Smaragde S, zusammen 20 Stück für 60 Thl; einen Diamant zu 5 Thl, Rubin zu 3; Smaragd zu 1 Thl. Die Zahlen jeder Gattung werden gesucht.

Also $5D + 3R + S = 60$

$S = 20 - D - R$

Und $4D + 2R = 40$

$R = 20 - 2D$; $S = D$

D =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R =	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0
S =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Die beyden äußersten Antworten, kein Diamant, kein Rubin, wären nicht eigentlich dem Ausdrucke der Frage gemäß: So bleiben nur 9; Die giebt Beutel Rechenkunst (Leipz. 1693) 268 S.

50. Etwas weitläuftiger ist folgendes auch aus Beutel, 267 S.

Zwölf Personen, m Männer, w Weiber, g Junggesellen, j Jungfern, verzehren zusammen 120 gl; Ein Mann 16; Frau 8; Jg. 12; Jf. 4

Also I) $j = 12 - m - w - g$

II) $\left.\begin{array}{l} 16m + 8w + 12g \\ + 4.(12 - m - w - g) \end{array}\right\} = 120$

Daher $12m + 4w + 8g = 120 - 48$

III) $3m + w + 2g = 18$

Folglich $3m + 2g$ grösser als 6; weil w kleiner als 12 ist.

51. Diese Gleichung enthält drey unbekannte Grössen, also kann man zwo annehmen und daraus die dritte bestimmen.

52. Nun $3m + w + 2g = 18$

$m + w + g = 12 - j$

IV) $2m + g = 6 + j$

$m + \frac{1}{2}g = 3 + \frac{1}{2}j$

Folglich müssen g und j beyde zugleich gerade, oder ungerade seyn.

53. Nimmt man noch eine Bedingung an, nur daß sie den bisherigen nicht widerspricht, so bleibt (13) die Aufgabe doch noch unbestimmt.

54. So sey $m = w$

giebt in (III) $2m + g = 9$

Da muß g eine ungerade Zahl seyn, also auch j (52)

Es ist aber $j = 12 - 2m - g$ (I) $= 3$

g	1	3	5	7
m	4	3	2	1
w	4	3	2	1
j	3	3	3	3

55. Es sey $j = g$; So ist (IV) $m = 3$

Also in (III) $9 + w + 2g = 18$ oder $2g = 9 - w$; Diese Gleichung giebt g durch w, wie die (54) m durch g; Also kommen nun allemahl $m = 3$ und

w	1	3	5	7
g	4	3	2	1
j	4	3	2	1

56. Nähme man (54) und (55) zugleich an, so käme $2m + g = 9 = 2g + m$ also $m = g$, alle vier Zahlen wären gleich, jede $= 3$, und so die Aufgabe bestimmt, begreiflich, weil man zwo Bedingungen angenommen hat, nicht nur eine.

57. B. giebt nur diese Antwort für die bestimmte Aufgabe, die freylich am anständigsten ist, daß sich Alles paaren kann. Daß es mehr gebe, erwähnt er nicht. Vermuthlich wusste er nicht viel von unbestimmten Aufgaben.

58. Man setze von einem Geschlechte so viel als vom andern, oder $j + w = g + m$ so kömmt in (I) $2(m + w) = 12$; $m + w = 6$

Ferner in (III) $2m + 6 + 2g = 18$; $m + g = 6$

Daher $w = g$; folglich $m = j$

m	1	2	3	4	5
w	5	4	3	2	1
g	5	4	3	4	1
j	1	2	3	2	5

59. Hundert Stück Vieh werden um Hundert Thaler gekauft; w Ochsen, jeder 10 Thl, x Kühe, jede 5 Thl, y Kälber, jedes 2 Thl, z Schaafe, jedes $\frac{1}{2}$ Thl.

Also

$w + x + y + z = 100$

$10.\ w + 5x + 2y + \frac{1}{2}z = 100$

60. Also $z = 100 - w - x - y = 200 - 20.\ w - 10x - 4y$; Daher

$19w + 9x + 3y = 100$

61. Folglich kann w nicht grösser seyn als $\frac{100}{19}$, und da es eine ganze Zahl seyn muß, nicht grösser als 5.

62. Man setze $w = 1$; also

$9x + 3y = 100 - 19 = 81$

$x + \frac{1}{3}y = 9$

So muß y eine Zahl seyn, die sich mit 3 dividiren läßt, aber kleiner als 27 ist.

Ferner ist $x + y = 9 + \frac{2}{3}y$, daher $z = 90 - \frac{2}{3}y$

Man kann also acht Werthe von y annehmen, von den ich die beyden ersten und drey letzten, mit den zugehörigen darstelle

y	3	6	18	21	24
x	8	7	3	2	1
z	88	86	78	76	74

So ist für die letzte Columne, ohne eine, $10 + 2.\ 5 + 21.\ 2 + \frac{1}{2}.\ 76 = 100$

63. Aus $w = 2$ folgte in (60)

$9x + 3y = 62$. Also müsste $62 = 3.\ (3x + y)$ das Dreyfache einer ganzen Zahl seyn. Das ist es aber nicht, folglich kann man nicht $w = 2$ setzen.

64.

64. Eben so kann man nicht $w = 3$ setzen, denn da käme $9x + 3y = 43$ und diese bestimmte Zahl hat sogar keinen Factor als 1.

65. Für $w = 4$ kömmt $9x + 3y = 24$ also $y = 8 - 3x$; $z = 88 + 2x$

x	1	2
y	5	2
z	90	92

Für die letzte Columne

$$40 + 10 + 4 + 46 = 100$$

66. Für $w = 5$ ist $9x + 3y = 5$, welches nicht kann bewerkstelligt werden, wenn x, y, ganze Zahlen seyn sollen.

67. So hat die Frage (59) nicht mehr als zehn Antworten (62; 65). Man findet sie beym v. Clausberg Rechenk. 1366 §. 1345 S. Cl. giebt alle 10 an; Die bey mir in (65) die letzte Columne ausmacht, ist bey ihm falsch angegeben. Sie heisst da: 4 Ochsen, 2 Kühe, 1 Kalb, 93 Schaafe. Die Zahl der Schaafe muß allemahl gerade seyn.

68. Man soll vier Zahlen von folgender Beschaffenheit finden

$$a + 2b + 3c + 4d = 600$$
$$a + b + c + d = 300$$

69. Also $b + 2c + 3d = 300$

70. $\frac{b + 2c}{3} = (100 - d)$ muß eine ganze Zahl seyn, nicht grösser als 99

71. d sey ungerade $= 2f - 1$; so ist
$\frac{b + 2c}{3} = 101 - 2f$ ungerade;

Da muß auch b ungerade seyn $= 2e - 1$
Und $2c = 303 - 6f - 2e + 1$
$c = 152 - 3f - e$

72. d sey gerade $= 2f$; so ist auch b gerade $= 2e$; und $2c = 3.(100 - 2f) - 2e$
Also $c = 150 - 3f - e$

Für d ungerade.

73. In (71) ist der grösste Werth, den f haben kann, 50; Das giebt $c = 2 - e$; und so kann e nichts anders seyn als 1. So hat man
$b = 1$; $c = 1$; $d = 99$; $a = 199$
und $1.199 + 2.1 + 3.2 + 4.99 = 600$
Das sind die einzigen Zahlen, die der Gleichung (71) für $d = 99$ genug thun.

74. Allgemein ist in (71)
$b = 2e - 1$; $d = 2f - 1$;
$c = 152 - 3f - e$; also $a = 150 + f - e$

75. Man setze für f, jeden Werth von 50 bis 1; so $152 - 3f$ jedes Glied einer arithmetischen Progression, die sich mit 2 (73) anfängt, zur Differenz 3 hat, und zum letzten Gliede 149, die Zahl ihrer Glieder $= 50$.

76. Also machen die Werthe von c (71) folgende Reihe

$2 - e$	$5 - e$	$8 - e$	...	$146 - e$	$149 - e$

77. Da nun e allemahl wenigstens um 1 kleiner seyn muß als 152 — 3 f; so machen die Mengen der Werthe, die e haben kann, folgende Reihe

1|4|7|. . . . 145|148

Die Zahl der Glieder dieser Reihe ist auch 50; die Differenz der Glieder = 3; und so die Summe der Glieder = 149. $\frac{50}{2}$

= 3725

78. So viel unterschiedne Werthe also kann e in (71) haben, und so viel Antworten hat die Frage (68) wenn man d ungerade setzt.

79. Z. E. f = 49, der nächste Werth nach dem grössten (73) giebt d = 97; c = 5 — e

e	1	2	3	4
c	4	3	2	1
b	1	3	5	7
a	198	197	196	195

In der letzten Columne

195 + 14 + 3 + 4. 97 = 600

Für d gerade.

80. Also (72) gebraucht, ist a = 150 + f — e

81. Der grösste Werth, den f haben kann, ist = 49. Da kömmt d = 98; c = 3 — e, a = 199 — e

e|

e	1	2
c	2	1
b	2	4
a	198	197

Für die letzte Columme $197+2.8+3.1+4.98=600$

82. Der nächste Werth nach dem grössten ist $f=48$; also $d=96$; $c=6-e$; $a=198-e$. Da kann also e fünf Werthe haben,

e	1	2	3	4	5
b	2	4	6	8	10
c	5	4	3	2	1
a	197	196	195	194	193

83. Alle Aenderungen, die hie statt finden, lassen sich so durchzählen. Man setze statt f alle ganze Zahlen, die man statt dessen setzen kann, so bekömmt man folgendes, davon ich nur die beyden ersten und beyden letzten Columnen darstelle

$f=$	49	48	..	2	1
$c=$	$3-e$	$6-e$	..	$144-e$	$147-e$
Menge der Werthe von $e=$	2	5	..	143	146

So ist die Summe der Mengen aller Werthe von e; $=148.\frac{1}{2}49=74.49=3626$.

84. Die Mengen der Werthe von e in (77) und in (82) geben zusammen 7351; So viel unterschiedne Antworten hat die Frage (68)

Sie findet sich in v. Clausb. Rechenk. 1346 S. Es ist da eben die Menge der Antworten angegeben.

85.

85. Wildpret kaufen.

1. Für hundert Thaler soll man hundert Stück Wildpret kaufen. Eine Hinde um 3 Thaler, ein Rehe um 1 Thaler, ein Rebhun um 1 gl. Wieviel Stück jeder Art bekömmt man, und wieviel kömmt jede Art?

2. Die Zahlen der Hinden, Rehe, Rebhüner sind H, R, r, also

$$3.\ H + R + \frac{r}{24} = 100$$

3. So ist r eine Zahl, die sich mit 24 dividiren lässt; also $r = n.\ 24$.

$$4.\ 72.\ H + 24.\ R = 24.\ (100 - n)$$

$$3\,H + R = 100 - n$$

$$H = 33 + \tfrac{1}{3} - \frac{(n + R)}{3}$$

$$= 33 - \frac{(n + R - 1)}{3}$$

5. So weit führt die Rechnung, wenn man die Menge der Stücke nicht angiebt.

6. Man setze $n = 1$ also $r = 24$, so ist $H = 33 - \frac{1}{3}R$. Da kann R jedes Vielfache von 3 seyn bis mit auf das 33fache. Also

$$R + H + r = 57 + \tfrac{2}{3}R$$

R	=	3	6	9	...	93	96	99
H	=	32	31	30	...	2	1	0
R + H + r	=	59	61	63	...	119	121	123

7. Man setze $n = 2$; $r = 48$; So ist

H =

$$H = 33 - \frac{(R+1)}{3}$$

Also $R = 3m - 1$

$H = 33 - m$, wo m bis an 33 wachsen kann.

Auch $r + H + R = 81 + 2m - 1 = 80 + 2m$

Also

m =	1	2	....	10	...	32	33
R =	2	5		29	...	95	98
H =	32	30		23	...	1	0
r+H+R =	82	84		100	...	144	146

8. So kann man für n mehr Zahlen setzen. Allemahl darf $n + R - 1$ nicht grösser seyn als 99.

9. Die Menge aller Stücke zusammen ist $= r + R + H = 24. n + 33 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}R + R = (23 + \frac{2}{3}). n + (33 + \frac{1}{3}) + \frac{2}{3}R$

10. Man setze, diese Menge sey gegeben $= 100$ so ist

$66 + \frac{2}{3} = (23 + \frac{2}{3}). n + \frac{2}{3}R$ also

$66 - 23. n = \frac{2}{3}(n + R - 1)$

11. Da kann $23. n$ nicht grösser seyn als 66; Also sind die Werthe, die n haben kann, auf 1; 2; 3; eingeschränkt.

12. Und so ist

für

für	n =	1	2	3
66 − 23.	n =	43	20	3

13. Also $43 = \frac{2}{3} \cdot R$

14. Oder $20 = \frac{2}{3}(R + 1)$

15. Oder $3 = \frac{2}{3}(R + 2)$

16. Für (13) wäre $R = \frac{3 \cdot 43}{2}$ ein Bruch. Also kann die Voraussetzung $n = 1$ oder $r = 24$, die Zahl der Stücke nicht $= 100$ geben.

Wie auch (6) zeigt.

17. Für (14) kömmt $29 = R$; Also die Zahlen die in (7) für $m = 10$ stehen.

18. Für (15) käme $\frac{2}{2} = R + 2$ also giebt $n = 3$ auch nie die Zahl $= 100$.

19. Wenn also nebst der Gleichung (2) auch die statt finden soll: $H + R + r = 100$ so giebt es auf diese Frage nur eine einzige Antwort, die in (7) steht.

20. Das beruht aber darauf, daß H, R, r, ganze Zahlen seyn sollen.

Also ist diese Antwort nicht in der Bedeutung eine einzige, in welcher es $x = a$ ist, denn da kann a auch ein Bruch seyn.

21. Man setze allgemein

3. $H + R + \frac{r}{24} = H + R + r$ so kömmt

2. $H = \frac{23 \cdot r}{24}$ oder $H = \frac{23}{48} \cdot r$

22.

