2

2.

Zu
der öffentlichen Prüfung,
welche
mit den Zöglingen
der

höhern Realschule im Waisenhause zu Halle

am 20. März 1839,
Vormittags von 8 bis 12 Uhr und Nachmittags von 2 bis 5 Uhr,
auf dem
Betsaale der deutschen Schulen
veranstaltet werden soll,
werden
die geehrten Aeltern der Schüler und alle Freunde des Schulwesens
hierdurch ehrerbietigst eingeladen
vom

Inspector Ziemann.

Inhalt:

I. Anfangsgründe der Differential-Rechnung. Abhandlung vom Collegen Dippe.
II. Schulnachrichten vom Inspector.

Halle,
gedruckt in der Buchdruckerei des Waisenhauses.
1839.

Zu
der öffentlichen Prüfung,
welche
mit den Zöglingen
der
höhern Realschule im Waisenhause
zu Halle
am 20. März 1839,
Vormittags von 8 bis 12 Uhr und Nachmittags von 2 bis 5 Uhr,
auf dem
Betsaale der deutschen Schulen
veranstaltet werden soll,
werden
die geehrten Aeltern der Schüler und alle Freunde des Schulwesens
hierdurch ehrerbietigst eingeladen
vom
Inspector Ziemann.

Inhalt:
I. Anfangsgründe der Differential-Rechnung. Abhandlung vom Collegen [illegible].
II. Schulnachrichten vom Inspector.

Halle,
gedruckt in der Buchdruckerei des Waisenhauses.
1839.

Vorwort.

Nachstehende Abhandlung ist für die erste Klasse der Realschule ausgearbeitet, und soll derselben als Leitfaden dienen. Indem die Schule mit den Anfangsgründen der Differentialrechnung den Unterricht in der Mathematik beschließt, will sie die Schüler in den Stand setzen, sich später mittelst vollständiger Lehrbücher in der höheren Analysis zurecht zu finden, und ihnen zugleich durch die Einführung in ein bisher ihnen verschlossenes, fruchtbares Gebiet eine kräftige Aufforderung mitgeben, sich mit Liebe und Eifer in den Stunden, welche der Beruf nicht in Anspruch nimmt, wissenschaftlich zu beschäftigen. Ob die gegenwärtige Darstellung der Anfangsgründe der Differentialrechnung nebst einigen ihrer einfachsten Anwendungen diesen Zwecken, und somit vielleicht auch den Bedürfnissen anderer Realschulen entsprechen werde, und ob sie geeignet sei, auf die Behauptung Mancher, daß die Realschulen einer wissenschaftlichen

Behandlung ihrer Unterrichtsgegenstände unzugänglich seien, ein Streif-
licht zu werfen, das muß dem Erfolge, so wie dem Urtheile Kundiger überlassen bleiben. Jede belehrende Mittheilung würde den Verfasser zum größten Danke verpflichten.

Halle, am 18. December 1838.

M. C. Dippe.

Anfangsgründe der Differentialrechnung.

Einleitung.

1. Eine Größe heißt **veränderlich**, wenn sie beliebige Werthe annehmen kann; **beständig** (constant), wenn sie nur bestimmte Werthe erhalten soll. Beständige Größen werden durch die ersten, veränderliche durch die letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet.

2. Stehen zwei veränderliche Größen in solchem Zusammenhange, daß die Werthe der einen sich ergeben, wenn für die andere beliebige Werthe angenommen werden: so heißt die erste Größe die **abhängige**, die zweite die **unabhängige** Veränderliche, oder die erste ist eine Function der zweiten; z. B. $y = gx^2$, $y = \sqrt{2rx - x^2}$. Eine veränderliche Größe kann Function von **mehreren** unabhängigen Veränderlichen sein: z. B. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $u = 2(xy + yz + xz)$, $v = xyz$. Die abhängige Veränderliche ist entweder **entwickelte**, oder **unentwickelte** Function der unabhängigen Veränderlichen: z. B. $y = A^x$ und $(y - b)^2 + (x - a)^2 - r^2 = 0$. Bezeichnung der ersteren durch $y = f(x)$, $z = F(x, y) \ldots$, der letzteren durch $f(x, y) = 0$, $F(x, y, z) = 0$.

3. Wenn die Werthe einer Veränderlicheu sich einem festen Werthe so nähern, daß sie von demselben um weniger verschieden sein können, als jede beliebig kleine Größe: so heißt dieser feste Werth die **Gränze** der Werthe jener Veränderlichen. So ist der Kreis die Gränze der umschriebenen und eingeschriebenen regelmäßigen Vielecke. Ist **Null** die Gränze einer Veränderlichen, so wird dieselbe kleiner, als jede beliebig kleine Größe, und heißt **unendlich klein**. Soll die Veränderliche unbegränzt wachsen, also größer sein, als jede beliebige Größe, so heißt sie **unendlich groß**, und wird durch $\frac{1}{0}$ oder ∞ bezeichnet. Die Gränze, welcher sich ein Ausdruck von x für einen besondern Werth von x nähert, soll durch **lim.** (**limite**) angedeutet werden.

4. Oft erscheint solche Gränze unter unbestimmter Form, ohne unbestimmt zu sein. So ist $\frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$ für $x = 0$. Es ist aber für beliebig kleine Werthe von x immer $\sin x < x < \operatorname{tang} x$, folglich $\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\operatorname{tang} x}$, oder $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$. Aber $\lim. \cos x = 1$ für $x = 0$, folglich auch

$$1)\ \lim. \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ für } x = 0.$$

Ferner ist
$$\frac{\overset{A}{\operatorname{Log}}(1+x)}{x} = \frac{0}{0} \text{ für } x = 0.$$

Es ist aber
$$\overset{A}{\operatorname{Log}}(1+x) = \frac{1}{\log A}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots\right),$$

folglich $\frac{\overset{A}{\operatorname{Log}}(1+x)}{x} = \frac{1}{\log A}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \ldots\right)$, folglich auch

$2)\ \lim. \frac{\overset{A}{\operatorname{Log}}(1+x)}{x} = \frac{1}{\log A}$ für $x = 0$; und $3)\ \lim. \frac{x}{\overset{A}{\operatorname{Log}}(1+x)} = \log A$*) für $x = 0$.

Für die natürlichen Logarithmen ist daher $\lim. \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{\log e} = 1$ für $x = 0$.

Eben so ist $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{0}{0}$ für $x = 0$. Aber $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}x^2}{2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x}$
$$= \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x = 0 \text{ für } x = 0.$$

Ferner $\frac{b\sqrt{2ax - x^2}}{ax} = \frac{0}{0}$ für $x = 0$. Aber $\frac{b\sqrt{2ax - x^2}}{ax} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a}{x} - 1}$
$$= \infty \text{ für } x = 0.$$

Es kann also der Werth eines Quotienten, dessen Glieder unendlich klein werden, eine bestimmte angebbare Zahl, oder auch Null zur Gränze haben, oder über jede Gränze hinaus wachsen.

Die abgeleiteten Functionen und die Taylorsche Reihe.

5. Wenn in $y = f(x)$ die unabhängige Veränderliche x sich um den beliebigen Werth Δx ändert, so geht $f(x)$ in $f(x + \Delta x)$ über; und wenn man die daraus her-

*) Durch log soll der Neper'sche oder natürliche Logarithmus bezeichnet werden.

vorgehende Aenderung des Werthes von y durch Δy bezeichnet, so ist $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Wird hiervon $y = f(x)$ abgezogen, so findet man $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Der Quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

drückt das Verhältniß der Aenderung der abhängigen zur Aenderung der unabhängigen Veränderlichen aus, und heißt Aenderungsverhältniß oder Differenzenquotient.

Ist z. B. $y = gx^2$, so ist $y + \Delta y = g(x + \Delta x)^2 = gx^2 + 2gx \,.\, \Delta x + g \,.\, \Delta x^2$. Wird hiervon $y = gx^2$ abgezogen, so kommt $\Delta y = 2gx \,.\, \Delta x + g \,.\, \Delta x^2$, folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2gx + g \,.\, \Delta x.$$

Der Werth von Δy ist sowohl von x, als auch von Δx abhängig, nimmt mit Δx ab, und wird mit Δx zugleich Null. Auch der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist von x und Δx abhängig, nähert sich aber, wenn Δx sich der Null nähert, der Gränze $2gx$. Diese Gränze ist nur von den besondern Werthen von x abhängig, also eine Function von x.

Ist $y = cx + gx^2$, so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = c + 2gx + g \,.\, \Delta x$ und $\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = c + 2gx$ für $\Delta x = 0$.

In diesen beiden Beispielen ist die Gränze des Aenderungsverhältnisses einerlei mit der Geschwindigkeit, welche ein Körper beim freien Falle in x Sekunden erlangt, wenn seine anfängliche Geschwindigkeit Null oder c war.

Für $y = x^3$ ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \,.\, \Delta x + \Delta x^2$ und $3x^2$ die Gränze von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; und für $y = x^5$ ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 5x^4 + 10x^3 \,.\, \Delta x +$ Glieder mit höheren Potenzen von Δx, also $5x^4$ die Gränze von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Die neuen Functionen von x, nämlich $3x^2$, $5x^4$, erscheinen hier als von den gegebenen x^3, x^5, abgeleitet, und werden deßhalb abgeleitete Functionen genannt.

Das Aenderungsverhältniß jeder Function einer unabhängigen Veränderlichen hat eine Gränze, welche nur abhängig ist von den besondern Werthen der unabhängigen Veränderlichen, und die abgeleitete Function, oder die Ableitung der ursprünglichen Function genannt wird. Man bezeichnet die Ableitung von $f(x)$ gewöhnlich durch $f^1(x)$. Die Ableitungsrechnung, welche auch Differentialrechnung heißt, lehrt die Ableitungen beliebiger Functionen finden.

6. **Fig. 1.** Bedeutet $y = f(x)$ irgend eine krumme Linie in rechtwinkligen Coordinaten, und ist für irgend einen Punkt, D, derselben $OA = x$, $AD = y$, für einen andern Punkt, E, aber $OB = x + \Delta x$, $BE = y + \Delta y$: so ist $DC = AB = \Delta x$, $CE = \Delta y$, folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{CE}{DC} = \tang EDC = \tang DMX$. Es drückt also, wenn eine gegebene Function eine krumme Linie darstellt, das Änderungsverhältniß die Tangente des Winkels aus, welchen eine die Punkte D und E verbindende gerade Linie mit OX bildet. Für einen Punkt G auf der andern Seite von DA ist Δx negativ zu nehmen. Die Schneidende wird hier DN. Wird nun Δx beliebig klein, so rücken die Punkte M und N einander beliebig nahe, und fallen in einen Punkt F zusammen, wenn $\Delta x = 0$ ist. Dann berührt DF die krumme Linie in D, und $\tang DFX = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x)$. Es bedeutet also, wenn die Function eine krumme Linie ausdrückt, die Ableitung die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen eine die Curve berührende gerade Linie mit OX bildet.

Die Linie, AF, zwischen dem Fußpunkte, A, der Ordinate des Berührungspunktes, D, und dem Durchschnittspunkte, F, der Berührenden mit der Abscissenachse, heißt Subtangente. Weil $AF = AD \cotg DFA$, und $\tang DFA = f^1(x)$, $AD = f(x)$ ist: so ist die Länge der Subtangente $= f(x) . \frac{1}{f^1 x}$.

Kennt man für einen Punkt der krummen Linie diesen Werth, so ist es leicht durch diesen Punkt eine Berührende an die krumme Linie zu ziehen, z. B. an die Parabel, $y^2 = 2px$, wo die Subtangente stets der doppelten Abscisse des Berührungspunktes gleich ist. Die Linie, DL, welche auf der Berührenden, DF, im Berührungspunkte, D, senkrecht steht, heißt Normale, und die Linie, AL, zwischen dem Durchschnittspunkte der Normale mit der Abscissenachse und dem Fußpunkte der Ordinate des Berührungspunktes, heißt Subnormale. Weil $AL = AD \tang ADL = AD \tang DFA$ ist: so ist die Länge der Subnormale $= f(x) f^1(x)$.

Die Subnormale kann ebenfalls benutzt werden, um die Berührende zu ziehen, z. B. für die Parabel, $y^2 = 2px$, wo die Subnormale beständig dem halben Parameter p gleich ist.

7. Die Ableitungen der Functionen $a \pm x$, ax, $\frac{a}{x}$, x^a, A^x, $\overset{A}{\mathrm{Log}}\,x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tang x$, $\cotg x$, $\sec x$, $\cosec x$ zu finden, wenn A eine positive, übrigens beliebige Zahl bedeutet, und $a = \pm A$ ist.

1) Die Ableitung von $a \pm x$ ist ± 1. Denn aus $y = a + x$ folgt $\Delta y = (a + x + \Delta x) - (a + x) = \Delta x$, also $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, also auch $f^1(x) = 1$. Eben so für $y = a - x$.

2) Die Ableitung von ax ist a. Denn aus $y = ax$ folgt $\Delta y = a(x + \Delta x) - ax = a\,\Delta x$, und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, also auch $f^1(x) = a$.

3) Die Ableitung von $\frac{a}{x}$ ist $-\frac{a}{x^2}$. Denn aus $y = \frac{a}{x}$ folgt $\Delta x = \frac{a}{x + \Delta x} - \frac{a}{x} = \frac{-a\,\Delta x}{x(x + \Delta x)}$, und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{a}{x(x + \Delta x)}$. Folglich ist $f^1(x) = -\frac{a}{x^2}$.

4) Die Ableitung von x^a ist ax^{a-1}. Denn es ist, wenn a eine positive ganze Zahl bedeutet, $\Delta y = ax^{a-1}\Delta x + \frac{a(a-1)}{1.2}x^{a-2}\Delta x^2 + \ldots$, folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ax^{a-1} + \frac{a(a-1)}{1.2}x^{a-2}\Delta x + \ldots$, woraus die Behauptung für $\Delta x = 0$ folgt. Ist aber a eine beliebige Zahl, so ist $y + \Delta y = (x + \Delta x)^a = x^a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a$. Nun ist, wenn $z < 1$, für jeden Werth von a

$$(1 + z)^a = 1 + az + \frac{a(a-1)}{1.2}z^2 \ldots.$$

Wie klein aber auch x sein möge, es kann dennoch $\Delta x < x$ genommen werden, folglich ist für beliebige Werthe von a immer $y + \Delta y = x^a\left\{1 + \frac{\Delta x}{x}\right\}^a = x^a + ax^{a-1}\Delta x + \frac{a(a-1)}{1.2}x^{a-2}\Delta x^2 \ldots$, folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ax^{a-1} + \frac{a(a-1)}{1.2}x^{a-2}\Delta x + \ldots$, woraus die Behauptung für $\Delta x = 0$ folgt. Eben so ist max^{a-1} die Ableitung von mx^a. Die Ableitung von $\sqrt{x}$ ist hiernach $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, weil $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, folglich die Ableitung $= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist.

5) Die Ableitung von A^x ist $A^x \log A$, und die Ableitung von e^x ist e^x. Denn $\Delta y = A^{x+\Delta x} - A^x = A^x(A^{\Delta x} - 1)$. Folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$A^x\left(\frac{A^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)$. Sei nun $A^{\Delta x} = 1 + z$, also $A^{\Delta x} - 1 = z$, wo z eine Größe bedeutet, welche Null wird, wenn $\Delta x = 0$ ist. Dann ist $\Delta x = \overset{A}{\mathrm{Log}}(1+z)$, folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A^x \frac{z}{\overset{A}{\mathrm{Log}}(1+z)}$. Aber nach (4, 3.) ist lim. $\frac{z}{\overset{A}{\mathrm{Log}}(1+z)}$ $= \log A$ für $z = 0$, folglich lim. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = A^x \log A$. — Die Ableitung von e^x ist wiederum e^x, weil $\log e = 1$.

6) Die Ableitung von $\overset{A}{\mathrm{Log}} x$ ist $\frac{1}{x \log A}$, und die Ableitung von $\log x$ ist $\frac{1}{x}$. Denn aus $y = \overset{A}{\mathrm{Log}} x$ folgt $\Delta y = \overset{A}{\mathrm{Log}}(x + \Delta x) - \overset{A}{\mathrm{Log}} x =$ $\overset{A}{\mathrm{Log}}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$, folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\overset{A}{\mathrm{Log}}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$. Sei nun $\frac{\Delta x}{x} = z$, so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{\overset{A}{\mathrm{Log}}(1+z)}{z}$. So lange x eine angebbare Zahl ist, kann $\frac{\Delta x}{x}$ oder z kleiner werden, als jede beliebig kleine Größe, folglich wird $z = 0$ für $\Delta x = 0$. Nun ist aber (4, 2.) lim. $\frac{\overset{A}{\mathrm{Log}}(1+z)}{z} = \frac{1}{\log A}$ für $z = 0$. Folglich ist auch lim. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log A} = \frac{1}{x \log A}$. Für die natürlichen Logarithmen ist $\log e = 1$, folglich $\frac{1}{x}$ die Ableitung von $\log x$.

7) Die Ableitung von $\sin x$ ist $\cos x$. Denn mit Hülfe der Gleichung $\sin a - \sin b = 2 \sin \tfrac{1}{2}(a - b) \cos \tfrac{1}{2}(a + b)$ ergiebt sich $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$ $= 2 \sin \tfrac{1}{2} \Delta x \,.\, \cos(x + \tfrac{1}{2} \Delta x)$, folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta x}{2 \,.\, \frac{1}{2} \Delta x} \cos(x + \tfrac{1}{2} \Delta x)$. Nun ist aber lim. $\frac{\sin z}{z} = 1$ für $z = 0$ (4, 1.). Folglich ist lim. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \cos x$.

8) Die Ableitung von $\cos x$ ist $-\sin x$. Denn mit Hülfe der Gleichung $\cos a - \cos b = -2 \sin \tfrac{1}{2}(a - b) \sin \tfrac{1}{2}(a + b)$ ergiebt sich $\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$

$= -2\sin\frac{1}{2}\Delta x \sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)$, folglich $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}{2.\frac{1}{2}\Delta x}\sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)$, folglich $f^1(x) = -\sin x$.

9) Die Ableitung von $\tang x$ ist $\frac{1}{\cos x^2}$. Denn für $y = \tang x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist $\Delta y = \frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin(x+\Delta x)\cos x - \cos(x+\Delta x)\sin x}{\cos x \cos(x+\Delta x)}$ $= \frac{\sin \Delta x}{\cos x \cos(x+\Delta x)}$. Folglich ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos x\cos(x+\Delta x)}$ und $f^1(x) = \frac{1}{\cos x^2}$.

10) Die Ableitung von $\cotg x$ ist $-\frac{1}{\sin x^2}$. Denn für $y = \cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ist $\Delta y = \frac{\cos(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x\cos(x+\Delta x) - \cos x\sin(x+\Delta x)}{\sin x\sin(x+\Delta x)}$ $= -\frac{\sin\Delta x}{\sin x\sin(x+\Delta x)}$, und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\sin x\sin(x+\Delta x)}$. Folglich ist $f^1(x) = -\frac{1}{\sin x^2}$.

11) Die Ableitung von $\sec x$ ist $\frac{\sin x}{\cos x^2}$ und 12) die Ableitung von $\cosec x$ ist $-\frac{\cos x}{\sin x^2}$.

8. Die Ableitung von $f(x)$ ist eine Function von x, folglich kann von ihr wiederum die Ableitung gebildet werden. Diese Ableitung von $f^1(x)$ heißt zweite Ableitung von $f(x)$, und wird durch $f^2(x)$ bezeichnet. Eben so kann von $f^2(x)$ wiederum die Ableitung gebildet werden, welche dritte Ableitung von $f(x)$ heißt, und durch $f^3(x)$ bezeichnet wird. Dieß geht so lange fort, bis eine von den Ableitungen eine beständige Größe wird, deren Ableitung dann Null ist. Wird keine der Ableitungen eine beständige Größe, so ist ihre Anzahl unbegränzt.

Ist z. B. $f(x) = x^4$, so ist $f^1(x) = 4x^3$, $f^2(x) = 4.3.x^2$, $f^3(x) = 4.3.2.x$, $f^4(x) = 4.3.2.1$, folglich $f^5(x) = 0$, so wie alle folgenden Ableitungen.

Von e^x ist die erste Ableitung e^x, folglich jede der folgenden Ableitungen $= e^x$. Von A^x sind die Ableitungen der Reihe nach $A^x \log A$, $A^x(\log A)^2$, $A^x(\log A)^3$... überhaupt $f^n(x) = A^x(\log A)^n$.

Für $f(x)=\sin x$ ist $f^1(x)=\cos x$, $f^2(x)=-\sin x$, $f^3(x)=-\cos x$, $f^4(x)=\sin x$, und die folgenden Ableitungen kehren in derselben Ordnung wieder.

Für $f(x)=\cos x$ ist $f^1(x)=-\sin x$, $f^2(x)=-\cos x$, $f^3(x)=\sin x$, $f^4(x)=\cos x$ u. s. w.

9. Die Ableitung der Summe mehrerer Functionen von x ist die Summe der Ableitungen dieser Functionen. Denn es sei $s=u+v+w\ldots$ Dann ist $\Delta s=\Delta u+\Delta v+\Delta w\ldots$, folglich ist, für jeden beliebigen Werth von Δx,

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta w}{\Delta x}\ldots,$$

folglich gilt diese Gleichung auch, wenn $\Delta x=0$ gesetzt, also die Gränze jener Quotienten genommen wird.

10. Wenn $f(0)$, $f^1(0)$, $f^2(0)\ldots f^n(0)$ die Werthe bedeuten, welche $f(x)$, $f^1(x)$, $f^2(x)\ldots f^n(x)$ für $x=0$ annehmen, und von den Werthen $f(0)$, $f^1(0)$, $\frac{f^2(0)}{1.2}$, $\frac{f^3(0)}{1.2.3}\ldots\frac{f^n(0)}{1.2\ldots n}$ keiner unendlich groß wird, so ist

$$f(x)=f(0)+f^1(0)x+\frac{f^2(0)}{1.2}x^2+\frac{f^3(0)}{1.2.3}x^3\ldots+\frac{f^n(0)}{1.2\ldots n}x^n\ldots,$$

gültig für solche Werthe von x, für welche die Reihe convergirt! Denn es sei $f(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3\ldots+Nx^n\ldots$,

$$\begin{aligned}
\text{so ist}\quad f^1(x) &= B+2Cx+3Dx^2\ldots+nNx^{n-1}\ldots,\\
f^2(x) &= 2C+3.2Dx\ldots+n(n-1)Nx^{n-2}\ldots,\\
f^3(x) &= 3.2D\ldots+n(n-1)(n-2)Nx^{n-3}\ldots,\\
&\vdots\\
f^n(x) &= n(n-1)\ldots 2.1N+\ldots
\end{aligned}$$

Setzt man nun $x=0$, so ist $f(0)=A$, $f^1(0)=B$, $f^2(0)=2C$, $f^3(0)=3.2C\ldots$ $f^n(0)=n(n-1)\ldots 2.1N$. Daher ist $A=f(0)$, $B=f^1(0)$, $C=\frac{f^2(0)}{1.2}$, $D=\frac{f^3(0)}{1.2.3}\ldots$ $N=\frac{f^n(0)}{1.2\ldots n}\ldots$ Folglich

$$f(x)=f(0)+f^1(0)x+\frac{f^2(0)}{1.2}x^2+\frac{f^3(0)}{1.2.3}x^3\ldots+\frac{f^n(0)}{1.2\ldots n}x^n\ldots$$

Diese Reihe heißt die Maclaurinsche, und ist, wie jede Reihe, nur gültig für solche Werthe von x, für welche sie convergirt.

Beispiele. 1) Von e^x sind (8.) alle Ableitungen $=e^x$, aber $e^0=1$, folglich $f^n(0)=1$. Man erhält daher mittelst des Maclaurinschen Satzes die bekannte Reihe

$e^x=$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

welche für jeden beliebigen Werth von x convergirt.

2) Von A^x sind (8.) die Ableitungen der Reihe nach $A^x \log A$, $A^x (\log A)^2 \ldots$ überhaupt $f^n(x) = A^x (\log A)^n$. Folglich ist $f^n(0) = (\log A)^n$, folglich

$$A^x = 1 + x\log A + \frac{(x\log A)^2}{1.2} + \frac{(x\log A)^3}{1.2.3} \ldots + \frac{(x\log A)^n}{1.2\ldots n} \ldots = e^{x \log A}.$$

3) Auf gleiche Weise finden wir (8.) die bekannten Reihen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2..5} - \ldots \text{ und } \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

Das allgemeine Glied der ersten ist $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)}$, der zweiten $(-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n}$.

11. **Von $y = f(x+h)$ erhält man dieselbe Ableitung, man mag x oder h als unabhängige Veränderliche ansehen, also von $f(x+h)$ die Ableitung nach x oder nach h bilden.**

Denn setzt man $x + \Delta x = x + k$, so ist $\Delta y = f(x+h+k) - f(x+h)$, folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h+k) - f(x+h)}{k}.$$

Wenn aber $h + \Delta h = h + k$ genommen wird, so ist auch

$$\frac{\Delta y}{\Delta h} = \frac{f(x+h+k) - f(x+h)}{k}.$$

Folglich ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta h}$. Dieß gilt für jeden beliebigen Werth von k, also ist auch die Ableitung von $f(x+h)$ nach x einerlei mit der Ableitung von $f(x+h)$ nach h.

12. **Für solche Werthe von x, für welche weder $f(x)$, noch einer der Werthe $f^1(x)$, $\frac{f^2(x)}{1.2}$, $\frac{f^3(x)}{1.2.3} \ldots \frac{f^n(x)}{1.2..n}$, unendlich groß wird, ist**

$$f(x+h) = f(x) + f^1(x)h + f^2(x)\frac{h^2}{1.2} + f^3(x)\frac{h^3}{1.2.3} \ldots + f^n(x)\frac{h^n}{1.2..n} \ldots$$

gültig für solche Werthe von h, für welche die Reihe convergirt.

Denn es sei $f(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4 + Fh^5 \ldots$, wo die Coefficienten A, B, C.. nur Functionen von x sind, deren Ableitungen nach x durch $A_1, A_2 \ldots, B_1, B_2 \ldots$ bezeichnet werden sollen. Man erhält alsdann die Ableitung von $f(x+h)$ nach h

$$B + 2Ch + 3Dh^2 + 4Eh^3 + 5Fh^4 \ldots.$$

und nach x $\quad A_1 + B_1 h + C_1 h^2 + D_1 h^3 + E_1 h^4 \ldots.$

Ist die Reihe $f(x+h) = A + Bh + Ch^2 \ldots$ auch nur convergent für alle Werthe von h, welche kleiner sind, als eine angebbare Zahl a, so muß (11.) für unzählig viele Werthe von h

$B + 2Ch + 3Dh^2 + 4Eh^3 + 5Fh^4 \ldots = A_1 + B_1 h + C_1 h^2 + D_1 h^3 + E_1 h^4 \ldots$ sein, was nur möglich ist, wenn $B = A_1$, $2C = B_1$, $3D = C_1$, $4E = D_1$, $5F = E_1 \ldots$ Hieraus folgt $C = \frac{1}{2}B_1 = \frac{A_2}{1.2}$, $D = \frac{C_1}{3} = \frac{A_3}{1.2.3}$, $E = \frac{D_1}{4} = \frac{A_4}{1.2.3.4}$, $F = \frac{E_1}{5} = \frac{A_5}{1.2..5} \ldots$ Es ist daher $f(x+h) = A + A_1 h + A_2 \frac{h^2}{1.2} + A_3 \frac{h^3}{1.2.3} \ldots$ Da diese Reihe auch gelten muß für $h = 0$, so ist $f(x) = A$, folglich $A_1 = f^1(x)$, $A_2 = f^2(x) \ldots$, folglich

$$f(x+h) = f(x) + f^1(x)h + f^2(x)\frac{h^2}{1.2} + f^3(x)\frac{h^3}{1.2.3} \ldots + f^n(x)\frac{h^n}{1.2..n} \ldots$$

Diese Reihe heißt die Taylorsche und ist für die Mathematik von großer Wichtigkeit. Die Maclaurinsche Reihe folgt aus derselben, wenn $x = 0$ gesetzt, und dann h mit x vertauscht wird.

13. Die Taylorsche Reihe ist nur gültig, wenn $h < (n+1)\frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)}$ angenommen wird.

Denn eine Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n \ldots$ ist convergent, wenn der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sich einer bestimmten Gränze $k < 1$ ohne Ende immer mehr nähert, je größer n genommen wird. In der Taylorschen Reihe ist aber

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{f^{n+1}(x)\,h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} : \frac{f^n(x)h^n}{1.2\ldots n} = \frac{f^{n+1}(x)}{f^n(x)} \cdot \frac{h}{n+1}.$$

Es muß folglich $\frac{f^{n+1}(x)}{f^n(x)} \cdot \frac{h}{n+1} < 1$ oder $h < (n+1)\frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)}$ genommen werden, damit die Reihe convergent, also als Entwickelung von $f(x+h)$ zulässig sei.

Wenn nun keine der Ableitungen unendlich groß wird, so kann $(n+1)\frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)}$ größer werden, als jede beliebig große Zahl. Folglich ist h nur der Bedingung unterworfen, kleiner zu sein, als eine unendlich große Zahl, das heißt, die Entwickelung von $f(x+h)$ ist gültig für jeden beliebigen Werth von h.

So ist z. B. für jeden beliebigen Werth von h

$$e^{x+h} = e^x + e^x h + e^x \frac{h^2}{1.2} + e^x \frac{h^3}{1.2.3} = e^x \left(1 + h + \frac{h^2}{1.2} \ldots\right) = e^x . e^h.$$

und $A^{x+h} = A^x + A^x \log A . h + A^x \frac{(\log A . h)^2}{1.2} \ldots$

$$= A^x \left\{1 + \frac{h \log A}{1} + \frac{(h \log A)^2}{1.2} \ldots\right\} = A^x A^h.$$

Kann dagegen $f^n(x)$ zwar über jede Gränze hinaus wachsen, wenn n groß genug genommen wird, $\frac{f^n(x)}{1.2..n}$ aber nicht, so nähert sich

$$(n+1)\frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)} = \frac{(n+1) f^n(x)}{1.2\ldots n(n+1)} : \frac{f^{n+1}(x)}{1.2\ldots n(n+1)} = \frac{f^n(x)}{1.2..n} : \frac{1.2\ldots(n+1)}{f^{n+1}(x)}$$

einer Gränze, welche nicht Null sein kann, und welche der angenommene Werth von h nicht erreichen darf. Daher ist die Taylorsche Reihe, wenn nur $\frac{f^n(x)}{1.2..n}$ nicht unendlich groß wird, stets gültig für hinlänglich kleine Werthe von h. Die Werthe von h können aber auch groß sein, nur dürfen sie die Gränze $(n+1)\frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)}$ nicht überschreiten.

Soll z. B. $\frac{1}{x+h}$ entwickelt werden, so ist $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, folglich (7, 4.)

$f^1(x) = -x^{-2}$, $f^2(x) = 2x^{-3}$, $f^3(x) - 3.2x^{-4}$, $f^4(x) = 4.3.2x^{-5} \ldots.$
$f^n(x) = (-1)^n n(n-1)(n-2)\ldots 3.2x^{-(n+1)}$,

$f^{n+1}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)n(n-1) .. 2x^{-(n+2)}$. Folglich ist $\frac{1}{x+h} = f(x+h)$

$= \frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} + \frac{h^2}{x^3} - \frac{h^3}{x^4} \ldots (-1)^n \frac{h^n}{x^{n+1}}$. Nun ist hier $(n+1)\frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)}$

$$= \frac{f^n(x)}{1.2..n} : \frac{f^{(n+1)}x}{1.2..(n+1)} = (-1)^n x^{-(n+1)} : (-1)^{n+1} x^{-(n+2)}$$

$= -x$. Folglich muß, damit diese Entwickelung gültig sei, $h < x$ sein, was immer möglich ist, es müßte denn $x = 0$ genommen werden, durch welche Annahme aber nicht bloß $f^n(x)$, sondern auch $\frac{f^n(x)}{1.2..n}$ unendlich groß werden würde, was im Obigen ausgeschlossen ist.

14. In der Taylorschen Reihe kann man für h stets solche Werthe annehmen, daß jedes Glied größer wird, als die Summe aller folgenden Glieder.

Denn in der geometrischen Progression $a + ax + ax^2 + ax^3 \ldots$ wird bekanntlich jedes Glied größer, als die Summe aller folgenden Glieder, wenn $x < \frac{1}{2}$ genommen wird. Denkt man sich nun unter $a_0 + a_1 h + a_2 h^2 \ldots$ die Taylorsche Reihe, und bezeichnet man den größten der Quotienten $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2} \ldots \frac{a_{n+1}}{a_n}$ durch q: so ist a_1 nicht größer, als $a_0 q$, a_2 nicht größer, als $a_0 q^2$, a_3 nicht größer, als $a_0 q^3 \ldots$, folglich ist auch in der Taylorschen Reihe $a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 \ldots$ kein Glied größer, als das entsprechende der Reihe $a_0 + a_0 qh + a_0 (qh)^2 + a_0 (qh)^3 \ldots$, also ist auch die Summe aller Glieder, welche auf ein beliebiges Glied der ersten Reihe folgen, nicht größer, als die entsprechende Folge von Gliedern in der andern Reihe. Nun ist aber in der Reihe $a_0 + a_0(qh) + a_0(qh)^2 \ldots$ das erste Glied a_0 größer, als die Summe der folgenden, wenn $qh < \frac{1}{2}$, d. i. $h < \frac{1}{2q}$ genommen wird; folglich ist noch mehr a_0 größer, als die Summe der übrigen Glieder der Taylorschen Reihe. Auch ist für diesen Werth von h das Glied $a_m h^m$ größer, als die Summe der folgenden Glieder. Denn $a_0 + a_1 h \ldots + a_m h^m + a_{m+1} h^{m+1} \ldots = a_0 + a_1 h \ldots + h^m \{a_m + a_{m+1} h \ldots\}$. Da nun q der größte der Quotienten $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_1} \ldots \frac{a_{n+1}}{a_n}$: so ist $a_m > a_{m+1} h + \ldots$, folglich auch $a_m h^m > a_{m+1} h^{m+1} \ldots$, wenn $h < \frac{1}{2q}$. Es muß also $h < \frac{1}{2}(n+1) \frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)}$ sein. Damit die Reihe convergent sei, mußte $h < (n+1) \frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)}$ sein. Da nun die letztere Annahme stets möglich ist (13), es müßte denn $\frac{f^n(x)}{1.2\ldots n} = \infty$ werden: so kann auch für h stets ein solcher Werth angenommen werden, daß jedes Glied größer wird, als die Summe aller folgenden Glieder.

15. In der Taylorschen Reihe kann man für h stets solche Werthe annehmen, daß die Summe aller Glieder, welche auf das erste, oder irgend ein späteres Glied folgen, kleiner wird, als jede beliebig kleine Größe.

Denn es können für h solche Werthe angenommen werden, daß

$$\frac{f^n(x)h^n}{1.2\ldots n} > \frac{f^{n+1}(x)h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} + \frac{f^{n+2}(x)h^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)} \ldots \text{ (14.).}$$

Folglich auch $2\frac{f^n(x)h^n}{1.2\ldots n} > \frac{f^n(x)h^n}{1.2\ldots n} + \frac{f^{n+1}(x)h^{n+1}}{1.2\ldots n+1} + \frac{f^{n+2}(x)h^{n+2}}{1.2\ldots n+2} \ldots$

Da aber $\frac{f^n(x)}{1.2\ldots n}$ nicht größer ist, als jede beliebig große Zahl (12.), so kann h so klein angenommen werden, daß $2\frac{f^n(x)}{1.2\ldots n}h^n$ kleiner wird, als jede beliebig kleine Größe. Folglich noch vielmehr $\frac{f^n(x)h^n}{1.2\ldots n} + \frac{f^{n+1}(x)h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \ldots$ kleiner, als jede beliebig kleine Größe.

16. Nach dem Taylorschen Satze (12.) ist $f(x+\Delta x) = f(x) + f^1(x)\Delta x + f^2(x)\frac{(\Delta x)^2}{1.2}\ldots$, folglich $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f^1(x)\Delta x + f^2(x)\frac{(\Delta x)^2}{1.2}\ldots$ Das erste Glied dieser Differenz der beiden Werthe $y+\Delta y$ und y heißt Differential von y, und wird durch dy bezeichnet, so daß $dy = f^1(x).\Delta x$ ist. Die ganz beliebige Größe Δx bezeichnet man in gleicher Weise durch dx, und nennt sie Differential von x, so daß $dy = f^1(x).dx$ und $\frac{dy}{dx} = f^1(x)$.

Wenn x die unabhängige Veränderliche ist, so ist dx eine beständige, übrigens willkürliche Größe. Der Werth von dy ist veränderlich mit $f^1(x)$. Weil $dy = f^1(x).dx$, so wird die Ableitung auch häufig Differentialcoefficient genannt, und weil $\frac{dy}{dx} = f^1(x)$, so heißt $f^1(x)$ gewöhnlich Differentialquotient. Daher auch die Benennung Differentialrechnung für den Inbegriff der Methoden, die Ableitungen oder Differentialquotienten beliebiger Functionen zu bilden. Durch $\frac{dy}{dx}$ soll im Folgenden stets die Ableitung von y nach x bezeichnet werden. Eben so soll $\frac{dx}{dy}$ die Ableitung von x nach y, $\frac{dz}{dy}$ die Ableitung von z nach y bedeuten, ohne daß man dabei an besondere Werthe von dx, dy, dz zu denken hat. Denn das Zeichen $\frac{dy}{dx}$ könnte man auch mit irgend einem andern ausdrucksvollen Zeichen, etwa $d_x y$ oder dy_x, vertauschen.

17. Ist z eine Function von y, und y eine Function von x: so findet man die Ableitung von z nach x dem Producte der Ableitungen von z nach y und von y nach x gleich.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Denn nach dem Taylorschen Satze (12.) ist $\Delta z = F^1(y)\,\Delta y + F^2(y)\frac{\Delta y^2}{1.2}\ldots$, und $\Delta y = f^1(x)\,\Delta x + f^2(x)\frac{\Delta x^2}{1.2}\ldots$, wenn $z = F(y)$ und $y = f(x)$ ist. Wird nun der Werth von Δy in den Ausdruck für Δz gesetzt: so erhält man

$$\Delta z = F^1(y)\left\{f^1(x)\Delta x + f^2(x)\frac{\Delta x^2}{1.2}\ldots\right\} + \tfrac{1}{2}F^2(y)\left\{f^1(x)\Delta x + f^2(x)\frac{\Delta x^2}{2}\ldots\right\}^2 + \ldots$$

Wird dieser Ausdruck nach Potenzen von Δx geordnet, so kommt

$$\Delta z = F^1(y)\,f^1(x)\,\Delta x + A\,\Delta x^2 + B\,\Delta x^3\ldots,$$

folglich $$\frac{\Delta z}{\Delta x} = F^1y\,.\,f^1x \quad + A\,\Delta x + B\,\Delta x^2\ldots$$

Die Gränze dieses Ausdrucks, oder die Ableitung von z nach x, ist

$$F^1y\,.\,f^1(x).$$

Aber $F^1(y)$ ist die Ableitung von z oder $F(y)$, als wäre y die unabhängige Veränderliche, oder $F^1(y) = \frac{dz}{dy}$, und $f^1(x) = \frac{dy}{dx}$; folglich $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. Wird endlich y aus $\frac{dz}{dy}$ mittelst der Gleichung $y = f(x)$ weggeschafft, so erhält man $\frac{dz}{dx}$ als Function von x.

Beispiele. 1) $z = \log(x^2)$. Man setze $y = x^2$, also $z = \log y$. Dann ist $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}$ und $\frac{dy}{dx} = 2x$. Folglich $\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} . 2x = \frac{1}{x^2} . 2x = \frac{2}{x} = \frac{dz}{dx}$.

2) $z = \log\sin x$. Man setze $y = \sin x$, also $z = \log y$. Dann ist $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}$ und $\frac{dy}{dx} = \cos x$. Folglich $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y} . \cos x = \frac{1}{\sin x} . \cos x = \operatorname{cotg} x$.

3) $z = \log\cos x$, also $z = \log y$, $y = \cos x$. Folglich $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}$, $\frac{dy}{dx} = -\sin x$, und $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y} . \sin x = -\operatorname{tang} x$.

4) $z = \log \operatorname{tang} x$, also $z = \log y$, $y = \operatorname{tang} x$. Folglich $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x^2}$. Folglich $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\cos x^2} = \frac{\cos x}{\sin x \cos x^2} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$.

5) $z = \log \operatorname{cotg} x$, also $z = \log y$, $y = \operatorname{cotg} x$. Folglich $\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin x^2}$, und $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y \sin x^2} = -\frac{\sin x}{\cos x \sin x^2} = -\frac{2}{\sin 2x}$.

6) $z = e^{e^x}$. Man setze $e^x = y$, also $z = e^y$. Dann ist $\frac{dz}{dy} = e^y$ und $\frac{dy}{dx} = e^x$, folglich $\frac{dz}{dx} = e^y . e^x = e^{e^x} . e^x$.

18. Um mittelst der Differentiale die Ableitung von z nach x zu finden, wenn $z = F(y)$ und $y = f(x)$ ist, bilde man das Differential von z, als wäre y die unabhängige Veränderliche, und setze anstatt dy seinen Werth $\frac{dy}{dx} dx$.

Denn wenn $z = F(y)$ und $y = f(x)$ ist: so ist (17.) $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. Folglich ist (16.) $\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} dx$ das Differential von z. Aber eben so ist (16.) $\frac{dy}{dx} dx$ das Differential von y. Man hat also

$$dz = \frac{dz}{dy} dy \text{ und } dy = \frac{dy}{dx} dx,$$

woraus sich ohne Weiteres der Werth von $\frac{dz}{dx}$ ergiebt.

Beispiele. 1) $z = \sec x = \frac{1}{\cos x}$. Man setze $y = \cos x$, so hat man $z = \frac{1}{y}$. Aber $dz = -\frac{dy}{y^2}$ und $dy = -\sin x dx$, folglich $dz = \frac{\sin x}{y^2} dx = \frac{\sin x}{\cos x^2} dx$. Folglich ist $\frac{dz}{dx}$ oder die Ableitung von $\sec x = \frac{\sin x}{\cos x^2}$.

2) $z = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{y}$, wo $y = \sin x$. Folglich $dz = -\frac{dy}{y^2}$ und $dy = \cos x$, also $dz = -\frac{\cos x}{y^2} dx = -\frac{\cos x}{\sin x^2} dx$. Folglich ist die Ableitung von $\operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x}{\sin x^2}$.

3) $z = \log \sec x = \log \frac{1}{\cos x}$. Man setze $\cos x = y$, $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{y} = u$, so ist $z = \log u$. Folglich $dz = \frac{du}{u}$, $du = -\frac{dy}{y^2}$, also zunächst $dz = -\frac{1}{u} . \frac{dy}{y^2}$. Ferner $dy = -\sin x . dx$. Folglich $dz = -\frac{1}{u} . -\frac{\sin x dx}{y^2} = \frac{\sin x dx}{y} = \frac{\sin x}{\cos x} dx$. Folglich ist die Ableitung von $\log \sec x = \operatorname{tang} x$.

4) Eben so findet man die Ableitung von $\log \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cotg} x$.

5) $z = A^{B^x}$. Man setze $B^x = y$, also $z = A^y$. Dann ist $dz = A^y \log A . dy$ und $dy = B^x \log B . dx$. Folglich $dz = A^y \log A . B^x \log B . dx = A^{B^x} \log A \log B . dx$.

19. Die Ableitungen, welche früher (7.) gefunden sind, können mittelst der neuen Bezeichnungsweise übersichtlich zusammengestellt werden.

$$d(a + x) = dx,\ d(a - x) = -dx,\ d(ax) = adx,\ d\left(\frac{a}{x}\right) = -a\frac{dx}{x^2};$$

$$dx^a = ax^{a-1} . dx;$$

$$dA^x = A^x \log A . dx,\ de^x = e^x dx;$$

$$d\overset{A}{\mathrm{Log}}\, x = \frac{dx}{x \log A},\ d \log x = \frac{dx}{x};$$

$$d \sin x = \cos x . dx,\ d \cos x = -\sin x . dx;$$

$$d \operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos x^2},\ d \operatorname{cotg} x = \frac{-dx}{\sin x^2},\ d \sec x = \frac{\sin x . dx}{\cos x^2},\ d \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x . dx}{\sin x^2}.$$

Hierin kann x entweder unabhängige Veränderliche, oder von einer andern Veränderlichen abhängig sein.

20. Es ergeben sich aus dem Vorigen (19.) folgende Sätze:

1) Wird eine beständige Größe zu einer Function addirt, so wird dadurch weder das Differential noch die Ableitung geändert. Denn $d(a + f(x)) = d(a + y) = dy = df(x) = f^1(x) dx$.

2) Wird eine Function mit einer beständigen Größe multiplicirt, so erhält man das Differential, wenn man die beständige Größe mit dem Differential der Function multiplicirt. Denn $d(af(x)) = d(ay) = ady = adf(x) = af^1(x) dx$.

21. Kennt man die Ableitung von y nach x, so findet man die Ableitung von x nach y, wenn man 1 durch die erstere dividirt.

$\frac{dx}{dy}$

Denn wenn $y = f(x)$ ist, so ist $x = F(y)$, folglich (12.) $\Delta y = f^1(x)\,\Delta x + f^2(x)\,\frac{\Delta x^2}{1.2}$ und $\Delta x = F^1(y)\,\Delta y + F^2 y\,\frac{\Delta y^2}{1.2}\ldots$ Folglich wird Δx mit Δy zugleich Null. Nun ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x) + f^2(x)\,\frac{\Delta x}{1.2}\ldots$, folglich $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f^1(x) + \frac{1}{2}f^2(x)\,\Delta x}\ldots = \frac{1}{f^1(x)} - \frac{1}{2}\,\frac{f^2(x)}{f^1(x)^2}\,\Delta x\ldots$ Wird nun $\Delta y = 0$, so wird auch $\Delta x = 0$, und $\frac{1}{f^1(x)}$ ist die Gränze des Aenderungsverhältnisses $\frac{\Delta x}{\Delta y}$. Folglich ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Es sei nun $y = \arcsin x$, oder $x = \sin y$. Dann ist $\frac{dx}{dy} = \cos y$, folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$. Aber $x = \sin y$, also $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$, folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Eben so folgert man

$$y = \arccos x,\quad x = \cos y,\quad \frac{dx}{dy} = -\sin y,\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$y = \operatorname{arc\,tang} x,\quad x = \operatorname{tang} y,\quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos y^2},\quad \frac{dy}{dx} = \cos y^2 = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$y = \operatorname{arc\,cotg} x,\quad x = \operatorname{cotg} y,\quad \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin y^2},\quad \frac{dy}{dx} = -\sin y^2 = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Hieraus erhält man die Differentialformeln, welche auch gelten, wenn x nicht unabhängige Veränderliche, sondern Function einer andern unabhängigen Veränderlichen ist:

$$d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},\quad d\operatorname{arc\,tang} x = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

$$d\arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},\quad d\operatorname{arc\,cotg} x = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

22. 1) **Die Ableitung des Productes zweier Functionen von x ist die Summe der Producte, welche man erhält, wenn man jede Function mit der Ableitung der andern multiplicirt.**

$$\frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Denn es sei $z = uv = F(x)\, f(x)$. Dann ist $z + \Delta z = F(x + \Delta x) \times f(x + \Delta x)$
$= \left\{F(x) + F^1(x)\Delta x + F^2(x)\frac{\Delta x^2}{1.2}\ldots\right\}\left\{f(x) + f^1(x)\Delta x + f^2(x)\frac{\Delta x^2}{1.2}\ldots\right\}$
$= F(x)\, f(x) + \left\{F(x)\, f^1(x) + f(x)\, F^1(x)\right\}\Delta x + A\,\Delta x^2 + B\,\Delta x^3\ldots$
Folglich ist $\frac{\Delta z}{\Delta x} = F(x)\, f^1(x) + f(x)\, F^1(x) + A\,\Delta x + B\,\Delta x^2\ldots$

Die Gränze dieses Ausdrucks, oder die Ableitung von z nach x, ist $F(x)\, f^1(x) + f(x)\, F^1(x) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = \frac{d.uv}{dx}$.

2) **Die Ableitung des Productes dreier Functionen von x erhält man, wenn man die Ableitung einer jeden Function mit dem Producte der beiden andern Functionen multiplicirt, und die Summe der erhaltenen Producte bildet.**

$$\frac{d.tuv}{dx} = uv\frac{dt}{dx} + tv\frac{du}{dx} + tu\frac{dv}{dx}.$$

Denn wenn $z = tuv$ ist, so setze man $uv = w$, also $z = tw$, folglich $\frac{dz}{dx} = w\frac{dt}{dx} + t\frac{dw}{dx}$. Aber $\frac{dw}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$, weil $w = uv$ ist. Folglich ist $\frac{dz}{dx} = \frac{d.tuv}{dx} = uv\frac{dt}{dx} + tv\frac{du}{dx} + tu\frac{dv}{dx}$.