22. Da muß r ein Vielfaches von 48 seyn. Es sey $r = p.48$ also

$H = 23.p$ so ist

$H + R + r = (23 + 48).p + R = 71.p + R$

$3H + R + \frac{r}{24} = (69 + 2).p + R$

Da bleibt also R völlig unbestimmt.

23. So hat für jeden Werth von p die Gleichung (21) unzählich viel Antworten.

p	=	1	2 . . .
r	=	48	96 . . .
H	=	23	46 . . .
$H + R + r$		$71 + R$	$142 + R$ . . .
$3H + R + \frac{r}{24}$		$71 + R$	$142 + R$ . . .

24. Soll also in (21) auf jeder Seite 100 stehn, so dient nur $p = 1$ und es ist $71 + R = 100$; $R = 29$

25. So kosten in (24)

Die Hinden	$= 3.23$	$= 69$
Rehe	$= 1.29$	$= 29$
Rebhüner	$= \frac{1}{24}.48$	$= 2$
Summe		100

26. Das Exempel (24) steht in: Rechenbüchlein auf der Feder und Linien. — Durch Joh. Albert, Rechenmeister zu Wittenberg, Magdeb. 1585. 8° auf des Bogens N letztem Blatte 1. Seite. Dreyerley Wiltpret zu kaufen.

fen. A. lehrt auch wie man es machen soll, giebt aber den Grund nicht an, warum man es so machen soll, und ich entwickele hie seinen Vortrag nicht, weil die allgemeine Untersuchung, wie ich sie angestellt habe, lehrreicher ist.

86. **Wenn a gegeben ist, b so zu nehmen, daß $\frac{a}{a-b}$ eine ganze Zahl ist.**

1. Man setze $a = b + u$, so soll $\frac{b+u}{u} = 1 + \frac{b}{u}$ eine ganze Zahl seyn. Also $b = m.u$, folglich $a = (m+1).u$ und $\frac{a}{a-b} = m+1$

2. Also muß a Factoren haben, hat es keinen Factor als 1, so läßt sich die Aufgabe nicht anders auflösen als $b = a-1$ gesetzt da $\frac{a}{a-b} = a$

3. Es versteht sich, daß nicht $b = o$ seyn soll, da allemahl der Quotient $= 1$ wäre.

4. Man zerfälle also a in zweene Factoren $(m+1).u = a$; So ist $b = m.u$ und $\frac{a}{a-b} = m+1$

5. Exempel. Wenn wird $\frac{20}{20-b}$ eine ganze Zahl?

m + 1	1	2	4	5	10	20
u	20	10	5	4	2	1
b	0	10	15	16	18	19
20 / 20 − b	1	2	4	5	10	20

87. Wolfs Vorschrift vollkommne Zahlen zu finden erläutert.

An. fin. §. 248.

1. Eine vollkommne Zahl soll die Summe aller ihrer Factoren seyn, 1 mit als Factor angesehn, begreiflich aber nicht die Zahl selbst als Factor.

2. Man setze dergleichen Zahl $= y^n . x$ so sind Paare zusammengehöriger von 1 unterschiedner Factoren.

1	y	y^2	$\ldots\ldots y^{n-1}$	y^n
$y^{n-1} . x$	$y^{n-2} . x$		$y . x$	x

3. Also nach der Erklärung

$$1 + y + y^2 \ldots + y^{n-1} + y^n + y\,(1 + y + y^2 \ldots + y^{n-1}) = y^n . +$$

oder die geometrischen Reihen summirt

$$\frac{y^{n+1} - 1}{y - 1} + \frac{y^n - 1}{y - 1} . x = y^n . x$$

Das

Das ist $\frac{y^{n+1}-1}{y-1} = x.\left(y^n - \frac{y^n-1}{y-1}\right)$

$y^{n+1}-1 = x.(y^{n+1}-2.y^n+1)$

$\frac{y^{n+1}-1}{y^{n+1}-2.y^n+1} = x.$ Wo x eine ganze Zahl seyn muß.

4. Was linker Hand steht ist

$$1 + \frac{2.(y^n-1)}{y^n.(y-2)+1}$$

5. Setzt man $y=2$; so kömmt $x = 1 + 2y^n - 2 = 2.y^n - 1 = 2^{n+1}-1$

6. Sollen aber in (2) alle zusammengehörige Paare von Factoren stehn, so muß x eine Primzahl seyn. Sonst wenn sie sich zerfällen liesse z. E. a.b wäre, hätte man z. E. statt der ersten Columne folgendes

y. a	oder	y. b	
y^{n-1}. b		y^{n-1}. a	

7. Also dient statt x nur $2^{n+1}-1$ wenn es eine Primzahl ist.

8. Nun hat man $y^n.x = 2^n.(2^{n+1}-1)$ wo der letzte Factor die Bedingung (7) erfüllen muß.

9. **Exempel.** Für $n=4$, ist $2^5-1 = 31$
Also ist $2^4.(2^5-1) = 16.31$ eine vollkommne Zahl. Die Factoren (2) sind

1	2	4	8	16
	8. 31	4. 31	2. 31	31

Und nach (3)

$$1+2+4+8+16=31$$

$$31.(1+2+4+8) \quad \pm\frac{31.15}{31.16}=496$$

10. So erhält man vollkommne Zahlen. Ob man sie nur so erhält, kömmt darauf an, ob in (4) kein anderer Werth von y als 2 eine ganze Zahl giebt?

88. Eine Zahl zu finden, deren Würfel, zu ihrem Quadrat addirt, ein Quadrat giebt.

1. Die gesuchte Zahl sey x; eine willkührlich angenommene $= a$; man setze $x^3+x^2=a^2.x^2$; so kömmt $x=a^2-1$ und $x^3+x^2=x^2.(x+1)=(a^2-1)^2.a^2$

2. Man könnte bey der Frage auch Brüche zulassen. Verlangt man nur ganze Zahlen, so nehme man für a eine ganze Zahl.

3. Die Auflösung steht in: Renati des Cartes opuscula posthuma (Amst. 1701) da sind wenigstens in meinem Exemplare, auf zweyen besondren Bogen: Excepta ex Mss. R. Des Cartes angehenkt. Die Auflösung findet sich p. 8. in einem Aufsatze: De partibus aliquotis numerorum.

4. Begreiflich giebt auch so

$$x^3-x^2=a^2x^2; \quad x=(a^2+1)$$

5. Also: jede Zahl die von einer Quadratzahl um 1 unterschieden ist, hat die Eigenschaft, daß

daß Summe oder Unterschied ihres Würfels und ihres Quadrats eine Quadratzahl geben, nachdem die Zahl um 1 kleiner oder grösser angenommen wird als die Quadratzahl.

6. Allgemein sey

$x^{2n+1} \pm x^{2n} = a^{2n} . x^{2n}$ so ist $x = a^{2n} \mp 1$

7. Exempel. $2n = 4$; $n = 2$; $x = a^4 \mp 1$

Man setze $a = 3$; also $x = 80$ oder $= 82$

$80^5 + 80^4 = 80^4 . 81 = (80 . 3)^4$

$82^5 - 82^4 = 82^4 . 81 = (82 . 3)^4$

8. So hat man auch

$$\frac{x^{2n+1} \pm x^{2n}}{x^{2n}} = x \pm 1$$

89. Eine gegebene Quadratzahl, in so viel Quadratzahlen als man will, zu zerlegen.

1. Clavius Geom. Pract. L. VIII. prop. 9. giebt eine Auflösung. Ich will hie beybringen, was eine leichte Buchstabenrechnung lehrt.

2. Die Zahl, deren Quadrat gegeben ist, heisse $= m$.

3. Man wähle drey Zahlen da der beyden kleinern Quadrate zusammen der grössten ihres machen. Dergleichen sind bekanntlich 5; 4; 3;

4. Mit diesen wird die Rechnung am leichtesten seyn. Sonst dienen jede drey andre bey denen die Bedingung statt findet.

Zerlegung in zwey Quadrate.

5. Es soll $p^2 + q^2 = m^2$ seyn.

Man nehme $p = \frac{4 \cdot m}{5}$; $q = \frac{3 \cdot m}{5}$

so ist die Summe der Quadrate linker Hand

$= \frac{16 + 9}{25} \cdot m^2$

6. Zerlegung in drey Quadrate.

Man setze $m^2 = p^2 + r^2 + f^2$

Nun $r = \frac{4 \cdot q}{5} = \frac{4 \cdot 3 \cdot m}{25}$ $f = \frac{3 \cdot q}{5}$

$= \frac{9 \cdot m}{25}$

Giebt die drey Quadrate rechter Hand

$= m^2 \cdot \left(\frac{16}{25} + \frac{16 \cdot 9}{25 \cdot 25} + \frac{9 \cdot 9}{25 \cdot 25} \right)$

$= m^2 \cdot \frac{16 + 9}{25}$

7. Für vier Quadrate sey

$t = \frac{4 \cdot f}{5} = \frac{4 \cdot 3 \cdot q}{25} = \frac{4 \cdot 9 \cdot m}{125} = \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{25} \cdot m$

$u = \frac{3 \cdot f}{5} = \frac{9 \cdot q}{25} = \frac{27 \cdot m}{125} = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{25} \cdot m$

$t^2 + u^2 = m^2 \cdot (\frac{9}{25})^2$

So sind die vier Quadrate zusammen

$= p^2 + r^2 + t^2 + u^2$

m^2

$$m^2.\left(\tfrac{16}{25}+\frac{16.9}{25.25}+\tfrac{16}{25}.\frac{9.9}{25.25}\right)=$$

$$m^2.\left(\tfrac{16}{25}+\tfrac{16}{25}.\tfrac{9}{25}+\frac{9.9}{25.25}\right)$$

$$=m^2.\left(\tfrac{16}{25}+\tfrac{9}{25}.\frac{16+9}{25}\right)=m^2$$

8. Für fünf Quadrate sey

$m^2=p^2+r^2+t^2+v^2+w^2$

Und $v=\frac{4}{5}.u=\frac{4}{5}.\frac{3}{5}.\frac{9}{25}.m$

$w=\frac{3}{5}.u=\frac{3}{5}.\frac{3}{5}.\frac{9}{25}.m$

9. So kann man immer weiter gehn, allemahl das letzte der Quadrate das man gefunden hat in zwey zerlegen.

10. Also, bey jeder der Zahlen, p, q, r, s, t, ... den Factor m verstanden.

Für 2 Qu. $p=\frac{4}{5}$; $q=\frac{3}{5}$

3 Qu. $p=\frac{4}{5}$; $r=\frac{4.3}{5^2}$; $s=\frac{3^2}{5^2}$

4 Qu. $p=\frac{4}{5}$; $r=\frac{4.3}{5^2}$; $t=\frac{4.3^2}{5^3}$;

$u=\frac{3^3}{5^3}$

5 Qu. $p=\frac{4}{5}$; $r=\frac{4.3}{5^2}$; $t=\frac{4.3^2}{5^3}$;

$v=\frac{4.3^3}{5^4}$; $w=\frac{3^4}{5^4}$

11. So für 6 Qu. blieben die ersten vier Zahlen für 5 Quadrate, statt der letzten w; kämen

$x = \frac{4.w}{5} = \frac{4.3^4}{5^5}; y = \frac{3.w}{5} = \frac{3^5}{5^5}$

woraus das Gesetz des Fortgangs zu sehn ist.

12. Es sey $m = 6$; So sind für des Quadrats 36 Zerlegung in

2 | $p = \frac{4.6}{5}; q = \frac{3.6}{5}$

3 | $p = \frac{4.6}{5}; r = \frac{4.3.6}{25}; s = \frac{9.6}{25}$

4 | $t = \frac{36.6}{125}; u = \frac{27.6}{125}$

5 | $p \ldots r \ldots s \ldots t \ldots, v = \frac{4.27.6}{625}; w = \frac{81.6}{625}$

Clavius findet für dieses Exempel eben die Zahlen, die er allemahl durch gehörige Division in Ganzen mit anhängenden Brüchen ausdruckt, die letzte w, ist $= \frac{486}{625}$

13. Den Factor m wie in (10) verstanden, kann man alle Zahlen in Decimalbrüchen ausdrucken. So

$p = 0{,}8$; $q = 0{,}6$; $r = 0{,}48$; $s = 0{,}36$; $t = 0{,}288$; $u = 0{,}216$; $v = 0{,}1728$; $w = 0{,}1296$ u. s. w.

14. Nähmlich $r = 0{,}8.\ q = 0{,}8.\ 0{,}6$; $s = 0{,}6.\ q = 0{,}6.\ 0{,}6$; $t = 0{,}8.\ s = 0{,}8.\ 0{,}36$; $u = 0.\ 6.\ s$; $v = 0{,}8.\ t$; $w = 0{,}6.\ t$; u s. w.

15.

15. Für mehr Quadrate, gehn die Decimalbrüche immer weiter, hören aber allemahl auf, und geben so die Zahlen völlig; Und bequemer als die Division mit Potenzen der 5.

16. Es sey m = 1000, oder man soll eine Million in Quadrate zerlegen. So ist p = 800; q = 600; r = 480; s = 360; t = 288; u = 216; v = 172,8; w = 129,6.

So für vier Quadrate		Für fünf Quadrate	
p^2	= 640000	p^2	= 640000
r^2	= 230400	r^2	= 230400
t^2	= 82944	t^2	= 82944
u^2	= 46656	Summe	= 953344
Summe	= 1000000	Nun noch	
		v^2	= 29859,84
		w^2	= 16796,16
			46656,00

Diese Summe = u^2 giebt also, zur vorigen addirt, die Million.

III. Abschnitt.

Ueber Factoren, Zerfällungen der Zahlen, und Zahlen, die keine Factoren als 1, oder keine gemeinschaftlichen, haben, und verwandte Untersuchungen.