3) **Die Ableitung des Productes beliebig vieler Functionen von x erhält man, wenn man die Ableitung jeder einzelnen mit dem Producte aller übrigen Functionen multiplicirt, und die Summe der erhaltenen Producte bildet.**

Denn wenn der Satz gilt für ein Product von n Functionen, so folgt wie in (2), daß er auch gelten müsse für ein Product von $(n + 1)$ Functionen von x. Nun gilt er aber für 3, folglich auch für 4, folglich auch für 5, und so fort für jede beliebige Anzahl Functionen von x.

Beisp. 1) $\frac{d\sin x\cos x}{dx} = \cos x\frac{d\sin x}{dx} + \sin x\frac{d\cos x}{dx} = \cos x^2 - \sin x^2 = \cos 2x$.

2) $\frac{d(x\log x)}{dx} = 1 + \log x$. 3) $\frac{d.x^x}{dx} = \frac{de^{x\log x}}{dx} = e^{x\log x}(1 + \log x)$.

4) $\frac{d(x\log(x\sin x))}{dx} = \log(x\sin x) + \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x}$.

23. Die Ableitung eines Bruches, dessen Zähler und Nenner Functionen von x sind, erhält man, wenn man den Nenner mit der Ableitung des Zählers, und den Zähler mit der Ableitung des Nenners multiplicirt, vom ersten Producte das zweite abzieht, und den Unterschied durch das Quadrat des Nenners dividirt.

$$\frac{d\frac{u}{v}}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Denn es sei $z = \frac{u}{v}$, so ist $zv = u$, folglich (22.)

$$v\frac{dz}{dx} + z\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx}, \text{ oder } \frac{dz}{dx} = \frac{1}{v}\frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx},$$

woraus $\frac{dz}{dv} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ folgt.

Die Richtigkeit des Satzes könnte auch dargethan werden, wenn $z = \frac{F(x)}{f(x)}$ gesetzt, und $\Delta z = \frac{F(x + \Delta x)}{f(x + \Delta x)} - \frac{F(x)}{f(x)}$ nach dem Taylorschen Satze (12.) entwickelt würde. Man fände $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x)F^1(x) - F(x)f^1(x) + A\Delta x + B\Delta x^2 \ldots}{(f(x))^2 + f(x)f^1(x)\Delta x \ldots}$, folglich $\frac{dz}{dx} = \frac{f(x)F^1(x) - F(x)f^1(x)}{(f(x))^2}$.

Beispiele. 1) $\frac{d\,\mathrm{tang}\,x}{dx} = \frac{d\frac{\sin x}{\cos x}}{dx} = \frac{\cos x\frac{d\sin x}{dx} - \sin x\frac{d\cos x}{dx}}{\cos x^2}$ $= \frac{\cos x^2 + \sin x^2}{\cos x^2} = \frac{1}{\cos x^2}$, wie bekannt (7.). 2) Für $y = \frac{\log x}{x}$ ist $\frac{dy}{dx}$ $= \frac{1 - \log x}{x^2}$. 3) Für $y = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$. 4) Für $y = \log\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

24. Die Eigenschaften der Ableitungen (9. 22. 23.) geben nachfolgende Sätze für die Differentiale:

1) Das Differential der Summe mehrerer Functionen von x ist die Summe der Differentiale der einzelnen Functionen.

2) Das Differential des Productes mehrerer Functionen von x ist die Summe aus den Producten, welche man durch Multiplication des Differentials jeder Function mit dem Producte aller übrigen Functionen erhält.

3) Das Differential eines Bruches findet man, wenn man den Nenner mit dem Differential des Zählers, und den Zähler mit dem Differential des Nenners multiplicirt, vom ersten Producte das zweite abzieht, und den Unterschied durch das Quadrat des Nenners dividirt.

Diese Sätze gelten, auch wenn x nicht unabhängige Veränderliche, sondern selbst eine Function einer andern Veränderlichen ist.

25. Man ist nun im Stande, von jeder beliebigen Function von einer unabhängigen Veränderlichen die Ableitung zu bilden, und zugleich die Aenderung der abhängigen Veränderlichen in eine Reihe zu entwickeln (12.), welche nach den Potenzen der Aenderung der unabhängigen Veränderlichen fortschreitet. Wenn nämlich $y = f(x)$ ist, so ist $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f^1(x)\, \Delta x + f^2(x) \frac{\Delta x^2}{1.2} + f^3(x) \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \ldots$

Wie man $f^1(x)$ durch $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet, so $f^2(x)$ durch $\frac{d^2y}{dx^2}$, $f^3(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. f. Hiernach nimmt die Taylorsche Reihe, wenn zugleich $y + \Delta y$ durch y' bezeichnet wird, folgende Gestalt an

$$y + \Delta y = y' = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} \ldots$$

26. Wenn u eine Function von zwei unabhängigen Veränderlichen ist,

$$u = f(x, y),$$

und x sich in $x + h$, y in $y + k$, verwandelt: so soll die hieraus hervorgehende Veränderung der abhängigen Veränderlichen u, oder

$$\Delta u = f(x + h,\ y + k) - f(x,\ y)$$

bestimmt werden.

Setzt man zunächst $x + h$ statt x, ohne y zu verändern, so wird (12. u. 25.)

$$f(x + h,\ y) = u + \frac{du}{dx} h + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} \ldots$$

In dieser Entwickelung bedeuten $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2} \ldots$ die Ableitungen von u nach x, indem x als einzige veränderliche, y dagegen als beständige Größe betrachtet wird. Solche Ableitungen heißen partielle Ableitungen, und sollen, wo es die Deutlichkeit fordert, durch $\left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$, bezeichnet werden.

Diese Ableitungen können aber y noch enthalten. Wenn daher y in y + k übergeht, so muß jedes einzelne Glied der Entwickelung von f(x + h, y) nach dem Taylorschen Satze, mittelst der partiellen Ableitungen nach y, in eine Reihe nach Potenzen von k entwickelt werden. Es geht nämlich

$$u \text{ über in } u + \frac{du}{dy}k + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}\ldots,$$

$$\text{und } \frac{du}{dx} \quad \text{in} \quad \frac{du}{dx} + \frac{d\frac{du}{dx}}{dy}k + \frac{d^2\frac{du}{dx}}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}\ldots,$$

$$\text{so wie } \frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{in} \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d\frac{d^2u}{dx^2}}{dy}k + \frac{d^2\frac{d^2u}{dx^2}}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}\ldots$$

Man bezeichnet nun $\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$ durch $\frac{d^2u}{dxdy}$, und $\frac{d\frac{d^2u}{dx^2}}{dy}$ durch $\frac{d^3u}{dx^2dy}$, überhaupt $\frac{d^n\frac{d^mu}{dx^m}}{dy^n}$ durch $\frac{d^{m+n}u}{dx^mdy^n}$, indem $\frac{d^2u}{dxdy}$ bedeutet, es solle von der partiellen Ableitung von u nach x die partielle Ableitung von u nach y gebildet werden, und $\frac{d^{m+n}u}{dx^mdy^n}$ die Bildung der nten partiellen Ableitung nach y von $\frac{d^mu}{dx^n}$ fordert.

Hiernach geht $f(x+h, y) = u + \frac{du}{dx}h + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}\ldots$

über in

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = {} & u \\ & + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dx}h \\ & + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dxdy}hk + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} \\ & + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \frac{d^3u}{dxdy^2}\frac{hk^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2k}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}\ldots \\ & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

Nimmt man dagegen zuerst y und dann x als veränderlich, so geht

$$f(x, y+k) \;=\; u + \frac{du}{dy}k + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}\dots$$

über in

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = {} & u \\ & + \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k \\ & + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dydx}kh + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} \\ & + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^3u}{dydx^2}\frac{kh^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^2dx}\frac{k^2h}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}\dots \\ & \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

Hieraus folgt, weil beide Entwickelungen gleich sein müssen für beliebige Werthe von h nnd k,

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}, \quad \frac{d^3u}{dx^2dy} = \frac{d^3u}{dydx^2}, \quad \frac{d^3u}{dy^2dx} = \frac{d^3u}{dxdy^2}\dots$$

Es ist also gleichgültig, in welcher Ordnung man die partiellen Ableitungen nach x und nach y bildet.

Wenn also $u = f(x, y)$, so ist

$$f(x+h, y+k) = u + \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dxdy}hk + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}\dots,$$

folglich $f(x+h, y+k) - f(x, y) = \Delta u$

$$= \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dxdy}hk + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}\dots$$

Als Beispiel kann $u = y^3 - 3axy + x^3$ dienen.

27. Obgleich h und k völlig unabhängig von einander sind, kann man doch $k = ph$ setzen, wenn man nur unter p eine ganz willkürliche Zahl, oder auch eine beliebige Function von x versteht. Man erhält alsdann

$$f(x+h, y+k) = u + \left(\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dy}\right)h + \left(\frac{d^2u}{dx^2} + 2p\frac{d^2u}{dxdy} + p^2\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{h^2}{1.2}\dots,$$

folglich $\Delta u = \left(\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dy}\right)h + \left(\frac{d^2u}{dx^2} + 2p\frac{d^2u}{dxdy} + p^2\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{h^2}{1.2}\dots,$

Diese Reihe ist nur für solche Werthe von h und ph gültig, für welche sie convergirt. Man kann die Reihe andeuten durch $\Delta y = A_1 h + \frac{A_2 h^2}{1.2} + \frac{A_3 h^3}{1.2.3}\dots + \frac{A_n h^n}{1.2..n}\dots$

Sobald nun p keine unendlich große Zahl bedeutet, und solche Werthe von x und y ausgeschlossen werden, für welche eine der partiellen Ableitungen unendlich groß wird, so convergirt die Reihe, wenn $h < (n+1)\frac{A_n}{A_{n+1}}$ angenommen wird.

Daher ist diese Reihe stets gültig für hinlänglich kleine Werthe von h.

Ferner können für h stets solche Werthe angenommen werden, daß jedes Glied größer wird, als die Summe aller folgenden Glieder. Denn es folgt eben so wie in (14.), daß, wenn $\frac{A_{n+1}}{(n+1)A_n}$ den größten der Quotienten $\frac{A_2}{1.2} : A_1$, $\frac{A_3}{1.2.3} : \frac{A_2}{1.2} \ldots$ bedeutet, man h nur kleiner setzen darf, als $\frac{1}{2}(n+1)\frac{A_n}{A_{n+1}}$, um jedes Glied größer zu machen, als die Summe aller folgenden Glieder.

Auch kann man für h stets solche Werthe annehmen, daß in der Entwickelung von Δy die Summe aller Glieder, oder auch die Summe aller Glieder, welche auf ein beliebiges Glied folgen, kleiner wird, als jede beliebig kleine Größe. Der Satz folgt ähnlich, wie (15.).

28. Bezeichnet man in der Entwickelung von Δu (27.) h durch Δx und ph $= k$ durch Δy, so ist

$$\Delta u = \left(\frac{du}{dx} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{du}{dy}\right)\Delta x + A\,\Delta x^2 + B\,\Delta x^3 \ldots,$$

folglich $$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{du}{dy} + A \,.\, \Delta x + B\,\Delta x^2 \ldots$$

Eben so findet man $$\frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{du}{dy} + \frac{\Delta x}{\Delta y}\frac{du}{dx} + A'\Delta y + B'\Delta y^2 \ldots$$

Beide Ausdrücke nähern sich, wenn Δy und Δx sich zugleich der Null nähern, gewissen Gränzen, nämlich $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ nähert sich der Gränze $\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x}$, und $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ nähert sich der Gränze $\frac{du}{dy} + \frac{du}{dx} \cdot \lim. \frac{\Delta x}{\Delta y}$. So lange y und x völlig unabhängig sind, ist $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eine ganz willkürliche Größe. Man kann sich daher denken, daß y irgend eine, aber ganz willkürliche Function von x sei. Dann ist das Aenderungsverhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der beiden unabhängigen Veränderlichen ein ganz beliebiges, folglich auch die Gränze desselben, oder $\frac{dy}{dx}$ eine ganz beliebige Zahl p, folglich auch die Gränze von $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, oder $\frac{dx}{dy}$ eine ganz beliebige Zahl $\frac{1}{p}$.

Daher ist die Gränze von $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dy} = \frac{du}{dx} + p\,\frac{du}{dy}$, 1.

und die Gränze von $\frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{du}{dy} + \frac{dx}{dy} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} + \frac{1}{p}\,\frac{du}{dx}$. 2.

Man nennt den ersten Theil der Differenz Δu der beiden Werthe $u + \Delta u$ und u, nämlich $\left(\frac{du}{dx} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{du}{dy}\right) \Delta x = \frac{du}{dx}\,\Delta x + \frac{du}{dy}\,\Delta y$, auch Differential von u, und bezeichnet dasselbe durch du. Folglich ist, wenn man in gleicher Weise die willkürlichen Größen Δx, Δy, durch dx, dy, bezeichnet,

$$3. \quad du = \left(\frac{du}{dy}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy,$$

indem $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$, die partiellen Ableitungen von u nach x und nach y bedeuten.

29. In der Entwickelung von $f(x + h, y + k)$ (27.) ist p nicht mehr willkürlich, wenn nicht jeder Werth von $u = f(x, y)$ zulässig, sondern

$$f(x, y) = 0$$

sein soll. Denn alsdann ist, wenn man h durch Δx und p durch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bezeichnet (28.),

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \left(\frac{du}{dx} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{du}{dy}\right) \Delta x + A\,\Delta x^2 \ldots$$

gleich Null für jeden beliebigen Werth von Δx, weil für x und y nur solche Werthe zulässig sind, für welche $u = 0$ ist. Es müssen daher die Coefficienten der einzelnen Potenzen von Δx für sich Null sein, folglich

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\frac{du}{dy}\right) = 0,$$

wo $\left(\frac{du}{dx}\right)$ die partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach x, und $\left(\frac{du}{dy}\right)$ die partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach y bedeutet. Das Aenderungsverhältniß ist nicht mehr willkürlich, eben so wenig die Gränze desselben. Da nun die Gleichung $\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ für jeden Werth von Δx gelten muß: so gilt sie auch, wenn Δx

sich

sich der Null nähert, für die Gränze von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Folglich ist

$$1)\ \left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{dy}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right) = 0,\ \text{oder}\ 2)\ \frac{dy}{dx} = -\left\{\left(\frac{du}{dx}\right) : \left(\frac{du}{dy}\right)\right\}.$$

Wenn also in einer Gleichung, $f(x, y) = 0$, y unentwickelte Function von x ist, so findet man die Ableitung von y nach x nach der Regel:

Man bilde die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ nach x, und von $f(x, y)$ nach y, als wenn x und y unabhängige Veränderliche wären, und dividire die erstere Ableitung durch die zweite: so ist der Quotient, mit umgekehrtem Vorzeichen genommen, die Ableitung von y nach x.

Z. B. für $(y-b)^2 + (x-a)^2 - r^2 = 0$ findet man $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y-b}$, weil $\left(\frac{du}{dx}\right) = 2(x-a)$, und $\left(\frac{du}{dy}\right) = 2(y-b)$ ist.

30. Um die Ableitung von x nach y zu finden, hat man, wenn $u = f(x, y) = 0$ ist,

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \left(\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\Delta x}{\Delta y}\left(\frac{du}{dx}\right)\right)\Delta y + A\Delta y^2 \ldots$$

Da dieser Ausdruck Null sein muß für jeden beliebigen Werth von Δy, so findet man, wie (29.),

$$1)\ \left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{dx}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) = 0,\ \text{oder}\ 2)\ \frac{dx}{dy} = -\left\{\left(\frac{du}{dy}\right) : \left(\frac{du}{dx}\right)\right\}.$$

Folglich ist (29, 2.)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},\ \text{und}\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Die beiden Gleichungen $\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dy}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$, und $\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{dx}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, können durch die Differentialgleichung

$$\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy = 0$$

dargestellt werden.

31. Die Ableitung von y nach x erscheint hier als eine Function von x und y. Bezeichnet man $\frac{dy}{dx}$ durch z, so erhielte man, wenn x und y völlig unabhängig wären,

$\dfrac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \left(\dfrac{dz}{dx}\right) + \dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{dz}{dy}\right)$ (28, 1.), wo $\dfrac{dy}{dx}$ die Ableitung einer willkürlichen Function y nach x bedeutet. Hier aber ist y nicht willkürliche Function von x, sondern durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ von x abhängig. Folglich ist $\dfrac{dy}{dx}$ die aus dieser Gleichung gefundene Ableitung von y nach x (29, 1. u. 2.). Folglich ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{dy}{dx}\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

wo $\left(\dfrac{dz}{dx}\right)$, $\left(\dfrac{dz}{dy}\right)$ die partiellen Ableitungen der ersten Ableitung sind. Wäre die erste Ableitung nur Function von x, so erhielte man $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dz}{dx}\right)$, weil $\left(\dfrac{dz}{dy}\right) = 0$ wäre. Dagegen erhielte man $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dz}{dy}\right)\dfrac{dy}{dx}$, wenn $\dfrac{dy}{dx} = z$ nur Function von y wäre.

Ist z. B. $y^2 - 2axy + x^2 - b = 0$, so ist $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ay - x}{y - ax} = z$; $\left(\dfrac{dz}{dx}\right) = \dfrac{y(a^2-1)}{(y-ax)^2}$, $\left(\dfrac{dz}{dy}\right) = \dfrac{x(1-a^2)}{(y-ax)^2}$; folglich $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{y(a^2-1)}{(y-ax)^2} + \dfrac{x(1-a^2)}{(y-ax)^2} \cdot \dfrac{ay-x}{y-ax}$.

Ist ferner $x^2 + ax - by = 0$, so findet man $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+a}{b}$, und $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2}{b}$.

Ist aber $y^2 + ay - bx = 0$, so findet man $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{2y+a}$, und $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{2b}{(2y+a)^2} \cdot \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2b^2}{(2y+a)^3}$.

32. Durch ähnliche Entwickelungen (26.) findet man, wenn $u = f(x, y, z)$ ist,

$$u + \Delta u = u + \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l\right) + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dxdy}hk + \frac{d^2u}{dxdz}hl + \frac{d^2u}{dydz}kl + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{l^2}{1.2}\right) + \ldots$$

also (28.) $du = \left(\dfrac{du}{dx}\right)dx + \left(\dfrac{du}{dy}\right)dy + \left(\dfrac{du}{dz}\right)dz$, was Null zu setzen ist, wenn $u = 0$ eine Gleichung zwischen x, y, z, bedeutet (30.).

Anwendungen.

1. Die Auflösung der Gleichungen.

33. Wenn $f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots = 0$, m gleiche Wurzeln, jede $= a$, hat, so ist $f(x) = (x - a)^m Fx$, wo $F(x)$ den Factor $x - a$ nicht enthält. Folglich ist

$$f^1(x) = (x - a)^{m-1} \left\{(x - a) F^1(x) + mF(x)\right\}.$$

Wenn in dem Ausdrucke $f(x)$ also m gleiche Factoren sind, so kommen in der Ableitung noch $m - 1$ derselben vor.

Wenn daher $f(x)$ und $f^1(x)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so hat $f(x) = 0$ nur von einander verschiedene Wurzeln. Wenn dagegen $f(x)$ und $f^1(x)$ den gemeinschaftlichen Theiler $x - a$ haben, so hat $f(x)$ den Factor $(x - a)^2$, folglich hat $f(x) = 0$ zwei gleiche Wurzeln, jede $= a$. Und wenn $f(x)$ und $f^1(x)$ den gemeinschaftlichen Theiler $(x - a)^m$ haben, so hat $f(x)$ den Theiler $(x - a)^{m+1}$, folglich hat die Gleichung $m + 1$ gleiche Wurzeln, jede $= a$.

Man suche daher den größten gemeinschaftlichen Theiler $\varphi(x)$ von $f(x)$ und $f^1(x)$. Jede einfache Wurzel von $\varphi(x) = 0$ ist eine zweifache von $f(x) = 0$; jede zweifache Wurzel von $\varphi(x) = 0$ ist eine dreifache von $f(x) = 0$ u. s. w.

Die gleichen Wurzeln von $\varphi(x) = 0$ erforscht man, indem man den größten gemeinschaftlichen Theiler von $\varphi(x)$ und $\varphi^1(x)$ aufsucht, und die Werthe bestimmt, für welche derselbe zu Null wird.

34. Es sei a ein Werth, welcher von einer Wurzel der Gleichung wenig verschieden ist, und der noch fehlende Theil sei z. Dann ist

$$f(a + z) = f(a) + f^1(a)\, z + f^2(a) \frac{z^2}{1 \cdot 2} \ldots = 0.$$

Um einen genäherten Werth von z zu finden, kann man die höheren Potenzen von z weglassen, und $f(a) + f^1(a)\, z = 0$, oder $z = -\dfrac{f(a)}{f^1(a)}$ setzen. Dann ist $a - \dfrac{f(a)}{f^1(a)}$ ein Werth, welcher der Wurzel näher kommt, als a. Wenn man denselben anstatt a in die Gleichung $z = -\dfrac{f(a)}{f^1(a)}$ einsetzt, und das Resultat zu dem vorigen Näherungswerthe addirt, so erhält man einen noch mehr genäherten Werth.

Es sei z. B. $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$. Aus $f(2) = -1$, $f(3) = +16$, folgt, daß zwischen 2 und 3, und zwar näher bei 2, eine Wurzel der Gleichung liegt.

Nun ist $f^1(x) = 3x^2 - 2$, folglich $f(2) = -1$, $f^1(2) = 10$, und $z = -\frac{f(a)}{f^1(a)}$ $= \frac{1}{10}$, folglich 2,1 ein Näherungswerth der Wurzel.

Setzt man $a = 2{,}1$, so wird $f(a) = 0{,}061$, $f^1(a) = 11{,}23$, daher $z = -\frac{f(a)}{f^1(a)}$ $= -0{,}00543$, also $2{,}1 - 0{,}00543 = 2{,}09457$ ein neuer Näherungswerth. Behandelt man diesen wie die vorigen, so findet man 2,09455148 als Näherungswerth der Wurzel.

2. Von den Werthen der Functionen, wenn dieselben unbestimmt zu sein scheinen.

35. Wenn ein besonderer Werth einer Function die Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, annimmt, so erscheint er unter unbestimmter Form, ohne darum unbestimmt zu sein. So wird $\frac{a^2 - x^2}{a - x} = \frac{0}{0}$ für $x = a$. Die Unbestimmtheit rührt hier daher, daß man einen gemeinschaftlichen Factor, welcher für $x = a$ zu Null wird, nicht zuvor entfernt hat. Denn es ist $\frac{a^2 - x^2}{a - x} = \frac{(a - x)(a + x)}{a - x} = a + x$, folglich $= 2a$, wenn $x = a$.

Ist die gebrochene Function $y = \frac{F(x)}{f(x)}$ gegeben, welche $\frac{0}{0}$ wird, wenn $x = a$, weil $F(a) = f(a) = 0$: so ist

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{F(a) + F^1(a)h + F^2(a)\frac{h^2}{1.2}\ldots}{f(a) + f^1(a)h + f^2(a)\frac{h^2}{1.2}\ldots}.$$

Weil aber $F(a) = f(a) = 0$, so ist

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{F^1(a)h + F^2(a)\frac{h^2}{1.2}\ldots}{f^1(a)h + f^2(a)\frac{h^2}{1.2}\ldots} = \frac{F^1(a) + F^2(a)\frac{h}{1.2}\ldots}{f^1(a) + f^2(a)\frac{h}{1.2}\ldots}.$$

Folglich erhält man, wenn $h = 0$ gesetzt wird,

$$\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{F^1(a)}{f^1(a)}.$$

Wäre auch $\frac{F^1(a)}{f^1(a)} = \frac{0}{0}$, so würde in gleicher Weise folgen $\frac{F^1(a)}{f^1(a)} = \frac{F^2(a)}{f^2(a)}$, folglich auch $\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{F^2(a)}{f^2(a)}$ u. s. w.

Man bilde also, wenn $y = \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{0}{0}$ für $x = a$ ist, den Quotienten derjenigen Ableitungen von gleicher Ordnung, welche zuerst nicht zugleich für $x = a$ zu Null werden, so giebt dieser den wahren Werth jenes Bruches.

1) Für $x = a$ ist $\frac{x^3 + 5ax^2 - a^2x - 5a^2}{x^2 - a^2} = \frac{3x^2 + 10ax - a^2}{2x} = \frac{12a^2}{2a} = 6a.$

2) Für $x = 0$ ist $\frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$

3) Für $x = 0$ ist $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$

4) Für $x = 0$ ist $\frac{x}{\sin x^2} = \frac{1}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{0} = \infty.$

5) Für $x = 0$ ist $\frac{\log(1-x)}{x} = -1.$

6) Eben so kann man die wahren Werthe von $\frac{e^x - e^{-x}}{x}$, $\frac{a^x - b^x}{x}$, $\frac{1 - \cos x}{x^2}$, $\frac{x - \sin x}{x^3}$, für $x = 0$, und von $\frac{\log x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\frac{1 - x + \log x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$, $\frac{x^x - x}{1 - x + \log x}$, $\frac{(1+x)\log x}{(1-x)^2}$, für $x = 1$ bestimmen.

36. Wenn die gebrochene Function $y = \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ wird für $x = a$, so dividire man Zähler und Nenner durch $F(x)\,f(x)$. Alsdann erhält man $y = \frac{1}{f(x)} : \frac{1}{F(x)} = \frac{0}{0}$ für $x = a$, wovon der wahre Werth gefunden werden kann (35.), z. B. für $\frac{\log x}{x}$ der Werth 0, wenn $x = \infty$.

Wenn dagegen $y = F(x) \,.\, f(x)$ gegeben ist, und man findet $F(a) = 0$, $f(a) = \infty$, also $y = 0 \,.\, \infty$ für $x = a$: so setzt man $y = F(x) : \frac{1}{f(x)} = \frac{0}{0}$ für $x = a$, und bestimmt den wahren Werth wie vorhin (35.), z. B. $\frac{c}{e} a^x$, wenn man in $\frac{a^x(b + cx)}{d + ex}$ den Werth von x unendlich groß setzt.

3. Von den größten und kleinsten Werthen der Functionen.

37. Wenn für $x = a$ der Werth von $f(x)$ größer ist, als die benachbarten Werthe $f(x + h)$ und $f(x - h)$, wie klein man auch h annehmen möge: so ist dieser Werth $f(a)$ ein Größtes (Maximum); und wenn er kleiner ist, als die benachbarten Werthe, ein Kleinstes (Minimum).

Soll also $f(x)$ ein $\begin{Bmatrix}\text{Größtes}\\ \text{Kleinstes}\end{Bmatrix}$ werden, so muß $\begin{Bmatrix}f(x) > f(x + h)\\ f(x) < f(x + h)\end{Bmatrix}$, und zugleich $\begin{Bmatrix}f(x) > f(x - h)\\ f(x) < f(x - h)\end{Bmatrix}$ sein, oder es muß, wenn $f(x)$ positiv ist, $f(x + h) - f(x)$ und zugleich $f(x - h) - f(x)$ $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ sein, wie klein man auch h annehmen möge.

$$\left.\begin{aligned} \text{Nun ist } f(x + h) - f(x) &= \quad f^1(x)h + f^2(x)\frac{h^2}{1.2} + f^3(x)\frac{h^3}{1.2.3}\ldots \\ \text{und} \qquad f(x - h) - f(x) &= -f^1(x)h + f^2(x)\frac{h^2}{1.2} - f^3(x)\frac{h^3}{1.2.3}\ldots \end{aligned}\right\} (12.).$$

Wenn nun $f^1(x)$ nicht Null ist, so kann h so klein angenommen werden, daß $f^1(x)h$ größer ist, als die Summe aller nachfolgenden Glieder, folglich das Vorzeichen der Reihen von diesem ersten Gliede abhängt (14). Dieß ist aber in beiden Reihen verschieden. Es können daher $f(x + h) - f(x)$ und $f(x - h) - f(x)$ nicht einerlei Vorzeichen haben, d. h. es kann $f(x)$ weder ein Größtes noch ein Kleinstes sein.

$$\text{Wenn dagegen } f^1(x) = 0 \text{ ist, so ist } f(x + h) - f(x) = f^2(x)\frac{h^2}{1.2} + f^3(x)\frac{h^3}{1.2.3}\ldots$$

$$\text{und} \qquad f(x - h) - f(x) = f^2(x)\frac{h^2}{1.2} - f^3(x)\frac{h^3}{1.2.3}\ldots$$

Für hinlänglich kleine Werthe von h sind beide Reihen mit $f^2(x)$ zugleich negativ, oder positiv (14.). Die Wurzeln von $f^1(x) = 0$ machen daher $f(x)$ zu einem $\begin{Bmatrix}\text{Größten}\\ \text{Kleinsten}\end{Bmatrix}$, wenn sie $f^2(x)$ $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ machen.

Ist dagegen $f(x)$ negativ, so müssen die Wurzeln von $f^1(x) = 0$ den Werth von $f^2(x)$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ machen, wenn $f(x)$ ein negatives $\begin{Bmatrix}\text{Größtes}\\ \text{Kleinstes}\end{Bmatrix}$ sein soll. Betrachtet man aber ein negatives $\left\{\begin{matrix}\text{Größtes}\\\text{Kleinstes}\end{matrix}\right\}$ als ein absolut $\left\{\begin{matrix}\text{Kleinstes}\\\text{Größtes}\end{matrix}\right\}$, so reicht die für positive Werthe von $f(x)$ gefundene Regel auch für negative Werthe von $f(x)$ aus. Wird durch eine Wurzel von $f^1(x) = 0$ auch $f^2(x) = 0$: so muß auch, wie leicht erhellet, durch dieselbe $f^3(x) = 0$, aber $f^4(x)$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ werden, wenn der Werth von $f(x)$ ein $\left\{\begin{matrix}\text{Größtes}\\\text{Kleinstes}\end{matrix}\right\}$ sein soll. Ueberhaupt muß die erste nicht verschwindende Ableitung von **gerader** Ordnung sein, damit ein Größtes oder Kleinstes Statt finden könne.

38. **Beispiele.** 1) $f(x) = a + bx - cx^2$ giebt $f^1(x) = b - 2cx$, und $f^2(x) = -2c$. Aus $f^1(x) = b - 2cx = 0$, folgt $x' = \frac{b}{2c}$. Nun ist $f(x') = a + \frac{b^2}{4c}$ und $f^2(x') = -2c$. Folglich $f(x') = a + \frac{b^2}{4c}$ der größeste Werth, welchen $f(x)$ annehmen kann.

Für $f(x) = 15 + 12x - 2x^2$ ist $x' = 3$ und $f(3) = 33$.

Setzt man für x nach einander $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$, so findet man für $f(x)$ die Werthe $15, 25, 31, 33, 31, 25, 15 \ldots$

2) $f(x) = a + bx + cx^2$ giebt $f^1(x) = b + 2cx$, und $f^2(x) = 2c$. Für $f^1(x) = 0$ erhält man $x' = -\frac{b}{2c}$, und $f(x') = a - \frac{b^2}{4c}$, welches ein **Kleinstes** ist, weil $f^2(x') = 2c$, also positiv ist.

3) $f(x) = a + (x - b)^3$ giebt $f^1(x) = 3(x - b)^2$, und $f^2(x) = 6(x - b)$. Für $f^1(x) = 0$ wird $x' = b$ und $f^2(b) = 0$. Aber $f^3(b) = 6$, folglich hat $f(x)$ weder ein Größtes, noch ein Kleinstes.

4) $f(x) = a + (x - b)^4$ giebt $f^1(x) = 4(x - b)^3$, $f^2(x) = 12(x - b)^2$, $f^3(x) = 24(x - b)$, $f^4(x) = 24$. Für $f^1(x) = 0$ wird $x = b$ und $f^2(b) = 0$. Aber auch $f^3(b) = 0$, dagegen $f^4(b) = 24$. Folglich ist $f(b)$ ein **Kleinstes** von $f(x)$.

5) $f(x) = 2x - x^2 + (1 - x)^{\frac{5}{2}}$ giebt $f^1(x) = 2 - 2x - \frac{5}{2}(1 - x)^{\frac{3}{2}}$, und $f^2(x) = -2 + \frac{15}{4}(1 - x)^{\frac{1}{2}}$. Nun ist $f^1(x) = 2 - 2x - \frac{5}{2}(1 - x)^{\frac{3}{2}} = (1 - x)(2 - \frac{5}{2}\sqrt{1 - x})$, und wird Null wenn $x' = 1$, und wenn $x'' = \frac{9}{25}$. Es ist aber $f^2(1) = -2$. Folglich ist $f(1) = 1$ ein **Größtes** von $f(x)$. Ferner ist $f^2(\frac{9}{25}) = +1$. Folglich ist $f(\frac{9}{25}) = \frac{2869}{3125}$ ein **Kleinstes** von $f(x)$.

6) Für $f(x) = x^x$ ist $f^1(x) = (1 + \log x)x^x$ und $f^2(x) = \left\{\frac{1}{x} + (1 + \log x)^2\right\} x^x$. $f^1(x) = 0$ giebt $1 + \log x = 0$, also $1 = -\log x = \log\frac{1}{x}$, folglich $e = \frac{1}{x}$

und $x = \frac{1}{e}$. Nun ist $f^2\left(\frac{1}{e}\right) = e\sqrt[e]{\frac{1}{e}}$, also positiv, daher ist $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ ein Kleinstes von x^x.

39. Aufgaben. 1) Man soll unter allen Triangeln, die einerlei Grundlinie a, und denselben Umfang 2p haben, den größten finden.

Es sei x die eine, $2p - a - x$ die andere Seite. Der Inhalt des Triangels $F = \sqrt{p(p-a)(p-x)(a+x-p)}$ wird ein Größtes, wenn $p(p-a)(p-x)(a+x-p)$, oder wenn $(p-x)(a+x-p)$ ein Größtes ist. Aus $f(x) = (p-x)(a+x-p)$ folgt aber $f^1(x) = p - x - (a+x-p) = 2p - a - 2x$, und $f^2(x) = -2$. Es ist also der Inhalt ein Größtes, wenn $x = p - \frac{a}{2}$, also auch $2p - a - x = p - \frac{a}{2}$, also der Triangel gleichschenklig ist.

2) Fig. 2. Auf einer geraden Linie, CD, einen solchen Punkt, E, anzugeben, daß die Summe der Entfernungen desselben von zweien Punkten, A, B, welche durch ihre senkrechten Abstände, AC, BD, von der Linie CD gegeben sind, ein Kleinstes werde.

Es sei $CD = d$, $AC = a$, $BD = b$, $CE = x$. Dann ist $AE = \sqrt{a^2 + x^2}$, $BE = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$, und $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$. Folglich $f^1(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \frac{CE}{AE} - \frac{ED}{BE} = \cos AEC - \cos BED$. Es verlangt also $f^1(x) = 0$, daß $\cos AEC = \cos BED$, oder, weil $AEC + BED < 2$ R., $AEC = BED$ sei, in welchem Falle $f(x)$ ein Kleinstes wird.

3) Fig. 3. Zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels ist ein Punkt, D, mittelst seiner senkrechten Abstände, DE, DF, von den Schenkeln des Winkels gegeben. Man soll durch denselben eine gerade Linie so ziehen, daß das abgeschnittene Dreieck, HAG, ein Kleinstes sei.

Es sei $DF = a$, $DE = b$. Der Winkel $DGA = w$ wird gesucht. Nun ist $AG = AE + EG = a + b \cot g\, w$, $AH = AF + FH = b + a \operatorname{tg} w$. Folglich der Inhalt des Dreiecks $AGH = \frac{1}{2} AG \cdot AH = \frac{1}{2}(a + b \cot g\, w)(b + a \operatorname{tg} w)$. Es soll nun $f(w) = (a + b \cot g\, w)(b + a \operatorname{tg} w) = 2ab + a^2 \operatorname{tg} w + b^2 \cot g\, w$ ein Kleinstes werden. Man findet $f^1(w) = \frac{a^2}{\cos w^2} - \frac{b^2}{\sin w^2} = \frac{a^2 \sin w^2 - b^2 \cos w^2}{\cos w^2 \sin w^2}$.

Folg-

Folglich, wenn $f^1(w) = 0$ gesetzt wird, $a \sin w = b \cos w$, oder $\tang w = \frac{b}{a} = \frac{b}{EG}$, folglich $EG = a = AE$. Der entsprechende Werth von $f(w)$ ist ein Kleinstes. Man bilde zur Bestätigung $f^2(w)$. Wenn der gegebene Winkel kein rechter ist, sondern $= \alpha$, und DF, DE, mit den Schenkeln desselben parallel sind: so findet man den Inhalt des Dreiecks

$$HAG = \tfrac{1}{2} AG \,.\, AH \sin\alpha = \tfrac{1}{2} \sin\alpha \left(a + \frac{b \sin(\alpha + w)}{\sin w}\right)\left(b + \frac{a \sin w}{\sin(\alpha + w)}\right).$$

Dieser Ausdruck wird ebenfalls ein Kleinstes, wenn $EG = AE$ genommen wird.

4) **Fig. 3.** Die Helligkeit zweier Lichter, A, B, verhält sich wie 1 : m. Man soll auf der sie verbindenden geraden Linie, AB, denjenigen Punkt, F, angeben, der am schwächsten beleuchtet wird.

Es sei $AB = d$, $AF = x$, $FB = d - x$. Die Beleuchtung des Punktes F ist $\frac{1}{x^2} + \frac{m}{(d-x)^2} = f(x)$. Aus $f^1(x) = \frac{2m}{(d-x)^3} - \frac{2}{x^3} = 0$ folgt $mx^3 = (d-x)^3$, folglich $x = \frac{d}{1 + \sqrt[3]{m}}$. Dieser Werth macht $f(x)$ zu einem Kleinsten, weil $f^2(x) = \frac{6}{x^4} + \frac{6m}{(d-x)^4}$, also positiv ist. Für gleich helle Lichter liegt der gesuchte Punkt in der Mitte von AB.

5) Ein oben offenes rechtwinkliges Gerinne, dessen Queerschnitt $= a^2$ ist, soll den kleinsten Umfang erhalten. Man soll die Breite und Höhe desselben angeben.

Man setze die Breite $= x$, so ist die Höhe $= \frac{a^2}{x}$, und der Umfang $f(x) = x + \frac{2a^2}{x}$. $f^1(x) = 1 - \frac{2a^2}{x^2} = 0$ giebt $x' = a\sqrt{2}$, und $f(x')$ wird ein Kleinstes, weil $f^2(x) = \frac{4a^2}{x^3}$ ist. Weil nun die Höhe $= \frac{a^2}{x} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist, so ist Breite : Höhe $= a\sqrt{2} : \frac{a}{\sqrt{2}} = 2 : 1$.

6) Ein oben offenes rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, soll bei gegebenem Inhalte die kleinste Oberfläche haben. Wie verhält sich die Seite der Grundfläche zur Höhe?

Die Seite der Grundfläche sei x, die Höhe z, der Inhalt a^3. Dann ist $z = \frac{a^3}{x^2}$. Ferner ist die Oberfläche $f(x) = x^2 + 4xz = x^2 + \frac{4a^3}{x}$, also $f^1(x) = 2x - \frac{4a^3}{x^2} = 0$. Man findet $x' = a\sqrt[3]{2}$. Da $f^2(x) = 2 + \frac{8a^3}{x^3}$ positiv wird, so ist $f(x')$ ein Kleinstes. Weil $z = \frac{a^3}{x^2} = \frac{1}{2}a\sqrt[3]{2}$, so ist $x : z = a\sqrt[3]{2} : \frac{1}{2}a\sqrt[3]{2} = 2 : 1$.

7) **Fig. 4.** Aus den Ecken eines Rechtecks, **ABCD**, sollen vier gleich große Quadrate dergestalt ausgeschnitten werden, daß aus dem übrig bleibenden Theile ein Kasten gebildet werden kann, dessen Inhalt ein Größtes sei.

Es sei $AB = a$, $AD = b$, die Seite eines der gesuchten Quadrate sei x: so wird $GH = a - 2x$, $GK = b - 2x$, also der Inhalt des Kastens $GH \times GK \times GL = (a - 2x)(b - 2x)x = f(x)$. Folglich ist $f^1(x) = ab - 4(a + b)x + 12x^2$, und $f^2(x) = 24x - 4(a + b)$. Aus $f^1(x) = 0$ folgt $x = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$. Nimmt man das obere Zeichen, so wird $f^2(x) = +\sqrt{a^2 - ab + b^2}$, also giebt dieser Werth ein Kleinstes von $f(x)$. Nimmt man das untere Zeichen, so wird $f^2(x) = -4\sqrt{a^2 - ab + b^2}$, folglich wird der Werth von $f(x)$ ein Größtes.

8) Man soll aus einem cylindrischen Baumstamme den stärksten Balken schneiden, wenn sich die Festigkeiten gleich langer Balken derselben Holzart wie die Producte aus ihrer Breite und dem Quadrate ihrer Dicke verhalten.

Es sei a der Durchmesser vom Queerschnitte des Cylinders, x die gesuchte Breite, und z die Dicke des Balkens. Der Balken ist am stärksten, wenn xz^2 ein Größtes ist. Nun ist $z^2 = a^2 - x^2$, folglich $f(x) = x(a^2 - x^2)$, und $f^1(x) = a^2 - 3x^2$, $f^2(x) = -6x$. Aus $f^1(x) = 0$ folgt $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$. Weil $z^2 = a^2 - x^2 = \frac{2}{3}a^2$, also $z = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, so folgt $x : z = a\sqrt{\frac{1}{3}} : a\sqrt{\frac{2}{3}} = 1 : \sqrt{2}$, beinahe wie $5 : 7$, oder $12 : 17$ u. s. w.

Man theile (**Fig. 5.**) den Durchmesser **AB** des Kreises in drei gleiche Theile, errichte in den Theilpunkten **C** und **D** die Perpendikel **CE**, **DF**, und vollende die Figur **AEBF**: so ist diese der Queerschnitt des verlangten Balkens. Denn $AC : AE = AE : AB$, oder $\frac{1}{3}a : x = x : a$, also $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

40. Man kann auf dieselbe Weise folgende Aufgaben lösen:

1) In ein gegebenes gleichschenkliges Dreieck ein anderes zu beschreiben, dessen Spitze auf der ungleichen Seite steht, und dessen Inhalt ein Größtes sei.

2) In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck zu beschreiben, dessen Inhalt ein Größtes sei.

3) In einen gegebenen Kreis ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben, welches an Inhalt und Umfang ein Größtes sei.

4) In einen gegebenen Viertelkreis ein Rechteck so zu zeichnen, daß zwei Seiten in die begränzenden Halbmesser fallen, der Inhalt aber ein Größtes sei.

5) Man soll in einem Dreiecke einen Punkt so bestimmen, daß die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den Winkelpunkten ein Kleinstes werde.

6) Durch einen Punkt in der Ebene eines rechten Winkels die kürzeste Verbindungslinie beider Schenkel zu ziehen.

7) Die Dimensionen eines Cylinders anzugeben, dessen Oberfläche bei gegebenem Inhalte ein Kleinstes werde.

8) Dasselbe für ein oben offenes cylindrisches Gefäß.

9) Die Dimensionen eines in einer gegebenen Kugel beschriebenen Cylinders anzugeben, wenn dessen Inhalt ein Größtes sein soll.

10) Dasselbe für den eingeschriebenen größten, und für den umschriebenen kleinsten Kegel.

11) Man soll den Werth von x angeben, für welchen $y' = x \operatorname{tang} w - \frac{gx^2}{c^2 \cos w^2}$ ein Größtes wird.

12) Die Anlage eines Mühlkanals, dessen Queerschnitt **ABCD** einen gegebenen Inhalt a^2 hat, ist am vortheilhaftesten, wenn die vom Wasser bespülte Fläche, also wenn $AC + CD + DB$ ein Kleinstes wird. Wenn der Winkel $ACD = BDC = w$ gegeben ist: so soll AC, CD, so bestimmt werden, daß jene Fläche ein Kleinstes sei.

41. Ist y von x durch die Gleichung $u = f(x, y) = 0$ abhängig: so bestimme man $\frac{dy}{dx}$ (29.), und $\frac{d^2y}{dx^2}$ (31.), nämlich $\frac{dy}{dx} = -\left(\left(\frac{du}{dx}\right) : \left(\frac{du}{dy}\right)\right)$, und, wenn $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}$.

Nun wird y ein Größtes oder Kleinstes, wenn $\frac{dy}{dx} = 0$, d. h. wenn entweder $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$, oder $\left(\frac{du}{dy}\right) = \infty$. In beiden Fällen ist $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx}\right)$. Daher gehören diejenigen Werthe von x, welche die partielle Ableitung nach x zu Null, oder die partielle Ableitung nach y unendlich groß machen, einem $\begin{Bmatrix}\text{Größten}\\ \text{Kleinsten}\end{Bmatrix}$ von y an, wenn durch dieselben die partielle Ableitung von $\frac{dy}{dx}$ nach x $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ wird.

42. Wenn $u = f(x, y)$ ein Größtes oder Kleinstes werden soll, so muß für beliebig kleine Werthe von h, und für beliebige Werthe von p

im ersten Falle $f(x-h, y-ph) < f(x, y) > f(x+h, y+ph)$,

im zweiten Falle $f(x-h, y-ph) > f(x, y) < f(x+h, y+ph)$

sein. Man findet mit Hülfe von (27.), ähnlich wie in (37.), daß für jeden beliebigen Werth von p

$$1)\ \left(\frac{du}{dx}\right) + p\left(\frac{du}{dy}\right) = 0, \text{ und } 2)\ \frac{d^2u}{dx^2} + 2p\frac{d^2u}{dxdy} + p^2\frac{d^2u}{dx^2} \begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$$

sein muß für ein $\begin{Bmatrix}\text{Größtes}\\ \text{Kleinstes}\end{Bmatrix}$ von u.

Die erste Bedingung kann für beliebige Werthe von p nur erfüllt werden, wenn

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0, \text{ und zugleich } \left(\frac{du}{dy}\right) = 0 \text{ gesetzt wird.}$$

Ob die Werthe von x und y, welche sich aus diesen beiden Gleichungen ergeben, u zu einem Größten oder Kleinsten machen, hängt von dem Vorzeichen des Ausdrucks (2.) ab, welcher für hinlänglich kleine Werthe von p das Vorzeichen des ersten Gliedes $\frac{d^2u}{dx^2}$ hat. Folglich können jene Werthe von x und y den Werth von u zu einem $\begin{Bmatrix}\text{Größten}\\ \text{Kleinsten}\end{Bmatrix}$ machen, wenn $\frac{d^2u}{dx^2}$ $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ ist. Ferner darf $\frac{d^2u}{dx^2} + 2p\frac{d^2u}{dxdy} + p^2\frac{d^2u}{dy^2}$ für keinen Werth von p sein Zeichen ändern, damit dieser Ausdruck auch für beliebige Werthe von p dasjenige Zeichen behalte, was er für hinlänglich kleine Werthe von p hat, nämlich das Vorzeichen von $\frac{d^2u}{dx^2}$. Nun kann aber der Ausdruck $A + 2Bx + Cx^2$ sein Zeichen nur dann niemals ändern, wenn er für keinen reellen Werth von x Null werden kann, d. h. wenn $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}$ imaginär ist. Dieß findet nur Statt, wenn A und C einerlei Vorzeichen haben, und zugleich $AC > B^2$ ist. Dann ist $AC - B^2$ eine positive Zahl, was durch $AC - B^2 > 0$ angedeutet werde. Es muß daher durch die aus $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$ und $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ für x und y hergeleiteten Werthe

$\frac{d^2u}{dx^2}\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$, und $\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^2u}{dy^2}-\left\{\frac{d^2u}{dxdy}\right\}^2 > 0$ werden, wenn der Werth von u ein $\begin{Bmatrix}\text{Größtes}\\ \text{Kleinstes}\end{Bmatrix}$ sein soll.

Beispiele. 1) Für $u = y^3 - 3axy + x^3$ ist $\left(\frac{du}{dx}\right) = 3x^2 - 3ay$, $\left(\frac{du}{dy}\right) = 3y^2 - 3ax$, $\frac{d^2u}{dx^2} = 6x$, $\frac{d^2u}{dxdy} = -3a$, $\frac{d^2u}{dy^2} = 6y$. Die Gleichung $\left(\frac{du}{dx}\right) = 3x^2 - 3ay = 0$ giebt $x^2 = ay$, und $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ giebt $y^2 = ax$. Hieraus folgt $x = y = a$, der Werth von $\frac{d^2u}{dx^2} = 6a = \frac{d^2u}{dy^2}$. Weil nun $\frac{d^2u}{dx^2}$ positiv ist, und $\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 = 27a^2$, also größer ist, als Null: so ist der Werth von u für $x = y = a$ ein Kleinstes.

Die Gleichungen $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$ und $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ werden auch befriedigt, wenn $x = y = 0$. Dann ist aber $\frac{d^2u}{dx^2} = 0 = \frac{d^2u}{dy^2}$, also $\frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 = -9a^2$, also keine positive Zahl. Folglich ist für $x = y = 0$ der Werth von u weder ein Größtes, noch ein Kleinstes.