1. Der Nutzen solcher Lehren zeigt sich schon bey den Brüchen (Ar. I. C. 71) den Logarithmen (Ar. VI. C. 20) u. s. w. Aber das, was

sie betrifft, ganz allgemein und in einiger Vollständigkeit vorzutragen, würde mehr Raum erfodern als ich hie noch übrig habe, und mehr analytische Rechnungen, als ich bey Lesern gegenwärtigen Buchs voraussetzen darf. Ich gebe also nur einiges des Ersten und Leichtesten. Von Hr. Eulern u. a. Mathematikern sind häufige und weitläuftige Untersuchungen über diese und ähnliche Eigenschaften der Zahlen angestellt, da bey mehrern selbst die Kräfte unserer so weit getriebenen Analysis nicht ganz zureichen.

2. Alle Zahlen, von denen hier die Rede ist, sind ganze, und Buchstaben, bedeuten ganze Zahlen (II. C. 1. §. Anm.) wenn nicht das Gegentheil erinnert wird.

Gerade und Ungerade.

3. Einer Zahl niedrigste Zifer (I. C. 28) sey = n, die Zahl selbst = M + n, wo M den Theil bedeutet, den alle Zifern zusammen angeben, die von der Ordnung 1; 2; 3; u. s. f. allen höhern sind.

4 Der Theil M ist eine Menge von Zehnen, also eine gerade Zahl.

5. Die völlige Zahl ist also gerade oder ungerade, nachdem ihre niedrigste Zifer, eine gerade oder ungerade Zahl bedeutet.

6. Weil 2 m jede gerade Zahl bedeutet (II. C. 1. §. Anm.) so gehört 2. 0 oder 0 auch unter die geraden Zahlen.

Ein

Ein Satz, der nicht, wie es beym ersten Ansehen scheinen mögte, ein blosses Wortspiel ist. Er sagt: daß, was von geraden Zahlen wahr ist, auch von 0 gilt, aber nicht, was nur von ungeraden wahr ist.

7. Z. E. Aus I. C. 108; erhellt, daß jede Potenz, deren Exponent eine gerade Zahl ist (I. C. 46), bejaht ist. Aber jede Potenz, deren Exponent = 0 ist, ist = 1. (II. C. 11). Also ist 1 allemahl bejaht. Wodurch (I. C. 101) erläutert und bestätigt wird.

8. Ist also (3) n = 0; so ist M + n die Summe von ein Paar geraden Zahlen, also auch gerade.

9. Bey einer geraden Zahl ist also die niedrigste Zifer eine von 0; 2; 4; 6; 8; bey einer ungeraden eine von 1; 3; 5; 7; 9:

Zahlen, die sich mit 3 dividiren lassen.

10. Bekanntermaassen ist $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$; $\frac{100}{3} = 33 + \frac{1}{3}$ u. s. w.

11. Bedeuten also die kleinen Buchstaben, wie sie nach einander folgen, Zifern von höhern und höhern Ordnungen, oder, ist irgend eine Zahl

$M = a + b.10 + c.100 + d.1000 + e.10000$ u. s. w.

12. So ist $\frac{1}{3} M =$

$\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}.b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d + \frac{1}{3}e \ldots$

$+ 3.b + 33.c + 333.d + 3333\,e \ldots$

13.

13. Nun sind in der untersten Zeile lauter ganze Zahlen. Soll also $\frac{1}{3}$ M eine ganze Zahl seyn, so muß die oberste Zeile zusammen eine ganze Zahl geben, das ist: Die Werthe der Zifern, ohne auf ihre Ordnungen zu sehn, zusammen addirt, müssen eine Summe geben, die sich mit 3 dividiren läßt.

14. Ist der Quotient (12) keine ganze Zahl, so läßt M mit 3 dividirt, 1 oder 2 zum Reste. Dieser Rest muß in der obern Zeile in (12) zu finden seyn, oder: Wenn eine Zahl mit 3 dividirt, einen Rest läßt, so muß die Summe ihrer Zifern, mit 3 dividirt, eben den Rest lassen.

15. Exempel. $237\frac{195}{3} = 79065$

und $2+3+7+0+1+9+5 = 27 = 3.9$

Weil auch $7+9+6+5 = 27$ so ist $79065 = 3.26355$

Noch $2+6+3+3+5+5 = 24$; folglich $26355 = 8778\frac{5}{3}$

Nun $8+7+7+8+5 = 35$ welches mit 3 dividirt, den ganzen Quotienten 11 giebt und 2 zum Reste läßt.

Und 87785 mit 3 dividirt, giebt 29261 und läßt 2 zum Reste.

Die sich mit 4 dividiren lassen.

16. Eine solche Zahl muß das Doppelte einer geraden Zahl seyn. Sie heißt daher pariter par, wie einer ungeraden Doppeltes pariter impar.

17.

17. Eine gerade Zahl zu halbiren, und der Hälfte anzusehn, ob sie gerade oder ungerade ist, ist so leicht, daß wohl kein ander Merkmahl erfodert wird, ob sich eine Zahl mit 4 dividiren läßt oder nicht. Man kann aber auch folgendes bemerken.

18. Jede ganze Zahl wie (11 läßt sich so ausdrucken: $M = N.100 + b.10 + a$

19. Also $\frac{1}{4}M = N.25 + (b.10 + a).\frac{1}{4}$.

20. Soll das auch eine ganze Zahl seyn, so muß der Betrag der beyden niedrigsten Ziffern, — nicht die Summe der Werthe wie (13) — sich mit 4 dividiren lassen.

21. Geht das nicht an; ist $10b + a = 4.O + P$ wo P; = 1 oder 2 oder 3 seyn kann, so ist $\frac{1}{4}M = N.25 + O + \frac{1}{4}P$, oder M mit 4 dividirt, läßt eben den Rest, den $10b + a$ mit 4 dividirt läßt.

22. Ex. $38976 = 38900 + 76$ das mit 4 dividirt, giebt $389.25 + 19 = 9725 + 19 = 9744$.

Aber $897347 = 897300 + 47$ das mit 4 dividirt, läßt zum Reste 3, weil 47 mit 4 dividirt, diesen Rest läßt.

Es ist nähmlich in (20; 21)

$N = 89734$; $O = 11$; $P = 3$

Die sich mit 5 dividiren lassen.

23. Wenn $M = L.10 + a$; so ist $\frac{1}{5}M = L.2 + \frac{1}{5}a$

Also

Also gerade, oder ungerade, nachdem a = 0 oder = 5 ist.

Hat die niedrigste Zifer keinen dieser beyden Werthe, sondern einen der folgenden: 1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; so lässt sie mit 5 dividirt zum Reste eine von diesen Zahlen 1; 2; 3; 4; und diesen Rest lässt alsdann auch M mit 5 dividirt.

24. Ex. 96724 = 96720 + 4 mit 5 dividirt, giebt 19344 und lässt 4 Rest; 96729 giebt 19345 und lässt auch 4 Rest.

Die sich mit 6 dividiren lassen.

25. Eine solche Zahl muß gerade seyn, welches aus (3) erkannt wird und sich mit 3 dividiren lassen, welches (13) anzeigt.

26. Ex. 167958 ist eine gerade Zahl, deren Zifern zur Summe 36 geben; Die Zahl ist = 83979. 2 = 27993. 6

27. Wenn 3. Q + 1 ungerade ist, so muß Q gerade seyn, also lässt 3 Q + 1 mit 6 dividirt 1 übrig, wie mit 3 dividirt.

Ist aber 3. Q + 1 gerade, so muß Q ungerade seyn = 2 R + 1, und 3 Q + 1 = 6 R + 3 + 1

Wenn also eine Zahl mit 3 dividirt, 1 übrig lässt, so lässt sie mit 6 dividirt, 1 oder 4 übrig, nachdem sie ungerade oder gerade ist.

Wenn 3 Q + 2 ungerade ist, so ist Q = 2 R + 1 und die Zahl = 6 R + 5

Ist

Ist aber 3 Q + 2 gerade, so ist Q gerade = 2 R, also die Zahl = 6 R + 2

Wenn also eine Zahl mit 3 dividirt, 2 übrig lässt, so lässt sie mit 6 dividirt, 5 oder 2 übrig, nachdem sie ungerade oder gerade ist.

Eine ungerade Zahl, die sich mit 3 dividiren lässt, muß 3 (2 R + 1) = 6R + 3 seyn.

Ex. 415837 = 138612. 3 + 1
= 69306. 2. 3 + 1
543256 = 181085. 3 + 1
= 90542. 6 + 4
142679 = 47559. 3 + 2
= 23779. 6 + 5
213974 = 71324. 3 + 2
= 35662. 6 + 2
797865 = 265955. 3 = 132977. 6 + 3

Das enthält die Gesetze, nach denen eine Zahl mit 6 dividirt, 1; 2; 3; 4; 5; übrig lässt.

Ueber die Division mit 7.

28. Man dividire

mit 7	1	10	100	1000	10000	100000
bleibt Rest	1	3	2	6	4	5

und dann kommen eben die Reste in eben der Ordnung wieder.

Wenn $10^n = 7. N + P$ so ist die nächst höhere Potenz $= 7. 10. N + 10. P = 7. (10N + P) + 3P$ wo aber 3 P noch ein Vielfaches der 7 seyn kann, also mit 7 dividirt, den gehörigen Rest für diese Potenz lässt.

Aus

Aus dieser Betrachtung, läßt sich angezeigte Periode leicht herleiten.

Man hat Vorschriften, aus den Zifern einer Zahl zu erkennen, ob sie sich mit 7 dividiren läßt. v. Clausberg Rechenk. 630. giebt eine, von der er behauptet, sie sey viel kürzer als alle andere sonst gegebene, aber gesteht, durch die unmittelbare Division mit 7 lasse sich die Frage geschwinder beantworten. Also verdient sie wohl nicht, hie auseinandergesetzt zu werden.

Division mit 8.

29. Es sey $M = N.\ 1000 + c.\ 100 + b.\ 10 + a$

So ist $\frac{1}{8}M = N.\ 125 + \frac{1}{8}.\ (100.c + 10b + a)$

Der Theil der Zahl also, den die drey niedrigsten Zifern angeben, muß sich mit 8 dividiren lassen, wenn das von der Zahl gelten soll.

Läßt dieser Theil einen Rest, so ist es eben der, welchen die Zahl läßt.

Division mit 9.

30. Eine 1 mit m Nullen rechter Hand, oder 10^m, mit 9 dividirt, giebt zum Quotienten m Stellen in jeder 1; und läßt 1 zum Reste.

Z. E. $\frac{1000}{9}$ giebt 999 und läßt 1 Rest.

31. Ist also $M = a + b.\ 10 + c.\ 100 + d.\ 1000$ u. s. w.

So ist

$\frac{1}{9}M = b + 99\,c + 999\,d \ldots$
$+ \frac{1}{9}(a + b + c + d \ldots)$

Folg=

Folglich muß die Summe der einzelnen Ziffern (wie in 13) sich mit 9 dividiren lassen, wenn M solches gestattet.

Läßt diese Summe bey der Division einen Rest, so läßt M eben denselben.

Division mit 11.

32. Die Regel, die v. El. 635; giebt, ist viel weitläuftiger als die unmittelbare Probe selbst.

Division mit irgend einer Potenz der 2 oder der 5.

33. Es sey $M = N.\ 10^n + P$ wo P den völligen niedrigern Theil bedeutet, der keine Einheiten von der Ordnung n und höhern enthält.

Weil $10 = 2.5$; so ist

34. $M : 2^n = N.\ 5^n + P : 2^n$
$M : 5^n = N.\ 2^n + P : 5^n$

35. Also muß sich P im I. Falle (34) mit der Potenz der 2; im zweyten mit der Potenz der 5 dividiren lassen, mit denen sich M soll dividiren lassen. Oder wenn P einen Rest läßt, so läßt M eben denselben.

36. Hievon sind Exempel für 2; in (3; 6; 29;) und für 5 in (23)

Soll sich eine Zahl mit 125 dividiren lassen, wo $n = 3$; so muß der Theil, den ihre drey niedrigsten Ziffern angeben, dieses gestatten.

$62729375 = 62729000 + 375$, und $\frac{375}{125} = 3$; Also ist der Quotient $= 62729.8 + 3$

Aber $7165612 = 7165000 + 612$ der niedrigste Theil mit 125 dividirt, giebt 4 zum Quotienten, und lässt 112 Rest. Also giebt 7165612 mit 125 dividirt, zum Quotienten $7165.8 + 4$, und lässt 112 Rest.

37. Die bisherigen Vorschriften finden sich meist, obgleich mit Beweisen, die mir weitläuftiger und verwickelter scheinen, in v. Clausb. Rechenk. 624 u. f. §.

Adriani Metl, Arithmeticae Libri II. et Geometriae Libri VI. Leiden 1640; 4. Der Verf. giebt sich Geom. Pract. P. II. c. 4. als den Sohn dessen an, von dem der Ausdruck der Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise 113 : 355 herrührt, nennt aber seines Vaters Vornahmen nicht, sein Bruder Jacob hat das Holländische Fernrohr erfunden. Ger. Vossius de Scient. Math. c. 16. §. 34. Im Gelehrtenlexicon sind Adrian und Jacob erwähnt, ihr Vater nicht.

In der Arithm. Pract. am Ende des 19 Cap. giebt A. M. Kennzeichen für Factoren aus den Ziffern der Zahlen, wie hie sind gegeben worden. Das (13) ist auch darunter. Diese Lehren müssen jenseit des Meeres nicht so gar bekannt geworden seyn. Wallis in der unten (52) angeführten Schrift z. E. erinnert sich nicht, daß sonst jemand dieses bemerkt, und da hat ein voriger Besitzer meines Exemplars den Metius am Rande citirt, dessen Arithmetik

tik und Geometrie ich freylich besitze, aber nicht so durchstudirt hatte, daß ich dieses unerinnert wahrgenommen hätte.

Die letzte von Metius Bemerkungen ist: Eine Zahl, die sich mit keiner andern Zifer als 1 dividiren lässt, lässt sich auch, durch keine Zahl als durch eine Primzahl dividiren.

Nachrichten von Untersuchungen über Factoren und Primzahlen.

38. Die angeführten Beyspiele zeigen, wie weitläuftig es wird, zu erforschen, ob sich eine Zahl mit einer andern dividiren lasse. Nur wenn der Divisor eine Potenz der 2 oder der 5 ist, wird es leicht, bey andern grossen Zahlen ist es schwer zu entscheiden. Gleichwohl ist sehr nützlich, entweder Factoren einer Zahl zu entdecken, oder zu erkennen, daß sie keinen andern als 1 hat, eine Primzahl ist. Aber bisher ist zu keiner Absicht nur etwas vollständige Theorie bekannt.

39. In Euklids 7; 8; 9; 10; Buche, finden sich unterschiedne hieher gehörige Lehren, die man sich leicht durch Buchstabenrechnung erweiset und selbst, ohne sie da studirt zu haben, bey jeder Bedürfniß erfindet. Ihre Absicht ist da, der Methode der Alten gemäß, die Theorie der Irrationalverhältnisse.

Formeln, unter denen Primzahlen enthalten sind.

40. Eine Primzahl muß ungerade seyn, sonst ist 2 ein Factor von ihr.

41. Hievon ist 2 die einzige Ausnahme. Man kann sie nicht anders zerfällen als in 2. 1, und so heißt sie mit eben dem Rechte eine Primzahl, wie z. E. 17, die sich nur in 17. 1 zerfällen läßt. Nähmlich jede Zahl kann als ein Factor von ihr selbst angesehn werden, wenn man 1 für den andern Factor annimmt.

Diese Bemerkung, daß 2 unter die Primzahlen gehört, findet sich beym Stifel Arithm. integra Lib. I. pag. 12

42. Damit möchte die Spitzfündigkeit zusammenhängen: Ob 1 eine Zahl ist? Das haben Einige geläugnet, weil Zahl, eine Menge von Einheiten ist. Ioach. Camerarius de graecis latinisque numeror. notis. Lipſ. 1569. Bl. D2. Sogar glaubt C. Euklids 3. Erkl. des 7 B. begreife die Einheit nicht, sie sey kein ausmessender Theil einer Zahl, weil sie selbst keine Zahl sey. Richtig antwortet hierauf Tengnagel, daß sie ein Theil ist, der durch sich selbst ausmißt. Iamblichus in Nicomachi Arithmeticam . . a Samuele Tengnagelio Arnhem. 1668; in Tengnagels Noten 161 S. Daß die Einheit vom Puncte, mit dem sie zuweilen auch ist verglichen worden, unterschieden ist, weil aus ihr Zahlen zusammengesetzt werden, aber nicht Linien

nien aus Puncten, erinnert Jamblich selbst in angef. Ausg. 81 S. Man s. auch Wallisii Math. universal. c. 4. Op. (Oxf. 1699 fol.) T. I. p. 24.

43. Eine Primzahl, muß ungerade seyn, (erwähntermassen die 2 ausgeschlossen) auch sich nicht mit 3 dividiren lassen. Sie muß also entstehn, wenn man zum Sechsfachen einer ganzen Zahl etwas dergestalt setzt, daß, was herauskömmt, ungerade ist, und sich nicht mit 3 dividiren lässt. Dieses hinzuzusetzende, kann also nicht ± 2 oder ± 4 oder ± 3 seyn. Die ersten beyden Fälle gäben was Gerades, der letzte, ein Dreyfaches.

44. Folglich muß jede Primzahl unter der Form enthalten seyn: $6N \pm 1$;

Oder: Sie muß um 1 von einem Sechsfachen unterschieden seyn, um 1 kleiner oder gröſſer, als ein Sechsfaches.

45. Eine Zahl, die nicht unter diesen Formeln steht, ist keine Primzahl: Aber eine Zahl kann darunter stehen, ohne eine Primzahl zu seyn.

Z. E. $6.6 - 1 = 35 = 5.7$; $6.4 + 1 = 25$

46. Einer Primzahl niedrigste Zifer muß ungerade seyn (43) und nicht 5 (23)

Von dieser Regel sind 2 (41) und 5 ausgenommen.

Also muß einer Primzahl niedrigste Zifer eine von folgenden seyn: 1; 3; 7; 9.

47. Lambert, Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen (Berl. 1770) sagt im II. Abschnitte seiner Einleitung, welcher die Tafeln der Primzahlen betrifft, 15 §. "Ich habe mich um die Theorie der Primzahlen näher umgesehen, und da fand ich freylich nur einzelne abgebrochne Stücke, ohne sonderlich Ansehen, daß dieselben so bald sollten zusammengehängt und zum förmlichen System gemacht werden können."

Solche Stücke hie beyzubringen, wäre desto weniger rathsam, weil sie grossentheils weitläuftige analytische Rechnungen erfodern. Nützlich können Nachrichten seyn, wo man Tafeln von Primzahlen findet, und sich ferner darüber unterrichten kann. Solche Tafeln sind theils abgesondert, theils sind in Tafeln, welche die Factoren der Zahlen angeben, die Primzahlen mit zu finden.

48. In Schwenters Geometria Practica Nrnb. 1667 4. im Anhange des ersten Tractats 312 S. finden sich die ungeraden Zahlen bis 999, neben der, die sich zerfällen lassen, Factoren, also auch die Primzahlen.

49. Franc. a Schooten exerc. Math. Libri V. Leid. 1657 geben im V. Abschnitte des V. Buchs die Primzahlen, bis auf 9979. An der Seite wird angegeben, wie viel in jedem Hundert Primzahlen sind, z. E. im ersten 25; im letzten 9, davon 9901 die erste ist.

50. An Introduction to Algebra translated out of Highdutch by Tho. Branker augmented by Dr. J. P. wird in den Philosophical Transactions n. 35. (18 May 1668) angezeigt. Es finden sich da die ungeraden Zahlen unter 100000, mit Factoren und Primzahlen. So weit war dieses, nach dem Berichte der Transactionen, noch nicht getrieben worden.

52. Wallisius hat 1685 einen Discourse of Combinations, Alternations and aliquote parts herausgegeben, den Poetius (unten 56) anführt. Lateinisch findet sich derselbe in Wallisii Op. (42) T. II. p. 483. Da erwähnt W. im 3. C. Th. Br. habe Dr. Joh. Pells Algebra ex Germanico, Englisch übersetzt, mit P. Vorwissen. In der Tafel seyen die Zahlen, deren niedrigste Zifer 5 ist, weggelassen, aber nicht die nach (13) hätten können weggelassen werden.

53. W. sagt: Er habe diese Tafel mit eben dem Fleisse geprüft, mit dem sie berechnet worden, und auser den angezeigten Fehlern noch einige gefunden, die er angiebt. Zeigt auch, wie man sie bey einer Zahl, die ihre Gränzen überschreitet, brauchen könne; Wenn man nähmlich aus anderwärts bekannten Merkmahlen, wie 3 u. s. dergleichen Zahl durch Division auf eine, die innerhalb dieser Gränzen fällt, vermindert.

Im 4. C. handelt W. von Aufgaben Fermats, die sich auch auf Divisoren und Theile, die eine Zahl ausmessen, beziehen.

54. Bey dem Titel von der Algebra (50) war es mir ziemlich unerwartet, daß 1668 eine Algebra aus dem Hochdeutschen ins Englische sey übersetzt worden. Nicht als ob ich gezweifelt hätte, daß Ausländer um diese Zeit von Hochdeutschen in der Algebra was hätten lernen können. Am Ende des sechszehnten Jahrhunderts, und am Anfange des vorigen, waren Deutsche, die in der Coß, wie damahls die Algebra hieß, jedem Fremden aufzurathen geben konnten, davon ich nur Christoph Rudolf erwähnen will, dessen Coß Michael Stifel 1581 herausgegeben hat, und Joh. Faulhabern. Aber der dreyssigjährige Krieg, und die Verfassung Deutschlands, die nach dessen Endigung entstand, lenkte der Deutschen Geist und Fleiß auf andre Beschäfftigungen. Mir war also nicht wahrscheinlich, daß Brankers Original, Hochdeutsch gewesen seyn möchte, obgleich ex Germanico auch in der lateinischen Uebersetzung der ersten Stücke der Transactionen steht: Acta Philosophica Soc. Reg. in Anglia anni 1665 . . . 69 . . . interprete C. S. (Sterpino) Lipsi. 1675; 4. p. 570.

Die Niederländer, heissen bey den Britten Dutches, daher z. E. in der Deutschen Uebersetzung von Rob. Knox Ceylanischer Reisebeschreibung, viel von den Deutschen auf dieser Insel geredet wird, obgleich der König von Conde Uda, sicherlich mit dem ganzen H. R. R. in Frieden lebte. Daß Hochdeutsch nicht highdutch, sondern

dern german heisst, bin ich selbst von Engländern belehrt worden.

So lange mich also Br. Original nicht selbst in meiner Muttersprache anredet, werde ich vermuthen, es spreche Holländisch.

Johann Pell war ein Britannier, Professor zu Amsterdam, wo Gerhard Joh. Vossius, sein College, ihn oft hat über den Diophant lesen hören, ward nachdem Professor der Mathematik zu Breda. Voß de universae Matheseos natura et constitutione Amst. 1650. C. 10. §. 2. p. 37. Pellio alteri Euclidi fortuna et fauor aulicorum deest, schreibt Conr. Sam. Schurtzfleisch aus London 1. Sept. 1680, an Caspar Ziegler.

Schurtzfleischii Epistolae arcanae (Hal. 1711) ep. 38. p. 58.

Das Gel. Lexik. meldet, Joh. Pell sey eines englischen Predigers Sohn gewesen, geb. zu Sussex 1610. Er verstand viel alte und neue Sprachen, ward um 1643 zu Amsterdam Prof. der Math. und 1646 auf der neuen Ritterakad. zu Breda, ging 1652 wiederum nach England, ward von Cromwell als Gesandter an die protestantischen Cantons nach Zürich geschickt, wo er als Resident bis 1658 blieb und Rhonnium oder Philipp Ronayne zum Schüler hatte, dessen Introd. ad algebram meist von ihm herrührt. Er hatte einige geistliche Beneficia, wurde aber um das meiste betrogen, zweymahl wegen Schul-

den gefangen gesetzt, und so arm, daß er weder Papier noch Dinte bezahlen konnte. Schrieb wieder Longomontanum, auch: ideam mathematicam, starb 1685. 12. Dec.

55. Pells Werk mag im Original und in der Uebersetzung wenigstens in Deutschland sehr selten seyn. Die neuen Schriftsteller, die von seiner Tafel reden, wie Poetius und Lambert, haben es nicht gesehn, die Tafel findet sich aber in Harris Lexico Technico, und im Dictionnaire Encyclopedique.

56. Joh. Mich. Poetii Gründliche Anleitung zu der unter den Gelehrten jezt üblichen arithmetischen Wissenschaft, vermittelst einer Parallelen Algebra; Frf. und L. 1728; hat am Ende eine Anatomiam Numerorum oder Zergliederung der Zahlen von 1 bis 10000. Die Factoren jeder Zahl neben sie gesetzt, also keine neben Primzahlen. Bis an 1000 gehen die Zahlen alle nach der Reihe, so gar bey Potenzen der 2, z. E. 512 steht die 2 so oft, als der Grad der Potenz erfodert.

Nach 1000 hat P. nur ungerade Zahlen gesetzt, deren niedrigste Zifer nicht 5 ist (23) und die Summe der Zifern sich nicht mit 3 dividiren läßt (13). Neben jeder Zahl, stehen die Primzahlen, in welche sie zerfällt wird.

Völlig so steht diese An. Num. im Vollständigen Mathem. Lexicon; II. Theil 530 u. f. S.

Wolfs

Wolfs mathematisches Lexicon ist zu Leipzig 1716 in groß Octav herausgekommen. Der Verleger verlangte bey dem Bedürfnisse einer neuen Auflage, von Wolfen Aenderungen, dazu dieser sich nicht verstehen wollte. So erschien, von einem andern bearbeitet, unter vorhin angeführtem Titel ein Band, Leipz. 1734; Wolf sagt sich davon los in Element. Math. universae T. V. Hl. 1741; Comm. de praecipuis scriptis mathem. C. I. §. 21. Die Zusätze bestehn hauptsächlich in Baukunst, Fortification, Artillerie, u. d. g. was viel Leute praktische Mathematik nennen, manche wohl allein als Mathematik lernen wollen und freylich Wolfs Hauptsache nicht war. Statt Wolfs Vorrede findet sich auch eine andere. Kurz W. Absicht ging mehr auf Aufklärung und Gebrauch des Verstandes, der neuen Ausgabe mehr auf Ausübung für das menschliche Leben. Vorhin genannter II. Th. erschien L. 1742. Da wird als Verf. des I. Th. ein seitdem verstorbener Richter angegeben. Dieser II. Th. ist eine starke Sammlung von mathematischen Tafeln, zur Arithmetik, Trigonometrie, und mehrern Wissenschaften der angewandten Mathematik. Jezo hat man freylich statt vieler dieser Tafeln bessere. Indessen sind mehrere unter ihnen, immer noch brauchbar.

57. Joh. Gottlob Krügers, Prof. der Arzneygel. zu Halle, Gedanken von der Algebra, nebst den Primzahlen von 1 bis 100000, Halle 1746.

1746. Peter Jäger, Roßschreiber und Quartiermeister zu Nürnberg, hatte diese Zahlen berechnet, auch eine vollständige anatomiam numerorum zu verfertigen gesucht. Er verlangte in den Zeitungen für seine Bemühung 2000 Thl. schickte seine Primzahlen Krügern, Krüger versicherte Hrn. J. öffentlich, er würde die 2000 Thl. nie bekommen, und schrieb die Gedanken von der Algebra, damit sie eine Arzney seyn sollten, dadurch die mit schweren Geburtsschmerzen zur Welt gebrachten Primzahlen beym Leben erhalten würden. Damahls also wagte ein Buchhändler das Papier an die Primzahlen; nur weil er sie mit Krügers Gedanken loszuwerden hoffte, und ein bekannter Mathematiker, König, hatte Krügers Gedanken weggeworfen, und nur die Primzahlen in seiner Bibliothek aufgehoben, wo Lambert sie fand.