2) Für $u = xy - x^2y - xy^2$ ist $\left(\frac{du}{dx}\right) = y - 2yx - y^2 = y(1 - 2x - y)$, $\left(\frac{du}{dy}\right) = x - x^2 - 2xy = x(1 - 2y - x)$. Ferner $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = -2y$, $\frac{d^2u}{dy^2} = -2x$, $\frac{d^2u}{dxdy} = 1 - 2x - 2y$. Aus $\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ folgt $x = y = \frac{1}{3}$, und $x = y = 0$. Der erste Werth giebt $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0$. Ferner $\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2}{3}$. Folglich macht $x = y = \frac{1}{3}$ den Werth von u zu einem Größten. Für $x = y = 0$ findet dagegen weder ein Größtes, noch ein Kleinstes Statt, weil $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 = -\frac{1}{9}$ ist.

3) $u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$ wird ein Kleinstes, wenn $x = y = a$. Hierdurch ist die Aufgabe aufgelöst: dasjenige rechtwinklige Parallelepipedon anzugeben, dessen Inhalt $= a^3$, und dessen Oberfläche ein Kleinstes sei.

4) $u = nxy + \frac{2a^3}{x} + \frac{2a^3}{y}$ wird ein Kleinstes, wenn $x = y = a\sqrt[3]{\frac{2}{n}}$ $\frac{2a}{\sqrt[3]{4n}}$. Hiermit ist die Aufgabe aufgelöst: Mit einem Parallelepipedon **ABCDEF** (Fig. 6.) ist ein dreiseitiges Prisma **DEFGH**, wie ein Dach mit einem Gebäude, verbunden. Für einen gegebenen Inhalt dieses Körpers die kleinste Oberfläche zu finden, wenn **GK = FK = KE** ist, und die untere Grundfläche nicht mitgerechnet wird. — Es sei nämlich $AB = x$, $BC = y$, $BE = z$, so findet man den Inhalt $a^3 = xy(z + \frac{1}{4}x)$, folglich $z = \frac{a^3 - \frac{1}{4}x^2y}{xy}$, und die Oberfläche, wenn $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ durch n bezeichnet wird, $u = nxy + \frac{2a^3}{x} + \frac{2a^3}{y}$. Man findet mittelst des Werthes von x und y, daß sich x zu z beinahe wie 5 zu 1 verhält.

4. Von den Berührungen.

43. Eine krumme Linie wird von einer geraden in einem Punkte berührt, wenn durch diesen Punkt keine andere gerade Linie so gezogen werden kann, daß sie in beliebiger Nähe jenes Punktes zwischen der krummen und jener geraden Linie liegt.

Die gerade Linie $y - y_1 = f^1(x_1)(x - x_1)$ berührt in dem Punkte $x_1 y_1$ die krumme Linie $y = f(x)$.

Denn könnte eine andere gerade Linie $y - y_1 = a(x - x_1)$ durch den Punkt $x_1 y_1$ so gezogen werden, daß sie in beliebiger Nähe dieses Punktes zwischen der krummen Linie und der ersten Geraden läge: so müßte für $x = x_1 + h$ der Unterschied zwischen den Ordinaten der krummen und der ersten geraden Linie größer sein, als der Unterschied zwischen den Ordinaten der zweiten und der ersten Geraden, wie klein man auch h annehmen möchte, also beständig

$$f(x_1 + h) - (y_1 + f^1(x_1)h) > (y_1 + ah) - (y_1 + f(x_1)h).$$

Wird die linke Seite nach dem Taylorschen Satze (12.) entwickelt, und beachtet, daß $y_1 = f(x_1)$, so kommt

$$f^2(x_1)\frac{h^2}{1.2}+f^3(x_1)\frac{h^3}{1.2.3}\dots > (a-f^1(x_1))\,h,$$

oder

$$f^2(x_1)\frac{h}{1.2}+f^3(x_1)\frac{h^2}{1.2.3}\dots > a-f^1(x_1).$$

Nach der Annahme ist a von $f^1(x_1)$ verschieden, also $a-f^1(x_1)$ eine angebbare Größe. Es kann aber $f^2(x_1)\frac{h}{1.2}+f^3(x)\frac{h^2}{1.2.3}\dots$ für hinlänglich kleine Werthe von h kleiner werden, als jede beliebig kleine Größe (15.), also für solche Werthe von h unmöglich größer sein, als die angebbare Größe $a-f(x_1)$. Folglich kann die zweite gerade Linie in beliebiger Nähe des Punktes $x_1 y_1$ nicht zwischen der krummen Linie und der ersten Geraden liegen. Folglich berührt die gerade Linie $y-y_1=f^1(x_1)(x-x_1)$, oder $y-y_1=\frac{dy_1}{dx_1}(x-x_1)$, die krumme Linie $y=f(x)$ in dem Punkte $x_1 y_1$.

Da die Normale auf der Berührenden im Berührungspunkte senkrecht steht, so ist ihre Gleichung $y-y_1=-\frac{1}{f^1(x_1)}(x-x_1)$, oder $y-y_1=-\frac{dx_1}{dy_1}(x-x_1)$.

Setzt man in der Gleichung der Berührenden $y=0$, und zieht den gefundenen Werth $x=x_1-y_1\frac{dx_1}{dy_1}$ von x_1 ab: so erhält man die Subtangente $=y_1\frac{dx_1}{dy_1}$ (6.).

Versteht man unter Tangente das Stück der Berührenden zwischen dem Berührungspunkte und der Abscissenachse: so findet man $(\text{Tangente})^2=(\text{Subtangente})^2+y_1^2$, folglich Tangente $=y_1\sqrt{1+\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)^2}$.

Setzt man in der Gleichung der Normale $y=0$, und zieht x_1 von dem gefundenen Werthe $x=x_1+y\frac{dy_1}{dx_1}$ ab: so findet man die Subnormale $=y_1\frac{dy_1}{dx_1}$ (6.).

Versteht man unter Normale das Stück der auf der Berührenden im Berührungspunkte senkrechten geraden Linie, welches zwischen dem Berührungspunkte und der Abscissenachse liegt: so findet man $(\text{Normale})^2=(\text{Subnormale})^2+y_1^2$, folglich Normale $=y_1\sqrt{1+\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2}$.

Für einen beliebigen Punkt der krummen Linie $y = f(x)$ hat man also die Werthe:

1) Subtangente $= y\frac{dx}{dy}$. 3) Subnormale $= y\frac{dy}{dx}$.

2) Tangente $= y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$. 4) Normale $= y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

44. Beispiele: 1) Für die Parabel $y^2 = 2px$ ist $y = \sqrt{2px}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{2px}}{p}$. Folglich die Subtangente $= y\frac{dx}{dy} = \sqrt{2px} \cdot \frac{\sqrt{2px}}{p} = 2x$, wie bekannt. Ferner die Subnormale $= y\frac{dy}{dx} = \sqrt{2px} \cdot \frac{p}{\sqrt{2px}} = p$.

Man findet ferner die Tangente $= \sqrt{2px + 4x^2}$, die Normale $= \sqrt{p^2 + y^2} = \sqrt{p^2 + 2px}$.

2) Für die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$ $\frac{dx}{dy} = -\frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{bx}$. Folglich die Subtangente $= y_1\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 - x^2}{x}$. Dieser Ausdruck ist von der kleinen Achse unabhängig. Man beschreibe daher mit der halben großen Achse einen Kreis um den Mittelpunkt der Ellipse. Zu solchen Punkten dieses Kreises und der Ellipse, welche auf einerlei Ordinate liegen, gehört dieselbe Subtangente. Folglich ist die Berührende an einen gegebenen Punkt der Ellipse leicht zu ziehen. Man findet ferner die Subnormale $= y\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2}$, die Tangente $= \frac{y}{b^2x}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}$, die Normale $= \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}$.

3) Für die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ folgt eben so $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{a\sqrt{x^2 - a^2}}{bx}$. Folglich die Subtangente $= \frac{x^2 - a^2}{x}$, die Subnormale $= \frac{b^2x}{a^2}$, die Tangente $= \frac{y}{b^2x}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}$, die Normale $= \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}$.

4)

4) In der logarithmischen Linie sind die Abscissen die Logarithmen der Ordinaten, also $x = \overset{A}{\mathrm{Log}}\, y$, oder $y = A^x = e^{x \log A}$. Da $\frac{1}{\log A}$ der Modulus m ist, so hat man $y = e^{\frac{x}{m}}$ als Gleichung der logarithmischen Linie. Nun ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{m} e^{\frac{x}{m}}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{m}{e^{\frac{x}{m}}}$, folglich die Subtangente $= y \frac{dx}{dy} = e^{\frac{x}{m}} \cdot \frac{m}{e^{\frac{x}{m}}} = m$, also immer dem Modulus gleich.

5) Die Cycloide oder Radlinie wird von einem Punkte der Peripherie eines Kreises beschrieben, welcher auf einer geraden Linie fortrollt, ohne zu gleiten.

Fig. 7. Ist PNQ eine Lage des auf AX rollenden Kreises, der Durchmesser $PQ = 2r$, N der Punkt, welcher die Cycloide beschreibt, uud A der Punkt auf AX, in welchem N zuletzt die AX berührte: so nehme man AX, AY als Coordinatenachsen, und bezeichne durch v die Länge eines Bogens, welcher in einem Kreise vom Halbmesser 1 den zugehörigen Winkel am Mittelpunkte misset. Dann ist $AP = \text{Bogen } NP = rv$; $NC = DP = OP - OD$, und $AC = AP - CP = AP - ND$. Daraus folgt 1) $y = r - r \cos v$; 2) $x = rv - r \sin v$. Aus 1) folgt $v = \text{arc} \cos \frac{r - y}{r}$ folglich $v = \text{arc} \sin \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{r}$. Werden diese Werthe in 2) eingesetzt, so erhält man

$$x = r \,\text{arc} \cos \frac{r - y}{r} - r \sin \left(\text{arc} \sin = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{r}\right),$$

oder $$x = r \,\text{arc} \cos \frac{r - y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

Nun ist $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ry - y^2}}$, folglich die Subtangente $= y \frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{\sqrt{2ry - y^2}}$, und die Subnormale $= y \frac{dy}{dx} = \sqrt{2ry - y^2}$. Die Subnormale ist also immer dem Abstande des die Cycloide beschreibenden Punktes vom senkrechten Durchmesser des rollenden Kreises gleich, also ND, oder CP. Folglich ist NP die Normale und QN die Berührende im Punkte N. Man nehme also $AF = r$, ziehe FR mit AX parallel, nehme auf FR den Punkt O so, daß $NO = r$ sei, ziehe OP senkrecht auf AX, mache $OQ = OP$, und ziehe NP, NQ: so ist NP die Normale und NQ die Berührende im Punkte N.

45. Bezeichnet man durch y, x, die Coordinaten einer krummen Linie $u = f(x, y) = 0$, und durch η, ξ, die Coordinaten der Berührenden: so ist deren Gleichung $\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x)$, und $\frac{dy}{dx}$ wird aus der Differentialgleichung der krummen Linie

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy = 0$$

gefunden. Hierdurch wird die Gleichung der **Berührenden** auf die Form

$$\left(\frac{du}{dx}\right)(\xi - x) + \left(\frac{du}{dy}\right)(\eta - y) = 0$$

gebracht. Eben so findet man die Gleichung der Normale

$$\left(\frac{du}{dx}\right)(\eta - y) - \left(\frac{du}{dy}\right)(\xi - x) = 0.$$

Durch Vergleichung beider Gleichungen mit $\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy = 0$ erhält man den Satz: Vertauscht man in der Differentialgleichung einer krummen Linie dx mit $(\xi - x)$, und dy mit $(\eta - y)$: so erhält man die Gleichung der **Berührenden**. Und vertauscht man dx mit $(\eta - y)$, und dy mit $-(\xi - x)$: so erhält man die Gleichung der **Normale**.

Beispiele. 1) Die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ giebt $xdx + ydy = 0$, folglich ist $x(\xi - x) + y(\eta - y) = 0$, oder $x\xi + y\eta = r^2$ die Gleichung der **Berührenden**; und $x(\eta - y) - y(\xi - x) = 0$, oder $x\eta - y\xi = 0$ die Gleichung der **Normale**.

2) Die Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ giebt $\frac{x}{a^2} dx + \frac{y}{b^2} dy = 0$, folglich $\frac{x}{a^2}(\xi - x) + \frac{y}{b^2}(\eta - y) = 0$, oder $\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = 1$ als Gleichung der Berührenden.

3) Eben so findet man für beliebige Punkte der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Gleichung der Berührenden $\frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2} = 1$.

46. Um die **Asymptoten** einer krummen Linie zu finden, suche man die Lage, welche die Berührende annimmt, wenn der Berührungspunkt unendlich weit fortrückt. Für die Hyperbel z. B. ist die Gleichung der Berührenden $\frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2} = 1$

(45, 3.), oder wenn für $\frac{y}{b}$ sein Werth $\pm\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=\pm\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$ gesetzt wird,

$$\frac{x\xi}{a^2}\pm\frac{\eta}{b}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}=1.$$

Multiplicirt man mit $\frac{a}{x}$ so findet man $\frac{\xi}{a}\pm\frac{\eta}{b}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{a}{x}$. Wird nun x größer, als jede beliebig große Zahl, so nähern sich diese beiden geraden Linien ihrer Gränze

$$\frac{\xi}{a}\pm\frac{\eta}{b}=0,$$

welches die Gleichungen der beiden Asymptoten der Hyperbel sind.

47. Eine krumme Linie ist in der Nähe eines Punktes $\left\{\begin{matrix}\text{hohl}\\\text{erhaben}\end{matrix}\right\}$ gegen die Abscissenachse, wenn die Ordinaten der krummen Linie zu beiden Seiten des Punktes $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{größer}\end{matrix}\right\}$ sind, als die Ordinaten der an diesen Punkt gezogenen Berührenden. Ist $y=f(x)$ die krumme Linie, so ist in der Nähe des Punktes $x_1\, y_1$

$$f(x_1+h)=f(x_1)+f^1(x_1)h+f^2(x_1)\frac{h^2}{1.2}+f^3(x_1)\frac{h^3}{1.2.3}\cdots$$

$$f(x_1-h)=f(x_1)-f^1(x_1)h+f^2(x_1)\frac{h^2}{1.2}-f^3(x_1)\frac{h^3}{1.2.3}\cdots$$

Aus der Gleichung der Berührenden (43.) $y-y_1=f^1(x_1)(x-x_1)$ findet man für $x=x_1+h$ die Ordinate $y'=y_1+f^1(x_1)h=f(x_1)+f^1(x_1)h$, und für $x=x_1-h$ die Ordinate $y''=f(x_1)-f^1(x_1)h$.

Folglich ist $\quad f(x_1+h)-y'=f^2(x_1)\frac{h^2}{1.2}+f^3(x_1)\frac{h^3}{1.2.3}\cdots$

und $\quad f(x_1-h)-y''=f^2(x_1)\frac{h^2}{1.2}-f^3(x_1)\frac{h^3}{1.2.3}\cdots$

Liegt der Punkt $x_1\, y_1$ auf der positiven Seite der Ordinaten, so ist die krumme Linie in der Nähe desselben $\left\{\begin{matrix}\text{erhaben}\\\text{hohl}\end{matrix}\right\}$ gegen die Abscissenachse, wenn beide Unterschiede für beliebig kleine Werthe von h $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind. Wenn aber $f^2(x_1)$ nicht Null ist, hängt für solche Werthe von h das Vorzeichen beider Ausdrücke von dem ersten

Gliede ab (14.). Daher ist die krumme Linie $\left\{\begin{matrix}\text{erhaben}\\ \text{hohl}\end{matrix}\right\}$ gegen die Abscissenachse, wenn $f^2(x_1)$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist. Liegt der Punkt aber auf der negativen Seite der Ordinaten: so ist die krumme Linie $\left\{\begin{matrix}\text{erhaben}\\ \text{hohl}\end{matrix}\right\}$, wenn beide Unterschiede $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ sind, also wenn $f^2(x_1)$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist.

Die krumme Linie ist also in der Nähe eines Punktes $x_1\ y_1$ gegen die Abscissenachse $\left\{\begin{matrix}\text{erhaben}\\ \text{hohl}\end{matrix}\right\}$ wenn $f^2(x_1)$ nicht Null ist, und mit $f(x)$ $\left\{\begin{matrix}\text{einerlei}\\ \text{nicht einerlei}\end{matrix}\right\}$ Vorzeichen hat.

48. Wenn $f^2(x_1) = 0$ ist, so ist $f(x_1 + h) - y_1 = + f^3(x_1)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$ und $f(x_1 - h) - y'' = - f^3(x_1)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$ Es sind daher in der Nähe des Punktes $x_1\ y_1$ auf der einen Seite die Ordinaten der krummen Linie, auf der andern die Ordinaten der Berührenden größer, also die krumme Linie auf der einen Seite erhaben, auf der andern hohl. Daher ist dieser Punkt ein **Wendungspunkt** der krummen Linie. Folglich sind die Wurzeln der Gleichung $f^2(x) = 0$, wenn sie nicht zugleich $f^3(x)$ zu Null machen, die Abscissen von Wendungspunkten. Ein Werth, der auf $f^3(x)$ zu Null macht, gehört nur dann einem Wendungspunkte an, wenn auch $f^4(x)$, aber nicht $f^5(x)$ durch denselben zu Null wird, überhaupt, wenn die erste nicht verschwindende Ableitung von **ungerader** Ordnung ist.

$y = x + (x - a)^3$ und $y = x - (x - a)^3$ haben Wendungspunkte in $x = a$.

49. Wenn zwei krumme Linien durch denselben Punkt gehen, und für diesen Punkt die n ersten Ableitungen der Ordinate der einen den n ersten Ableitungen der Ordinate der andern der Reihe nach, die erste der ersten, die zweite der zweiten, gleich sind: so kann keine andere krumme Linie in der Nähe jenes Punktes zwischen ihnen liegen, sie müßte denn dieselben Bedingungen erfüllen.

Wenn $y = F(x)$, $y = f(x)$, die beiden krummen Linien sind: so ist

$$F(x_1) = f(x_1),\ F^1(x) = f^1(x_1),\ F^2(x_1) = f^2(x_1), \ldots\ldots F^n(x_1) = f^n(x_1).$$

Nun ist für $x = x_1 + h$

$$F(x_1 + h) = F(x_1) + F^1(x_1)h \ldots + F^n(x_1)\frac{h^n}{1.2..n} + F^{n+1}(x_1)\frac{h^{n+1}}{1.2.3..(n+1)} \ldots$$

$$f(x_1 + h) = f(x_1) + f^1(x_1)h \ldots + f^n(x_1)\frac{h^n}{1.2..n} + f^{n+1}(x_1)\frac{h^{n+1}}{1.2.3..(n+1} \ldots$$

und der Unterschied beider Ordinaten, wenn $F(x_1+h)$ die größere ist,

$$F(x_1+h)-f(x_1+h)=\left\{F^{n+1}(x_1)-f^{n+1}(x_1)\right\}\frac{h^{n+1}}{1.2..(n+1)}+Ph^{n+2}\ldots$$

Sollte nun eine andere krumme Linie $y=\varphi(x)$, welche durch den gemeinschaftlichen Punkt der beiden ersten geht, in der Nähe dieses Punktes zwischen ihnen liegen können: so müßte

$$F(x_1+h)-f(x_1+h)>\varphi(x_1+h)-f(x_1+h),$$

oder $\left\{F^{n+1}(x_1)-f^{n+1}(x_1)\right\}\frac{h^{n+1}}{1.2..(n+1)}+Ph^{n+2}..>(\varphi^1(x_1)-f^1(x_1))h+\ldots$ sein, wie klein man auch h annehmen möchte.

Also müßte auch stets

$$\left\{F^{n+1}(x_1)-f^{n+1}(x_1)\right\}\frac{h^n}{1.2\ldots(n+1)}+Ph^{n+1}\ldots$$
$$>\varphi^1(x_1)-f^1(x_1)+(\varphi^2x_1-f^2(x_1))\frac{h}{1.2}\ldots$$

sein. Wenn aber $\varphi^1(x_1)-f^1(x_1)$ nicht Null ist, so ist es eine angebbare Größe. Die linke Seite der Ungleichung kann für hinlänglich kleine Werthe von h kleiner werden, als jede beliebig kleine Größe (15.), kann also für solche Werthe von h unmöglich größer sein, als die angebbare Größe. Wenn aber $\varphi^1(x_1)-f^1(x_1)=0$, dagegen $\varphi^2(x_1)-f^2(x_1)$ nicht Null ist, so dividire man durch h. Dann kann die linke Seite für hinlänglich kleine Werthe von h unmöglich größer sein, als die angebbare Größe $\varphi^2(x_1)-f^2(x_1)$. So kann man weiter schließen, und die Richtigkeit der Behauptung nachweisen.

Zusatz. 1. Die beiden krummen Linien $y=F(x)$ und $y=f(x)$ durchschneiden einander in dem Punkte $x_1\,y_1$, wenn n eine gerade Zahl ist. Denn alsdann ist $n+1$ eine ungerade Zahl, folglich für $x=x_1+h$ der Unterschied der Ordinaten

$$F(x_1+h)-f(x_1+h)=\left\{F^{n+1}(x_1)-f^{n+1}(x_1)\right\}\frac{h^{n+1}}{1.2..(n+1)}+Ph^{n+2}\ldots$$

und für $x=x_1-h$

$$F(x_1-h)-f(x_1-h)=-\left\{F^{n+1}(x_1)-f^{n+1}(x_1)\right\}\frac{h^{n+1}}{1.2..(n+1)}+Ph^{n+1}\ldots$$

Folglich ist auf der einen Seite des Punktes $x_1\,y_1$, der beiden gemein ist, die Ordinate der einen krummen Linie, auf der andern Seite die Ordinate der andern krummen Linie die größere. Folglich durchschneiden die krummen Linien einander.

2. Die beiden krummen Linien durchschneiden einander in dem gemeinschaftlichen Punkte nicht, wenn n eine ungerade Zahl ist. Denn alsdann ist $n+1$ gerade, also hat der Unterschied der Ordinaten für $x_1 + h$ und $x_1 - h$ einerlei Zeichen, folglich ist auf beiden Seiten entweder die Ordinate der einen oder der andern krummen Linie die größere.

50. Von den Linien $F(x)$ und $f(x)$ sagt man, sie haben eine Berührung der nten Ordnung in einem Punkte, wenn dessen Abscisse die Ordinaten beider Linien, und die n ersten Ableitungen derselben, der Reihe nach einander gleich macht.

Eine gerade Linie $y = ax + b$ hat mit einer krummen $f(x)$ eine Berührung der ersten Ordnung, wenn $ax + b = f(x)$, und $\frac{dy}{dx} = a = f^1(x)$ ist. Da $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ für jeden Punkt der geraden Linie, $f^2(x)$ aber nur für diejenigen Punkte von $f(x)$ Null wird, deren Abscissen Wurzeln der Gleichung $f^2(x) = 0$ sind: so hat eine gerade Linie mit einer krummen eine Berührung der zweiten Ordnung nur in den Wendungspunkten der krummen Linie (48.).

Soll ein Kreis mit einer krummen Linie $f(x)$ eine Berührung der ersten Ordnung haben, so muß seine Ordinate y die Bedingungen $y = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f^1(x)$ erfüllen. Aus der Gleichung des Kreises $(y - b)^2 + (x - a)^2 = r^2$ folgt aber $(y - b)\frac{dy}{dx} + (x - a) = 0$. Die Größen a, b, r, von welcher Lage und Größe des Kreises abhängt, müssen folglich die beiden Gleichungen

$$(f(x) - b)^2 + (x - a)^2 = r^2 \text{ und } (f(x) - b)f^1(x) + (x - a) = 0$$

befriedigen, und sind nicht mehr völlig willkürlich.

Aus der zweiten Gleichung folgt $b - f(x) = -\frac{1}{f^1(x)}(a - x)$, d. h. die Mittelpunkte der unzählig vielen Kreise, welche in einem gegebenen Punkte mit einer krummen Linie eine Berührung der ersten Ordnung haben, liegen alle auf der diesem Punkte zugehörigen Normale. Zieht man an jenen Punkt eine Berührende, so liegen diese Kreise in der Nähe des Berührungspunktes entweder zwischen der krummen Linie und der Berührenden, und sind weniger gekrümmt, als die krumme Linie; oder sie werden von der krummen Linie in der Nähe jenes Punktes umschlossen, und sind mehr gekrümmt, als die krumme Linie. Ein Kreis bildet den Uebergang von der einen Gruppe zur andern, und hat mit der krummen Linie eine solche Berührung, daß zwischen ihm und der krummen Linie kein anderer berührender Kreis liegen kann. Dieser Kreis hat mit der krummen Linie einerlei Krümmung in dem Berührungspunkte, und heißt der **Krümmungskreis**, sein Halbmesser heißt der Krümmungshalbmesser. Offenbar hat er im Allgemeinen mit der krummen Linie eine Berührung der **zweiten** Ordnung.

51. Damit ein Kreis mit einer krummen Linie $f(x)$ eine Berührung der **zweiten** Ordnung in dem Punkte x, y, habe, muß die Ordinate des Kreises y die Bedingungen $y = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f^1(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2} = f^2(x)$ erfüllen.

Es müssen also statt der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}&(y-b)^2+(x-a)^2=r^2\\&(y-b)\frac{dy}{dx}+(x-a)=0\\&(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0\end{aligned}\right\}1.\ \text{die Gleichungen}\ \left.\begin{aligned}&(f(x)-b)^2+(x-a)^2=r^2\\&(f(x)-b)f^1(x)+x-a=0\\&(f(x)-b)f^2(x)+(f^1(x))^2+1=0\end{aligned}\right\}2.$$

genommen werden, um mittelst derselben a, b, r, zu bestimmen. Aus den beiden letzten der Gleichungen 2. folgt

$$f(x)-b=-\frac{1+(f^1(x))^2}{f^2(x)},\ \text{und}\ x-a=f^1(x)\frac{1+(f^1(x))^2}{f^2(x_1)}.$$

Werden diese Werthe in die erste der Gleichungen 2. eingesetzt, so kommt

$$\left\{\frac{1+(f^1(x))^2}{f^2(x)}\right\}^2+(f^1(x))^2\left\{\frac{1+(f^1(x))^2}{f^2(x)}\right\}^2=\frac{\left\{1+(f^1(x))^2\right\}^3}{\left\{f^2(x)\right\}^2}=r^2.$$

Folglich ist $r=\pm\frac{\left\{1+(f^1(x))^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{f^2(x)}$, also der Krümmungshalbmesser bekannt, folglich der Krümmungskreis, da sein Mittelpunkt auf der Normale liegt, der Größe und Lage nach gegeben. Man nimmt in dem Ausdrucke von r gewöhnlich das mit dem Vorzeichen von $f^2(x)$ übereinstimmende Zeichen, damit der Ausdruck positiv werde.

Bezeichnet man den Krümmungshalbmesser durch R und ist $F(x, y) = 0$ die Gleichung irgend einer krummen Linie, so ist für beliebige Punkte derselben

$$R=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

52. **Beispiele.** 1) Für die Parabel $y=\sqrt{2px}$ ist $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{\sqrt{2px}}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ $=-\frac{p^2}{(\sqrt{2px})^3}$. Folglich ist $R=\frac{\left\{2px+p^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{p^2}$. Nun ist aber (44, 1.) die

Normale $N = (2px + p^2)^{\frac{1}{2}}$, folglich $R = \frac{N^3}{p^2}$, woraus $p^2 : N^2 = N : R$, also eine leichte Construction sich ergiebt. — Aus $y^2 = 2px$ folgt auch $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$, und $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{p^2}{y^3}$. Folglich $R = \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$. Für $y = 0$ ist $R = p$.

Zur Bestimmung der Coordinaten des Mittelpunkts dienen die Gleichungen

$$x - a = \frac{dy}{dx} \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad y - b = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (51.)$$

folglich für die Parabel $a = 3x + p$, $b = -\frac{2xy}{p}$. Weil nun der Mittelpunkt auf der Normalen liegt, so kann derselbe mittelst seiner Abscisse leicht gefunden werden.

Die Gleichungen $a = 3x + p$ und $b = -\frac{2xy}{p}$ gelten nur für solche Werthe von x und y, welche Punkten der Parabel $y^2 = 2px$ zukommen, also diese Gleichung befriedigen. Eliminirt man daher aus diesen drei Gleichungen x und y, so erhält man eine Gleichung zwischen a und b, nämlich $b^3 = \frac{8}{27}(a - p)^3$. Da b und a die veränderlichen Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind, so giebt diese Gleichung den geometrischen Ort desselben. Eine solche krumme Linie nennt man Evolute oder Abgewickelte.

2) Für die Cycloide hat man (44, 5.) $x = r \arccos \frac{r - y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$. Folglich ist $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ry - y^2}}$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{y}$. Ferner $\frac{d^2y}{ax^2} =$ $\frac{d\left\{\frac{\sqrt{2ry - y^2}}{y}\right\}}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{r}{y^2}$. Hieraus folgt $R = 2\sqrt{2ry}$. Aber die Normale $N = \sqrt{2ry}$ (44, 5.), folglich $R = 2N$, also leicht zu construiren.

3) Die Gleichung der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ giebt $a^2y\frac{dy}{dx} + b^2x = 0$, folglich $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$. Ferner $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2y} + \frac{b^2x}{a^2y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2y} - \frac{b^4x^2}{a^4y^3}$ $=$

$$= -\frac{b^2\{b^2x^2 + a^2y^2\}}{a^4y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$ Daher ist

$$R = \frac{\{a^4y^2 + b^4x^2\}^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} = \frac{\{a^4 - (a^2 - b^2)x^2\}^{\frac{3}{2}}}{a^4b}.$$

Für jeden Punkt der Ellipse ist die Normale $N = \frac{1}{a^2}(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{1}{2}}$ (44, 2.), folglich $(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}} = a^6N^3$, folglich

$$R = \frac{N^3}{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2}.$$

Aber $\frac{b^2}{a}$ ist die Ordinate im Brennpunkte der Ellipse, oder der halbe Parameter p, also auch hier der Krümmungshalbmesser zu construiren mittelst der Proportion $p^2 : N^2 = N : R$.

4) Für die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ erhält man dasselbe Resultat.

53. Wenn auf einem elliptischen Meridiane der Erde zwei Bogen gemessen worden sind, so läßt sich daraus die Abplattung berechnen.

Die Lage eines Ortes auf dem Meridiane wird durch die **Breite** gegeben, d. h. durch den Winkel, den die Normale mit der großen Achse der Ellipse bildet. Ist v dieser Winkel, so ist $\tang v = -\frac{dx}{dy} = \frac{a^2y}{b^2x}$, folglich $\tang v^2 = \frac{a^4y^2}{b^4x^2} = \frac{a^4 - a^2x^2}{b^2x^2}$.

Durch leichte Rechnung ergiebt sich $x^2 = \frac{a^4\cos v^2}{a^2\cos v^2 + b^2\sin v^2}$, und $a^4 - a^2x^2 + b^2x^2 = \frac{a^4b^2}{a^2\cos v^2 + b^2\sin v^2}$, folglich $R = \frac{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b} = \frac{a^2b^2}{(a^2\cos v^2 + b^2\sin v^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Es seien nun zwei Breiten v und w, die zugehörigen Krümmungshalbmesser R und R′, und $\frac{b}{a} = m$: so ist

$$R = \frac{m^2a}{(\cos v^2 + m^2\sin v^2)^{\frac{3}{2}}},\quad R' = \frac{m^2a}{(\cos w^2 + m^2\sin w^2)^{\frac{3}{2}}};$$

folglich $\frac{R}{R'} = \left\{\frac{\cos w^2 + m^2\sin w^2}{\cos v^2 + m^2\sin v^2}\right\}^{\frac{3}{2}}$, also $\left(\frac{R}{R'}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\cos w^2 + m^2\sin w^2}{\cos v^2 + m^2\sin v^2}$.

Hieraus folgt $m^2 = \frac{\left(\frac{R}{R'}\right)^{\frac{2}{3}}\cos w^2 - \cos v^2}{\sin v^2 - \left(\frac{R}{R'}\right)^{\frac{2}{3}}\sin w^2}$.

Es kann also, wenn das Verhältniß der Krümmungshalbmesser bekannt ist, das Verhältniß der Achsen $m = \frac{b}{a}$, folglich auch $1 - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{a}$, oder die Abplattung gefunden werden. Für kleine Aenderungen der Breite ist aber hinreichend genau $R:R' = \Delta S : \Delta S'$, wo ΔS, $\Delta S'$, gemessene elliptische Bogen sind, deren Mitten die Breiten v und w haben, und für welche die Breitenunterschiede der Endpunkte gleich sind, z. B. 1^0 betragen. Es kann also aus zwei Gradmessungen die Gestalt der Erde bestimmt werden.

5. Die Bestimmung der Flächenräume.

54. **Fig. 8.** Der Flächenraum, **ABCD**, welcher von der Abscissenachse, dem Bogen einer krummen Linie, und den Ordinaten der Endpunkte des Bogens begränzt wird, ist als Function der Abscisse des einen Endpunktes gegeben. Man soll die Gleichung der begränzenden krummen Linie finden.

Nahe bei **B** läßt sich immer ein solcher Punkt **E** annehmen, daß von **B** nach **E** die Ordinaten fortwährend wachsen, oder abnehmen. Sie mögen wachsen. Dann ist $OF = x + h$, $FE = y + k$. Ist nun $ACDB = S = f(x)$, so ist $ACFE = f(x+h)$, und $BDFE = \Delta S = f(x+h) - f(x)$. Für beliebig kleine Werthe von x ist aber immer $BD.DF$, d. i. $yh < \Delta S$, und $EF.DF$, d. i. $(y+k)h > \Delta S$. Nun ist (12.)

$$\Delta S = \frac{dS}{dx}h + \frac{d^2S}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}\ldots \text{ und } y + k = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}\ldots,$$

folglich, da $yh < \Delta S < (y+k)h$ ist

$$yh < \frac{dS}{dx}h + \frac{d^2S}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}\ldots < yh + \frac{dy}{dx}h^2\ldots,$$

oder

$$y < \frac{dS}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2}\frac{h}{1.2}\ldots < y + \frac{dy}{dx}h\ldots$$

Da aber $\frac{dy}{dx}h + \ldots$ kleiner werden kann, als jede beliebig kleine Größe (15.), und dasselbe von $\frac{d^2S}{dx^2}\frac{h}{1.2}\ldots$ gilt, so muß

$$y = \frac{dS}{dx}$$

sein. Dasselbe Resultat erhält man, wenn die Ordinaten von B nach C fortwährend abnehmen.

Beispiele. 1) $S = \frac{ax^2}{2} + bx$, $\frac{dS}{dx} = ax + b$. Folglich $y = ax + b$ die Gleichung der begränzenden Linie, welche in diesem Falle eine gerade ist.

2) $S = \frac{x^3}{a}$, $\frac{dS}{dx} = \frac{3x^2}{a}$. Folglich $\frac{3x^2}{a} = y$, oder $x^2 = \frac{1}{3}ay$, die Gleichung einer Parabel, deren Parameter $\frac{1}{3}a$, und für welche die Berührende im Scheitel als Abscissenachse genommen ist.

3) $S = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a}$; $\frac{dS}{dx} = \sqrt{a^2 - x^2} = y$. Folglich ist die begränzende krumme Linie ein Kreis.

4) Eben so findet man für $S = \frac{b}{a}\left\{\frac{a^2}{2}\arccos\frac{a-x}{a} - \frac{a-x}{2}\sqrt{2ax - x^2}\right\}$ als begränzende Linie die Ellipse; für

$$S = \frac{b}{a}\left\{\frac{x+a}{2}\sqrt{2ax + x^2} - \frac{a^2}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2ax + x^2} + x}{\sqrt{2ax + x^2} - x}\right)\right\}$$ die Hyperbel.

Ist umgekehrt $y = f(x)$ gegeben, so würde man den Flächenraum, der von der krummen Linie begränzt wird, als Function der Abscisse angeben können, wenn man im Stande wäre, diejenige Function zu finden, von welcher $f(x)$ die Ableitung ist.

55. Fig. 9. Ein Flächenraum wird begränzt von den Schenkeln eines Winkels AMB, und einer krummen Linie AB. Man kennt den Flächenraum als Function des den Winkel BMN messenden Kreisbogens vom Halbmesser 1, indem MN eine gerade Linie von gegebener Lage bedeutet, während der Winkel BMN veränderlich ist. Man soll eine Gleichung finden, welche die Zuglinie $MB = r$ als Function von v ausdrückt.

In der Nähe von B läßt sich auf der krummen Linie ein solcher Punkt C annehmen, daß die Zuglinien zwischen B und C fortwährend wachsen, oder abnehmen. Sie mögen wachsen. Mit MB, MC, beschreibe um M die Kreisbogen Bb, Cc. Dann ist, wie klein auch BMC sein möge, $MbB < MBC < McC$. Ist nun $AMB = s = f(v)$, so ist $AMC = f(v + h)$, und $ABC = f(v + h) - f(v)$. Ferner ist $MbB = \frac{1}{2}r^2h$, $McC = \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2h$. Aber $r + \Delta r = r + \frac{dr}{dv}h\ldots$ und $(r + \Delta r)^2 = r^2 + 2r\frac{dr}{dv}h\ldots$

Folglich ist

$$\tfrac{1}{2}r^2h < \frac{ds}{dv}h + \frac{d^2s}{dv^2}\frac{h^2}{1.2}\ldots < \tfrac{1}{2}r^2h + r\frac{dr}{dv}h^2\ldots$$

oder

$$\tfrac{1}{2}r^2 < \frac{ds}{dv} + \frac{d^2s}{dv^2}\frac{h}{1.2}\ldots < \tfrac{1}{2}r^2 + r\frac{dr}{dv}h\ldots$$

Dieß ist für beliebig kleine Werthe von h nur möglich, wenn

$$\tfrac{1}{2}r^2 = \frac{ds}{dv}.$$

Dasselbe Resultat erhält man, wenn die Zuglinien von B nach C abnehmen.

Beispiele. 1) Es sei $s = \frac{1}{4}a^2 \sin 2v$; $\frac{ds}{dv} = \frac{1}{2}a^2 \cos 2v = \frac{1}{2}r^2$. Folglich ist $r^2 = a^2 \cos 2v$. Die gefundene krumme Linie ist die **Lemniscate**, der Scheitelort eines Dreiecks, für welches das Product der beiden veränderlichen Seiten dem Quadrate der halben Grundlinie gleich ist. Aus $s = \frac{1}{4}a^2 \sin 2v = \frac{1}{2}(a \sin v)(a \cos v)$ ergiebt sich eine leichte Verwandlung des Flächenraums in ein rechtwinkliges Dreieck.

2) $s = \frac{p^2}{16}(\operatorname{tang}\frac{1}{2}v + \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^3)$ führt auf $r = \frac{p}{4\cos\frac{1}{2}v}$, oder die Parabel.

6. Die Gesetze geradliniger Bewegung.

56. Ein Körper bewegt sich in gerader Linie. Der zurückgelegte Weg x ist als Function der Zeit t gegeben. Man soll die Geschwindigkeit des Körpers für jeden beliebigen Augenblick finden.

Fig. 10. Wenn der Körper von A bis C gelangt ist, so wird sich in der Nähe von C ein solcher Punkt D angeben lassen, daß von C nach D die Geschwindigkeit fortwährend wächst, oder abnimmt. Es finde das Erstere Statt. Nun ist $AC = x = f(t)$; $AD = f(t+h)$, $CD = f(t+h) - f(t)$. Bewegte sich der Körper mit der Geschwindigkeit v, die er in C hat, gleichförmig weiter, so würde er in der Zeit h einen Raum $CE < CD$ zurücklegen. Hätte er aber in C schon die Geschwindigkeit $v + \Delta v$, mit welcher er in D ankommt: so würde er bei gleichförmiger Bewegung in der Zeit h einen Raum $CF > CD$ zurücklegen. Es ist also, wie klein man auch h annehmen möge,

$$CE < CD < CF,$$

$$vh < f(t+h) - f(t) < (v + \Delta v)h,$$

folglich $v < \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{h}{1.2}\ldots < v + \frac{dv}{dt}h\ldots$

Auf dieselbe Weise findet man $v > \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{h}{1.2}\ldots > v + \frac{dv}{dt}h\ldots$, wenn die Geschwindigkeit von C nach D fortwährend abnimmt. In beiden Fällen kann aber diese Ungleichung für beliebig kleine Werthe von h nur Statt finden, wenn

$$v = \frac{dx}{dt}$$

ist. Die Geschwindigkeit also ist die Ableitung der Function, welche den zurückgelegten Weg durch die Zeit ausdrückt.

57. Für irgend eine geradlinige Bewegung kennt man die Geschwindigkeit als Function der verflossenen Zeit. Man soll die von der Zeit abhängige veränderliche Kraft finden, welche beschleunigend, oder verzögernd auf den Körper wirkt.

Ist φ diese Kraft, und $v = F(t)$, $v + \Delta v = F(t + h)$; dann ist $F(t + h) - F(t)$ die Aenderung der Geschwindigkeit, welche von der veränderlichen Kraft herrührt. Wäre die Kraft während der Zeit h dieselbe geblieben, wie im Anfange von h, so wäre die Geschwindigkeit verändert um $\varphi . h$. Hätte die Kraft aber während der Zeit h mit derjenigen Stärke gewirkt, die sie am Ende der Zeit h erlangt hat, so wäre die Aenderung der Geschwindigkeit $(\varphi + \Delta\varphi)h$ gewesen. Nun kann h so klein genommen werden, daß zwischen t und $t + h$ die Kraft φ fortwährend wächst oder abnimmt. Sie möge wachsen. Dann ist

$$\varphi h < \Delta v < (\varphi + \Delta\varphi)h,$$

$$\varphi h < \frac{dv}{dt}h + \frac{d^2v}{dt^2}\frac{h^2}{1.2}\ldots < \varphi h + \frac{d\varphi}{dt}h^2\ldots$$

folglich
$$\varphi < \frac{dv}{dt} + \frac{d^2v}{dt^2}\frac{h}{1.2}\ldots < \varphi + \frac{d\varphi}{dt}h\ldots$$

Nimmt die Kraft dagegen von t bis $t + h$ fortwährend ab, so ist

$$\varphi > \frac{dv}{dt} + \frac{d^2v}{dt^2}\frac{h}{1.2}\ldots > \varphi + \frac{d\varphi}{dt}h\ldots$$

Beide Ungleichungen können für beliebig kleine Werthe von h nur dann Statt finden, wenn $\varphi = \frac{dv}{dt}$ ist. Nun war aber $v = \frac{dx}{dt}$ (56.), folglich $\varphi = \frac{d^2x}{dt^2}$.

58. **Beispiele.** 1) Es sei $x = gt^2$. Man findet $\frac{dx}{dt} = 2gt = v$, und $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 2g$.

2) $x = ct \pm gt^2$; $\frac{dx}{dt} = v = c \pm 2gt$; $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \pm 2g$.

$$3)\quad x = \frac{k^2}{2g} \log \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{2gt}{k}} + e^{-\frac{2gt}{k}}\right); \quad \frac{dx}{dt} = v = k\,\frac{e^{\frac{2gt}{k}} - e^{-\frac{2gt}{k}}}{e^{\frac{2gt}{k}} + e^{-\frac{2gt}{k}}};$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 2g\left\{1 - \left\{\frac{e^{\frac{2gt}{k}} - e^{-\frac{2gt}{k}}}{e^{\frac{2gt}{k}} + e^{-\frac{2gt}{k}}}\right\}^2\right\} = 2g - 2g\,\frac{v^2}{k^2} = \varphi.$$

Nun ist aber für Körper, welche im widerstehenden Mittel fallen, $\varphi = 2g - 2g\,\frac{v^2}{k^2}$, wenn man den Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional setzt, und durch k eine Größe bezeichnet, deren Werth von der Beschaffenheit des fallenden Körpers und des widerstehenden Mittels abhängt. Folglich ist x der Fallraum und v die Geschwindigkeit für solche Körper.

Auch hier könnte man für Kräfte, die nach beliebigen Gesetzen wirken, die Gesetze der von ihnen erzeugten Bewegungen entdecken, wenn man in jedem Falle diejenige Function anzugeben im Stande wäre, von welcher eine gegebene die Ableitung ist. Eine solche Function, welche eine gegebene zur Ableitung hat, nennt man die ursprüngliche, oder Stammfunction, oder auch das Integral der gegebenen Function. Daher heißt der Inbegriff der Methoden, von jeder gegebenen und als Ableitung betrachteten Function das Integral zu finden, Integralrechnung.

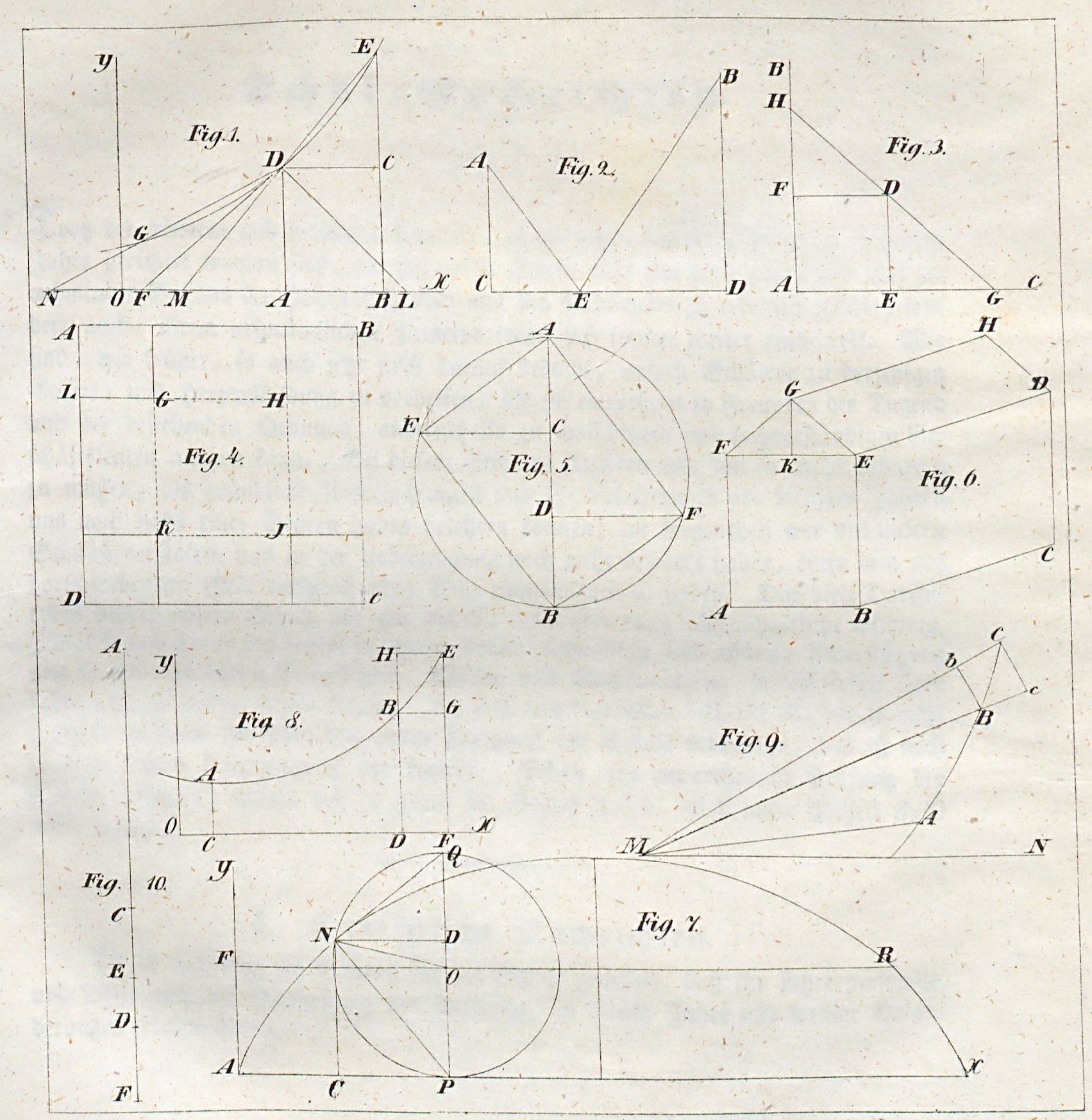
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.

Schul-Nachrichten.