58. Verzeichniß der Theiler aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10000 durch Heinrich Anjema, Leiden bey Samuel und Joh. Luchtmanns 1767; 4. Ein Vorbericht der Buchhändler, welcher ziemlich undeutsch geschrieben ist, meldet: A. habe viele Jahre die mathematische Kunst an der Universität zu Franequer mit grossem Beyfalle gelehrt, und, nachdem ihm die Staaten von Friesland eine unterschiedene Bedienung aufgetragen, seine müssigen Stunden zum Besten seiner vormaligen Lehrlinge anwenden wollen, und eine Tafel unternommen, welche die Theiler aller natürlichen Zahlen bis 100000

enthalten sollte, als er solche bis auf 10000 gebracht, habe ihn der Tod an Vollstreckung gehindert. Er hat geglaubt, was gethan zu haben, das noch nicht gethan wäre, und die Buchhändler glauben auch, dieses Zahlenverzeichniß sey das erste seiner Art. Die Factoren sind folgendergestalt angegeben, z. E. bey 3179 steht 1, 11, 17 — 187, 289, 3179. Die beyden Factoren, die gleichweit vom Striche abstehen, geben die Zahl; sie ist hie = 17. 187 = 11. 289, daß sie selbst nebst dem Factor 1 auch unter den Factoren steht, ist eine überflüssige Vollständigkeit. So steht bey einer Primzahl 1 — 3187.

Eine Zahl, die viel Paare zusammengehöriger Factoren hat, erfodert so wohl 2 bis 4 Zeilen. Daher nehmen diese 10000 Zahlen, 302 Quartseiten ein.

59. Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, durch J. H. Lambert; sind in 3 Theilen zu Berlin 1765 . . . 1772; 8. herausgekommen, machen aber 4 Bände, weil der zweyte in zween Abschnitte getheilt ist. Den Anfang des ersten Abschnitts macht eine Untersuchung über Theilung und Theiler der Zahlen, und dann ein Vorschlag, die Theiler in Tabellen zu bringen, die nicht so weitläuftig werden, wie nach Anjemas Einrichtung.

Es bleiben alle Zahlen weg, die sich mit 2; 3; 5; dividiren lassen. Was hiedurch erspart wird, erhellt so:

60. Da 30 die kleinste Zahl ist, die sich mit 2. 3. 5 dividiren lässt, so sey für jede grössere Zahl 30. P + Q = M wo Q von 0 bis 29 wachsen kann. Soll sich also M nicht mit einer der erwähnten drey Zahlen dividiren lassen, so darf Q I) keine gerade Zahl seyn, wodurch die Voraussetzung = 0 auch ausgeschlossen würde, wenn nicht sogleich in die Augen fiele, daß sie ausgeschlossen ist, II) nicht 3; III) nicht 5 zum Factor haben. So bleiben unter den 29 Werthen, die Q auser 0 haben kann, nur 1; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; und jede Zahl, die in Tafeln kommen soll, muß mit 30 dividirt, einen dieser Reste lassen. Von den Zahlen also 30 P ..... 30 P + 29 bekömmt die Tafel nur 8, da A. Tafel alle 30 bekömmt.

61. L. findet aber, wegen der Einrichtung unsers Zahlensystems bequemer, etwas wie 300. R + S = M anzeigt, zum Grunde zu legen, und so von allen Zahlen über 300, nur die beyzubehalten, wo S sich nicht mit 2; 3; 5; dividiren lässt. Begreiflich darf man für die Zahlen unter 300, nur R = 0 setzen. So kömmt eben die Reihe der S wiederum zum Vorscheine, so oft man um 300 weiter schreitet. Da kann S, wie die Durchzählung leicht giebt, 80 unterschiedne Werthe haben, und so kommen von 300 Zahlen 80 in die Tafel, daß die Verhältniß wie vorhin bleibt.

62.

62. Dadurch konnte L. Anjemas Quartanten auf eine Folioseite abkürzen, die er an erwähntem Orte beyfügt.

63. Freylich könnte man eine Zahl in A. Tafel sogleich aufsuchen, die man erst durch eine oft erwähnter drey Zahlen dividiren muß und den Quotienten in L. Tafel aufsucht. Die Frage ist also, ob man diese Mühe und Zeit anwenden, oder statt dessen ein Buch kaufen will? Ein Buch voll lauter Zifern muß theurer seyn, als eins, wo Wörter das Papier bedecken, und bey ihm sind Fehler des Verfertigers und des Setzers schwerer zu erkennen, und von gefährlichern Folgen. L. Abkürzung ist also allerdings sehr nützlich, und verstattet, Factorentafeln auf eine Grösse von Zahlen zu erstrecken, auf die sie, nach A. Art erstreckt, keinen Verleger finden würden.

64. So etwas hat schon L. in den (47) angeführten Zusätzen geleistet. Die erste Tafel darinnen, 68 Octavseiten, enthält Divisoren der Zahlen von 1 bis 102000; die zweyte, die Primzahlen von 1 . . . . 323; jede mit 1; 2; . . . 10 multiplicirt, also für jede ein Einmahleins, ist Abacus numerorum primorum überschrieben. III. Producte aus mehrern Primzahlen. IV. Die drey niedrigsten Zifern von Quadraten ungerader Zahlen, zur Entscheidung, ob es nicht unmöglich ist, daß eine vorgegebene Zahl ein Quadrat sey. V. Formeln,

meln, welche vier Fälle angeben, wie eine Zahl, die sich nicht durch 2 oder 3 dividiren lässt, Differenz zweyer Quadrate seyn kann. VI. Die Primzahlen von 1 . . . 101999. Die folgenden Tafeln gehören nicht zur gemeinen Arithmetik.

65. L. erinnert selbst bey dieser Sammlung, daß öfters schon gethane Arbeit, von neuem von Leuten unternommen worden, die nicht wussten, was schon gethan war, und bittet daher, seine Sammlung so sehr als möglich bekannt zu machen, damit Leute, die Lust zu arbeiten haben, lieber von dem schon bewerkstelligten, weiter fortgehn möchten. Daß seine Bitte nicht alle mögliche Wirkung gehabt hat, davon ist folgendes Buch eine Probe:

Tabellen der Primzahlen, und der Factoren der Zahlen, welche unter 100100 und durch 2; 3; 5; nicht theilbar sind, herausgeg. durch Joh. Neumann. Dessau 1785; 200 Quartf. 1 S. Errata. Hr. N. erwähnt im Vorberichte Lamberts Bemühungen, und hat, wie er sagt, "für „nützlich erachtet, die Lambertische Tabelle, wel„che nur bis 10000 ausgerechnet ist, wegen der „vielen darinn befindlichen Druckfehler, von „neuem zu berechnen, bis auf 100000 zu erwei„tern . . . des bequemen Aufschlagens wegen „Lamberts Format abzuändern."

Das geht also auf L. Tafel (62), die in einen Octavband, oftmahls muß gebrochen werden, und beym häufigen Gebrauche Schaden leiden würde.

For-

Format könnte wohl auch Form bedeuten, da Hr. N. die Zahlen einigermaassen anders gestellt hat als L. in der I. Tafel (64). Da aber Hr. N. von neuer Berechnung redet, und seine Tafel nicht so weit geht, als L. nur erwähnte, so ist klar, daß er nur L. Tafeln in den Beyträgen gekannt hat, nicht die in den Zusätzen, sonst hätte er die seinige wenigstens eben so weit fortgeführt.

66. Seine Arbeit ist indessen doch nicht für überflüssig anzusehn. Zahlen, die man annehmen soll, ohne selbst sie zu prüfen, müssen wenigstens zweymahl gerechnet werden, bringen zweene Rechner, deren keiner was von dem andern weiß, sie übereinstimmend heraus. Auch giebt L. von jeder Zahl nur den kleinsten Factor an, mit dem dividirt man sie, und sucht nun den Quotienten auf, und so ferner, bis man auf eine Primzahl kömmt. Hr. N. giebt bey jeder Zahl die Primzahlen an, aus deren Multiplication sie entsteht, selbst ob eine und dieselbe Primzahl mehrmahl in ihr enthalten ist, z. E. $16805 = 7''.7'''$. Es wäre wohl kürzer gewesen, statt der Striche, den Exponenten 7^5 zu brauchen. Man braucht nach Hrn N. Anordnung, etwas weniger Aufmerksamkeit, die Zahlen aufzusuchen, als beym L. Dagegen ist die Verhältniß der Räume, welche beyde Tafeln einnehmen, $= 68.\frac{1}{2} : 200 = 17 : 100$ und N. Tafeln enthalten in einem fast sechsmahl grössern Raume nicht so viel Zahlen. Lambert be-

saß eine vorzügliche Geschicklichkeit, Iliaden in Nüßchen zu bringen. Allerdings foderte er vom Leser scharfe und aufmerksame Augen.

67. L. munterte sehr auf, Tafeln dieser Art zum gemeinen Nutzen zu berechnen, wogegen ein Buchhändler doch Papier und Dinte, die darüber verschrieben würden, bezahlen möchte. Oft hatte er Veranlassung, sich zu verwundern, daß seine Aufmunterung nicht mehr Wirkung that. Manchmahl gelang es ihm doch, bey eifrigen Liebhabern der Wissenschaft, zum Unglück konnte er oft selbst diesen nicht, die Befriedigung gewähren, ihre Bemühungen zum gemeinen Nutzen anwendbar zu machen.

68. Ich habe ein Manuscript in Händen, das eine Frucht solcher Aufmunterungen ist. Es rührt vom Hrn. Bergcommissarius Gottfr. Erich Rosenthal her, der Geist, und ausserordentlichen Fleiß in mathematischen Untersuchungen schon längst durch sehr viele Proben so rühmlich gezeigt, neuerlich in Meteorologie, der Verbesserung der Barometer und Thermometer so viel geleistet hat.

Es ist ein starker Foliant, in welchem die Factoren der Zahlen von 750001 = 7. 307. 349 bis 999997 = 757. 1321 angegeben werden, die Zahlen, die sich mit 2; 3; 5; dividiren lassen, ausgeschlossen, und die Primzahlen, aus denen die Zahl entsteht, hingesetzt.

Die

Die Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg hat von Hrn. Nic. Schenmark, Prof. der Mathematik zu Upsala ein Manuscript zum Geschenke erhalten: Tabula numerorum primorum et pro minimis divisoribus compositorum ad octo millia ultra millionem expedita inveniendis constructa a Nic. Schenmark. Acta Acad. Imp. Sc. Petrop pro anno 1781 (Petrop. 1785). Pars Posterior. Histoire p. 29.

Heinrich Brigg gab in Arithmetica Logarithmica 1624. Fol. die Logarithmen für die Zahlen von 1 . . . 20000 und von 90000 . . . 100000. Adrian Vlacq füllte bey seiner neuen Ausgabe die Lücke aus, die Brigg gelassen hatte, und so bekam man die Logarithmen vollständig für hundert Chiliaden.

Bey den Factoren fehlt, daß jemand die Lücke zwischen 102000 (64) und 750000 ausfüllt, so hätte man die Zerfällung aller Zahlen bis auf eine Million. Hr. Rosenthal hat nach dem Plane Lamberts und aller wahren Verbesserer der Wissenschaften gearbeitet, fortzugehn, wo Andere stehen blieben.

69. Ich erwähne noch Vorschläge, die Factoren gewissermaassen auf eine mechanische Art zu finden.

Tafel aller einfachen Factoren der durch 2, 3, 5, nicht theilbaren Zahlen, von 1 bis 10000000; entworfen von Anton Felkel, Lehrer an der K. K. Normalschule. Wien 1776; groß Fol.

Es ist eine leichte Bemerkung, wenn man alle Zahlen nach einander in gleichen Entfernungen schreibt, daß von jeder Zahl, das Einfache, Doppelte, Dreyfache u. s. w. immer in gleichen Entfernungen von einander zu stehen kommen, und daß solchergestalt die Vielfachen sich durch Umschläge mit dem Zirkel finden liessen, wie auf der Artilleristen Caliberstabe, die Durchmesser der achtfachen, und sieben und zwanzigfachen Kugel.

Dieses würde sich aber nicht weit fortsetzen lassen, weil bey grössern Zahlen und mehr Vielfachen unmässige Längen entstünden. Hr. F. hat dergleichen Abmessungen leichter einzurichten, und dabey die durch 2, 3, 5, theilbaren Zahlen auszuschliessen gesucht. So ist er auf eine Art von Maschine gekommen, wo 30 Zahlenreihen, jede auf einem Stabe befindlich sind; Dergleichen Stäbe werden in jedesmahl gehöriger Ordnung neben einander gelegt (ohngefähr wie die Neperischen Rechenstäbe,) befestigt, und an ihnen ein beweglicher Schieber auf- und unterwärts geschoben, vermittelst dessen sich Aufgaben auflösen lassen, z. E. wenn eine Zahl gegeben ist, Zahlen zu finden, die sie zu Factoren haben u. d. g.

Hr. F. hat sich 1784 einige Tage zu Göttingen aufgehalten, mir sein Verfahren gezeigt, und mich selbst mit dem, was damahls dazu gehöriges heraus war, auch Stäben, beschenkt. Es geht allerdings ziemlich geschwind und bequem damit

damit zu, ein Knabe aus dem Hause, wo er sich aufhielte, war nach einem Unterrichte, der offenbar nur kurz seyn konnte, im Stande, gegebene Zahlen nach dieser Vorrichtung verlangtermaassen zu behandeln.

Hr. F. hat damahls und seitdem in kleinen gedruckten Nachrichten geäusert, daß er seine Kunstgriffe umständlicher bekannt zu machen bereit ist, wenn er dazu die verlangte Unterstützung bekömmt. Er ist jezo Director der Schul- und Armenanstalten auf den Gräfl. Thunischen Herrschaften in Böhmen.

70. Carl Friedr. Hindenburgs Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen, durch Abzählen oder Abmessen, bequem und sicher zu finden: Nebst Anwendung der Methode auf verschiedne Zahlen, besonders auf eine darnach zu fertigende Factorentafel, mit eingestreuten die Zahlenberechnung überhaupt, betreffenden Anmerkungen; nebst fünf Beylagen und einer Kupfertafel. Leipzig. 1776. 8.