Trotz der directen und indirecten Angriffe, welche gegen das Realschulwesen in diesem Jahre gerichtet worden sind, hat sich unsere Schule nicht nur eines dauernden und zunehmenden Beifalls der Hohen Behörden und des Publicums zu erfreuen gehabt, sondern auch, ihrem ursprünglichen Principe treu, sich immer weiter entwickelt. Wir sind, wie früher, so auch jetzt noch darauf bedacht, unsern Schülern zu derjenigen Geistes- und Herzensbildung zu verhelfen, die sie einestheils zu Freunden der Tugend und der bestehenden Ordnung, anderntheils zu umsichtigen und sachverständigen Geschäftsleuten machen kann. Bei diesem Principe glaubten wir um so mehr beharren zu müssen, als gründliche Untersuchungen und die Erfahrungen von wenigen Jahren uns noch nicht eines Bessern haben belehren können; im Gegentheil wir mit unsern Schwesteranstalten uns in der Ueberzeugung noch mehr bestärkt haben, einen dem uns vorschwebenden Ziele entsprechenden Weg eingeschlagen zu haben. Das viele Dareinreden bessert unsere Schule um gar nichts; wohl aber kann wissenschaftliche Bildung, Einigkeit und Treue der Lehrer in ihrem Amte, freundliche und thätige Unterstützung von Seiten der hohen Vorgesetzten, Aeltern und Sachkundigen, Wachsamkeit über Lehre und Disciplin dahin führen. An Besserungsversuchen beiderlei Art hat es nicht gefehlt; welchem wir aber den guten Fortgang der Schule verdanken, das ist nach unserer beßten Ueberzeugung der Letztere. Schon eine unpartheiische Prüfung der Schulnachrichten, welche wir zu geben im Begriff stehen, wird unser Urtheil theilweise erhärten.

I. Statistische Nachrichten.

Es ist unstreitig ein Gewinn für die Schule gewesen, daß ihr Lehrerpersonale, und somit auch die Vertheilung der Lectionen, in diesem Jahre nur wenige Veränderungen erlitten haben.

Es arbeiten an ihr gegenwärtig

a) sechs fixirte Lehrer:

1. Der Inspector,
2. Herr College Dippe, Lehrer der Mathematik,
3. " " Hankel, Lehrer der Naturwissenschaften,
4. " " Krause, Sprach- und Religionslehrer,
5. " " Böttger, Geschichts- und Sprachlehrer,
6. " Bach, Lehrer der englischen Sprache; — und

b) zehn denselben beigeordnete, nicht fixirte Lehrer:

7. Herr Liegel }
8. " Spieß } Zeichenlehrer,
9. " Dieter }
10. " Heyer }
11. " Dr. Nauck } Lehrer der Mathematik,
12. " Dr. Knauth }
13. " Bieling } Sprachlehrer,
14. " Lange, Lehrer verschiedener Unterrichtsgegenstände,
15. " Lindner, Lehrer der deutschen Sprache und Kalligraphie,
16. " Rost, Lehrer der Naturgeschichte.

Die Zahl der Letztern ist insofern bedeutend gestiegen, als Ostern v. J. eine neue Klasse eingerichtet werden mußte, für welche bis jetzt noch kein Lehrer fest angestellt werden konnte. Nach geschehener Aufnahme stellte sich nämlich damals die Frequenz für die erste Vorbereitungsklasse so hoch, daß sie kaum das Klassenlokal zu fassen vermochte. Dieser Umstand, noch mehr aber die aus Ueberfüllung einer Klasse unvermeidlich entspringende Unmöglichkeit, alle Individuen einer solchen zureichend zu beschäftigen, zu beaufsichtigen und zu leiten, veranlaßten das Hochwürdige Directorium, eine Parallelklasse für diese Klassenstufe einzurichten, die von da ab **IV A.** und **IV B.** genannt wurden und einerlei Pensen mit gleicher Stundenzahl erhielten. Nur im Religions- und Zeichenunterrichte konnten beide Klassen ohne Gefahr combinirt werden. Die zweite Vorbereitungsklasse (sonst **IV B.**) erhielt seitdem den Namen **V.** Klasse.

Vor Ostern 1838 besuchten die Realschule	150	Schüler,
aufgenommen wurden seitdem	79	"
von diesen	229	"
sind im Laufe des Jahres abgegangen	67	"
so daß der gegenwärtige Bestand	162	Schüler beträgt,

von

von denen die Hälfte auf der Pensionsanstalt des Waisenhauses wohnt, die andere Hälfte aber in der Stadt, entweder bei ihren Aeltern und Angehörigen, oder in Familien, zu denen die Schule das Vertrauen hegen darf, daß sie in der Erziehung ihrer Pfleglinge mit ihr Hand in Hand gehen.

Unter den 67 Schülern, welche die Schule verlassen haben, sind vor allen sieben Abiturienten rühmlichst zu erwähnen. Das Maturitätsexamen wurde zweimal in diesem Schuljahre, den 19. März und den 14. September, unter dem Vorsitze des Königl. Commissarius, Herrn Regierungs- und Schulrath Dr. Weiß aus Merseburg, an der Schule abgehalten. Zu dem erstern, welches zugleich das Erste seit Reorganisation der Schule war, hatten sich 6 Primaner, zum letztern nur einer gemeldet. Es gereicht uns zu nicht geringer Freude, sie hier namhaft machen zu dürfen:

1. Otto Theodor Seyffert aus Halle, $18\frac{1}{2}$ Jahr alt, 1 Jahr auf der Realschule, eben so lange in Prima, erhielt die erste Censur „Vorzüglich bestanden", wird Maschinenbauer.
2. Friedrich Wilhelm Franz Stegemann aus Nelben, $16\frac{3}{4}$ Jahr alt, 3 Jahr auf der Realschule, 1 Jahr in Prima, erhielt desgleichen die erste Censur „Vorzüglich bestanden", und wird Cammeralia studiren.
3. Carl Friedrich August Föhrigen aus Branderode, $19\frac{1}{2}$ Jahr alt, 3 Jahr auf der Realschule, 1 Jahr in Prima, erhielt die zweite Censur „Gut bestanden", widmet sich dem Forstfache.
4. Carl Heinrich Möritz aus Sietzsch, $19\frac{1}{4}$ Jahr alt, 3 Jahr auf der Realschule, ein Jahr in Prima, erhielt die Censur „Gut bestanden", geht zum Postfach über.
5. Matthäus Marcusi aus Halle, $16\frac{3}{4}$ Jahr alt, 3 Jahr auf der Realschule, 1 Jahr in Prima, erhielt die Censur „Gut bestanden", wird Kaufmann.
6. Carl Heinrich Rudolph Camps aus Berlin, $17\frac{1}{2}$ Jahr alt, 3 Jahr auf der Realschule, 1 Jahr in Prima, erhielt die Censur „Gut bestanden", wird Militair.
7. August Theodor Leist aus Dölln, 21 Jahr alt, 3 Jahr auf der Realschule, $1\frac{1}{2}$ Jahr in Prima, erwarb sich das Prädicat „Gut bestanden", hatte sich bei seinem Abgange noch für keinen Beruf entschieden.

Die dritte Censur, „Genügend bestanden", hat bis jetzt noch Niemand erhalten. Wir konnten diese Jünglinge mit der Ueberzeugung entlassen, sie für ihren spätern Beruf wohl vorbereitet zu haben, und legten ihnen bei ihrem Abgange den Wunsch ans Herz, auf dem guten Grunde ihrer Kenntnisse fortzubauen, Allseitigkeit in ihren ferneren Studien sich zu bewahren, später die Praxis mit der empfangenen Theorie zu beleuchten und zu durchdringen, und sich auf dem Wege der Tugend zu erhalten, dem sie unter Leitung der Schule treu geblieben waren.

Von den übrigen 60 Abgegangenen sind 20 zur Oeconomie, 9 zum Kaufmannsstande, 5 zum Baufache, 3 zum Buchhandel, 3 in ein Büreau, 4 zum Militair, 2 zum Bergfach, 3 zum Gartenbau, 3 zu bürgerlichen Gewerken und 3 zu andern Schulen übergegangen. Ein Schüler starb in seiner Heimath, und 4 Schüler wurden wegen Unfleißes und wegen roher Sitten — beides mit unserer Schulordnung unvereinbar — von der Schule entfernt.

Es muß in die Augen fallen, wie die Zahl derer, welche den Schulcursus nicht vollendeten, unverhältnißmäßig groß ist gegen die geringe Zahl derer, die dem Cursus der 1. Klasse noch beigewohnt und sich der gesetzlichen Prüfung unterzogen haben. Denn von den seit Reorganisation der Schule inscribirten 317 Schülern sind 148 aus den mittlern und untern Klassen wieder abgegangen. Ein so frühzeitiger Abgang kann nicht ohne nachtheilige Folgen bleiben, weder für diejenigen, welche unreif und kaum zur Hälfte vorgebildet in ein höheres bürgerliches Geschäfft übertreten, noch für die Schule, weil nach der größern Zahl jener nur zu oft von dem Unkundigen der falsche Maaßstab an die Leistungen der ganzen Anstalt angelegt wird.

Wir können deßhalb gegen Aeltern, die ihre Söhne unserm Unterrichte anvertrauen wollen, den Wunsch nicht dringend genug aussprechen, ihren Kindern Zeit zu gönnen, sich eine vollendete und abgeschlossene Schulbildung anzueignen. Der Vorwand, oder, wir wollen es hie und da auch zugeben, der Grund eines zu hohen Alters, um noch als Lehrling in ein Geschäfft einzutreten, wird hoffentlich mit der Zeit immer mehr wegfallen, je lieber jeder gebildete Lehrherr auch einen Lehrling, der mehr als Elementarbildung hat, in sein Geschäfft nehmen wird, und je früher Aeltern sich künftig entschließen werden, ihre Kinder einer Realschule anzuvertrauen. Denn leider sind schon viele Schüler alt geworden, bevor sie sich in eine Realschule aufnehmen lassen.

Auf solche Individuen ist aber der Lehrplan gar nicht berechnet, sondern nur auf ein Alter zwischen 12 und 17 Jahren. „Wir können unsern Kindern für ihr Leben nichts Besseres mitgeben, als tüchtige Schulkenntnisse!“ sagen uns Aeltern sehr häufig; — ein Urtheil, das wir mit vollster Ueberzeugung unterschreiben, wenn damit keine Halbwisserei gemeint ist. Möchten deßhalb die Schüler, die unsere Schule gegenwärtig noch zählt, länger uns bleiben, als die Meisten von denen, die kaum gekommen waren, als sie auch schon wieder abgingen, und die bei diesem wichtigen Schritte nicht ihre Kenntnisse, sondern nur ihr Alter zu Rathe zogen.

Der gegenwärtige Bestand der Schüler vertheilt sich folgendermaßen auf die sechs Schulklassen: **I.** Klasse 6 Schüler, **II.** Klasse 17 Schüler, **III.** Klasse 38 Schüler, IV A. Klasse 29 Schüler, IV B. Klasse 29 Schüler, V. Klasse 43 Schüler. Summa 162 Schüler. Von ihnen haben sich bestimmt:

a)	für die Landwirthschaft	33	Schüler,
b)	„ den Kaufmannsstand	30	„
c)	„ das Baufach	8	„
d)	„ „ Forstfach	9	„
e)	„ „ Postfach	6	„
f)	„ „ Steuerfach	4	„
g)	„ „ Militair	11	„
h)	„ den Seedienst	2	„
i)	„ die Pharmacie	3	„
k)	„ das Hüttenwesen	16	„
l)	„ den Maschinenbau	6	„
m)	„ die Müllerei	4	„
n)	„ „ Brauerei und Brennerei	3	„
o)	„ den Gartenbau	2	„
p)	„ das Zimmer- und Maurergewerk	9	„
q)	„ den Buchhandel	1	„
r)	„ die Malerkunst	1	„
s)	„ den Pelzhandel	1	„
	Unentschlossen in der Wahl ihres Berufes sind noch	13	„
	Summa	162	Schüler.

Ueber den Geist, der unsere Schüler für intellectuelle und moralische Bildung belebt, lassen wir am kürzesten folgende Uebersicht sprechen:

A. Hinsichts des Fleißes verdienen die Censur:

Klasse.	Allg. Lob.	Viel Lob.	Lob u. Tadel.	Viel Tadel.	Allg. Tadel.
I.	1	4	1	»	»
II.	1	7	6	3	»
III.	2	7	20	8	1
IV A.	1	8	9	8	3
IV B.	1	10	12	4	2
V.	3	12	17	10	1

B. Hinsichts des sittlichen Betragens verdienen die Censur:

Klasse.	Allg. Zufriedenheit.	Viel Lob.	Lob u. Tadel.	Viel Tadel.
I.	2	3	1	»
II.	4	8	3	2
III.	1	10	17	10
IV A.	5	10	5	9
IV B.	3	12	9	5
V.	7	9	18	9

C. Der Schulbesuch:

Klasse.	Unausgesetzt bei	Regelmäßig bei	Unregelmäßig bei
I.	5	»	1
II.	13	3	1
III.	24	14	»
IV A.	18	11	»
IV B.	19	9	1
V.	27	16	»

II. Lehrmittel.

Indem darauf gesehen worden ist, daß die wichtigsten Institute der Schule so viel als möglich vervollständigt wurden, um jedem Unterrichtszweige die nöthige Unterstützung durch zweckmäßige und zureichende Lehrmittel angedeihen zu lassen, vertheilten sich zwar die disponibeln Mittel bedeutend, sind aber immer noch groß genug geblieben, um jedes Cabinet mit etwas Namhaften zu bereichern.

a) Der physicalisch-chemische Apparat erhielt einen Zuwachs durch ein Alkoholometer, Barometer und durch viele Glasinstrumente, angefertigt von Michault.

Zu diesen gehören Puls- und Wasserhammer, Heronsbälle, Differentialthermometer, Heber, Thermometer, Apparat zur Bereitung des Aethers, Sicherheits-, Calcinir-, Reductions- und Filtrir-Röhren. Für letztere Instrumente ist im Laboratorio ein besonderer, neuer Schrank aufgestellt.

b) Unter den naturhistorischen Sammlungen ist die Conchylien- und Mineraliensammlung unverändert geblieben. Dagegen hat sich die Waarensammlung um einige werthvolle Handelsartikel, und die ornithologische Sammlung von 69 bis auf 81 Species vermehrt. Neu angelegt ist eine Sammlung von Hüttenproducten, die wir für den Unterricht in der Technologie eben so nothwendig als ersprießlich erachten. Ein mit vielem Fleiße angelegtes Herbarium der flora halensis verdankt die Schule dem abgegangenen Realschüler Neuhahn aus Spremberg. Uebrigens lieferten die auch im vergangenen Sommer unter Leitung des Herrn Collegen Hankel und Herrn Rost an schulfreien Nachmittagen angestellten Excursionen der Schüler, und der der Schule zugehörige botanische Garten Stoff genug, den Unterricht in der Botanik auf Anschauung zu gründen.

c) Der historisch-geographische Apparat ist mit mehreren Specialkarten, mit Hoffmann's Wandkarte der alten Welt, Löwenberg's Geschichtsatlas und einer Parthie kleiner Handkarten der alten Welt, die den Schülern für den Privatfleiß in die Hände gegeben werden, bereichert. Andere Bedürfnisse haben sich für diesen Unterrichtszweig nicht herausgestellt, da der früher beschaffte Vorrath noch vollzählig war.

d) Für den Schreibunterricht sind von Heinrigs gestochenen Vorschriften so viele neue Hefte angeschafft worden, als für nöthig erachtet wurde.

e) Bei der reichhaltigen Sammlung von Vorlegeblättern für den Zeichenunterricht, welche die Schule schon besitzt, war es nur nöthig, die colorirten Blumen- und Fruchtstücke von Redouté, eine größere Parthie Pferdestudien von Adam, manche Fortsetzungen schon vorhandener Hefte, namentlich der bei Winkelmann erschienenen, manche Doubletten, z. B. für Planzeichner von Exner, und eine noch größere Auswahl für Anfänger, wohin Brückner's, Böhme's, Korff's &c. Sammlungen gehören, anzuschaffen. Ingleichen ist für die Aufbewahrung der Zeichenbretter im Nebenzimmer des Zeichensaales eine Vorkehrung getroffen, um sie vor jeder Beschädigung sicher zu stellen.

f) Die Lehrerbibliothek hat sich von 420 bis auf 477 Bände vermehrt, und zählt unter dem Zuwachse, den sie erhalten, Schiebe's, Götzinger's, Hoffmeister's, Becker's, Kannegießer's und Rosenkranz Schriften über deutsche Sprache und Literatur; die Werke von **Molière**, **Rousseau**, **Corneille** und **Racine**, die beiden Supplemente zum **Dictionnaire de l'Académie française** und mehrere grammatische Werke über französische Sprache; die Fortsetzungen von Crelle's und Poggendorf's Zeitschriften; Hertel's, Wolff's, Möbius und Lacroix mathematische Werke; Pouillet's, Radicke's und Plattner's physicalische Schriften; Böttiger's, Schmitthenner's und Stenzel's Geschichte; Roon's Geographie 2c.

g) Die Schülerbibliothek ist besonders mit deutschen und französischen Klassikern vermehrt. Sie besteht gegenwärtig aus 8 Bänden über deutschen Styl, 78 in französischer Sprache, 10 mathematischen Inhalts, 12 über Naturgeschichte, 14 über Physik, 4 über Technologie, 42 über Geschichte, 27 über Geographie, 272 schöngeistigen und gemeinnützlichen Inhalts, in Summa 467 Bände.

Wie früher, so ist auch dieses Jahr die Erweiterung des Lehrapparates theils aus dem der Schule zu Gebote stehenden Fonds, theils aus den schätzenswerthen Beiträgen verehrter Schulfreunde hervorgegangen. Herr Buchhändler Anton, der die Schule schon im verwichenen Jahre so reichlich und freundlich mit seinen Verlagsartikeln bedachte, übersandte derselben dieses Jahr seinen Verlagscatalog zur beliebigen Auswahl und verehrte ihr 13 Bände, unter welchen wir nur Leo's Geschichte des Mittelalters, Rosenkranz Werke über Poesie, Anton's Geschichte der Landwirthschaft und das vom Herrn Verleger selbst verfaßte, mit vielem Fleiß und großer Sachkenntniß geschriebene Werk über Conchylien nennen wollen. Deßgleichen schenkte Herr College Böttger 23 Bändchen von Scott's Romanen und Schmidt's Gedichte, Herr College Dippe drei Werke mathematischen und naturhistorischen Inhalts, Herr College Krause Parcival von Eschenbach und Vorübungen zum Nachdenken, Herr **Dr.** Knauth Junghaus Geschichte und Pölitz deutsche Schreibart; Herr Apotheker Hornemann Richter's und Düffer's medicinische Schriften, der Abiturient Otto Seyffert Zimmermann's Befreiungskämpfe der Deutschen. Aus der Ferne bedachte der Herr Rentamtmann Preusker, der im Königreich Sachsen um das Gewerbschulwesen hochverdiente Mann, unsere Schule mit dem Geschenke seiner Bausteine, 3 Bände, und des Herderolith. Der Herr Kaufmann F. F. Finger vergrößerte unsere Waarensammlung mit einigen noch fehlenden Handelsartikeln, und die ornithologische Sammlung mit 6 ausgestopften Vögeln, worunter 5 Falkenspecies. Beiträge derselben Art lieferten die Realschüler von Schönberg, Rüprecht und Lüdicke. Herr Inspector **Dr.** Liebmann gab der Schule durch das Geschenk einer Parthie verschiedener Holzarten Veranlassung, eine Holzsammlung anzulegen. Endlich hat auch der Herr Hüttenmeister Schmid auf der Kreuzhütte bei Leimbach die Güte gehabt, der Schule eine höchst instructive Reihe von Producten aus der unter seiner Aufsicht stehenden Kupferhütte zu übersenden.

Somit ist des Guten für die Schule von ihren Freunden so viel geschehen, daß es uns schwer fällt, würdig dafür zu danken. Dies mit Worten zu thun, mögte wenig gethan sein; eher mögte es im Sinne der gütigen Geber gehandelt sein, ihre Geschenke zur Bildung der uns anvertrauten Jugend fleißig und zweckmäßig zu benutzen. Das ist denn bisher auch schon geschehen und wird ferner geschehen. Realschulen können der Mittel nicht genug besitzen, um das Auge ihrer Schüler zu üben, in Beobachtungen zu leiten und zu schärfen, dem Verstande durch Anschauung zu Hilfe zu kommen und immer neue Nahrung zu geben, Theorie und Handthierung einander näher zu bringen und oft mit einander zu verschmelzen, und den Geist auf spätere Studien vorzubereiten, die mehr oder weniger mit dem Schulunterrichte in Verbindung stehen. Mögte der Schule das Wohlwollen, von dem sie bereits so erfreuliche und so viele Beweise erhalten hat, auch ferner behalten bleiben!

III. Schulverfassung.

In der Oeconomie der Schule und des Unterrichtes sind in diesem Jahre wenige wesentliche Veränderungen als nöthig erachtet worden, indem erst eine längere Erfahrung gewonnene Ueberzeugungen umzustoßen vermag. Indessen glauben wir nicht unrecht gethan zu haben, wenn wir folgende neue Einrichtungen trafen:

a) Von der Ansicht ausgehend, daß zwischen den kalligraphischen Uebungen, wie sie gewöhnlich angestellt werden, und dem Schnellschreiben der Schüler, ein nothwendiger, vermittelnder Uebergang fehle, haben wir in jeder der 4 untern Klassen, wo noch kalligraphischer Unterricht ertheilt wird, von der für diese Uebungen bestimmten Zeit eine Stunde wöchentlich für Schnellschönschreiben bestimmt, um den Schülern die Mittel zu lehren, wie sie auch beim Schnellschreiben den langsam ausgeführten Ductus, den sie sich angeeignet haben, beibehalten können, und um ihnen in deren Anwendung die nöthige Uebung zu geben.

b) Es stellte sich bei den meisten unserer Schüler ein sichtlicher Mangel an Bekanntschaft mit der Mythologie der Griechen, Römer und nordischen Völker heraus, welchem abzuhelfen beiläufige und den Unterricht unangenehm unterbrechende Erläuterungen nicht zureichten. Es ist deßhalb vorläufig in der dritten Realklasse eine Stunde wöchentlich für Mythologie bestimmt.

Der Unterricht in der lateinischen Sprache, obwohl den Anforderungen des Reglements bisher genügend, mögte insofern einer Erweiterung an wöchentlicher Stundenzahl entgegensehen, als das verehrliche Rescript Eines Hohen Ministeriums vom 18. September 1838 eine größere Zahl Schüler zur Theilnahme an diesem Unterrichte bestimmen mögte, indem Hochdasselbe ausdrücklich erklärt, daß das Entlassungszeugniß der Realschulen nur denjenigen den Eintritt in das Post=, Forst= und Baufach und in die Bureaux der Provinzialbehörden zusichert, die auch im Lateinischen den im Reglement vom 8. März 1832 angegebenen Forderungen bei der Entlassungsprüfung entsprechen.

Die Gegenstände des Unterrichtes waren in dem Schuljahre von Ostern 1838 bis dahin 1839 folgende:

I. Realklasse. Ordinarius: Inspector Ziemann.

Religion. Geschichte der christlichen Kirche von ihrem Ursprunge bis zum Anfange des 19. Jahrhunderts; nach Niemeyer's Lehrbuch für die obern Religionsklassen. Zwei Stunden. College Krause.

Mathematik.

a) Geometrie. Wiederholung der Stereometrie. Aufgaben aus der practischen Geometrie, mit Hilfe der ebenen Trigonometrie gelöst. Sphärische Trigonometrie, mit Anwendungen auf Aufgaben aus der Stereometrie und practischen Geometrie. Anfangsgründe der höheren Geometrie. Viel Beispiele und Aufgaben. Tellkampf's Vorschule der Mathematik §. 266—343. Alle vierzehn Tage eine schriftliche Arbeit zur Correctur. Drei Stunden. College Dippe.

b) Algebra. Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Reihenentwicklung. Die höhern numerischen Gleichungen. Zahlenlehre, Kettenbrüche, diophantische Aufgaben. Tellkampf's Vorschule §. 148 — 216. Die Anfangsgründe der Differentialrechnung nebst einigen ihrer einfachsten Anwendungen; nach der Abhandlung zum diesjährigen Programm. Dem Privatfleiße der Schüler wurden viel Aufgaben gestellt. Drei Stunden. College Dippe.

c) Mathematisches Repetitorium. Planimetrie und ebene Trigonometrie nebst den in Tellkampf's Vorschule beigefügten Aufgaben. Grund= und Rangoperationen der Arithmetik. Lösung der algebraischen Aufgaben aus M. Hirsch's Sammlung. Zwei Stunden. College Dippe.

Practisches Rechnen. Wiederholung der Alligations=, Zins=, Renten=, Münz= und Wechselrechnung. Einfache und doppelte Buchhaltung. Die Schüler führten dabei die nöthigen Bücher. Zwei Stunden. College Dippe.

Phy=

Physik. Optik, Katoptrik, Dioptrik; Akustik; Lehre von der Wärme; Magnetismus; Elektricität; Abriß der Meteorologie. Nach Brettner's Leitfaden. Zwei Stunden. College Hankel.

Chemie. Wiederholung der Stöchiometrie. Die Metalle, besonders Arsenik. Organische Chemie in technischer Beziehung; nach Köhler's Chemie. Zwei Stunden. Außerdem arbeiteten die Schüler wöchentlich noch zwei Stunden im Laboratorio unter Anleitung des Collegen Hankel.

Geographie. Die Erde im Verhältniß zu den Himmelskörpern. Lehre von der Kartenprojection. Kalenderrechnung. Zwei Stunden. College Dippe.

Geschichte. Neuere und neueste Geschichte der europäischen Staaten, mit besonderer Berücksichtigung der vaterländischen Geschichte. Nach Stüve's Leitfaden. Zwei Stunden. College Böttger.

Deutsche Sprache. Anleitung zu Geschäfftsaufsätzen, vorzüglich im Verkehr mit Behörden und geschlossenen Gesellschaften. Uebungen im freien Styl. Außer den stündlichen Proben alle vierzehn Tage eine Stylarbeit zur Correctur. Eine Stunde. — In der zweiten Stunde hielten die Schüler freie Vorträge über Musterwerke unserer Literatur. In der dritten Stunde wurde nach Schäfer's Grundriß die Geschichte der vaterländischen Literatur von den ältesten bis auf die neuesten Zeiten durchgenommen. College Krause.

Französische Sprache. Uebersetzung der Bruchstücke von acht Autoren aus Büchner's und Herrmann's Handbuch der neuern französischen Sprache, nebst Erlernung der einleitenden Biographien; eine Stunde. Französische Disputirübungen; eine Stunde. Uebersetzung des „Geistersehers“ und des „Neffen als Onkel“ von Schiller ins Französische; eine Stunde. Theorie und Praxis des französischen Briefstyls, im Sommer eine Stunde; dafür im Winter: Ueberblick der französischen Literaturgeschichte. Außerdem Privatlectüre und Wiederholung der Grammatik. Alle vierzehn Tage eine freie Arbeit zur Correctur. Der ganze Unterricht wurde in französischer Sprache ertheilt. Inspector Ziemann.

Englische Sprache. Im Sommerhalbjahr wurde the Vicar of Wakefield übersetzt, eine Stunde; und deutscher Text mit steter Rücksicht auf Grammatik ins Englische übertragen, zwei Stunden. Alle vierzehn Tage eine Arbeit zur Correctur. Der Unterricht wurde in englischer Sprache ertheilt. Lehrer Bach. Im Winter cessirte diese Klasse.

Lateinische Sprache. Uebung in lateinischen Extemporalien mit steter Beziehung auf Grammatik; eine Stunde. In der andern Stunde wurden im Sommer

Bruchstücke aus Ovid und Virgil, im Winter Caes. bell. civile I. lib. gelesen. Alle drei Wochen eine Arbeit. Lehrer Dr. Knauth.

Zeichnen. Die Klasse ist mit der zweiten combinirt. Linear- und Situationszeichnen. Malen in Aquarell. Freies Handzeichnen nach Vorlegeblättern, mathematischen Körpern und Gyps. Vier Stunden. Alle Monat eine Privatzeichnung nach der Natur. Unterricht in der Perspective; eine Stunde. Lehrer Liegel.

II. Klasse. Ordinarius: College Dippe.

Religion. Einleitung in die Bücher des Alten und Neuen Testaments; nach Niemeyer's Lehrbuch. Zwei Stunden. College Krause.

Mathematik.

a) Geometrie. Im Sommer: Ebene Trigonometrie; im Winter: Stereometrie; nach Tellkampf's Vorschule §. 266—314. Alle vierzehn Tage eine Arbeit. Drei Stunden. College Dippe.

b) Arithmetik. Uebungen im Rechnen mit Polynomien, Vereinfachung von Formeln. Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln; Auflösung einfacher und quadratischer Gleichungen. Allgemeine Potenzenrechnung, Logarithmen, Progressionen. Tellkampf's Vorschule §. 71—144. Viel Uebungen in Auflösungen; schriftliche Arbeiten, wie bei a). Drei Stunden. College Dippe.

Practisches Rechnen. Logarithmen. Zusammengesetzte Zinsrechnung; Rabatt-, Zeit-, Alligations-, Münz- und Wechselrechnung. Von Stunde zu Stunde Aufgaben. Nach Unger's Arithmetik. Zwei Stunden. College Dippe.

Physik. Hydrostatik; Aerostatik; Magnetismus; Electricität; Wärme; Akustik; Optik, Katoptrik, Dioptrik. Nach Brettner's Leitfaden. Zwei Stunden. College Hankel.

Chemie. Aus der unorganischen Chemie die Metalloide und die wichtigsten Metalle; verbunden mit Experimenten. Nach Köhler's Leitfaden. Zwei Stunden. College Hankel.

Naturgeschichte. Im Sommer: Botanik nach Linnee's System. Grundzüge des natürlichen Systems. Alle vierzehn Tage an einem schulfreien Nachmittage eine Excursion unter Leitung des Lehrers. Die Schüler legten sich Herbarien an. Im Winter: Mineralogie nach Mohs System. Zwei Stunden. College Hankel.

Geographie. Wiederholung der topischen, physischen und politischen Beschreibung aller fünf Erdtheile im Allgemeinen und im Einzelnen nach der Elementar-Geographie von Reuscher. Hiermit zugleich Waarenkunde verbunden. Jeder Schüler lieferte monatlich eine orographische Karte. Zwei Stunden. Inspector Ziemann.

Geschichte. Mittlere Geschichte, vorzugsweise Geschichte der Deutschen, und neuere Geschichte bis zum Zeitalter Friedrichs des Großen; mit Berücksichtigung der Culturzustände der europäischen Völker. Ausarbeitung des Vortrages nach Stüve's Leitfaden. Zwei Stunden. College Böttger.

Deutsche Sprache. Unterricht und Uebungen in Characterschilderungen, Beschreibungen complicirter Gegenstände, Reden, Monologen, Dialogen. Im Sommer zwei Stunden; im Winter eine Stunde, indem die andere zur Poetik verwendet wurde. Freie Vorträge über beliebige Themata aus dem Gebiete der benannten Stylgattungen; eine Stunde. Außer den stündlichen Uebungen alle vierzehn Tage eine Arbeit zur Correctur. Im Sommer: Lehrer Dr. Keber; im Winter: Lehrer Lange.

Französische Sprache. Es wurden die Proben vom Roman und des geschichtlichen Styls in **Nouveau choix p. Siefert T. II.** größtentheils cursorisch übersetzt und theilweise auswendig gelernt; zwei Stunden. Wiederholung des ganzen etymologischen und des syntactischen Theiles der Grammatik von Herrmann bis zum Pronom in französischer Sprache; Beendigung der ganzen Grammatik auf dieselbe Weise; zwei Stunden, von denen die eine im letzten Vierteljahr noch zu französischen Disputirübungen angewendet wurde. Alle vierzehn Tage eine freie Arbeit über ein gestelltes briefliches oder geschichtliches Thema zur Correctur. Inspector Ziemann.

Englische Sprache. Zwei Stunden wurden zum Uebersetzen in Melford's Lesebuche bis S. 153, die dritte Stunde zur Repetition und Beendigung der Grammatik von Fick, und zu Extemporalien benutzt. Alle vierzehn Tage eine häusliche Arbeit. Beim Unterrichte wurde meist englisch gesprochen. Lehrer Bach.

Lateinische Sprache. Uebungen in Extemporalien; eine Stunde. Uebersetzung und Erklärung **Caes. bell. gall. lib. I — IV**; im Sommer eine, im Winter zwei Stunden. Alle vierzehn Tage eine schriftliche Arbeit zur Correctur. Lehrer Dr. Knauth.

Zeichnen. Diese Klasse ist mit der ersten combinirt; hat aber den Unterricht in der Perspective besonders. Lehrer Liegel.

III. Realklasse. Ordinarius: College Hankel.

Religion. Glaubens- und Sittenlehre; nach Niemeyer's Lehrbuch. Wiederholung der fünf Hauptstücke. Zwei Stunden. College Böttger.

Mathematik.

a) Geometrie. Nach einer Wiederholung der Elementarbegriffe, der Congruenz der Dreiecke und der Lehre von den Vierecken, — der Kreis, die Aehnlichkeit, Proportion und Ausmessung; nach Fischer's Auszug aus der ebenen Geometrie. Die Schüler arbeiteten das Heft zur Correctur aus. Außerdem wurden für den Privatfleiß analoge Aufgaben gegeben. Drei Stunden. Lehrer Heyer.

b) Arithmethik. Die vier Species der Buchstabenrechnung; Proportionen; Primzahlen; Quadratwurzeln; nach Fischer's Auszug aus der Arithmetik. Ausarbeitung eines Heftes. Aufgaben von Stunde zu Stunde. Drei Stunden. Lehrer Heyer.

Practisches Rechnen. Wiederholung der Proportionen. Decimalbrüche; Regeldetri mit directen und indirecten Verhältnissen; Reesische Regel; Vermischungsrechnung. Uebung in vielen Aufgaben. Zwei Stunden. Lehrer Heyer.

Physik. Der mechanische Theil der Physik, mit Ausschluß der Hydrostatik und Aerostatik; durch Experimente erläutert und mittels mathematischer Sätze eingeübt; nach Brettner's Leitfaden. Zwei Stunden. College Hankel.

Naturgeschichte. Zoologie; nach Burmeister's Grundriß und den bildlichen Darstellungen von Goldfuß. Zwei Stunden. College Hankel.

Geographie. Länderbeschreibung der fünf Erdtheile, mit besonderer Berücksichtigung der physischen Verhältnisse, und unseres Vaterlandes. Alle Monat lieferten die Schüler eine hydrographische Skizze. Nach Reuscher's Elementar-Geographie, 2ter Cursus. Zwei Stunden. College Böttger.

Geschichte. Geschichte der Völker des Alterthums bis zum Untergange des abendländischen Kaiserthums, im Zusammenhange und mit Berücksichtigung ihrer Culturverhältnisse; nach Stüve's Leitfaden. Zwei Stunden. College Böttger.

Mythologie der Griechen und Römer und der nordischen Völker; nach Würkert's Lehrbuch. Eine Stunde. College Böttger.

Deutsche Sprache. Stylübungen in Form von Erzählungen, Freundschafts- und Höflichkeitsbriefen; Abhandlungen, Beschreibungen und Schilderungen, auf Grundlage von Dispositionen; Geschäfftsaufsätze aus dem gewöhnlichen bürgerlichen Verkehr; zwei Stunden. Auf- und Zurückgabe der häuslichen Arbeiten, und freie Vorträge aus dem Gebiete der Stylübungen; eine Stunde. College Böttger.

Französische Sprache. Wiederholung der Etymologie und Einübung des Artikels, Substantiv's, Adjectiv's, Numerale's und Pronomen's, nebst Uebersetzung sämmtlicher in Herrmann's Lehrbuch aufgeführten Uebungsstücke; zwei Stunden. Aufgabe und Correctur der häuslichen Arbeiten; eine Stunde. Uebersetzung der ersten vier Bücher des **Charles XII. p. Voltaire**, wovon Bruchstücke auswendig gelernt werden mußten; eine Stunde. College Krause.

Englische Sprache. Die ganze Etymologie, und von der Syntax die Regeln über den Artikel und die Casus, nach Fick's Grammatik. Zwei Stunden. Uebersetzung der grammatischen Beispiele, der beigefügten kleinen Erzählungen, und der ersten vierzehn Seiten aus Melford's Lesebuche. Einzelne Bruchstücke wurden auswendig gelernt. Eine Stunde. Alle vierzehn Tage eine schriftliche Arbeit. Lehrer Bach.

Lateinische Sprache. Uebungen im Uebersetzen nach Gröbel's Anleitung; eine Stunde. Uebersetzung des **Miltiades, Themistocles** und **Epaminondas**; eine Stunde. Im Winter noch eine Stunde Extemporalien. Im Sommer Lehrer **Dr.** Knauth; im Winter Lehrer Bieling.

Kalligraphie. Es wurde lateinische und deutsche Schrift einen Monat um den andern nach Heinrig's Vorlegeblättern geübt; eine Stunde. Uebung im Schnellschönschreiben der deutschen Schriftzüge nach Dictaten; eine Stunde. Am Schlusse jeglichen Monats schrieben die Schüler eine Probeseite in besondere Schreibhefte. Lehrer Lindner.

Zeichnen. Die Schüler wurden theils im freien Handzeichnen, theils im Linear- und Situationszeichnen geübt. Einige malten mit Wasserfarben. Alle Monat eine freie Handzeichnung nach der Natur. Vier Stunden. Lehrer Spieß.

IV. Klasse A. und B. Ordinarius: College Krause.

Religion. Glaubenslehre; zweiter und dritter Artikel. Gnadenmittel; heilige Taufe, Beichte und heiliges Abendmahl. Nach dem Dresdner Catechismus. Wiederholung der fünf Hauptstücke. Beide Klassen combinirt. College Krause.

Planimetrie. Erste Begriffe von Linien, Winkeln, ebenen Figuren. Congruenz der Dreiecke. Vierecke. Pythagoräischer Lehrsatz; nach Fischer's Auszug aus der ebenen Geometrie, 1r — 5r Abschnitt, mit Erweiterungen. Die Schüler arbeiteten ein Heft aus und lieferten dasselbe zur Correctur ein. Vier Stunden. In IV A. und B. Lehrer **Dr.** Nauck.

Naturgeschichte. Im Sommer: Botanik nach Linnee's System. Alle vierzehn Tage an einem schulfreien Nachmittage unter Leitung des Lehrers Excursionen in die nächste Umgegend. Die Schüler mußten sich Herbarien anlegen. Im Winter: Mineralogie. Die Methode des Unterrichtes war in beiden Lectionen mehr propädeutisch als systematisch; nach Burmeister's Grundriß. Zwei Stunden. In IV A. College Hankel; in IV B. Lehrer Rost.

Geographie. Topische Beschreibung der fünf Erdtheile im Allgemeinen, und unseres Vaterlandes im Besondern; nach dem 1sten Cursus von Reuscher's Elementar-

Geographie. Jeden Monat lieferten die Schüler einen Versuch von Kartenzeichnungen. Zwei Stunden. In IV A. Lehrer Dr. Knauth; in IV B. College Krause.

Geschichte. Umrisse der mittlern und neuern Geschichte der europäischen Völker bis zum Anfange des 18. Jahrhunderts, mit Hervorhebung der vaterländischen; nach Stüve's Leitfaden. Die Schüler arbeiteten den Unterricht aus. Zwei Stunden. Im Sommer in IV A. und B. Lehrer Dr. Keber; im Winter in beiden Klassen Lehrer Lange.

Practisches Rechnen. Wiederholung der Brüche, der Reduction und Resolution benannter Zahlen. Die vier Species ungleich benannter Zahlen; Zeitrechnung; Regeldetri, Kettenregel, Proportionsrechnung; nach Scholz Lehrbuch und Aufgaben, 2r und 3r Theil. Zum Kopfrechnen wurden zwei Stunden verwendet, und eben so viel zum Tafelrechnen. Alle vierzehn Tage eine schriftliche Arbeit zur Correctur. In IV A. College Krause; in IV B. Lehrer Heyer.

Deutsche Sprache. Erklärung der wichtigsten Regeln sämmtlicher Redetheile nach Heyse's Leitfaden der deutschen Sprache, mit vielen Uebungen; zwei Stunden. Uebungen in der Rechtschreibung und Zeichensetzung, eine Stunde im Sommer; dafür im Winter Declamiren und freie Vorträge. Anleitung zu schriftlichen Aufsätzen, namentlich zu Entwürfen und Ausführungen von Erzählungen und Briefen, mit Anwendung des Bremer Kinderfreundes, 2r Theil. Eine Stunde. Außer den gelegentlichen Arbeiten lieferten die Schüler alle vierzehn Tage eine schriftliche zur Correctur ein. In IV A. Lehrer Dr. Knauth; in IV B. Lehrer Lindner.

Französische Sprache. Wiederholung des etymologischen Theiles der Grammatik bis zum Verbum. Einübung der unregelmäßigen Verba, der Adverbien und Präpositionen; nach Herrmann's Lehrbuch. Uebersetzung sämmtlicher dahin gehörigen Beispiele. Drei Stunden. Von den Lectures wurde der erste Abschnitt ganz, und vom zweiten 46, resp. 60 Anecdoten übersetzt. Letztere wurden theilweise, die Vocabeln von sämmtlichen Uebungen und Lesestücken auswendig gelernt. Zwei Stunden. Anleitung und Uebung im Uebersetzen aus dem Deutschen ins Französische, verbunden mit Aufgabe und Zurückgabe der Correcturarbeiten; eine Stunde. In IV A. im Sommer Lehrer Dr. Keber; im Winter Lehrer Bieling; in IV B. College Böttger.

Lateinische Sprache. Erlernung und Einübung des etymologischen Theiles, nach Schulz kleiner lateinischer Grammatik; im Sommer zwei Stunden; Repetition im Winter eine Stunde. Uebersetzung deutscher Beispiele nach Gröbel's Anleitung; im Winter eine Stunde; seit Weihnachten zwei Stunden. Lehrer Dr. Knauth.

Kalligraphie. Dieselbe Einrichtung, wie in der dritten Klasse. Indessen wird hier noch viel auf Schreib-Uebungen einzelner Buchstaben gehalten, und wöchentlich nur eine halbe Stunde zum Schnellschönschreiben angewendet. Zwei Stunden. In IV A. und B. Lehrer Lindner.

Zeichnen. Beide Klassen combinirt. Uebungen im freien Handzeichnen, sowohl in Conturen, als in ausgeführten Copien. Alle Monat eine Privatzeichnung, nach der Natur. Vier Stunden. Lehrer Liegel.

V. Klasse. Ordinarius: College Böttger.

Religion. Erstes Hauptstück; erster Artikel; drittes Hauptstück; nach dem Dresdner Katechismus. Wiederholung der biblischen Bücher. Zwei Stunden. Im Sommer Lehrer Lindner; im Winter Lehrer Lange.

Formenlehre. Betrachtung der Formen, welche durch gerade und krumme Linien gebildet werden können, und Anleitung zum Zeichnen geometrischer Figuren, als Vorbereitung auf den mathematischen Unterricht und das Linearzeichnen. Meist nach v. Türk's Formen-Lehre und Wöckel's geometrischem Zeichner. Die Schüler arbeiteten den Unterricht aus. Drei Stunden. Lehrer Dr. Nauck.

Practisches Rechnen. Die vier Species der Brüche in gleichbenannten Zahlen. Resolution und Reduction benannter Zahlen; nach Scholz Rechenbuch und Aufgaben. Alle vierzehn Tage eine Rechenarbeit. Vier Stunden, von denen zwei zum Kopfrechnen, und zwei zum Tafelrechnen benutzt wurden. Lehrer Heyer.

Naturgeschichte. Die Zoologie, propädeutisch behandelt; nach Burmeister's Grundriß. Zwei Stunden. College Hankel.

Geographie. Grundlehren der mathematischen, physischen und politischen Erdbeschreibung, nebst Uebungen in der Auffassung topischer Erdverhältnisse; nach Reuscher's Elementar-Geographie S. 18—61. Alle Monat ein Versuch im Copiren von Landkarten. Zwei Stunden. Lehrer Lindner.

Geschichte. Die wichtigsten Ereignisse der Völker des Alterthums; nach Stüve's Leitfaden S. 1—52. Die Schüler arbeiteten den Unterricht aus. Zwei Stunden. Im Sommer Lehrer Lindner; im Winter Lehrer Bieling.

Deutsche Sprache. Uebungen in der Orthographie und Interpunction; eine Stunde. Erklärung und Uebung der Wörterklassen, excl. des Zeitwortes, in vielen Beispielen; nach Heyse's Leitfaden; zwei Stunden. Styl-, Lese- und Declamationsübungen, nach dem Bremer Lesebuche 2r Theil; eine Stunde. Alle vierzehn

Tage eine Stylarbeit zur Correctur. Im Sommer Lehrer Oxford; im Winter Lehrer Lindner.

Französische Sprache. Der ganze etymologische Theil der Sprachlehre, mit Ausnahme der unregelmäßigen Verba, der Präpositionen und Adverbia, wurde nach Herrmann's Lehrbuch erklärt und eingeübt. Die dazu gegebenen Beispiele wurden übersetzt und die Vocabeln gelernt; vier Stunden. Elementare Anleitung zum Uebersetzen aus dem Deutschen ins Französische; eine Stunde. Alle vierzehn Tage eine Privatarbeit. Lehrer Dr. Knauth.

Lateinische Sprache. Die Schüler dieser Klasse sind mit denen aus IV A. und B. vereinigt.

Kalligraphie. Die Methode ist ganz die bei der dritten Klasse angegebene; jedoch werden hier die Schüler meist zur Uebung der einfachen Buchstabenformen nach Heinrig's Hand angehalten; drei Stunden. Uebungen im Schnellschönschreiben; eine Stunde. Lehrer Lindner.

Zeichnen. Nur freies Handzeichnen. Fast sämmtliche Schüler üben sich im Copiren von Conturen; wenigen hat es erlaubt werden können, kleinere Zeichnungen mit Schatten auszuführen. Vier Stunden. Lehrer Dieter.

IV. Ord-

IV. Ordnung der öffentlichen Prüfung.

A. Vormittags, von 8 bis 12 Uhr.

Gesang und Gebet.

IV A. und B. Glaubenslehre. College Krause.

V. Deutsche Sprachlehre. Lehrer Lindner.

Noah's Taube, von v. Salis-Seewis, der Quintaner Alb. Fridolin Schüler aus Halle.

IV B. Französische Sprache. College Böttger.

Der blinde König, von Uhland, der Quartaner Emil Fr. Ohlssen-Bagge aus Kiel.

III. Englische Sprache. Lehrer Bach.

Max und Dürer, von A. Grün, der Quartaner Robert Korn aus Halle.

IV A. und B. Planimetrie. Lehrer Dr. Nauck.

II. Arithmetik. College Dippe.

Der treue Gefährte, von A. Grün, der Tertianer Deocar Schmidt aus Biesenrode.

IV A. Practisches Rechnen. College Krause.

III. Geographie. College Böttger.

Atys und Adrast, von Fr. Kind, der Tertianer Haubold von Schönberg aus Kreipitzsch.

I. Chemie. College Hankel.

B. Nachmittags, von 2 bis 5 Uhr.

Das Studium der deutschen Literatur ist eine reiche Quelle sittlicher Veredelung, (freie Arbeit) vom Primaner Wilh. Oemler aus Wimmelrode.

I. Neuere Geschichte. College Böttger.

On Shakspeare's Knowledge of Man, (freie Arbeit) vom Primaner Carl Jul. Ferd. Nebelung aus Ellrich.

III. Charles XII. p. Voltaire. College Krause.

II. Practisches Rechnen. College Dippe.

Le Plongeur p. Schiller, vom Secundaner Max Otto Röttger aus Neuhaldensleben.

I. Sphärische Trigonometrie. College Dippe.

II. Physik. College Hankel.

Des Sängers Schwanengesang, Gedicht vom Secundaner Ernst Held aus Halle.

I. Geschichte der christlichen Kirche. College Krause.

Entlassung der Abiturienten.

Der Schluß der Lectionen findet Freitags den 22. d. M., Vormittags um 10 Uhr Statt. Der neue Jahrescursus beginnt den 15. April. Neu aufzunehmende Schüler bitte ich in der letzten Ferienwoche in den Vormittagsstunden zur Prüfung mir zuzuführen zu wollen.

Halle, den 14. März 1839.

Ziemann,
Inspector der höhern Realschule.

Verbesserungen.

Seite 1 Zeile 19 lese man **Veränderlichen** statt **Veründerlichen**.
" 8 " 22 " " $3.2D$ statt $3.2C$.
" 30 " 1 ist nach den Worten **wie vorhin** (36) einzuschalten: z. B.

$$e^{-x}\log x = \log x : \frac{1}{e^{-x}} = \frac{\log x}{e^{x}} = \frac{1}{x e^{x}} = 0, \text{ wenn } x = \infty.$$

Oft findet man die wahren Werthe auch unmittelbar u. s. w.
Seite 32 Zeile 12 lese man **einen** statt **einer**.
" 39 " 4 " " $f^3(x_r)$ statt $f^3(x)$.

1.

Zu

...tlichen Prüfung,

welche

...en Zöglingen

der

... im Waisenhause zu Halle

...4. April 1838,

...2 Uhr und Nachmittags von 2 bis 5 Uhr,

1

auf dem

...r deutschen Schulen

...staltet werden soll,

werden

...hüler und alle Freunde des Schulwesens

...ehrerbietigst eingeladen

vom

...tor Ziemann.

Inhalt:

...erricht in Realschulen. Abhandlung vom Inspector.

...en.

Halle,

...uchdruckerei des Waisenhauses.

1838.