Diese Schrift enthält auser dem eigentlich hieher gehörigen, die Factoren betreffenden, ungemein viel Lehrreiches und Neues: Es ist daher wohl genug, sie hie genannt zu haben, damit jeder Liebhaber der Arithmetik, dem sie etwa noch nicht bekannt wäre, sich aus ihr zu unterrichten veranlasst wird. Der Kupfertafeln sind drey, nicht eine. Die Beylagen bestehen

aus Tafeln auf grossen Bogen, durch Spalten und Querstriche in Fächer getheilt, vermöge deren sich Zahlen weit fortgehend in der Ordnung darstellen lassen.

Es war dieses eine der ersten Proben von der ausnehmend grossen analytischen Scharfsinnigkeit und Arbeitsamkeit, die Hr. Prof. Hindenburg, nachdem durch mehr Schriften gezeigt hat, z. E. Infinitinomii dignitatum exponentis indeterminati historia, leges ac formulae. Gotting. 1779.

Etwas von Rechenmaschinen.

71. Zahlen durch Verschieben und Abmessungen zu finden, hat so viel Aehnliches mit Maschinen, daß man hie natürlich an Rechenmaschinen denken wird. Von diesen, ohne Abbildungen und grosse Weitläuftigkeit eine Vorstellung zu geben, ist noch weniger möglich, als dieses von den nur erwähnten Kunstgriffen zu thun. Ich will also hie nur kurz etwas beybringen, woraus sich die Möglichkeit einigermaassen allgemein wird übersehen lassen.

72. Eine Scheibe lasse sich um eine unbewegliche Axe drehen, die auf ihrer Ebene senkrecht ist. Um den Rand der Scheibe stehn die Zifern 0; 1; . . . 9; in gleichen Weiten von einander, auf einer Fläche der Scheibe, oder auf der Dicke des Randes zwischen beyden Flächen, nachdem die Axe vertical oder horizontal

ist,

ist, die Scheibe sich in einer horizontalen oder einer verticalen Ebene dreht.

73. Bringt man also, durch irgend eine Vorrichtung, ohne die Scheibe oder ihre Axe unmittelbar zu berühren, eine erwähnter Zifern an irgend ein Merkmahl, das sie von den übrigen auszeichnet, z. E. eine Oeffnung in einem Bleche, das das Uebrige der Scheibe bedeckt, so stellt sich so die Zahl dar, welche diese Zifer ausdruckt.

74. Hat man mehr Scheiben, etwa so von der Rechten gegen die Linke gestellt, wie die Zifern geschrieben werden, und macht mit jeder (73), so lassen sich die Zifern zusammen lesen, und geben eine Zahl, die mit mehrern Zifern ausgedruckt wird.

75. Was (73) fodert, lässt sich so erhalten. An der Axe der Scheibe, sey ein Rad mit zehn Zähnen fest, da jeder auf eine Zifer passt, so daß Zahn und Zifer in einer und derselben Ebene durch die Axe liegen. Giebt es nun ein Mittel, von diesen Zähnen, so viel man will, herumzutreiben, z. E. den, welcher auf o passt, für den ersten genommen, vier; und man hätte anfangs an das Merkmahl (73) die o gestellt, so käme nun die 3 dahin.

76. So könnte man vor Anfange des Gebrauchs der Maschine, jeder Scheibe o, an ihr Merkmahl stellen, und dann von ihrem Rade so viel Zähne fortdrehen, als die Zifer auf ihr erfoderte, die nun an das Merkmahl kommen sollte.

77. In das Rad (75) müsste also ein Getriebe eingreifen, von dem bald mehr, bald weniger Triebstöcke in jenes Zähne wirkten. Das liesse sich etwa so bewirken: Dieses Getriebes zehn Triebstöcke, nehmen längst seiner Axe hin, nicht gleiche Längen ein, sondern sind stufenweise länger, daß sie, wie eine Wendeltreppe oder Schnecke um seine Welle bilden.

Man kann ferner diese Getriebe so stellen, daß beym Umdrehen derselben, von einem viel, vom andern weniger der ungleich langen Triebstöcke in das vor jedem liegende Rad (75) eingreife, und so mehr oder weniger Zähne desselben umdrehe, solchergestalt auf des Rades Scheibe die begehrte Zifer darstelle.

78. Wie diese Stellung geschieht, wie nachdem sie geschehen ist, durch eine Umdrehung, welche in die gestellten Getriebe gemeinschaftlich wirkt, jedes so gedreht wird, daß vermöge desselben die begehrte Zifer dargestellt wird, das erfoderte begreiflich eine eigene mit mehrern Zeichnungen erläuterte Abhandlung.

79. Da die Leibnizische Rechenmaschine jezo zu Göttingen befindlich ist, so könnte ich von dieser leicht ausführlicher reden, wenn ich glaubte, daß hie der Ort dazu wäre. Ich will mich aber nur, auf die doch etwas umständlichere Nachricht davon beziehen, die Hr. Geh. Justizrath Pütter, seinem Versuch einer academischen Gelehrtengeschichte der Georgaugustus-Universität (Gött. 1765) 135 §. eingerückt hat. Leupold

pold Theatr. Mach. Arithmet. Geom. (Leipz. 1727) Tab. VIII. stellt nur das äusere Ansehn dieser Maschine vor, und das nach einem Exemplare, welches nicht so vollständig gewesen seyn muß, als das hie vorhandene, denn Leupolds Bild zeigt nur 12 Scheiben wie (72) die da mit a, b, .. bezeichnet sind, die hiesige Maschine hat ihrer 16 und ist so im Stande, ein Product von so viel Zifern darzustellen.

79. Ioannis Poleni Descriptio Machinae Arithmeticae eiusque usus, findet sich in einer Sammlung kleiner Schriften von ihm: Miscellanea; Veneb. 1709. 4.

Lepine, Mach. Arithm; Pascal, Mach. Arithm., in Gallon, Machines et inventions, approuvées par l'Ac. R. d. Sc. T. IV. Par. 1735. p. 131. p. 137. Drey Rechenmaschinen von de Hillerin de Boistissandeau das. T. V. p. 100.

Der durch mechanische Kunstwerke so berühmte Hr. Pastor Hahn im Würtenbergischen hat ebenfalls eine verfertiget.

80. Der Hochf. Hessendarmstädtische Ingenieurhauptmann und Landbaumeister, Hr. Joh. Helfrich Müller, hat 1784; hie zu Göttingen, eine Rechenmaschine gezeigt, die vor der Leibnizischen in verschiedenen Absichten einige Vorzüge hat. Sie geht zwar nur bis an die nächste Zahl unter hundert Billionen, also auf Zahlen mit 14 Zifern, da das hie vorhandene Leibnizische Exemplar bis auf 16 Zifern geht; Ein paar Schei-

ben mehr, die man leicht jeder Maschine beyfügen kann, machen nichts aus. Ich habe einige Nachricht von Hrn. M. Maschine in den Gött. gel. Anz. 1784. 120 St. ertheilt.

J. Heinr. Müllers Beschreibung seiner neuerfundenen Rechenmaschine, Frankf. 1786.

Neue Tafeln über cubischen Gehalt und Werth, des runden, beschlagenen und beschnittenen Bau- und Werkholzes, verfertiget mittelst der Müllerischen Rechenmaschine, Frankf. 1788.

Hr. Müller ward im Anfange des Jahres 1797 Oberster. Die neue allg. d. Bibliothek 44 B. 1. St. 259 S. (1799) meldet sein Fürst habe Hr Müller, ohne Geräusch, belohnet. Hr. M. behalte die Maschine in seiner Verwahrung, und beschäfftige sich damit, sie vollkommner, und durch Verfertigung in Holz gemeinnützger zu machen.

In Gallon Machines, et inventions aprouvées par l'Ac. R. d. Sc. T. IV. (Par. 1735;) p. 131; p. 137; L'Epine Machine Arithm. Pascal Mach. Ar. und das. T. V. p. 103. Drey Rechenmaschinen von: de Hillerin, de Boistissandeau.

Io. Poleni Miscellanea Ven. 1709. Da ist n. 11. Machinae Arithmeticae, eiusque usus descriptio.

81. Der hauptsächlichste Nutzen solcher Maschinen ist, daß sie die Aufmerksamkeit ersparen, welche jede Rechnung erfodert, so gut man auch

ihre

ihre Regeln inne hat, und Rechnungsfehler verhüten, die Mangel dieser Aufmerksamkeit verstatten kann. So empfohl besonders Leibniz seine Maschine, wie ich aus zu ihr gehörigen Papieren sehe, die mir aus der Kön. Churf. Bibliothek zu Hannover sind anvertrauet worden, ob ich daraus vom Baue und Vorrichtung einiges Licht erhalten könnte? Wie mir dieses bey einer Maschine, die ich selbst unter die Hände bekam, ziemlich entbehrlich war, so gaben auch darinn die Papiere wenig Erläuterung. Etwas weniges von ihnen, enthält die allgemeine Vorstellung der Maschine, nebst Zeichnungen aus freyer Hand mit Dinte und Schreibfeder gezeichnet. Wenn L. nicht mehr Mühe auf Zeichnungen seiner Maschine gewandt hat, und das wäre ihm leicht zu verzeihen, so ist sehr begreiflich, wie sie ihn sehr viel Geld kann gekostet, und doch nicht die Vollkommenheit, die er verlangte, erreicht haben. Er machte sich alsdann den Künstlern nicht verständlich genug, musste ihnen also Anstrengung des Geistes bezahlen, die für den blos ausarbeitenden Künstler ganz was anders ist, als Geschicklichkeit und Fleiß der Hand, dann auch Ausarbeitungen, bey denen sie Ihn nicht recht verstanden hatten. Ueber seine Monadologie, prästabilirte Harmonie und Theodicee schrieben freylich viel Gelehrte, die ihn darinn noch weniger verstanden, aber, die wurden von Buchhändlern bezahlt, wohl gar von frommen Mecänen, die etwa die Bestreitung seelen-

ver-

verderblicher Irrthümer, mit einer Profession, wenigstens mit einer Pfarre belohnten. Die letzte Art von Belohnung wenigstens fällt jezo weg, weil Orthodoxie nicht mehr belohnt wird, und nach der jezigen Beschaffenheit der Theologie, Leibniz sehr orthodox ist.

82. Die meisten Leibnizischen zur Rechenmaschine gehörigen Papiere, betreffen Anpreisung ihres Nutzens, zumahl nach Frankreich, wohin er wünschte, mehrere Exemplare zugleich abzusetzen, (weil nähmlich ein einzelnes bald wäre nachgemacht worden,) und vorzüglich als ihren Nutzen in Rechnungsämtern u. d. g. angiebt, daß sie sich nicht verrechnen könne.

83. Davon ist man doch nur in so fern sicher, in so fern sie ohne Fehler ausgearbeitet, und zum Anfange der Rechnung richtig gestellt ist.

84. So nützlich dergleichen Maschinen in der That seyn könnten, so sehr wird ihrer allgemeinen Verbreitung hinderlich fallen, daß sie nothwendig kostbar werden. Der Mathematiker, für den Mathematik Aufklärung und Ergötzung des Verstandes ist, wird selten — beynahe dürfte ich sagen nie — dergleichen Kunstwerk bezahlen können, und die Leute, denen ihre Rechnungen genug dazu eintragen, werden doch immer für die Anschaffung eines solchen Werkzeuges zu ökonomisch seyn. Ich finde unter den Urkunden über die Leibnizische Maschine keine Spur, daß irgend ein Fermier Géné-

ral

ral dazu Lust bezeigt hätte, obgleich wahrscheinlich der Preis davon geringer möchte gewesen seyn, als von einem ganz mässigen Geschenke an eine Operatänzerinn. Hr. Müller glaubt, wenn seine Maschine auf einmahl in Menge gemacht würde, da die Theile dazu fabrikenmässig könnten verfertiget werden, würde ihr Preis, für die Bequemlichkeit, die sie verschafft, nicht zu hoch kommen.

85. Die einfachste Art von Rechenmaschinen, eigentlich was zu dergleichen Erfindungen Anlaß geben kann, sind die Neperischen Rechenstäbe, von den man in sehr vielen mathematischen Anfangsgründen, Beschreibungen findet, auch einzelne. Von des Erfinders eigner, besitze ich eine Uebersetzung: Raddologia, overo Arimmetica Virgolare . . . autore ed Inventore il Baron Giovanni Nepero, tradottore della Latina nella Toscana lingua, il Cavalier Marco Locatello. Verona 1623. Auser einigen Zusätzen des Uebersetzers, findet sich da auch von N. ein prontuario della molteplicazione und eine arimmetica locale; jenes grosse Multiplicationen zu verrichten, zu welcher Absicht die Zahlen in gewisse Fächer gesetzt werden, diese mehr eine Art von Spiele, da die Fächer des Schachbrets, nach ihren unterschiedenen Stellen, unterschiedne Geltungen bekommen. Man hat mehr dergleichen Spiele, bey denen nicht ganz leichte Rechnungen erfodert werden, wie de Rythmomachia oder der

Zah-

Zahlenkampf, beym: Schachspiel von Gustavo Seleno; Leipz. 1617. Fol.

86. Schon etwas einer Maschine mehr ähnliches erhält man, wenn man das Einmahleins nicht wie Neper in Streifen schneidet und auf Stäbchen kleistert, sondern mit dem Blatte, darauf es geschrieben ist, einen Cylinder überzieht, und mehr dergleichen Cylinder neben einander in einen Kasten bringt, wo man sie um ihre Axen dreht, und durch sie Producte darstellt, wie durch Nebeneinanderlegen der Nepe-rischen Stäbchen. Dergleichen Rechenkasten beschreibt Gaspar Schott, Organum mathematicum, (Würzb. 1668) L. I. c. 12. Vor einigen Jahren war jemand durch eignes Nachdenken auf diese Einrichtung gekommen, und erwartete, für eine so nützliche Erfindung belohnt zu werden: Ich konnte aber dem, der sie mir zeigte, sogleich ein ehrwürdiges Alterthum dieser Art entgegenstellen, das ich vorlängst in Leipzig in einer Auction gekauft hatte.

Eine Scheibe, wo Zahlen in concentrischen Kreisringen stehn, die vermittelst Umdrehung eines Zeigers zum Rechnen dienen, giebt Harsdörfer in seiner Fortsetzung von Schwenters Erquickstunden: Der mathem. und philos. Erquickst. II. Theil. I. Th. 47. Aufg. 47. S. Sie ist von einem Rechenmeister zu Paris herausgegeben worden.

Ohn-

Ohngefähr so was ist Grüsons Erfindung. Beschreibung und Gebrauch einer neuerfundenen Rechenmaschine, von Joh. Phil. Grüson. Magdeburg 1791.

Von den ältern, erwähnter Erfindungen, und noch andern, ertheilt Leupold im (78) angeführten Buche, Nachricht.

Zusammensetzung ganzer Zahlen aus Gliedern geometrischer Reihen.

87. Eine Zahl wird nur aus den ersten $n-1$ Gliedern einer Reihe durch Addition zusammengesetzt, wenn, um sie zu erhalten, nicht mehr als so viel Glieder der Reihe addirt werden; es kann geschehen, daß auch wenigere zulänglich sind. Kein Glied muß bey Zusammensetzung einer Zahl mehr als einmahl vorkommen.

88. So wird jede Zahl von 1 bis 15; aus den ersten vier Gliedern der geometrischen Reihe 1 : 2 : 4 : 8 : 16 durch Addition zusammengesetzt; Z. E.

$15 = 1 + 2 + 4 + 8$; $14 = 8 + 4 + 2$;
$13 = 8 + 4 + 1$; $12 = 8 + 4$ u. s. w.

89. Daß unter diesen Ausdrücken, auch ein Glied der Reihe selbst begriffen ist, versteht sich. So ist 8 durch 8 selbst als ein Glied der Reihe gegeben.

90. Eine Zahl wird nur aus den ersten $n-1$ Gliedern einer Reihe, durch Addition und

Sub-

Subtraction, gegeben, wenn nicht mehr als so viel Glieder, auf eine und die andre erwähnter Arten zusammengefugt, diese Zahl geben. Wiederum, können es weniger als n Glieder seyn, oder auch eines allein. Aber im Ausdrucke einer Zahl, muß ein Glied nicht mehr als einmahl vorkommen.

91. Aus der Reihe 1 : 3 : 9 : 27 : 81, ersten drey Gliedern, entstehn folgende Zahlen theils blos durch Addition, theils durch Addition und Subtraction, theils auch sind sie einzelne Glieder der Reihe. Ich schreibe in der obern Zeile die Zahlen, in der nächsten darunter die Glieder der Reihe, aus den sie entstehn.

	1	2	3	4	5	6	7
Ist =	1	3-1	3	3+1	9-3-1	9-3	9-3+1

	8	9	10	11	12	13
Ist =	9-1	9	9+1	9+3-1	9+3	9+3+1

92. Wenn einer geometrischen Reihe erstes Glied = 1; Exponent = e, Zahl der Glieder = n + 1 also letztes Glied = e^n; so ist die Summe = $\frac{e^{n+1} - 1}{e - 1}$ = S (VIII. Cap. II. Abschn. 3).

93. Eine Zahl also, die nur durch Addition aus den ersten n — 1 Gliedern entstehen soll, kann nicht grösser als S seyn, und folglich auch nicht eine Zahl, die aus ihnen durch Addition und Subtraction entstehen soll.

93. Für $e = 2$ ist in (88) $1 + 2 \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ (wie VIII. Cap. II. Abschn. 31 ein Exempel ist); Also für $n + 1 = 4$; wie in (88) lässt sich aus den ersten vier Gliedern der Reihe durch Addition keine grössere Zahl als $16 - 1 = 15$ zusammensetzen.

94. Für (91) $e = 3$ und $n + 1 = 3$ ist $S = \frac{27 - 1}{2} = 13$; keine grössere Zahl lässt sich also aus den ersten drey Gliedern nicht zusammensetzen, wie (91) zeigt.

Jede ganze Zahl lässt sich nach (87) aus Gliedern der Reihe 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 ... zusammensetzen.

95. I. Der Reihe $n + 1$tes Glied ist $= 2^n$

II. Man nehme an, für irgend einen bestimmten Werth von n, lasse sich jede ganze Zahl kleiner als dieses Glied, nach (87) aus den ersten n Gliedern zusammensetzen.

III. Das nächstfolgende Glied ist $= 2^n . 2$

IV. Jede ganze Zahl, kleiner als dieses nächstfolgende Glied, und grösser als das $(n + 1)$te, lässt sich der Voraussetzung gemäß (II) aus dem $(n + 1)$ten, und den ersten n zusammensetzen. Das ist, aus den ersten $n + 1$ Gliedern.

V. Wenn also für irgend einen bestimmten Werth von n, für irgend eine bestimmte Potenz der 2; wahr ist, daß jede Zahl kleiner als diese

Potenz, sich aus den Gliedern der Reihe zusammensetzen lässt, die vor dieser Potenz hergehn.

So ist eben das von der nächstfolgenden Potenz wahr. Jede Zahl, kleiner als diese nächstfolgende Potenz, lässt sich aus Gliedern der Reihe zusammensetzen, welche vor dieser nächstfolgenden Potenz hergehn.

VI. Proben versichern leicht, daß die Voraussetzung wahr ist, wenn man $n=1$; oder $=2$; oder $=3$; oder $=4$ setzt. Vom letzten Werthe stehen Exempel in (88).

VII. Das ist: Jede Zahl, kleiner als 16, lässt sich aus den ersten vier Gliedern der Reihe zusammensetzen.

Folglich jede Zahl, kleiner als 32 aus den ersten fünfen.

Und, da dieses als Folge, nicht etwa nur angestellten Proben gemäß, richtig ist,

So folgt ferner, daß jede Zahl, kleiner als 64, sich aus den ersten sechs Gliedern zusammensetzen lässt;

Und jede Zahl, kleiner als 128, aus den ersten sieben; u. s. f.

VIII. Es ist nähmlich der Satz wahr, durch Erfahrung für $n=4$;

Also durch Folge für $n+1=5$

Und nun, erwiesen wahr für $n=5$

Also durch Folge für $n+1=6$

Und nun $n=6$ gesetzt, für $n+1=7$ und so ohne Ende fort.

IX.

IX. Jede Zahl also, die kleiner als irgend eine Potenz der 2 ist, läßt sich aus Gliedern der Reihe zusammensetzen, nicht mehrern, als vor dieser Potenz vorhergehn.

X. Und da es für jede Zahl, so groß sie auch ist, eine Potenz der 2 giebt, die grösser ist, so gilt das für jede Zahl.

Ueber die Zusammensetzung jeder Zahl aus Gliedern der Reihe 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 ... durch Additen und Subtrahiren.

96. In (91) ist berechnet, daß jede der Zahlen 1 .... 13 sich nach (90) aus den ersten drey Gliedern der Reihe zusammensetzen läßt.

Die grösste dieser Zahlen ist die Summe der ersten drey Glieder (94)

Folglich läßt sich auch (nach 90) aus den ersten vier Gliedern, jede nachstehender Zahlen zusammensetzen $27+1=28$; $27+2=29$ .. .... $27+13=40$

Die grösste dieser Zahlen, ist die Summe der ersten vier Glieder.

Das veranlaßt nachstehendes Verfahren.

97. I. Für irgend einen bestimmten Werth von n; lasse sich jede Zahl, die kleiner ist als das $(n+1)$te Glied, 3^n, nach (90) aus den ersten n Gliedern zusammensetzen.

II. Die Summe dieser Glieder ist (wie nach dem Verfahren in 94 gefunden wird) $=\frac{3^n-1}{2}$;

Alle Zahlen also von 1 bis mit der nur angegebenen Summe, lassen sich für den bestimmten Werth von n aus den ersten n Gliedern zusammensetzen.

III. Folglich auch aus den ersten $n+1$ Gliedern alle Zahlen von 3^n bis mit $3^n + \frac{3^n-1}{2} = \frac{3 \cdot 3^n - 1}{2} = \frac{3^{n+1}-1}{2}$

IV. Das ist aber die Summe der ersten $n+1$ Glieder.

V. Giebt also die Rechnung für einen bestimmten Werth von n, daß sich alle Zahlen von 1 bis mit an die Summe der ersten n Glieder, aus den ersten n Gliedern zusammensetzen lassen:

VI. So folgt daraus, daß sich auch alle Zahlen von 1 bis mit an die Summe der ersten $n+1$ Glieder, aus den ersten $n+1$ Gliedern zusammensetzen lassen.

VII. Nun gilt
die Voraussetzung (V) für $n = 3$
Also die Folge (VI) für $n+1 = 4$
Und daher nun die Voraussetzung für $n = 4$
Und die Folge für $n = 5$
Und so fort für alle Werthe, die n haben kann.

VIII. Für jeden willkührlichen Werth von n, lässt sich also eine Zahl, kleiner als 3^n, aus den ersten n Gliedern der Reihe nach (90) zusammensetzen.

IX.

IX. Das ist: Jede Zahl lässt sich auf diese Art aus Gliedern der Reihe zusammensetzen, weil jede Zahl kleiner ist als irgend eine Potenz der 3.

98. In Euler, Introductio in analysin infinitorum (Lausann. 1748; 4.) T. I. c. 16; de partitione numerorum, stehn am Ende des Capitels die beyden Sätze 95; 97; als merkwürdige Fälle allgemeiner Lehren desselben Capitels erwiesen, noch mit dem Umstande, daß eine gegebene Zahl, aus jeder der beyden Reihen, sich nur auf eine Art zusammensetzen lässt. Da Hrn. Eulers Verfahren, höhere analytische Känntnisse erfodert, so schien es mir nicht überflüssig, wenigstens das Wichtigste dieser Lehre, daß sich jede Zahl aus Gliedern der Reihen zusammensetzen lässt, aus der gemeinen Arithmetik auf eine leichte Art herzuleiten.

99. Eine practische Anwendung hievon zeigt sich bey Abtheilung der Gewichte.

Mit n Gewichten, die nach der Verhältniß 1 : 2 fortgehn, kann man jedes Vielfache des kleinsten Gewichts angeben, das kleiner ist als 2^n, So daß die Gewichte alle in eine Wagschaale kommen, in die andre die Waare (95; IX).

So mit 1; 2; 4; 16 Lothen, jede Zahl Lothe von 1 bis mit 31.

100. Mit n Gewichten, die nach der Verhältniß 1 : 3 fortgehn, lässt sich jedes Vielfache des kleinsten Gewichts angeben, nur müsste man oft einige von ihnen, die im Ausdrucke der

Zahl, das Zeichen + haben, in die eine Wagschaale legen, die andern, die — vor sich haben, in die Schaale, in welcher die Waare liegt.

Mit 1; 3; 9; Pfunden, kann man bis 13 Pfund abwägen, wenn alle diese drey Gewichte in eine Schaale zusammen gelegt werden.

Wollte man 7 Pf. abwägen, so legte man 9+1 Pf in die Schaale der Gewichte, und 3 Pf. in die Schaale der Waare; u. s. w. (91)

101. Weil die Glieder der Reihe 1:3:9... schneller wachsen, als die der Reihe 1:2:4... so kann man eine und dieselbe Zahl, mit weniger Gliedern jener, als dieser Reihe darstellen, also für nur erwähnte Anwendung mit weniger Gewichten nach der Verhältniß 1:3 als nach der 1:2 auskommen.

Mit 1:3:9:27:81 Pfunden, kann man bis 121 Pfund abwiegen.

Eben das Gewicht mit Pfunden anzugeben, die nach der Verhältniß 1:2 wachsen, muß man 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64 Pfund haben, da kommen 64+32+16+8+1 Pfund, zusammen in die Schaale der Gewichte.

102 Euler a. a. O. erwähnt diesen Gebrauch der Arithmetik. Schwenter mathematische Erquickstunden, IX. Th. 11. Aufg. 369. S. führt das Exempel, mit fünf Gewichtsteinen bis 121 Pf. zu wägen, und so andre, aus Simon Jacob von Coburg grosser Arithmetica fol. 244 an.

103. Wer mit Rechnen nicht gut umzugehen weiß, kann bey dem Verfahren, da einige

nige Gewichte in der einen Schaale, andre in der andern liegen, leicht betrogen werden. Deßwegen, erinnert Schw. sey es verboten. Gegentheils seyen die Gewichte, die nach der Verhältniß 1 : 2 fortgehn, verstattet, weil da Betrug nicht so leicht statt finde.

104. Wenn man nur bis auf eine gewisse Last abwägen wollte, könnte vielleicht das gröste Glied der Progression entbehrlich seyn, und man könnte statt dessen ein kleineres Gewicht nehmen.

Z. E. man wollte mit Gewichten, die nach der Verhältniß 1 : 2 fortgehn, nie mehr als 40 Pf. wiegen. Weil $1+2+4+8+16=31$ und $40-31=9$; So liesse man zu den erwähnten 5 Gewichten als sechstes nicht 32, sondern nur 9 verfertigen.

105. Diese Bemerkung führt Schw. schon aus Simon Jacob an. Sie wird auch vom Paul Casatus S. I. gemacht, Mechanicorum Libri Octo. Lugd. 1684; 4; L. III. c. 1.

Daselbst 232; 233. S. sind zwo Tafeln. Die erste, wie man die Gewichte zusammensetzen muß, mit sechsen nach der Verhältniß 1 : 2; bis 40 Pf. abzuwiegen, darüber bis auf 63 ist diese Tafel nicht erstreckt. Die andere zeigt, wie man mit 1; 3; 9; 27; 12 Pfunden bis auf ihre Summe 52 wiegen kann; z. E. 50 Pf. zu wiegen, kommen in die Schaale der Waare 1 Pf. in die Schaale der Gewichte $27+12+9+3$

106. Auf das Wachsthum der Zahlen, die immer verdoppelt werden, gründet eben der Casatus L. III. c. 10. Prop. 4. p. 321, ein Verfahren, mit einem kleinen Gewichte, eine grosse Last einer Materie, die sich nach Gefallen theilen lässt, abzuwiegen.

Gesetzt, man habe nicht mehr Gewicht als ein Loth, und wolle damit mehrere Pfunde Salz abwiegen.

Man wiegt also mit dem vorhandenen Gewichte, 1 Loth Salz ab:

Thut dieses Salz zum Gewichte,

So kann man in der Schaale gegen über nun 2 Loth abwiegen.

Und diese 2 Loth zu den vorigen 2 Loth gethan, mit ihnen vier Loth.

Und diese vier Loth zu den vorigen, mit ihnen 8 Loth u. s. w.

Bis hieher hätte man also $1+2+4+8=15$ Loth Salz abgewogen, die Summe der ersten vier Glieder der Progression, die man durch vier solche Arbeiten bekommen hat.

Wollte man also jede geringere Zahl von Lothen abwägen, so dürfte man nur nachsehn, wie viel Glieder der Progression nach der Ordnung addirt, ihr am nächsten kommen, so viel abwägen, und das wiederhohlen, bis man die verlangte Zahl hat.

Z. E.

Z. E. 12 Loth zu haben, wäge man durch drey solche Arbeiten 1 + 2 + 4 = 7 Loth ab; noch durch zwo 1 + 2 = 3; nun fehlen noch 2 Loth, man könnte jedes dieser beyden Lothe einzeln abwiegen, oder da man vorhin schon einmahl 2 Loth gewogen hat, diese brauchen, eben so viel noch einmahl zu wiegen.

107. Der Einfall verdient wenigstens gekannt zu werden. Casat giebt das Exempel mit einer Unze zum Anfange, zehnmahl zu wiegen, die zehnte Abwiegung giebt 512, und zusammen hat man so 1023 Unzen = 85$\frac{3}{4}$ Pf. gewogen.

Viel Mühe und Zeit erfoderte das, und da man hie vom Kleinen immer auf das Grössere geht, könnte sich ein Fehler, der bey 1 oder 2 Lothen unmerklich wäre, vervielfältigen, auch möchte das öftere Hin- und Herlegen des Salzes, nicht eben vienlich seyn.

108. Die Vortheile, durch Gewichte nach einer der angezeigten Progressionen zu wiegen, erklärt auch Leupold Theatr. Staticum universale (Leipz. 1726) I. Th. 118 §. Erinnert auch 105 §. man müsse die grossen Gewichte nie nach den kleinen aufbauen, sondern die kleinen aus den grössern durch Theilung herleiten.

Er würde also nur angeführten Vorschlag des Casatus nicht empfohlen haben.

Und noch viel weniger, eine Vorschrift, die Probiergewichte zu machen, die Salomon Haase in dem XI. C. 123 §. angeführten Buche giebt.

Sie findet sich daselbst 282. S.

109. Man nimmt ein Stücklein Messingblech, welches sonst Flinder- oder Flittergold genannt wird, schneidet desselben ein Stücklein solcher Schwere ab, daß, wenn es in eine schnelle Probierwaage gelegt wird, gerade so schwer sey, daß nur ein merklicher Ausschlag davon gesehen werden könne. . . Das ist das kleinste Theilchen des Richtpfenniges. Nun wird ein anderes ihm gleich schweres gemacht, ferner ein Stückchen, so schwer als die beyden = 2 Theile, u. s. f. durch Verdoppelung.

110. H. erinnert, man könne kein kleiner Gewichttheilchen annehmen, als das einen Ausschlag verursache, weil ein kleineres nicht merklich wäre. Er hätte noch können beyfügen, daß ein Gewicht, welches, in eine Schaale der auf beyden Seiten beschwerten Waage gelegt, einen Ausschlag geben soll, noch grösser seyn muß, als das, welches, in eine Schaale der leeren gelegt, gleichen Ausschlag giebt, denn Ausschlag zu geben, wird erfodert, die Friction des Wagebalkens in seinen Lagern zu überwinden, und die beträgt bey der beschwerten Waage mehr als bey der leeren. (Statik; 49; XIII.)

Daß also H. ein Gewicht sucht, welches bey der leeren Waage Ausschlag angiebt, ist

nicht

nicht so ungereimt, als es beym ersten Anblicke scheinen möchte.

111. Nur ist das etwas ganz unbestimmtes, denn eine schnellere Waage wird Ausschlag bey einem kleinern Gewichtchen angeben. Auch würde ein kleiner Gewichtchen, bey eben der Waage, nur einen kleinern Ausschlag geben.

Wäre Richtpfennig, so was, wie ein verjüngter Maaßstab, da 1024 Theile ein Quentchen, und 65536 eine Mark bedeuteten, so möchte sich dieses Unbestimmte noch entschuldigen lassen: Aber sie sollen das wirklich seyn (XII. C. 43). Die Probirer geben allerley Gewichte nach den Richtpfennigen an, wie man allerley Maasse, nach dem Pariser Fusse angiebt. So setzt H. zum voraus, ein Gewichtchen, das die leere Waage zieht, gebe, 65536mahl genommen, die Cölnische Mark; eine Voraussetzung, als wenn man aus der Dicke eines feinen Haares, oft zusammengesetzt, den Pariser Fuß bestimmen wollte.

Und nun, aus so was unbestimmtem durch mehrmahl wiederhohlte Verdoppelungen, das 1024fache oder höhere Vielfache zu machen, und so sich zu bereden, man habe Quentchen oder Lothe?

112. H. lehrt noch eine andere Art, absteigend die kleinen Gewichtchen zu machen. Er nimmt ein Stück Flindergold, durchaus gleich dick, eines Pfennigs schwer (256 Theile

des

des Richtpfennigs) das halbirt er, und wenn dieses Halbiren gelungen ist, oder: die beyden Stückchen gleichviel wiegen, nimmt er eines für einen halben Pfennig (128 Theile) an, und bekömmt aus demselben auch so durch fortgesetztes Halbiren, 64; 32; 16; 8; 4; 2; 1 Theil. Diese letzte Art wäre seines Erachtens die beste: worinn er ohne Zweifel in Absicht auf die kleinern Gewichte Beyfall verdient. Die grössern müsste er doch durch Verdoppelung finden, die freylich hie nicht so weit ginge.

113. Soll der Richtpfennig ein bestimmtes Gewicht seyn, die Mark in eine grosse Menge Theile getheilt, so muß man ja wohl ein solches Gewicht schon haben, und nach demselben das, was man verfertigen will, einrichten. Hr. H. findet den Richtpfennig in der That noch unsichrer, als man vor alters den Fuß bestimmte. Sechszehn Männer setzten ihre rechten Füsse immer einer vor den andern, die zusammen, gaben eine Ruthe, und diese Länge in sechszehn Theile getheilt, einen gerechten Schuh. (Paulini Zeitkürzende erbauliche Lust, I. Theil (1695) 389 S. Jacob Köbel, Geometrey, von künstlichem Feldmessen (Frf. 1616.) 4 Blatt. b).

Obgleich sechszehn Fusse schwerlich genau so viel betragen, als sechszehn andre, so konnte doch für Leute, denen es auf einen kleinen Querfinger nicht ankam, der sechszehnte Theil von

den

den einen, dem sechszehnten von den andern gleich geschätzt werden. Wenn aber irgend ein Absatz, etlichemahl an einander gesetzt, einen Fuß hätte geben sollen, und aus sechszehn solchen Fussen eine Ruthe hätte sollen gemacht werden, so hätten wohl selbst die Bauern, die Jacob Köbel, wie sie aus der Kirche kommen, an einander treten lässt, eingesehen, daß diese Bestimmung der Ruthe, ihren Beyfall nicht verdiene.

Schriften
von
Abraham Gotthelf Kästner.

Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv, m. K. 4te Aufl. oder der mathemat. Anfangsgr. 1ter Theil, 1te Abtheil. 6te Aufl. 8. 1800. 1 Thlr. 4 ggr.

Fortsetzung der Rechenkunst, oder der mathem. Anfangsgr. 1r Th., 2te Abth. 2te Aufl. 8. 1800. 1 Thlr.

Geometr. Abhandl. der mathem. Anfangsgründe 1r Band, 3te Abth. 8. 789. 1 Thlr. 6 ggr.

Derselben 2ter Band, der mathem. Anfangsgr. 1ter Theil, 4ter B. m. K. 8. 791. 1 Thlr. 6 ggr.

Anfangsgründe der angewandten Mathematik in 2 Abtheilungen; der mathemat. Anfangsgründe 2r Theil 8. m. K., vierte Aufl. 792. 1 Thlr. 16 ggr.
Diese 2 Abtheilungen werden nicht getrennt.

Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen; des 3ten Theils 1te Abtheil. dritte Ausgabe m. K. 8. 794 1 Thlr.

Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen, des 3n Th. 2e Abth. dritte Ausg. m. K. 8. 799 2 Thlr.

Anfangsgründe der höhern Mechanik, oder des 4ten Theils 1te Abtheil. m. K. 8. 2te vermehrte Ausgabe 1 Thlr. 4 ggr.

Anfangsgründe der Hydrodynamik, oder 4ten Theils 2te Abth. 2te Ausg. m. K. 8. 798 1 Th. 16 ggr.

Astronomische Abhandlungen, 2 Theile m. K. 8. 772–74 1 Thlr. 12 ggr.

Mathesis compl. 10 Theile 9 Thlr. 12 ggr.

Anmerkungen über die Markscheidekunst, nebst einer Abhandl. von Höhenmessungen durch das Barometer. m. K. 8. 774 16 ggr.

Weitere Ausführung der mathem. Geographie, besonders in Absicht auf die sphäroidische Gestalt der Erde mit 6 Kupfert. 8. 795 1 Thlr. 4 ggr.

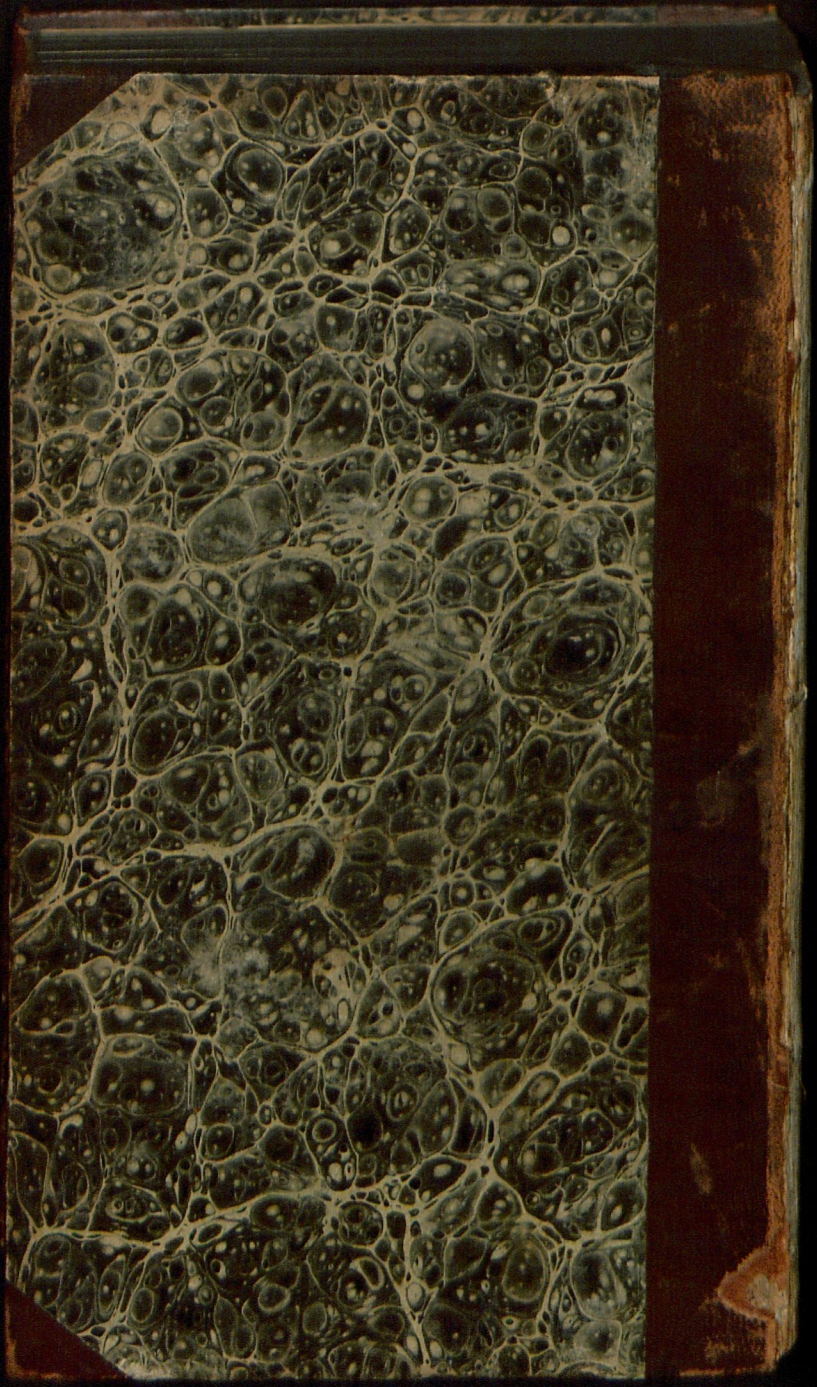
Gedanken über das Unvermögen der Schriftsteller Empörungen zu bewirken, 8. 793 2 ggr.

Pb 1148 a

ULB Halle
3
007 412 657

VD18 n.c.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-822805-p0639-2



Fortsetzung
der
Rechenkunst
in
Anwendungen
auf mancherley Geschäffte.

Von
Abraham Gotthelf Kästner.

Der mathematischen Anfangsgründe ersten Theils
zweyte Abtheilung.

Zweyte vermehrte Auflage.

Göttingen,
im Verlag bey Vandenhoeck und Ruprecht 1801.

Farbkarte #13
B.I.G.
Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black
Centimetres Inches
Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-822805-p0641-9